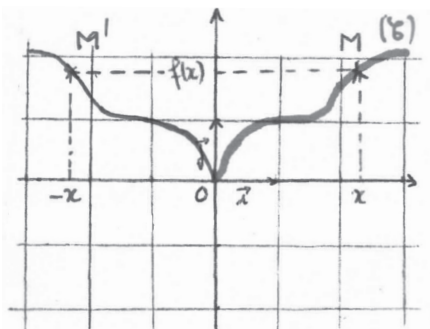


Activités d'introduction

1 Fonction paire – fonction impaire

1. a. $M'(-x; y)$. b. $M''(-x; -y)$.

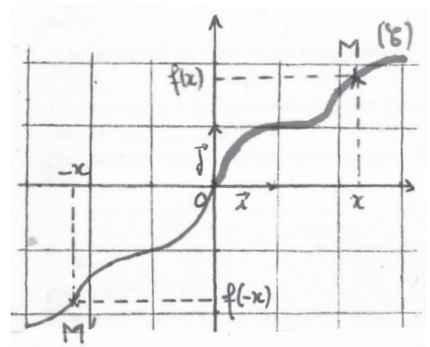
2. a.



• $M'(-x; f(-x))$.

• $f(-x) = f(x)$.

b.



• $M'(-x; f(-x))$.

• $f(-x) = -f(x)$.

2 Symétrie d'une courbe par rapport à un point

1. a. La courbe $(\mathcal{C})$ semble symétrique par rapport au point $A(2; 1)$.

b. Pour $\frac{1}{2} \leq h \leq 3$ on a $2 + \frac{1}{2} \leq 2 + h \leq 2 + 3$

donc $\frac{5}{2} \leq 2 + h \leq 5$, ainsi $2 + h \in [\frac{5}{2}; 5]$ et $2 + h \in \mathcal{D}$.

• Si $2 + h \in \mathcal{D}$ alors :

→ soit $2 + h \in [-1; \frac{3}{2}]$, c'est-à-dire $-1 \leq 2 + h \leq \frac{3}{2}$;

$-\frac{3}{2} \leq -2 - h \leq 1$; $4 - \frac{3}{2} \leq 4 - 2 - h \leq 4 + 1$;

$\frac{5}{2} \leq 2 - h \leq 5$, donc $2 - h \in \mathcal{D}$;

→ soit $2 + h \in [\frac{5}{2}; 5]$, c'est-à-dire $\frac{5}{2} \leq 2 + h \leq 5$;

$-5 \leq -2 - h \leq -\frac{5}{2}$;

$4 - 5 \leq 4 - 2 - h \leq 4 - \frac{5}{2}$; $-1 \leq 2 - h \leq \frac{3}{2}$,
donc $2 - h \in \mathcal{D}$.

c. • $M'(1; 0)$ car $A(2; 1)$ doit être le milieu de $[MM']$;

• $M'(6; \frac{5}{4})$;

• $M'(2 - h; 2 - f(2 + h))$.

d. $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à $A(2; 1)$.

si $M' \in (\mathcal{C})$, c'est-à-dire si, $f(2 - h) = 2 - f(2 + h)$;

c'est-à-dire si $f(2 - h) + f(2 + h) = 2$.

2. a. $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à a à condition que, pour tout nombre réel h tel que $a + h \in \mathcal{D}$, on a $a - h \in \mathcal{D}$.

b. Pour tout h tel que $a + h \in \mathcal{D}$,

$$\frac{f(a - h) + f(a + h)}{2} = b.$$

3 Asymptotes parallèles aux axes du repère

1. a. On conjecture que :

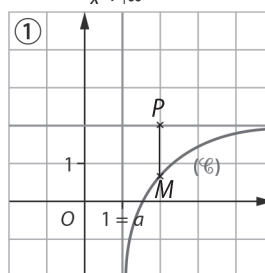
Schéma 1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$;

Schéma 2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

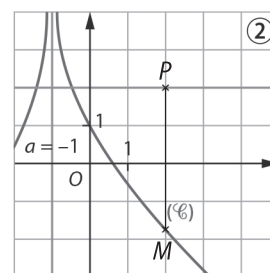
Schéma 3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$;

Schéma 4 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

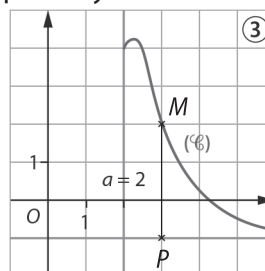
b.



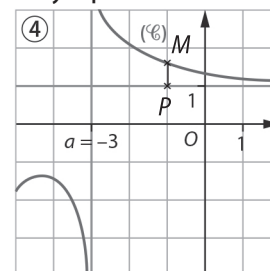
Cette courbe $(\mathcal{C})$ possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 2$.



Cette courbe $(\mathcal{C})$ ne possède pas d'asymptote en $+\infty$.



Cette courbe $(\mathcal{C})$ possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = -1$.



Cette courbe $(\mathcal{C})$ possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1$.

Une courbe ($\mathcal{C}$) représentative d'une fonction f possède, en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = b$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

2. a. On conjecture que :

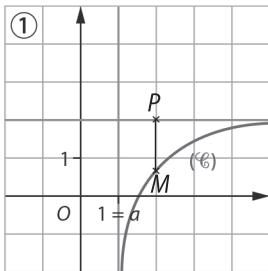
Schéma 1 : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$;

Schéma 2 : $\lim_{x \rightarrow -1} x f(x) = +\infty$;

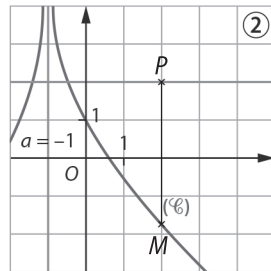
Schéma 3 : $\lim_{x \rightarrow 2} (x) = f(2) = 4$;

Schéma 4 : $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3} x f(x) = +\infty$.

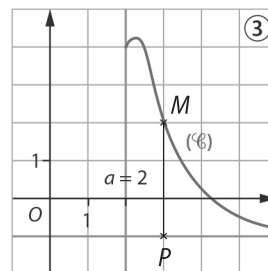
b.



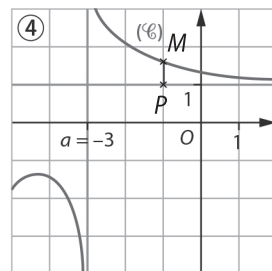
Cette courbe ($\mathcal{C}$) possède une asymptote en 1 d'équation $x = 1$.



Cette courbe ($\mathcal{C}$) possède une asymptote en -1 d'équation $x = -1$.



Cette courbe ($\mathcal{C}$) ne possède pas asymptote en 2.

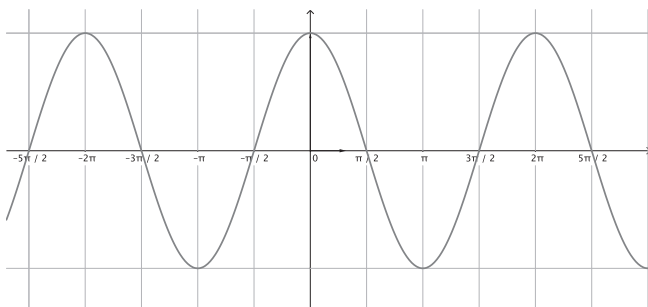


Cette courbe ($\mathcal{C}$) possède une asymptote en -3 d'équation $x = -3$.

Une courbe ($\mathcal{C}$) représentative d'une fonction f possède, en a , une asymptote d'équation $x = a$ lorsque : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

4 les fonctions cosinus et sinus

1. a. à c.



d. On conjecture que :

- la fonction cosinus est paire ;
- la fonction cosinus est périodique de période 2π ;
- le tableau de variation sur $[0 ; \pi]$ est le suivant :

x	0	π
$\cos x$	1	-1

2. Le domaine de définition de la fonction cosinus est $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro ;

pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$.

Donc f est paire.

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$;

de plus, $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x) = f(x)$.

Donc f est périodique de période 2π .

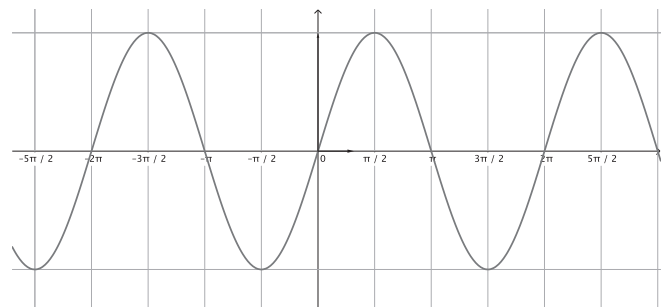
- Puisque, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x)$, pour tout x de $[0 ; \pi]$, $f'(x) = -\sin(x) < 0$;

donc f est décroissante sur $[0 ; \pi]$.

De plus, $f(0) = \cos(0) = 1$ et $f(\pi) = \cos(\pi) = -1$.

D'où le tableau de variation ci-dessus.

3.



On conjecture que :

- la fonction sinus est impaire ;
- la fonction sinus est périodique de période 2π ;
- le tableau de variation sur $[0 ; \pi]$ est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	1	0

2. Le domaine de définition de la fonction sinus est $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro ;

pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$.

Donc f est impaire.

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$;

de plus $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x) = f(x)$.

Donc f est périodique de période 2π .

- Puisque, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$, pour tout x de $[0 ; \pi]$, $f'(x) = \cos(x) > 0$.

Or, $\cos(x) \geq 0$ pour $x \in [0; \pi/2]$, donc f est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $\cos(x) \leq 0$ pour $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, donc f est décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

De plus, $f(0) = \sin(0) = 0$ et $f(\pi) = \sin(\pi) = 0$.
D'où le tableau de variation ci-dessus.

Savoir-faire

3 $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = 2(-x)^3 + 1 = -2x^3 + 1$ donc $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

f n'est ni paire, ni impaire.

4 $[-1; 1]$ est symétrique par rapport à zéro.

Pour tout x de $[-1, 1]$, $g(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x)$.

f est paire.

5 $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = 5(-x)^2 - (-x) = 5x^2 + x$, donc $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

f n'est ni paire, ni impaire.

6 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est symétrique par rapport à zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(-x) = 3(-x) - \frac{1}{-x} = -3x + \frac{1}{x}$ donc $f(-x) \neq f(x)$.

f est impaire.

7 Pour tout nombre réel h tel que $2 + h \in [-2; 6]$, on a

$$-2 \leq 2 + h \leq 6; \quad -6 \leq -2 - h \leq 2;$$

$$4 - 6 \leq 4 - 2 - h \leq 4 + 2; \quad -2 \leq 2 - h \leq 6,$$

donc $2 - h \in [-2; 6]$.

De plus,

$$f(2 - h) = (2 - h - 2)^3 + 5 = (-h)^3 + 5 = -h^3 + 5$$

$$\text{et } f(2 + h) = (2 + h - 2)^3 + 5 = h^3 + 5.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{f(2 - h) + f(2 + h)}{2} = \frac{-h^3 + 5 + h^3 + 5}{2} = 5.$$

Finalement, $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport au point $A(2; 5)$.

8 Pour tout nombre réel h tel que $-3 + h \in [-6; 0]$, on a :

$$-6 \leq -3 + h \leq 0; \quad 0 \leq 3 - h \leq 6;$$

$$-6 + 0 \leq -6 + 3 - h \leq -6 + 6; \quad -6 \leq -3 - h \leq 0,$$

donc $-3 - h \in [-6; 0]$.

De plus,

$$f(-3 - h) = \frac{3}{(-3 - h + 3)^2} = \frac{3}{(-h)^2} = \frac{3}{h^2}$$

$$\text{et } f(-3 + h) = \frac{3}{(-3 + h + 3)^2} = \frac{3}{h^2}.$$

Ainsi, $f(-3 - h) = f(-3 + h)$,

Finalement, $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = -3$.

11 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, donc (Δ) d'équation $x = 3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

12 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x}{x} = 7$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$, donc (Δ) d'équation $y = 7$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

13 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, donc (Δ) d'équation $y = -1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

14 a. On conjecture que (Δ) est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - x^2}{x + 3} + x - 3 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{7 - x^2}{x + 3} + \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - x^2 + x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x + 3} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (Δ) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

16 a. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + \pi \in \mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x + \pi) = \cos\left(2(x + \pi) + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$f(x + \pi) = \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$f(x + \pi) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Ainsi, $f(x + \pi) = f(x)$.

f est périodique de période π .

b. • Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + \frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 5 \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \pi\right)$$

$$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 5 \cos\left(3x + 3 \times \frac{2\pi}{3} - \pi\right)$$

$$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 5 \cos(3x + 2\pi - \pi)$$

$$g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 5 \cos(3x - \pi)$$

$$\text{Ainsi, } g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = g(x).$$

g est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

c. • Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + 10\pi \in \mathbb{R}$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x + 10\pi) = -\sin\left(\frac{x + 10\pi}{5} + 3\right)$

$$h(x + 10\pi) = -\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{10\pi}{5} + 3\right)$$

$$h(x + 10\pi) = -\sin\left(\frac{x}{5} + 2\pi + 3\right) = -\sin\left(\frac{x}{5} + 3\right).$$

Ainsi, $h(x + 10\pi) = h(x)$.

h est périodique de période 10π .

17 a. • Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + \pi \in \mathbb{R}$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x + 2\pi) = 3 \cos\left(2(x + \pi) - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3 \cos\left(2x + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= f(x).$$

f est donc périodique de période π .

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -3 \times 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
 $= -6 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$

$$f'(x) \geq 0 \text{ lorsque } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 0,$$

c'est-à-dire lorsque $-\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 0$;

$$\frac{\pi}{3} - \pi \leq 2x \leq 0 + \frac{\pi}{3}; \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ou lorsque } \pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi; \quad \frac{\pi}{3} + \pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi;$$

$$\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}.$$

De même $f'(x) \leq 0$ lorsque $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$, c'est-à-

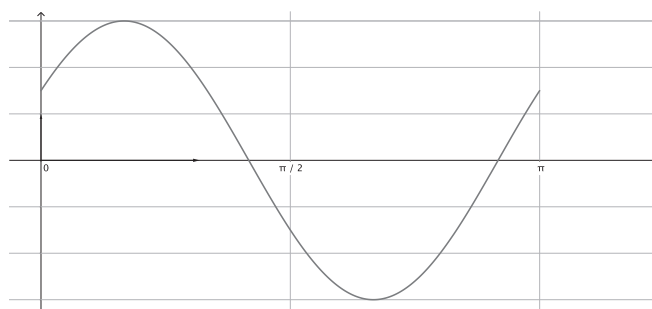
dire lorsque $0 \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$; $\frac{\pi}{3} + 0 \leq 2x \leq \pi + \frac{\pi}{3}$;

$$\frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3};$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}.$$

D'où le tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	3		-3		$\frac{3}{2}$



Exercices d'entraînement

Parité, périodicité

- 18 ① f est ni l'un, ni l'autre. ② f est paire.
 ③ f est paire. ④ f est paire.
 ⑤ f est ni l'un, ni l'autre. ⑥ f est impaire.

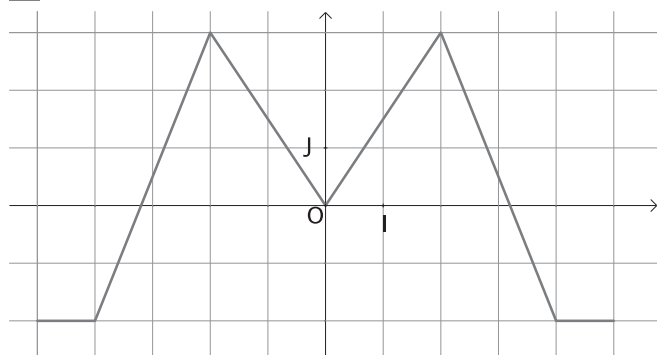
19 ① g est périodique de période 2.

② g n'est pas périodique.

③ g est périodique de période 3.

④ g n'est pas périodique.

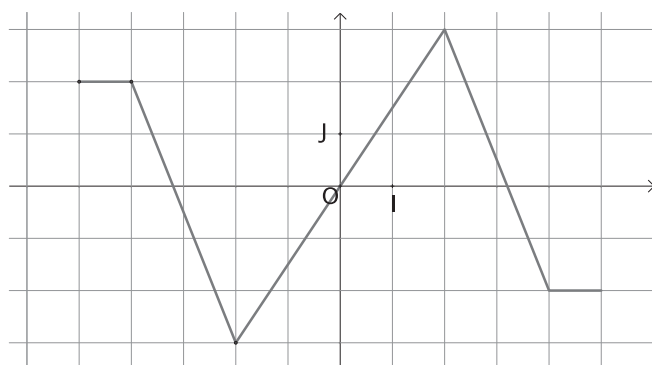
20 1. a.



b.

x	-5	-4	-2	0	2	4	5
$f(x)$	-2	-2	3	0	3	-2	-2

2. a.



b.

x	-5	-4	-2	2	4	5
$f(x)$	2	2	-3	3	-2	-2

21 a. Dans le cas où f est paire :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ -2x + 1 & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

b. Dans le cas où f est impaire :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ 2x - 1 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

22 a. Dans le cas où f est paire :

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 5 & \text{si } x \in [-3; -1] \\ 3 & \text{si } x \in [-1; 0] \\ 3 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 4x - 5 & \text{si } x \in [1; 3]. \end{cases}$$

b. Dans le cas où f est impaire :

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x \in [-3; -1] \\ 3 & \text{si } x \in [-1; 0] \\ -3 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 4x - 5 & \text{si } x \in [1; 3]. \end{cases}$$

23 • La fonction carré $f: x \mapsto x^2$.

Son domaine de définition $\mathbb{R}$ est centré en zéro. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, donc f est paire.

• La fonction cube $f: x \mapsto x^3$.

Son domaine de définition $\mathbb{R}$ est centré en zéro. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, donc f est impaire.

• La fonction racine carrée $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

Son domaine de définition $[0; +\infty[$ n'est pas centré en zéro, donc f n'est ni paire, ni impaire.

• La fonction inverse $f: x \mapsto \frac{1}{x}$.

Son domaine de définition $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est centré en zéro.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$, donc f est impaire.

• La fonction valeur absolue $f: x \mapsto |x|$.

Son domaine de définition $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, donc f est paire.

24 a. $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = (-x) - \frac{2}{(-x)} = -x + \frac{2}{x} = -f(x). \text{ } f \text{ est impaire.}$$

b. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = -4(-x)^3 + (-x) = 4x^3 - x = -f(x). \text{ } f \text{ est impaire.}$$

c. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1 = f(x). \text{ } f \text{ est paire.}$$

d. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ n'est pas centré en zéro, donc f est ni paire, ni impaire.

e. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = 5(-x)^3 - (-x) + 1 = -5x^3 + x + 1, \text{ donc } f(-x) \neq f(x), \text{ } f \text{ n'est pas paire et } f(-x) \neq -f(x), \text{ } f \text{ n'est pas impaire.}$$

f. $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{3(-x) + 1}{-x} = \frac{-3x + 1}{-x} = \frac{3x - 1}{x}, \text{ donc } f(-x) \neq f(x), \text{ } f \text{ n'est pas paire et } f(-x) \neq -f(x), \text{ } f \text{ n'est pas impaire.}$$

g. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x) |(-x)| = -x |x| = -f(x). \text{ } f \text{ est impaire.}$$

h. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{2|(-x)|}{(-x)^2 + 1} = \frac{2|x|}{x^2 + 1} = f(x). \text{ } f \text{ est paire.}$$

25 • La fonction cosinus $f: x \mapsto \cos x$.

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$. f est paire.

• La fonction sinus $f: x \mapsto \sin x$.

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$. f est impaire.

• La fonction tangente $f: x \mapsto \tan x$.

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ est centré en zéro.

$$\text{Pour tout } x \text{ et } \mathcal{D}, f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x = -f(x). \text{ } f \text{ est impaire.}$$

26 a. f est paire ; **b.** f est impaire ; **c.** f est paire ;

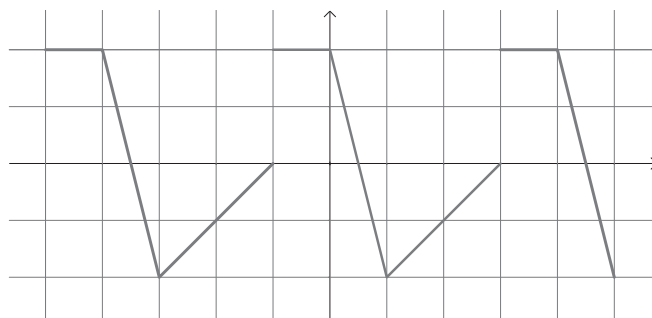
d. f est ni paire, ni impaire ; **e.** f est ni paire, ni impaire ;

f. f est impaire ; **g.** f est paire ; **h.** f est paire.

27 a. π est la plus petite période de f .

b. Tous les multiples (non nul) de π sont des périodes de f : $2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$

28



29 • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
Donc la fonction cosinus est périodique de période 2π .

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
Donc la fonction sinus est périodique de période 2π .

• Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$ et
$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

Donc la fonction tangente est périodique de période π .

30 a. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \pi \in \mathbb{R}$
et $f(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) = [\sin(x + \pi)]^2 = (-\sin x)^2$
 $= \sin^2 x$ donc $f(x + \pi) = f(x)$.

f est périodique de période π .

b. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$
et $f(x + 2\pi) = x + 2\pi + \cos(x + 2\pi) = x + 2\pi + \cos x$
 $\neq f(x)$.

f n'est pas périodique de période 2π .

c. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $x + \frac{\pi}{2} \notin \mathcal{D}_f$ donc f n'est pas périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

d. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \pi \in \mathbb{R}$
et $f(x + \pi) = \cos^2(x + \pi) = (\cos(x + \pi))^2$
 $= (-\cos x)^2 = \cos^2 x = f(x)$.

f est périodique de période π .

e. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$
et $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 - \sin(3x + \pi)$
 $= 1 + \sin 3x \neq f(x)$.

f n'est pas périodique de période $\frac{\pi}{3}$.

f. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$ et
$$f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - 4 \cos\left(4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - 4 \cos(4x + \pi)$$
$$= \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 + 4 \cos 4x \neq f(x).$$

f n'est pas périodique de période $\frac{\pi}{4}$.

g. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 8\pi \in \mathbb{R}$ et
$$f(x + 8\pi) = \cos^2\left(\frac{x + 4\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$$
$$= \left[\cos\left(\frac{x}{4} + \pi\right)\right]^2 = \left[-\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]^2 = \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) = f(x).$$

f est périodique de période 4π .

h. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $x + \pi \in \mathcal{D}_f$
et $f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) + \tan(x + \pi)$
 $= \sin(2x + 2\pi) + \tan(x + \pi)$
 $= \sin 2x + \tan x = f(x)$.

f est périodique de période π .

31 ① **Vrai.** Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $x + \pi \in \mathcal{D}_f$
donc $x + \pi + \pi = x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$
et $f(x + 2\pi) = f(x + \pi + \pi) = f(x + \pi) = f(x)$.

Donc f est périodique de période 2π .

② Faux, par exemple, la fonction cosinus est périodique de période 2π , mais n'est pas périodique de période π .

③ Faux, par exemple la fonction sinus est périodique de période 2π et impaire, mais n'est pas périodique de période π .

32 a. f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

b. g est périodique de période 10.

c. h est périodique de période $\frac{\pi^2}{2}$.

d. i est périodique de période 12 π .

33 a. Par exemple, $f: x \mapsto \cos(2x)$.

b. Par exemple, $f: x \mapsto \sin(4x)$.

Symétrie d'une courbe

34 Dans chacun des cas, on note A' , B' et M' les symétriques des points A , B et M .

a. $A'(1; -3)$, $B'(-4; -5)$, $M'(-x; -y)$.

b. $A'(1; 3)$, $B'(-4; 5)$, $M'(-x; y)$.

c. $A'(3; 1)$, $B'(-2; -1)$, $M'(2 - x; 4 - y)$

car il faut que $\frac{x + x'}{2} = 1$ et $\frac{y + y'}{2} = 2$.

d. $A'(7; 3)$, $B'(2; 5)$, $M'(6 - x; y)$

car il faut que $\frac{x + x'}{2} = 3$.

35 ① $(\mathcal{C}_1)$ est symétrique par rapport au point I et $(\mathcal{C}_2)$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = 1$.

② $(\mathcal{C}_1)$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = \frac{5}{2}$ et $(\mathcal{C}_2)$ est symétrique par rapport au point $A(-2; 1)$.

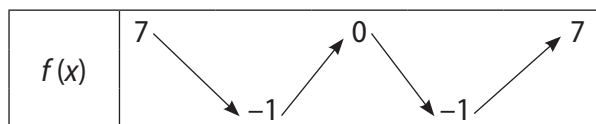
36

a.

x	-2	-1	3	7	8
$f(x)$	7	-1	0	1	-7

b.

x	-2	-1	3	7	8
-----	----	----	---	---	---



37 a. Pour tout $h \neq 0$, si $2 + h \in \mathcal{D}$, alors $2 - h \in \mathcal{D}$ et

$$\frac{f(2-h) + f(2+h)}{2} = \frac{\left(3 + \frac{1}{-h}\right) + \left(3 + \frac{1}{h}\right)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$(\mathcal{C})$ est donc symétrique par rapport à $\Omega(2; 3)$.

b. Pour tout $h \neq 0$, si $-2 + h \in \mathcal{D}$, alors $-2 - h \in \mathcal{D}$ et

$$\frac{f(-2-h) + f(-2+h)}{2} = \frac{(-h)^3 + 1 + h^3 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$(\mathcal{C})$ est donc symétrique par rapport à $\Omega(-2; 1)$.

c. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\pi + h \in [0; 2\pi]$, c'est-à-dire $0 \leq \pi + h \leq 2\pi$; $-\pi \leq h \leq \pi$, $-\pi \leq -h \leq \pi$;

$$0 \leq \pi - h \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{f(\pi-h) + f(\pi+h)}{2} &= \frac{3\sin(\pi-h) - 5 + 3\sin(\pi+h) - 5}{2} \\ &= \frac{3\sin h - 5 - 3\sin h - 5}{2} = -\frac{10}{2} = -5. \end{aligned}$$

$(\mathcal{C})$ est donc symétrique par rapport à $\Omega(\pi; -5)$.

38 a. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $1 + h \in \mathbb{R}$, on a $1 - h \in \mathbb{R}$ et $f(1+h) = 5h^2 + 3$ et $f(1-h) = 5(-h)^2 + 3$ donc $f(1+h) = f(1-h)$.

$(\mathcal{C})$ est donc symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = 1$.

b. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $-3 + h \in \mathbb{R}$, on a $-3 - h \in \mathbb{R}$ et $f(-3+h) = |2(-3+h) + 6| = |2h|$ et $f(-3-h) = |2(-3-h) + 6| = |-2h| = |2h|$, donc $f(-3+h) = f(-3-h)$.

$(\mathcal{C})$ est donc symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = -3$.

c. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\pi + h \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\pi}{2} \leq \pi + h \leq \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq h \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -h \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq \pi - h \leq \frac{3\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} f(\pi+h) &= 5 \cos(2(\pi+h)) = 5 \cos(2\pi+2h) = 5 \cos(2h) \\ \text{et } f(\pi-h) &= 5 \cos(2(\pi-h)) = 5 \cos(2\pi-2h) \\ &= 5 \cos(-2h) = 5 \cos(2h), \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(\pi+h) = f(\pi-h).$$

$(\mathcal{C})$ est donc symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = \pi$.

39 a. On conjecture que la courbe $(\mathcal{C})$ représentée est symétrique par rapport au point $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

b. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2} + h \neq 0$, et $\frac{1}{2} + h \neq 1$, on a $h \neq -\frac{1}{2}$ et $h \neq \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} - h \neq 0$ et $\frac{1}{2} - h \neq 1$.

$$f\left(\frac{1}{2} + h\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} + h} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} + h\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + h} + \frac{1}{\frac{1}{2} - h}$$

$$\text{et } f\left(\frac{1}{2} - h\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - h} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} - h\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - h} + \frac{1}{\frac{1}{2} + h},$$

$$\text{donc } f\left(\frac{1}{2} + h\right) = f\left(\frac{1}{2} - h\right).$$

Cela valide la conjecture émise au **a**.

40 On utilise des démonstrations analogues à celles des exercices 38 et 39 pour justifier que :

a. $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = -1$.

b. $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = -3$.

c. $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = -5$.

d. $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = 1$.

Asymptote à une courbe

41 • Les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ ont pour équations $y = 1$ et $x = -2$.

• Les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_2)$ ont pour équations $y = -1$ et $x = 1$.

42 • De $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, on déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

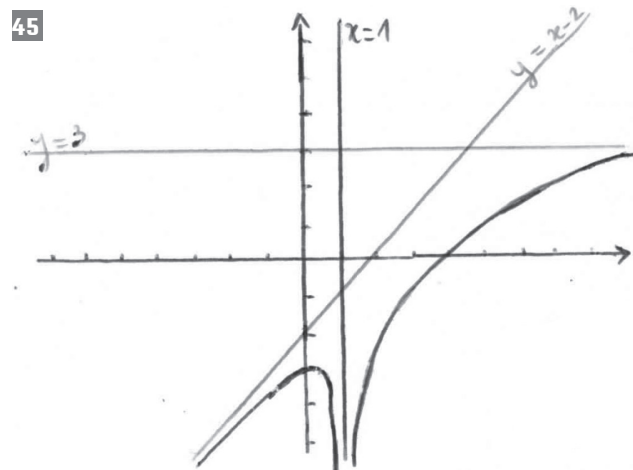
• De $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$, on déduit que la droite d'équation $x = -3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

43 • Les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ ont pour équations $y = x + 1$ et $x = -1$.

• Les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_2)$ ont pour équations $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et $x = 2$.

44 • De $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x + 1) = 0$, on déduit que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

• De $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - 4 = 0$, on déduit que la droite d'équation $y = x + 4$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.



46 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f .

47 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x+1|} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x+1|} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{|x+1|} = +\infty$, donc les droites d'équations $y = 0$ et $x = -1$ sont asymptotes à la courbe.

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{\sqrt{x}-2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc les droites d'équations $y = 0$ et $x = 2$ sont asymptotes à la courbe.

48 Pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} - (2x - 3) = 2x - 3 + \frac{1}{x} - (2x - 3) = \frac{1}{x}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

49 a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-3x + 5) = x^2$.

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, donc (Δ) n'est asymptote à $(\mathcal{C})$ ni en $-\infty$, ni en $+\infty$.

b. Pour tout $x \neq -1$,

$$\begin{aligned} f(x) - (x+1) &= \frac{x^2 + 2x + 7}{x+1} - \frac{(x+1)(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 7 - x^2 - 2x - 1}{x+1} = \frac{6}{x+1}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x+1} = 0$, donc (Δ) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Pour tout $x \neq -2$,

$$\begin{aligned} f(x) - (3x+7) &= \frac{3x^2 - 13x - 10}{x+2} - (3x+7) \\ &= \frac{3x^2 - 13x - 10 - (3x+7)(x+2)}{x+2} \\ &= \frac{3x^2 - 13x - 10 - 3x^2 - 13x - 14}{x+2} = \frac{-26x - 24}{x+2}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-26x - 24}{x+2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-26x - 24}{x+2} = -\infty$, donc (Δ) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

50 a. Dans le cas où f est paire, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$, donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-2x+1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) - (2(-x)+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-2x+1) = 0. \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

b. Dans le cas où f est impaire, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$, donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x-1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-f(x) - (-2x+1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -[f(-x) - (2(-x)+1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -[f(x) - (2x+1)] = 0. \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

Fonctions polynômes

51 a.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

b.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$

c.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

d.

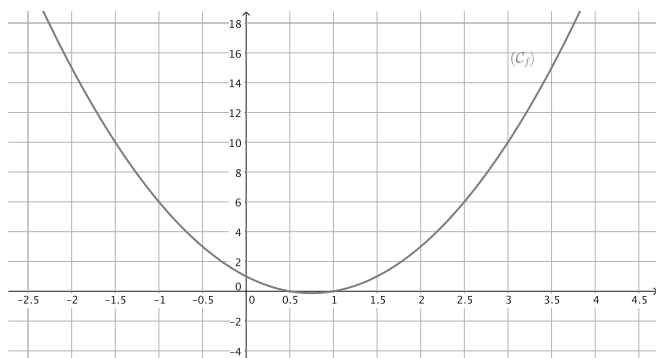
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$

52 Dans chacun des cas, on étudie le signe de la dérivée f' afin d'en déduire les variations de f .

On complète le tableau de variation grâce aux limites aux bornes de l'ensemble de définition. Grâce à la calculatrice, on utilise un tableau de valeurs pour tracer la courbe représentative de f dans un repère.

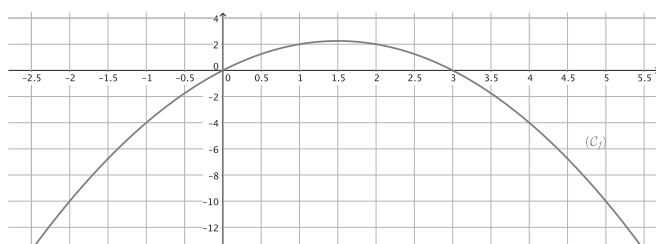
a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x - 3$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{8}$	$+\infty$



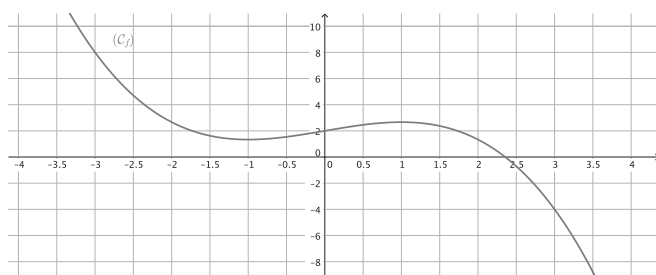
b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -2x + 3$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	$-\infty$



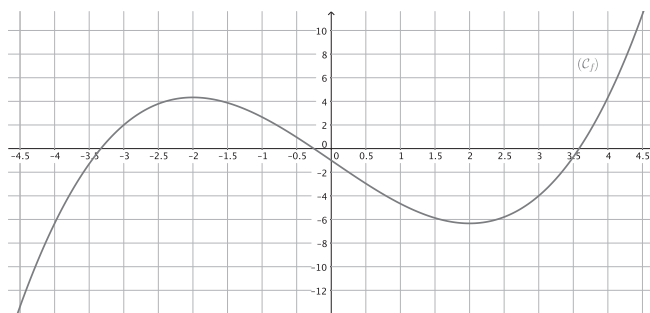
c. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -x^2 + 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\infty$



d. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 4$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{13}{3}$	$-\frac{19}{3}$	$+\infty$



53 a. $\bullet \mathbb{R}$ est centré en zéro.

$\bullet$ Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f(-x) = 0,2(-x^2) + 0,4 = 0,2x^2 + 0,4 = f(x)$, donc f est paire.

b. f est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$.

c. $f(x) = 0,1x + 1 \Leftrightarrow 0,2x^2 - 0,1x - 0,6 = 0$

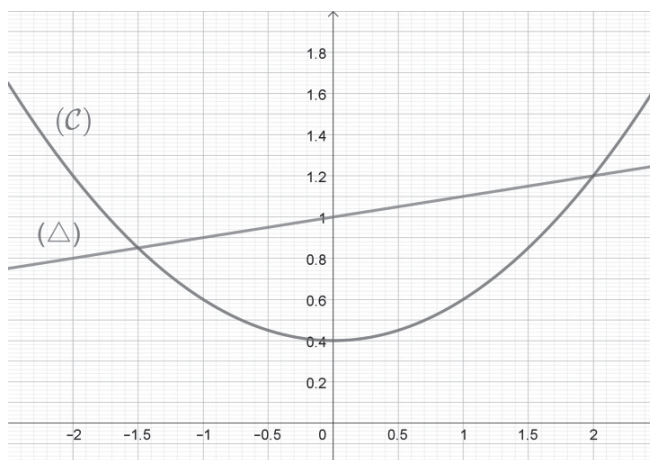
$\Delta = 0,49 = 0,7^2$, les solutions de cette équation sont

$$x_1 = \frac{0,1 - 0,7}{2 \times 0,2} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{0,1 + 0,7}{2 \times 0,2} = 2.$$

$f(x_1) = 0,85$ et $f(x_2) = 1,2$.

Les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (Δ) sont $A(2; 1,2)$ et $B(-\frac{3}{2}; 0,85)$.

d.



54 $\bullet A(-2; 5) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow a \times (-2)^2 + b \times (-2) + c = 5$
 $\Leftrightarrow 4a - 2b + c = 5.$

$\bullet B(2; -3) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow a \times 2^2 + b \times 2 + c = -3$
 $\Leftrightarrow 4a + 2b + c = -3.$

$\bullet$ La tangente en B à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Oy) ,
donc $f'(2) = 0$.

Or $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 2a \times 2 + b = 0$
 $\Leftrightarrow 4a + b = 0.$

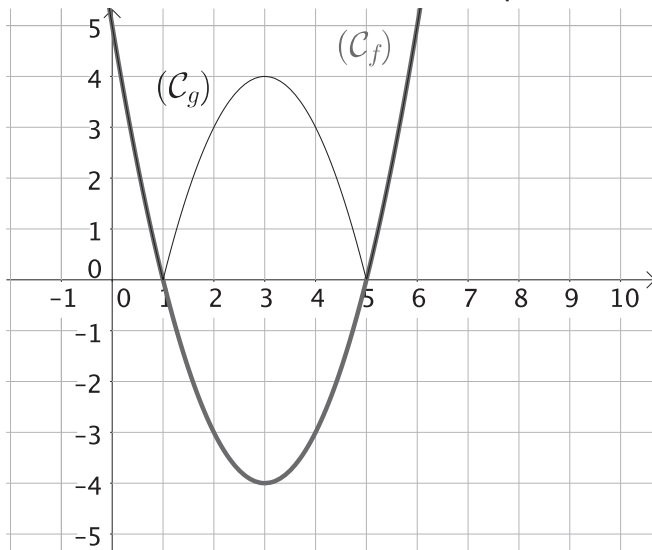
On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

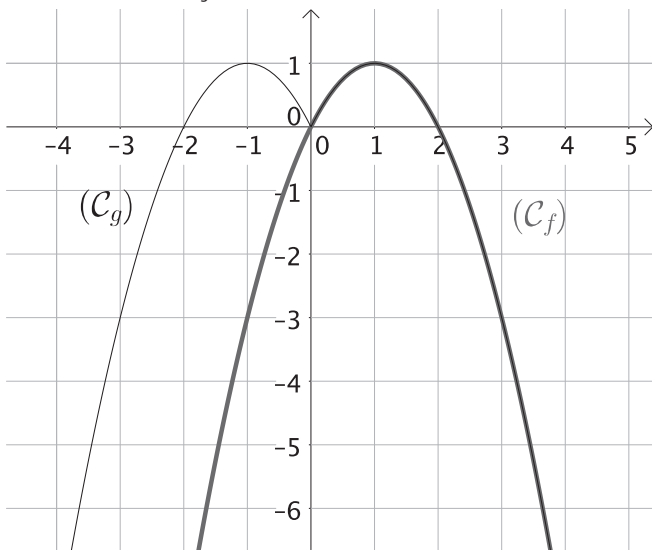
ce qui donne, après calculs $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$

Ainsi, $(\mathcal{C})$ a pour équation $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.

55 a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{lorsque } f(x) \leq 0 \end{cases}$.



b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$,
donc $g(x) = -|x|^2 + 2|x| = f(|x|)$.
Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $g(x) = f(x)$ et puisque g est paire,
on en déduit $(\mathcal{C}_g)$ sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.



56 • $A(-3; -1) \in (\mathcal{C})$
 $\Leftrightarrow a \times (-3)^3 + b \times (-3)^2 + c \times (-3) + d = -1$
 $\Leftrightarrow -27a + 9b - 3c + d = -1$

• $B(1; -1) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow a + b + c + d = -1$.

• $O(0; 0) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow d = 0$.

• La tangente en B à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Oy) , donc $f'(1) = 0$.

Or, $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a \times 1^2 + 2b \times 1 + c = 0$
 $\Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} -27a + 9b - 3c + d = -1 \\ a + b + c + d = -1 \\ d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

ce qui donne, après calculs $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{5}{3} \\ d = 0 \end{cases}$

• Ainsi, $(\mathcal{C})$ a pour équation $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x$.

57 a. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

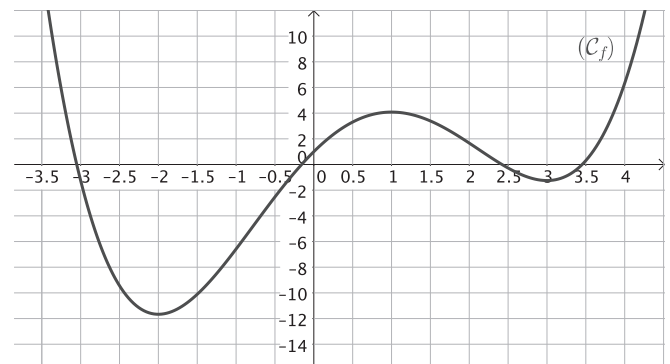
$$\begin{aligned} (x-3)(x-1)(x+2) &= (x-3)(x^2 - x + 2x - 2) \\ &= (x-3)(x^2 + x - 2) \\ &= x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 \\ &= x^3 - 2x^2 - 5x + 6. \end{aligned}$$

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

On utilise la réponse au **a.** pour déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f .

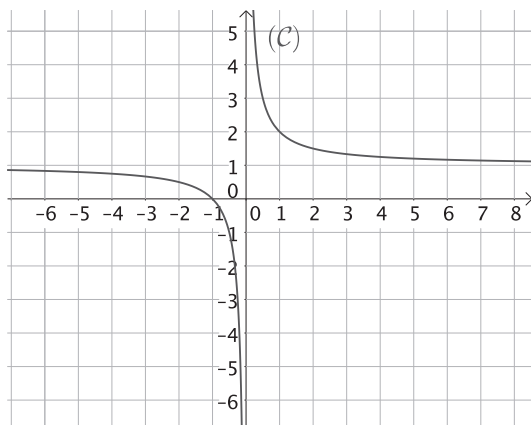
x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$			
$x-3$		-	-	-	0	+		
$x-1$		-	-	0	+	+		
$x+2$		-	0	+	+	+		
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$				$\frac{49}{12}$			$+\infty$
						</		

c.



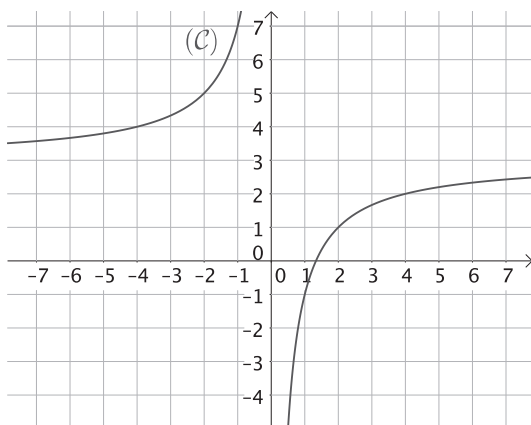
58 a.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 1$	



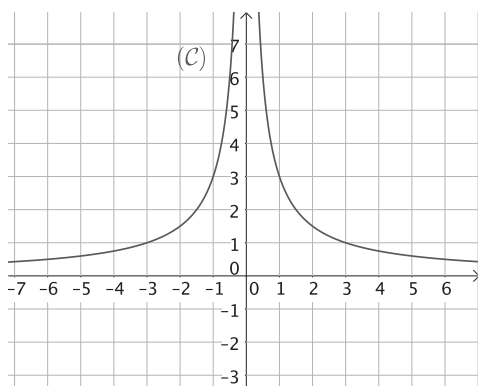
b.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$3 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 3$	



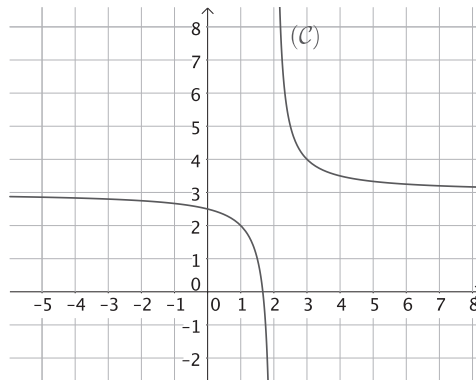
c.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$0 \rightarrow +\infty$	$+\infty \rightarrow 0$



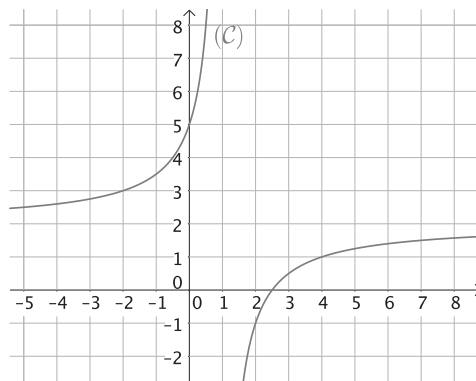
d.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$3 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 3$	



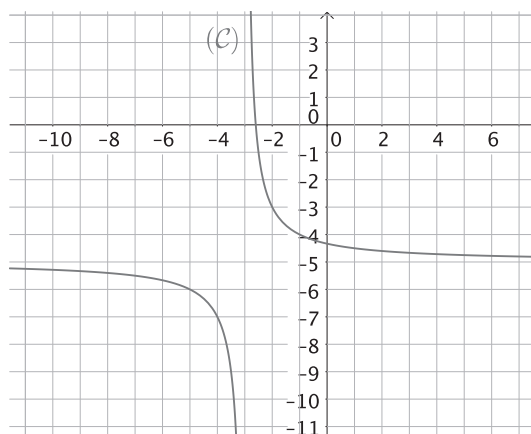
59 a.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$	$+$	$+$	
$f(x)$	$2 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 2$	



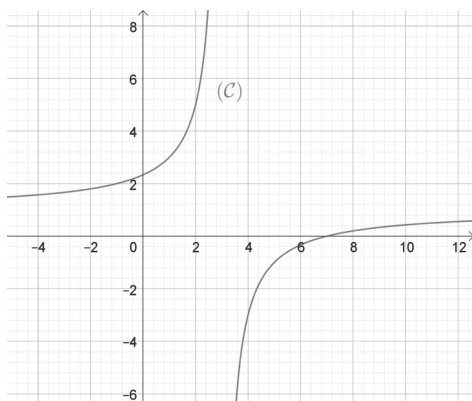
b.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-5 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -5$	



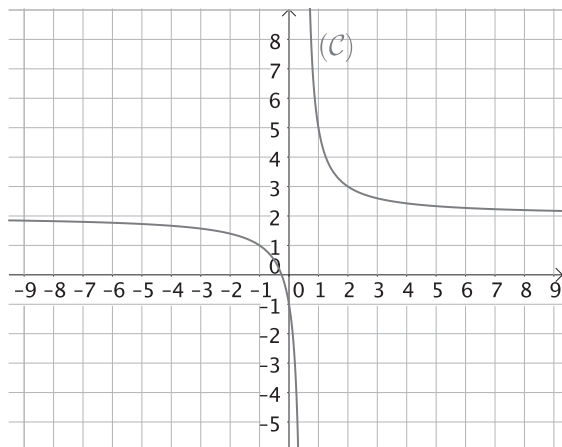
c.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x) = \frac{4}{(3-x)^2}$	-		-
$f(x)$	1 $\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$



d.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{-6}{(2x-1)^2}$	-		-
$f(x)$	2 $\searrow -\infty$		$+\infty \searrow 2$


 60 a. Pour tout $x \neq 2$,

$$a + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b}{x-2} = \frac{ax-2a+b}{x-2},$$

 par identification avec $f(x)$, on trouve que

$$\begin{cases} a=2 \\ -2a+b=3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=7. \end{cases}$$

 b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$;

 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$,

 donc les droites (Δ) d'équation $y = 2$ et (Δ') d'équation $x = 2$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$.

 c. Le point d'intersection I de ces asymptotes (Δ) et (Δ') a pour coordonnées $(2; 2)$.

• Pour tout $x \neq 2$, $f(2-h) = 2 + \frac{7}{-h}$ et $f(2+h) = 2 + \frac{7}{h}$,
donc $\frac{f(2-h) + f(2+h)}{2} = 2$, ce qui prouve que I est
centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

 61 a. Pour tout $x \neq 1$,

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1},$$

 par identification avec $h(x)$, on trouve que

$$\begin{cases} a=2 \\ -a+b=-5 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=-3. \end{cases}$$

 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$, donc les droites (Δ)
d'équation $y = 2$ et (Δ') d'équation $x = 1$ sont asymp-
totes à $(\mathcal{C})$.

• Le point d'intersection I de ces asymptotes (Δ) et (Δ')
a pour coordonnées $(1; 2)$.

 • Pour tout $x \neq 1$,

$$g(1-h) = 2 - \frac{3}{-h} \text{ et } g(1+h) = 2 - \frac{3}{h},$$

donc $\frac{g(1-h) + g(1+h)}{2} = 2$, ce qui prouve que I est
centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

 b. Pour tout $x \neq -3$,

$$a + \frac{b}{2x+6} = \frac{a(2x+6)+b}{2x+6} = \frac{2ax+6a+b}{2x+6},$$

 par identification avec $h(x)$, on trouve que

$$\begin{cases} 2a=1 \\ 6a+b=4 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=1. \end{cases}$$

 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{2}$;

$\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x) = +\infty$, donc les droites (Δ)
d'équation $y = \frac{1}{2}$ et (Δ') d'équation $x = -3$ sont asymp-
totes à $(\mathcal{C})$.

• Le point d'intersection I de ces asymptotes (Δ) et (Δ')
a pour coordonnées $(-3; \frac{1}{2})$.

 • Pour tout $x \neq -3$,

$$h(-3-h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{-h} \text{ et } h(-3+h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{h},$$

donc $\frac{h(-3-h) + h(-3+h)}{2} = \frac{1}{2}$, ce qui prouve que I est
centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

 62 a. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,

 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

• Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

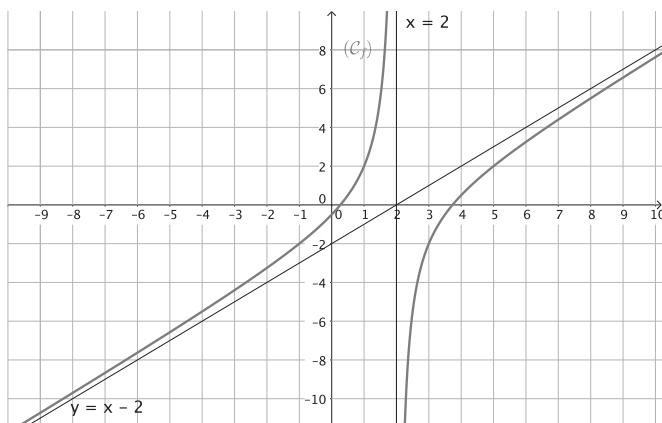
$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2-4x+1) \times 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{(x-2)^2}.$$

On étudie le signe de $x^2 - 4x + 7$ à l'aide du discriminant $\Delta = -12 < 0$. On en déduit le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(On peut également montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$).



b. • Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

• Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$$f'(x) = \frac{18x(x-3) - (9x^2-1) \times 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9x^2 - 54x + 1}{(x-3)^2}.$$

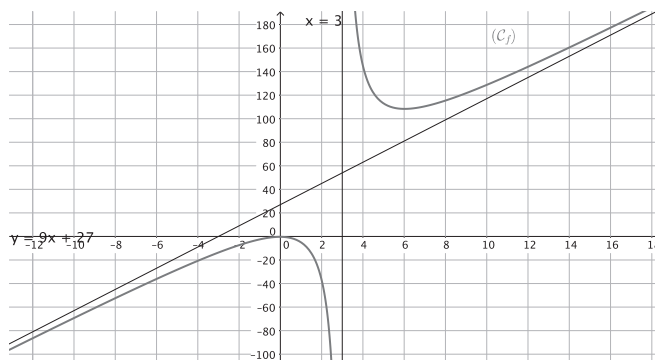
On étudie le signe de $9x^2 - 54x + 1$ à l'aide du discriminant $\Delta = 2880 > 0$ les racines de $9x^2 - 54x + 1$ sont

$$x_1 = \frac{54 - \sqrt{2880}}{18} < 3 \text{ et } x_2 = \frac{54 + \sqrt{2880}}{18} > 3$$

On en déduit le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	x_1	3	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1) \approx -0,34$	$+\infty$	$f(x_2) \approx 108,34$	$+\infty$

(On peut également montrer que la droite d'équation $y = 9x + 27$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$).



63 a. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2) + c}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b+c}{x+2}$$

Par identification avec $f(x)$, on obtient le système

$$\begin{cases} a+1 \\ 2a+b=1 \\ 2b+c=3 \end{cases} \text{ dont les solutions sont } \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=5. \end{cases}$$

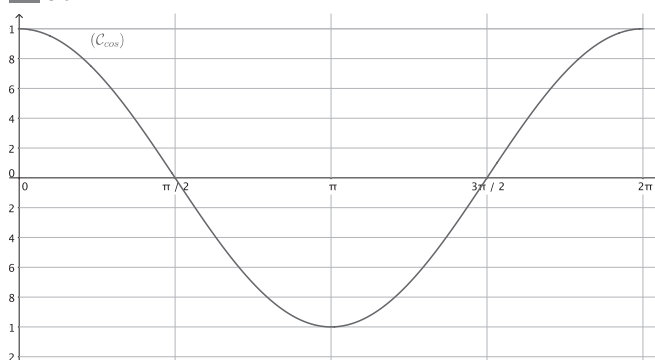
$$\text{Ainsi, pour tout } x \neq -2, f(x) = x - 1 + \frac{5}{x+2}.$$

b. • $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

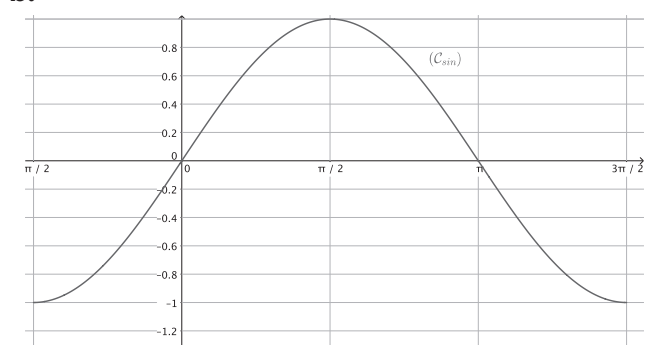
$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x+2} = 0$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(f(x) - (x-2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x+2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

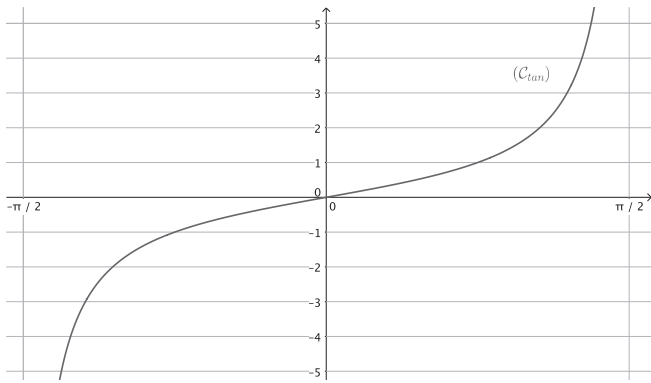
64 a.



b.



c.

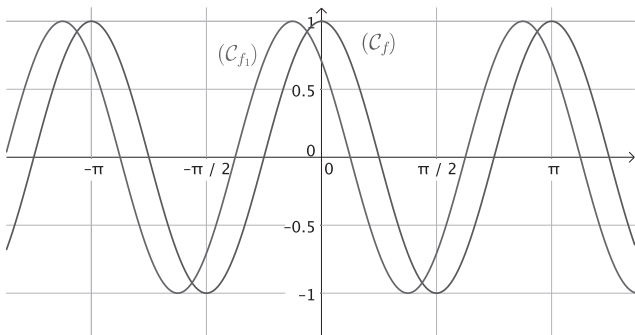

 65 • Pour f et f_1 :

 a. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. f est de période π et est paire.

 Donc, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$$f'(x) = -2 \sin 2x.$$

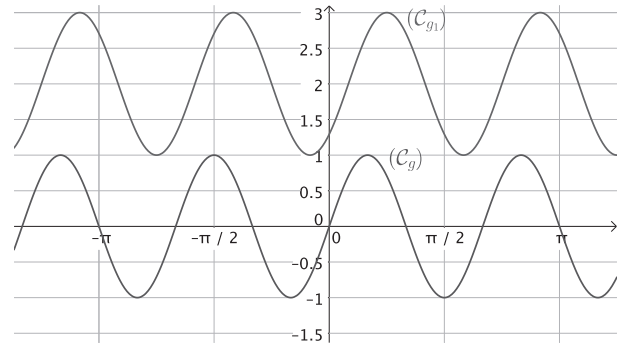
x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	—	0
$f(x)$	1	→ -1	

 b. $(\mathcal{C}_{f_1})$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(-\frac{\pi}{4}; 0)$.

 • Pour g et g_1 :

 a. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$; g est de période $\frac{2\pi}{3}$ et est impaire. Donc, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{3}]$.

$$g'(x) = 3 \cos 3x.$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$g'(x)$	3	+	0	—	-3
$g(x)$	0	→ 1		→ 0	

 b. $(\mathcal{C}_{g_1})$ est l'image de $(\mathcal{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(\frac{\pi}{4}; 3)$.

 66 a. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, f(-x) &= 2\sin(-x) + \sin(2(-x)) \\ &= -2\sin(x) + \sin(-2x) \\ &= -2\sin x - \sin 2x \\ &= -f(x) \text{ donc } f \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

 Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{De plus, } f(x + 2\pi) &= 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2(x + 2\pi)) \\ &= 2\sin x + \sin(2x + 4\pi) \\ &= 2\sin x + \sin 2x = f(x) \text{ donc } f \text{ est p\'eriodique de p\'eriod } 2\pi. \end{aligned}$$

 On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $[0; \pi]$.

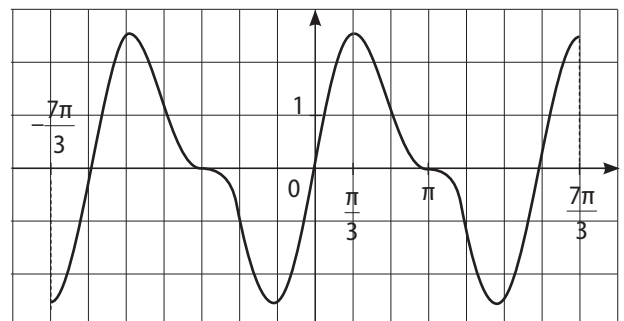
$$\begin{aligned} \text{b. Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, f'(x) &= 2\cos x + 2\cos 2x \\ &= 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) \\ &= 2\cos x + 4\cos^2 x - 2. \end{aligned}$$

Or $2(1 + \cos x)(2\cos x - 1) = (2 + 2\cos x)(2\cos x - 1)$

$$\begin{aligned} &= 4\cos x - 2 + 4\cos^2 x - 2\cos x \\ &= 2\cos x + 4\cos^2 x - 2 = f'(x). \end{aligned}$$

c.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	+	0	—	0
$f(x)$	0	→ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$		→ 0	

 d. Courbe $(\mathcal{C})$.

 67 a. Pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \bullet X_1\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) &= 0,2 \sin\left(3\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 0,2 \sin(2t + 2\pi) \\ &= 0,2 \sin(2t) \\ &= X_1(t). \end{aligned}$$

Donc X_1 est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \bullet X_2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= 0,15 \sin\left(4\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0,15 \sin\left(4t + 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0,15 \sin\left(4t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= X_2(t) \end{aligned}$$

Donc X_2 est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

b. Pour tout $t \geq 0$,

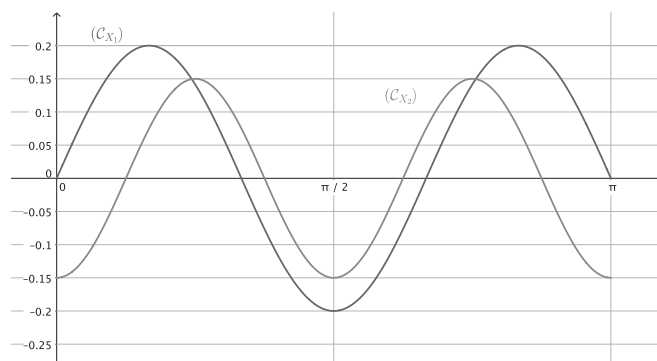
$$\bullet X_1'(t) = 0,6 \cos(3t)$$

$$\bullet X_2'(t) = 0,6 \cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)$$

D'où les tableaux de variation sur $[0; \pi]$.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π			
$X_1'(t)$		+	0	-	0	+	0	-
$X_1(t)$	0	$\nearrow$ 0,2	$\searrow$ -0,2	$\nearrow$ 0,2	$\searrow$ 0			

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π			
$X_2'(t)$		+	0	-	0	+	0	-
$X_2(t)$	-0,15	$\nearrow$ 0,15	$\searrow$ -0,15	$\nearrow$ 0,15	$\searrow$ -0,15			



Se tester

68 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Vrai ; 6. Vrai ; 7. Vrai.

69 1. Faux. En effet, l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f n'est pas centré en zéro.

2. Faux. En effet, pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \frac{-5}{(x+2)^2}$ donc

$f'(x) < 0$. f est donc décroissante sur $]-\infty; -2[$.

3. Vrai. En effet, pour tout $x \neq 2$,

$$3 - \frac{5}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} - \frac{5}{x+2} = \frac{3x+6-5}{x+2} = \frac{3x+1}{x+2} = f(x).$$

4. Vrai. En effet, $f(2) = \frac{3 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{7}{4}$

$$\text{et } f'(2) = \frac{-5}{(2+2)^2} = -\frac{5}{16}.$$

Ainsi, la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -\frac{5}{16}(x-2) + \frac{7}{4}$ soit $y = -\frac{5}{16}x + \frac{19}{8}$.

5. Vrai. En effet, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $-2+h \in \mathcal{D}_f$, on a $-2+h < -2$ ou $-2+h > -2$ donc $h < 0$ ou $h > 0$, donc $-2-h > -2$ ou $-2-h < -2$ donc $-2-h \in \mathcal{D}_f$ et

$$\begin{aligned} f(-2-h) &= \frac{3(-2-h)+1}{-2-h+2} = \frac{-5-3h}{-h} = \frac{5+3h}{h}, \\ f(-2+h) &= \frac{3(-2+h)+1}{-2+h+2} = \frac{-5+3h}{h}, \\ \text{Donc } \frac{f(-2-h)+f(-2+h)}{2} &= \frac{\frac{5+3h}{h} + \frac{-5+3h}{h}}{2} = 3. \end{aligned}$$

6. Vrai. En effet, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

70 1. c. ; 2. b. ; 3. c. ; 4. a. ; 5. a.

71 1. a. En effet, on observe sur le graphique que $A(0; -3)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = -3$. Cette condition ne convient que pour la réponse a.

2. a. En effet, $\mathbb{R}$ est centré en zéro et, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -1 - 2 \cos(2x)$ (car $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$.)

Ainsi, $f(-x) = -1 - 2 \cos(2(-x)) = -1 - 2 \cos(-2x)$ donc $f(-x) = -1 - 2 \cos(2x) = f(x)$.

3. c. En effet, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{4} + h \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\pi}{4} - h \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4} - h\right) &= -1 + 2 \sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - h\right) - \frac{\pi}{2}\right) = -1 - 2 \sin(2h) \\ \text{et } f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) &= -1 + 2 \sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \frac{\pi}{2}\right) = -1 + 2 \sin(2h). \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \frac{f\left(\frac{\pi}{4} - h\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + h\right)}{2} = -1.$$

Exercices d'approfondissement

72 Centre de symétrie

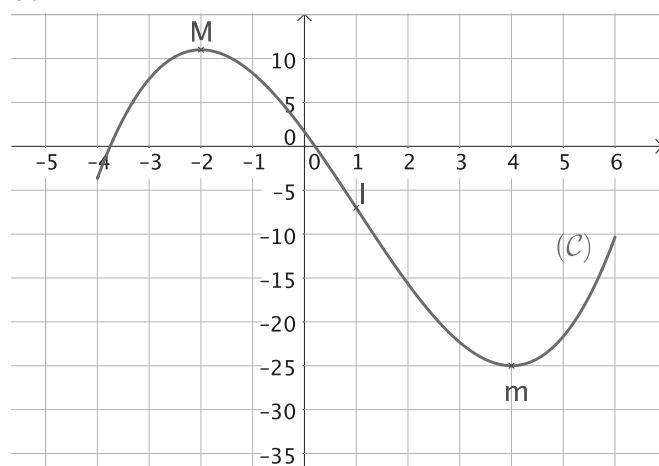
a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 2x - 8$.

b. On étudie le signe de $f'(x)$ grâce au discriminant ($\Delta = 36 > 0$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$).

x	-4	-2	4	6	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\frac{11}{3}$	11	-25	$-\frac{31}{3}$	

c. Le minimum de f est -25 , il est atteint pour $x = 4$; le maximum de f est 11 , il est atteint pour $x = -2$.

d.



e. $x_I = \frac{-2+4}{2} = 1$; $y_I = \frac{11+(-25)}{2} = -7$.

• Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $1+h \in [-4; 6]$, on a $-4 \leq 1+h \leq 6$; $-5 \leq h \leq 5$; $-5 \leq -h \leq 5$; $-4 \leq 1-h \leq 6$ donc $1-h \in [-4; 6]$

et $f(1-h) = \frac{1}{3}(1-h)^3 - (1-h)^2 - 8(1-h) + \frac{5}{3}$

$f(1+h) = \frac{1}{3}(1+h)^3 - (1+h)^2 - 8(1+h) + \frac{5}{3}$.

Ainsi, en développant les expressions, on trouve que $\frac{f(1-h) + f(1+h)}{2} = -7$, ce qui prouve que $I(1; -7)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

73 Rentabilité d'un article

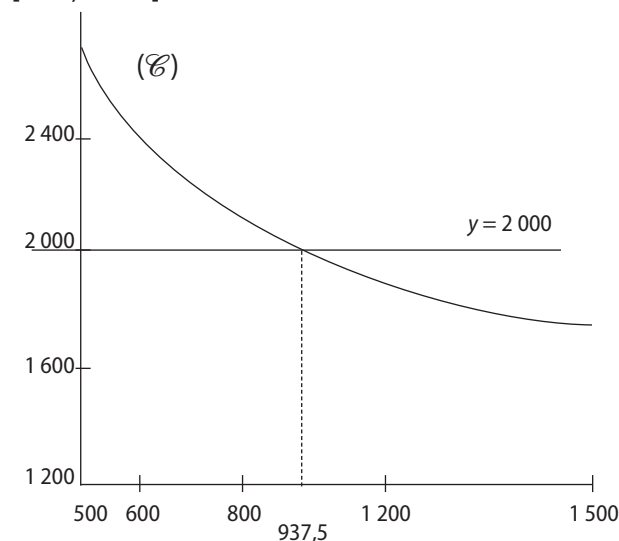
1. Le prix de revient de n articles est $750\,000 + 1\,200n$.

On a donc : $r = 1\,200 + \frac{750\,000}{n}$

2. a. L'ensemble de définition de la fonction r est $\mathbb{R}^*$; r est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a : $r' : x \mapsto -\frac{750\,000}{x^2}$.

b. $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de r sur $[500; 1\,500]$.



3. On doit avoir : $r \leq 2\,000$. Donc $n \geq 937,5$.

Le nombre minimum d'articles à produire, pour que l'entreprise soit rentable est de 938 articles.

4. L'entreprise est rentable lorsque la droite d'équation $y = 2\,000$ est au-dessus de la courbe $(\mathcal{C})$.

74 Périmètre minimal

1. a. $\mathbb{R}^*$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$\mathcal{P}(-x) = \frac{1}{-x} + (-x) = -\frac{1}{x} - x = -\left(\frac{1}{x} + x\right) = -\mathcal{P}(x)$$

donc $\mathcal{P}$ est impaire.

b. • $\lim_{x \rightarrow 0^-} \mathcal{P}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{P}(x) = +\infty$, donc la droite

d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote à la courbe représentative de $\mathcal{P}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) - x = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de $\mathcal{P}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\mathcal{P}'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, donc $\mathcal{P}'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+
x^2	+	+	0	+	+
$\mathcal{P}'(x)$	+	-	-	+	+
$\mathcal{P}(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) = +\infty$.

d. Du tableau de variation, on déduit que 2 est le minimum de $\mathcal{P}$ sur $]0; +\infty[$ et qu'il est atteint pour $x = 1$.

2. a. $OL = x$ et $OP = \frac{1}{x}$, donc l'aire du rectangle $OLMN$

est : $\mathcal{A} = OL \times OP = x \times \frac{1}{x} = 1$.

b. Le périmètre du rectangle $OLMN$ est :

$$P(x) = 2 \times (OL + OP) = 2 \times \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 \times \mathcal{P}(x).$$

Or, P est minimal lorsque $\mathcal{P}$ est minimal donc lorsque $x = 1$.

Ainsi, le périmètre minimal du rectangle $OLMN$ est atteint lorsque $x = 1$ et il est alors égal à $P(1) = 4$.

75 Même dénominateur

1. a. • $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{(-x^2)}{(-x^2) + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x), \text{ donc } f \text{ est paire.}$$

• $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g(-x) = \frac{-x}{(-x^2) + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -g(x), \text{ donc } g \text{ est impaire.}$$

• $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$h(-x) = \frac{1}{(-x^2) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = h(x), \text{ donc } h \text{ est paire.}$$

b. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. On utilise les réponses au a. et au b. pour en déduire que $(\mathcal{C}_1)$ est la courbe représentative de f , $(\mathcal{C}_2)$ celle de h et $(\mathcal{C}_3)$ celle de g .

d. • Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

$f'(x)$ est donc du signe de $2x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	0	1

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

$g'(x)$ est donc du signe de $1 - x^2$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0
$g(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}. \quad h'(x) \text{ est donc du signe de } -2x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	0	1	0

2. a. Les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont symétriques par rapport au point $I(0; \frac{1}{2})$.

En effet, pour tout $M(x; f(x)) \in (\mathcal{C}_1)$ et pour tout $M'(-x; h(-x)) \in (\mathcal{C}_2)$, I est le milieu de $[MM']$ car $\frac{x_M + x_{M'}}{2} = \frac{x + (-x)}{2} = 0 = x_I$

$$\text{et } \frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{f(x) + h(-x)}{2} = \frac{\frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{1}{(-x^2) + 1}}{2} = \frac{\frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}}{2} = \frac{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}}{2} = \frac{1}{2} = y_I.$$

Donc M' est le symétrique de M par rapport à I .

b. Les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}$. En effet, pour

tout $N(x; f(x)) \in (\mathcal{C}_1)$ et pour tout $N'(x; h(x)) \in (\mathcal{C}_2)$, le milieu de $[NN']$ appartient à (Δ) , car

$$\frac{x_N + x_{N'}}{2} = \frac{x + x}{2} = x \text{ et } \frac{y_N + y_{N'}}{2} = \frac{f(x) + h(x)}{2} = \frac{\frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Or, le point $P(x; \frac{1}{2}) \in (\Delta)$.

Donc N' est le symétrique de N par rapport à (Δ) .

76 Aire et périmètre

1. a. Pour tout x de $[0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\mathcal{A}(x) = \cos x \times \sin x \text{ et } \mathcal{P}(x) = 2 \times (\cos x + \sin x).$$

b. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{4} + h \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + h \leq \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{4} \leq h \leq \frac{\pi}{4};$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq -h \leq \frac{\pi}{4}; \quad 0 \leq \frac{\pi}{4} - h \leq \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{4} - h \in [0; \frac{\pi}{2}],$$

$$\text{et } \mathcal{A}\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(\frac{\pi}{4} - h\right) &= \mathcal{A}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \mathcal{A}\left(\frac{\pi}{4} - h\right).$$

Enfin

$$\mathcal{P}\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\frac{\pi}{4} - h\right) &= \mathcal{P}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) \\ &= 2 \times \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{P}\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \mathcal{P}\left(\frac{\pi}{4} - h\right).$$

Ce qui prouve que (Δ) est un axe de symétrie des courbes $(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{C}_{\mathcal{P}})$.

2. Pour tout x de $[0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\mathcal{A}'(x) = -\sin x \times \sin x + \cos x \times \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\text{donc } \mathcal{A}'(x) = \cos 2x.$$

$$\mathcal{P}'(x) = 2 \times (-\sin x + \cos x).$$

D'où les tableaux de variation.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{P}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{P}(x)$	2	$2\sqrt{2}$	2

Aire et périmètre atteignent leur maximum lorsque $x = \frac{\pi}{4}$.

77 Une fonction trigonométrique

1. a. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

b. $\bullet$ $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = 2 \sin(-x) + \sin(2(-x)) = -2 \sin x - \sin 2x = -f(x), \text{ donc } f \text{ est impaire.}$$

• De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= 2 \sin(x + 2\pi) + \sin(2(x + 2\pi)) \\ &= 2 \sin x + \sin(2x + 4\pi) \\ &= 2 \sin x + \sin 2x \\ &= f(x), \text{ donc } f \text{ est périodique de période } 2\pi. \end{aligned}$$

2. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, d'une part :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos x + 2 \cos 2x \\ &= 2 \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) \\ &= 2(2 \cos^2 x + \cos x - 1); \text{ et, d'autre part :} \end{aligned}$$

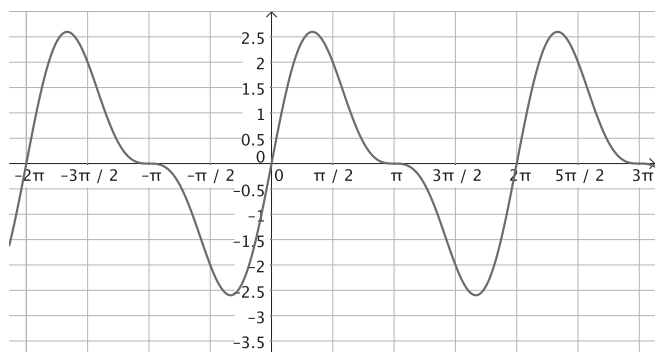
$$2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 2(2 \cos^2 x + 2 \cos x - \cos x - 1) = 2(2 \cos^2 x + \cos x - 1).$$

D'où l'égalité.

b.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$2 \cos x - 1$	+	0	-
$\cos x + 1$	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

3.



78 Les boîtes de lait

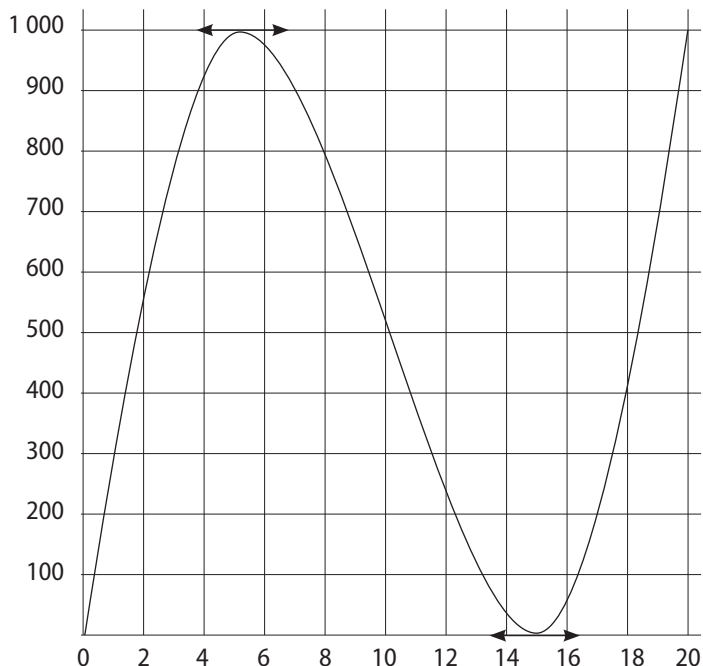
1. a. La fonction f est un polynôme, son ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = 6(x - 5)(x - 15)$.

x	$-\infty$	5	15	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1 000	0	$+\infty$		

b. $(\Delta) : y = 450x$.

x	5	10	15	20
$f(x)$	1 000	500	0	1 000



d. L'équation admet trois solutions : $10 - 5\sqrt{3}$; 10 et $10 + 5\sqrt{3}$.

2. a. et b. L'unité de longueur étant le cm, la boîte a pour dimensions x , $15 - x$, $30 - 2x$ et pour volume : $V(x) = x(15 - x)(30 - 2x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

Pour $x = 10$, on obtient un volume de : $V = 10 \times 5 \times 10 = 500 \text{ cm}^3$.

c. D'après l'étude précédente, V est maximal pour $x = 5$, la boîte a alors un volume de 1 L.

d. Pour réaliser des boîtes de 500 cm^3 , le fabricant peut attribuer à x la valeur $10 - 5\sqrt{3}$ ou 10.

Il préférera sans doute prendre $x = 10$ et se faciliter ainsi la construction.

79 Résolutions d'équations

1. a. $\Delta = \frac{9}{4} > 0$, donc l'équation $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = 0$ admet deux solutions $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

b. On pose $X = \cos x$.

Les solutions de l'équation $\cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} = 0$ sont données par :

$\cos x = X_1$, $\cos x = -1$ donc $x = -\pi$ ou $x = \pi$;

et

$\cos x = X_2$, $\cos x = \frac{1}{2}$ donc $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$.

Les solutions de (E) sont donc $-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$.

2. On procède comme précédemment en posant $X = \sin x$.

Les solutions de l'équation $2X^2 + (4 - \sqrt{3})X - 2\sqrt{3} = 0$ sont $(\Delta = 16 + 8\sqrt{3} + 3 = (4 + \sqrt{3})^2 > 0)$

$$X_1 = \frac{-4 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } X_2 = \frac{-4 + \sqrt{3} - 4 - \sqrt{3}}{4} = -2.$$

Les solutions de l'équation $2\sin^2 x + (4 - \sqrt{3})\sin x - 2\sqrt{3} = 0$ sont données par :

$$\sin x = X_1, \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc } x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} ;$$

et $\sin x = X_2$, $\sin x = -2$ qui n'a pas de solution.

Les solutions de (F) sont donc $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

80 La bonne fonction homographique

a. Il faut que :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty,$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \text{ donc } c = -3.$$

et que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2,$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a, \text{ donc } a = 2.$$

• Pour tout $x \neq -3$,

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+b)}{(x-3)^2} = \frac{-6-b}{(x-3)^2}.$$

Pour que la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 5 soit parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$, il faut que

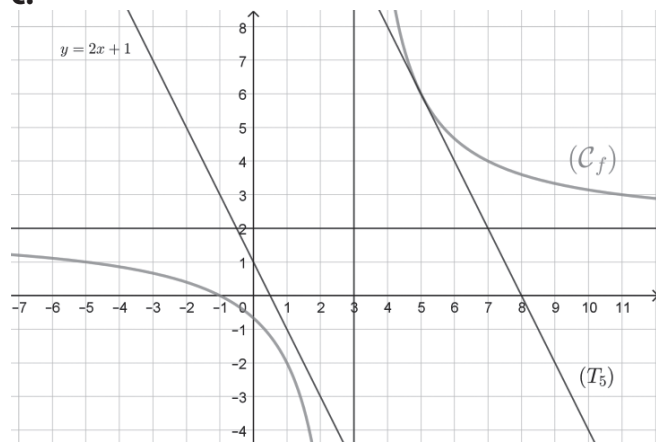
$$f'(5) = -2 \text{ soit } \frac{-6-b}{(5-3)^2} = -2 ; \frac{-6-b}{4} = -2 ; b = 2.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \neq 3, f(x) = \frac{-2x+14}{x-3}.$$

b.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	-2	$+\infty$	-2

c.



81 Modéliser grâce aux fonctions

1. • Pour tout x de $[60 ; 120]$,

$$f'(x) = -45,2 \times 0,02 \sin(0,02x - 1,7)$$

$$f'(x) = -0,904 \sin(0,02x - 1,7).$$

Or, $\sin(0,02x - 1,7) > 0$ lorsque $0 < 0,02x - 1,7 < \pi$, c'est-à-dire $1,7 < 0,02x < \pi + 1,7$ donc $85 < x < \frac{\pi + 1,7}{0,02}$.
Or, $\frac{\pi + 1,7}{0,02} \approx 242$.

D'où le tableau de variation :

x	60	85	120	
f'(x)		+	0	-
f(x)	39,67	45,2	34,57	

• Pour tout x de $[60 ; 120]$,

$$g'(x) = 0,00105x^2 - 0,2152x + 10,70554.$$

$\Delta = 0,001347772 > 0$, donc les solutions de l'équation $g'(x)$ sont :

$$x_1 = \frac{0,2152 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 0,00105} \approx 85 \text{ et } x_2 = \frac{0,2152 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 0,00105} \approx 120.$$

D'où le tableau de variation :

x	60	$x_1 \approx 85$	$x_2 \approx 120$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	29	46	39

(Les résultats sont arrondis à l'unité.)

2. a. Selon les deux modèles, le pourcentage semble avoir été maximal en 1985.

b. • Selon le modèle 1, le pourcentage en l'an 2000 était $f(100) \approx 43,18 \%$.

• Selon le modèle 2, le pourcentage en l'an 2000 était $g(100) \approx 43,054 \%$.

3. a. $f(113) \approx 38,3 \%$ et $g(113) \approx 39,3 \%$.

Le deuxième modèle semble mieux adapté.

b. Selon le deuxième modèle, le pourcentage atteindrait $g(120)$, soit 39 % en 2020.

82 Centre et axe, fonction et dérivée

a. Si $\Omega(a ; b)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$, c'est que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\frac{f(a-x) + f(a+x)}{2} = b$, donc (en dé-

rivant à gauche et à droite), $\frac{-f'(a-x) + f'(a+x)}{2} = 0$, c'est-à-dire $f'(a+x) = f'(a-x)$.

Ainsi, (Δ) d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $(\mathcal{C}')$.

b. Si (Δ) d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $(\mathcal{C})$, c'est que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(a+x) = f(a-x)$, donc (en dérivant à gauche et à droite), $f'(a+x) = -f'(a-x)$, donc, $\frac{f'(a-x) + f'(a+x)}{2} = 0$, ainsi, le point $\Omega(a ; 0)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}')$.

83 La bonne fonction cubique

$$\begin{aligned} \text{a. } A(2 ; 10) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow 2^3 + a \times 2^2 + b \times 2 + c = 10 \\ &\Leftrightarrow 4a + 2b + c = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(2) = 0 &\Leftrightarrow 3 \times 2^2 + 2a \times 2 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow 4a + b = -12. \end{aligned}$$

• La tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = g'(3)(x - 3) + g(3)$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } g(3) &= 3^3 + a \times 3^2 + b \times 3 + c = 9a + 3b + c + 27, \text{ et} \\ g'(3) &= 3 \times 3^2 + 2a \times 3 + b = 6a + b + 27. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } y = (6a + b + 27)(x - 3) + 9a + 3b + c + 27.$$

$$\text{Or, } B(0 ; 2) \in (T)$$

$$\Leftrightarrow 2 = (6a + b + 27)(0 - 3) + 9a + 3b + c + 27$$

$$\Leftrightarrow 2 = -18a - 3b - 81 + 9a + 3b + c + 27$$

$$\Leftrightarrow 9a - c = -56.$$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ 4a + b = -12 \\ 9a - c = -56, \end{cases}$$

$$\text{ce qui, après calculs, donne } \begin{cases} a = -6 \\ b = 12 \\ c = 2. \end{cases}$$

Ainsi, la fonction g a pour expression :

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2.$$

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g(2-x) = (2-x)^3 - 6(2-x)^2 + 12(2-x) + 2$$

$$g(2-x) = -x^3 + 10$$

$$g(2+x) = (2+x)^3 - 6(2+x)^2 + 12(2+x) + 2$$

$$g(2+x) = x^3 + 10.$$

$$\text{Donc } \frac{g(2-x) + g(2+x)}{2} = 10.$$

Ainsi, le point $A(2 ; 10)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

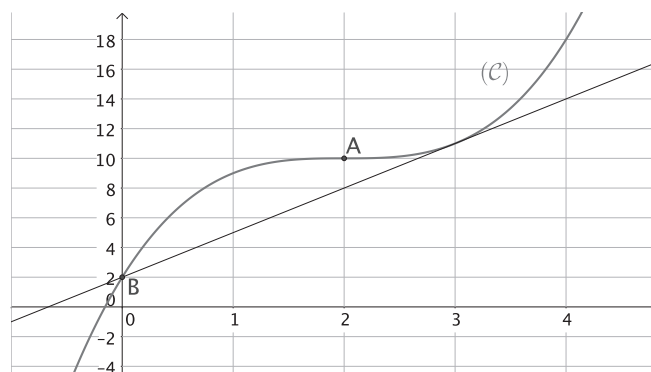
c. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$$

On déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	10	$+\infty$

d.



Problèmes

84 Différentes écritures

Partie A

1. a. Pour tout $x \neq -\frac{d}{c}$,

$$\alpha + \frac{\beta}{x - \gamma} = \frac{\alpha(x - \gamma) + \beta}{x - \gamma} = \frac{\alpha x - \alpha\gamma + \beta}{x - \gamma}$$

$$\text{et } f(x) = \frac{ax + b}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Ainsi, il y a égalité lorsque :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a}{c} \\ -\alpha\gamma + \beta = \frac{b}{c} \\ \gamma = -\frac{d}{c} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a}{c} \\ \beta = \frac{bc - ab}{c} \\ \gamma = -\frac{d}{c} \end{cases}.$$

b. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$ donc la droite d'équation $y = \alpha$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim_{\substack{x \rightarrow \gamma \\ x < \gamma}} f(x) = \infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \gamma \\ x > \gamma}} f(x) = \infty$ donc la droite d'équation $x = \gamma$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

c. • Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$,
 $f(\gamma - h) = \alpha + \frac{\beta}{-h}$ et $f(\gamma + h) = \alpha + \frac{\beta}{h}$,
 donc $\frac{f(\gamma - h) + f(\gamma + h)}{2} = \alpha$.

Donc le point $I(\gamma; \alpha)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

• $x_I = \gamma = -\frac{d}{c}$ et $y_I = \alpha = \frac{a}{c}$.

d. • Lorsque $\beta = \frac{bc - ab}{c} > 0$, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	γ	$+\infty$
$f(x)$	α	$+\infty$	α

• Lorsque $\beta = \frac{bc - ab}{c} < 0$, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	γ	$+\infty$
$f(x)$	α	$-\infty$	α

2. a. • Les droites d'équation $y = 2$ et $x = 5$ sont asymptotes à $(\mathcal{C}_1)$ donc $\alpha = 2$ et $\gamma = 5$.

• $A(2; 3) \in (\mathcal{C}_1)$ donc $f_1(2) = 3$ c'est-à-dire $2 + \frac{\beta}{2 - 5} = 3$, soit $\beta = -3$.

Ainsi, pour tout $x \neq 5$, $f_1(x) = 2 + \frac{-3}{x - 5}$.

b. Le point $I(-1; -1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_2)$ donc $\alpha = -1$ et $\gamma = -1$.

• $B(-3; -2) \in (\mathcal{C}_2)$ donc $f_2(-3) = -2$,

c'est-à-dire $-1 + \frac{\beta}{-3 + 1} = -2$, soit $\beta = 2$.

Ainsi, pour tout $x \neq -1$, $f_2(x) = -1 + \frac{2}{x + 1}$.

Partie B

1. a. Pour tout $x \neq -\frac{e}{d'}$,

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{d\left(x + \frac{e}{d}\right)} = \frac{\frac{a}{d}x^2 + \frac{b}{d}x + \frac{c}{d}}{x + \frac{e}{d}}.$$

Ainsi, $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$, $c' = \frac{c}{d}$, $d' = -\frac{e}{d}$.

b. Pour tout $x \neq d'$,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - \delta} &= \frac{(\alpha x + \beta)(x - \delta) + \gamma}{x - \delta} \\ &= \frac{\alpha x^2 + (\beta - \alpha\delta)x + \gamma - \alpha\delta x + \beta\delta}{x - \delta} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} \alpha = a' \\ \beta - \alpha\delta = b' \\ \gamma = c' \\ \delta = d' \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \alpha = a' \\ \beta = b' + a'd' \\ \gamma = c' \\ \delta = d' \end{cases}$$

c. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\gamma}{x - \delta} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\gamma}{x - \delta} = 0$, donc la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim_{\substack{x \rightarrow \delta \\ x < \delta}} f(x) = \infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \delta \\ x > \delta}} f(x) = \infty$, donc la droite d'équation $x = \delta$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

d. • Le point d'intersection de ces deux asymptotes est le point $I(x_I; y_I)$ tel que :

$$\begin{cases} y_I = \alpha x_I + \beta \\ x_I = \delta \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_I = \delta \\ y_I = \alpha\delta + \beta \end{cases}.$$

• Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$,

$$f(\delta - h) = \alpha(\delta - h) + \beta + \frac{\gamma}{-h}$$

$$\text{et } f(\delta + h) = \alpha(\delta + h) + \beta + \frac{\gamma}{h}$$

$$\text{donc } \frac{f(\delta - h) + f(\delta + h)}{2} = \alpha\delta + \beta.$$

Donc le point $I(\delta; \alpha\delta + \beta)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

2. • Les droites d'équation $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$, donc, d'après le 1. c., $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\delta = 1$.

• Le point $A(3; 4) \in (\mathcal{C})$ donc $f(3) = 4$,
 c'est-à-dire $\frac{1}{2} \times 3 + \frac{3}{2} + \frac{\gamma}{3-1} = 4$, d'où $\gamma = 2$.
 L'équation de $(\mathcal{C})$ est donc $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x-1}$.

85 Coïncée entre deux droites

Partie A

1. • $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = -x + \cos^2(-x) = -x + \cos^2 x$.
 Donc $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

f n'est ni paire, ni impaire.

2. La fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est périodique de période π ; mais la fonction $x \mapsto x$ n'est pas périodique, donc f n'est pas périodique.

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= x + \pi + \cos^2(x + \pi) \\ &= x + \pi + (-\cos x)^2 \\ &= x + \pi + \cos^2 x \\ &= f(x) + \pi. \end{aligned}$$

b. D'après le a., pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x + \pi) - \pi$$

Ainsi, (Γ_2) est obtenue en translatant (Γ_1) du vecteur $\pi \vec{i} + \pi \vec{j}$.

Partie B

1. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $0 \leq \cos^2 x \leq 1$,
 ainsi $x \leq f(x) \leq x + 1$.

b. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c. La courbe $(\mathcal{C})$ est coïncée entre les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$.

2. • Pour $(\mathcal{D}_0) \cap (\mathcal{C})$, il faut résoudre l'équation :

$$x + \cos^2 x = x, \text{ c'est-à-dire } \cos^2 x = 0 \text{ d'où } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{D}_0)$ et de $(\mathcal{C})$ sont donc : $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Pour $(\mathcal{D}_1) \cap (\mathcal{C})$, il faut résoudre l'équation :

$$x + \cos^2 x = x + 1, \text{ c'est-à-dire } \cos^2 x = 1, \text{ d'où } x = k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{D}_1)$ et de $(\mathcal{C})$ sont donc : $(k\pi; 1 + k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour tout x de $[0; \pi]$,

$$f(x) = x + \cos x \times \cos x, \text{ donc}$$

$$f'(x) = 1 + \cos x (-\sin x) + (-\sin x) \cos x$$

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = 1 - \sin 2x.$$

$$f'(x) = 0, \Leftrightarrow 1 = \sin 2x \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ (puisque l'on travaille dans } [0; \pi]).$$

D'où le tableau de variation de f :

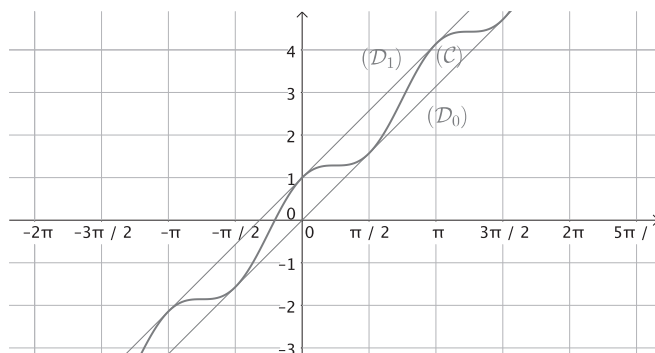
x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	1		$\pi + 1$

4.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	1	$\frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	$\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6} + \frac{3}{4}$	$\pi + 1$

5. a. et b.



86 Fonctions polynômes de degré 3

Partie A

1. a. Pour $(\mathcal{C}_1)$: $a^2 - 3b = -2 < 0$;

pour $(\mathcal{C}_2)$: $a^2 - 3b = 13 > 0$;

pour $(\mathcal{C}_3)$: $a^2 - 3b = 1 > 0$;

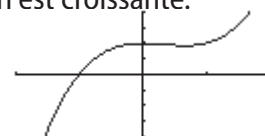
pour $(\mathcal{C}_4)$: $a^2 - 3b = -5 < 0$.

b. On conjecture que :

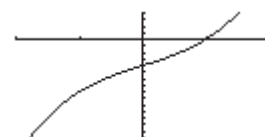
• lorsque $a^2 - 3b > 0$, la fonction est croissante, puis décroissante puis croissante ;

• lorsque $a^2 - 3b < 0$, la fonction est croissante.

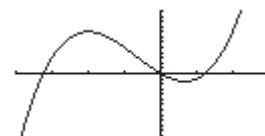
2. a. Première équation



Deuxième équation



Troisième équation



b. Ces trois cas ($a_1^2 - 3b_1 = 1 > 0$; $a_2^2 - 3b_2 = -9 < 0$; $a_3^2 - 3b_3 = 16 > 0$) confirment la conjecture émise au 1. b.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

On étudie le signe de $f'(x)$ à l'aide du discriminant :

$$\Delta = (2a)^2 - 4 \times 3 \times b$$

$$\Delta = 4a^2 - 12b$$

$$\Delta = 4(a^2 - 3b).$$

• Lorsque $\Delta < 0$ (c'est-à-dire lorsque $a^2 - 3b < 0$), $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

• Lorsque $\Delta = 0$ (c'est-à-dire lorsque $a^2 - 3b = 0$), $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \frac{-2a}{2 \times 3} = -\frac{a}{3}$.

$f'(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et f croissante sur $\mathbb{R}$.

• Lorsque $\Delta > 0$ (c'est-à-dire lorsque $a^2 - 3b > 0$), $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \frac{-2a - \sqrt{\Delta}}{6} (=x_1)$ ou $x = \frac{-2a + \sqrt{\Delta}}{6} (=x_2)$.

$f'(x) \leq 0$ pour tout x de $[x_1; x_2]$ et $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$.

f est donc croissante sur $]-\infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$ et f est décroissante sur $[x_1; x_2]$.

3. Pour tout h de $\mathbb{R}$,

$$f\left(-\frac{a}{3} - h\right) = \left(-\frac{a}{3} - h\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3} - h\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3} - h\right) + c$$

et

$$f\left(-\frac{a}{3} + h\right) = \left(-\frac{a}{3} + h\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3} + h\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3} + h\right) + c$$

Après calculs, on trouve que

$$\frac{f\left(-\frac{a}{3} - h\right) + f\left(-\frac{a}{3} + h\right)}{2} = f\left(-\frac{a}{3}\right).$$

Ce qui montre que le point $I\left(-\frac{a}{3}; f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$ dans un repère.

Partie C

1. $f(a) = a^3 + aa^2 + ba + c$

et $f'(a) = 3a^2 + 2aa + b$ donc (Δ_a) a pour équation

$$y = (3a^2 + 2aa + b)(x - a) + a^3 + aa^2 + ba + c$$

$$y = (3a^2 + 2aa + b)x - 2a^3 - aa^2 + c$$

2. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) \text{ et } g''(x) = f''(x).$$

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g''(x) = 6x + 2a$, donc $g''(x) \geq 0$ pour tout x de $\left[-\frac{a}{3}; +\infty\right[$

et $g''(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty; -\frac{a}{3}]$.

g' est donc croissante sur $\left[-\frac{a}{3}; +\infty\right[$ et décroissante sur $]-\infty; -\frac{a}{3}]$.

b. $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$, donc a est solution de l'équation $g'(x) = 0$.

• $g'(x) = (x - a)(Ax + B)$ (car $g(x)$ est un polynôme de degré 2 dont a est racine).

$$g'(x) = Ax^2 + (-aA + B)x - aB.$$

$$\text{Or, } g'(x) = f'(x) - f'(a)$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax + b - 3a^2 - 2aa - b$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax + (-3a^2 - 2aa).$$

$$\text{Par identification, on obtient : } \begin{cases} A = 3 \\ -aA + B = 2a \\ -aB = -3a^2 - 2aa \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} A = 3 \\ B = 2a + 3a \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \beta = -\frac{B}{A} = -\frac{2a + 3a}{3}.$$

• On vérifie que $g(\beta) = 4\left(a + \frac{a}{3}\right)^3$.

c. D'après ce qui précède, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3(x - a)(x - \beta).$$

Donc $g'(x) < 0$ pour x situé entre a et β et $g'(x) \geq 0$ ailleurs.

d. • Lorsque $a > -\frac{a}{3}$, $\beta < a$:

x	$-\infty$	β	$-\frac{a}{3}$	a	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$						

Ainsi, pour tout x situé « autour de a », $g(x) \geq 0$.

• Lorsque $a = -\frac{a}{3}$, $\beta = a$:

x	$-\infty$	$\alpha = \beta$	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$
$g(x)$			0	

Ainsi, pour tout $x \leq a$, $g(x) \leq 0$

et pour tout $x \geq a$, $g(x) \geq 0$.

• Lorsque $a < -\frac{a}{3}$, $\beta > a$:

x	$-\infty$	a	$-\frac{a}{3}$	β	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$				0		

Ainsi, pour tout x situé « autour de a », $g(x) \leq 0$.

3. La position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ_a) se déduit du signe de $f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$, c'est-à-dire du signe de $g(x)$.

Ainsi :

- lorsque $\alpha > -\frac{a}{3}$, $(\mathcal{C})$ est situé au-dessus de (Δ_α) ;
- lorsque $\alpha = -\frac{a}{3}$, $(\mathcal{C})$ est situé au-dessous de (Δ_α) pour $x \leq \alpha$ et au-dessus de (Δ_α) pour $x \geq \alpha$.
- lorsque $\alpha < -\frac{a}{3}$, $(\mathcal{C})$ est situé au-dessous de (Δ_α) .

87 Distances d'un point à des tangentes

Partie A

1. $\bullet \mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 2(-x)}{2 + (-x)^2} = \frac{-x^3 - 2x}{2 + x^2} = -f(x).$$

Donc f est impaire.

2. a. $\Delta = 80 > 0$, les solutions sont donc $X_1 = \frac{-8 - \sqrt{80}}{2} = -4 - 2\sqrt{5}$ et $X_2 = -4 + 2\sqrt{5}$.

b. En posant $X = x^2$, on retrouve l'équation du 2. a.

Ainsi, soit $x^2 = X_1$, qui n'a pas de solution car $X_1 < 0$, soit $x^2 = X_2$, c'est-à-dire

$$x = -\sqrt{2\sqrt{5} - 4} \text{ ou } x = \sqrt{2\sqrt{5} - 4}.$$

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2)(2 + x^2) - (x^3 - 2x) \times 2x}{(2 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^2 - 4 - 2x^4 + 4x^2}{(2 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 + 8x^2 - 4}{(2 + x^2)^2}.$$

b. En développant et en simplifiant :

$(x - \sqrt{2\sqrt{5} - 4})(x + \sqrt{2\sqrt{5} - 4})(x^2 + 4 + 2\sqrt{5})$, on retrouve $x^4 + 8x^2 - 4$ comme affiché.

c. On déduit le tableau de variation de f de la factorisation ci-dessus.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2\sqrt{5}-4}$	$\sqrt{2\sqrt{5}-4}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \alpha$	$\searrow -\alpha$	$\nearrow +\infty$		

$$\text{avec } \alpha = f(-\sqrt{2\sqrt{5} - 4}) = \frac{-\sqrt{2\sqrt{5} - 4}(2\sqrt{5} - 6)}{2\sqrt{5} - 2}.$$

d. • Pour tout x de $\mathbb{R}$,

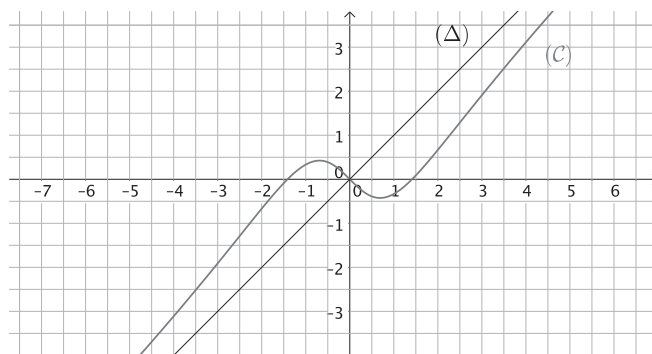
$$x\left(1 - \frac{4}{2 + x^2}\right) = \frac{x(2 + x^2) - 4x}{2 + x^2} = \frac{x^3 - 2x}{2 + x^2} = f(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{2 + x^2} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{2 + x^2} = 0,$$

donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

e.



Partie B

1. $\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$ ou $x = \sqrt{2\sqrt{5} - 4}$.

Ainsi, (T) et (T') tangentes à $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses $-\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$ et $\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$ ont pour équations $y = \alpha$ et $y = -\alpha$.

$$\bullet f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^4 + 8x^2 - 4}{(2 + x^2)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 4 = (2 + x^2)^2$$

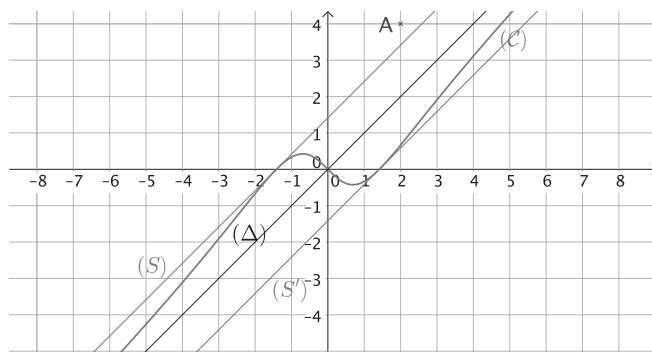
$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 4 = 4 + 4x^2 + x^4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}.$$

Or, $f(-\sqrt{2}) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 0$, donc (S) et (S') tangentes à $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ ont pour équations $y = x + \sqrt{2}$ et $y = x - \sqrt{2}$.

2.



Partie C

1. $(\Delta) : x - y = 0$, donc $d(A; (\Delta)) = \frac{|1 \times 2 - 1 \times 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

2. a. $(S) : x - y + \sqrt{2} = 0$, donc $d(A; (S)) = \frac{|1 \times 2 - 1 \times 4 + \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

$(S') : x - y - \sqrt{2} = 0$, donc $d(A; (S')) = \frac{|1 \times 2 - 1 \times 4 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

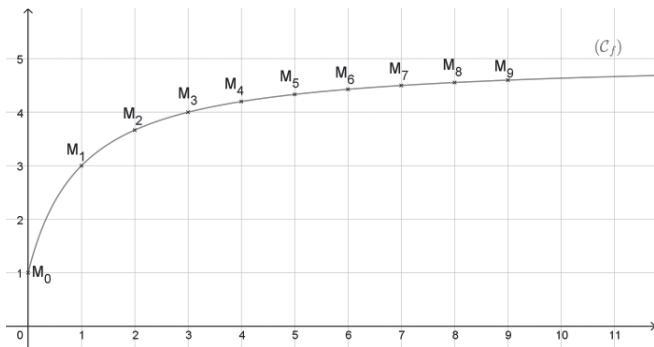
b. Du a., on déduit que

$$d((S); (S')) = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$

Activités d'introduction

1 fonction et suite

1. a. et b.



c. Les points M_n ont pour ordonnée $f(n) = 5 - \frac{4}{n+1}$.

2. a. Pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$,
donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

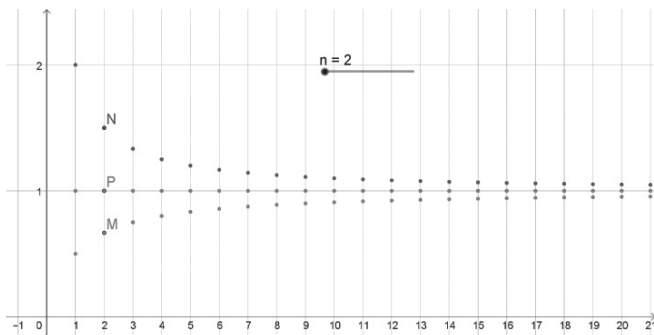
b. Comme, pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \leq n+1$ et que f est croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $f(n) \leq f(n+1)$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.

2 Représentation graphique de suites et conjectures

1. a. et b.



c. On conjecture que :

- la suite (I_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$;
- la suite (L_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 1$;
- la suite (a_n) est constante.

$$2. \bullet \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1} \\ = \frac{-(n+1) + (n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Or $\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ donc $I_{n+1} > I_n$ donc la suite (I_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.

$$\bullet \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, L_{n+1} - L_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} \\ = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

Or $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$, donc $L_{n+1} < L_n$ donc la suite (L_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

De plus, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 1$.

$$\bullet \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \frac{n+1}{n} \\ = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \times \frac{n+1}{n} \\ = \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n} = 1.$$

Donc la suite (a_n) est constante égale à 1.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = 1$.

3. Lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire du rectangle R_n reste constante égale à 1.

3 Suite géométrique

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n V_n = P_0 V_0$.

$$2. \text{ a. } P_1 = 2; V_1 = \frac{1}{2}; P_2 = 4; V_2 = \frac{1}{4}; P_3 = 8; V_3 = \frac{1}{8};$$

$$P_4 = 16; V_4 = \frac{1}{16}; P_5 = 32; V_5 = \frac{1}{32}.$$

b. On conjecture que $P_n = 2^n$ et $V_n = \frac{1}{2^n}$.

c. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$.

$$d. P_n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 256 \Leftrightarrow n = 8.$$

$$e. V_n = \frac{1}{512} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{512} \Leftrightarrow 2^n = 512 \Leftrightarrow n = 9.$$

4 Suite arithmétique et somme de termes consécutifs

1. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

2.

n	u _n	Somme
0	2	2
1	5	7
2	8	15
3	11	26
4	14	40
5	17	57
6	20	77
7	23	100
8	26	126
9	29	155
10	32	187
11	35	222
12	38	260
13	41	301
14	44	345
15	47	392
16	50	442
17	53	495
18	56	551
19	59	610
20	62	672

En cellule B, il faut saisir la formule : « =B2+3 ».

3. a. Cette somme contient 21 termes.

$$b. \quad S_{20} = 2 + 5 + \dots + 59 + 62$$

$$+ \quad S_{20} = 62 + 58 + \dots + 5 + 2$$

$$2S_{20} = 64 + 64 + \dots + 64 + 64$$

$$c. \text{ Ainsi, } 2S_{20} = 21 \times 64 \text{ d'où } S_{20} = 21 \times \frac{64}{2} = 21 \times 32 = 672.$$

$$4. \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, S_n = \frac{(n+1)(4+3n)}{2}.$$

Savoir-faire

$$3. a. u_0 = 0; u_1 = \frac{1}{3}; u_2 = \frac{2}{5}; u_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

$$b. u_0 = 2; u_1 = \sqrt{8}; u_2 = \sqrt{14}; u_{n+1} = \sqrt{n^2 + 5n + 8}.$$

$$c. u_0 = -4; u_1 = -1; u_2 = 0; u_{n+1} = \frac{2n-2}{n+2}.$$

$$d. u_0 = 1; u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{5}; u_{n+1} = \frac{1}{n^2 + 2n + 2}.$$

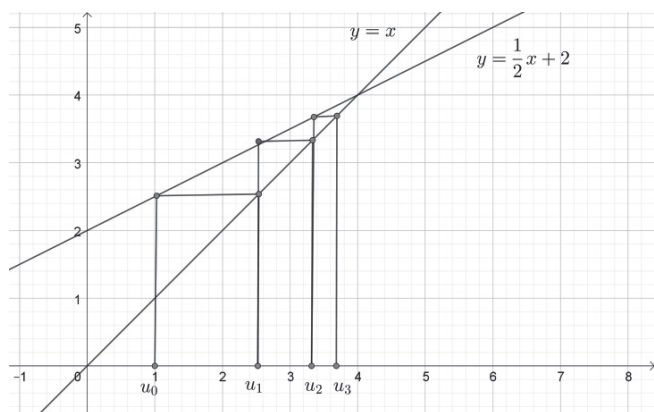
$$4. a. u_1 = 4; u_2 = -8; u_{n+1} = (-2)^{n+2}.$$

$$b. u_1 = 1; u_2 = \sqrt{2}; u_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{n}}.$$

$$c. u_1 = \sqrt{2}; u_2 = \sqrt{3}; u_{n+1} = \sqrt{n+1}.$$

$$5. a. u_1 = \frac{5}{2}; u_2 = \frac{13}{4}.$$

b. et c.



$$9. a. \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, n+1 > 0 \text{ et } n+2 \geq 0, \text{ donc } u_n > 0 > -1.$$

De plus, $n+1 < n+2$, donc $u_n < 1$.Ainsi (u_n) est bornée par -1 et 1 .b. 1^{re} méthode – Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$$

donc $u_{n+1} > u_n$ et (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.2^e méthode – f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0.$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.3^e méthode – On sait que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+2}{n+3}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+3} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2 + 4n + 4}{n^2 + 4n + 3} > 1$$

donc $u_{n+1} > u_n$ et (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1; (u_n) \text{ converge vers } 1.$$

$$10. \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n) \leq 1.$$

$$\text{Donc } -2 \leq 2\sin(n) \leq 2 \text{ et } -5 \leq u_n \leq -2.$$

La suite (u_n) est donc bornée par -5 et -2 .

$$11. \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3u_n - u_n = 2u_n.$$

Or $u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$.La suite (u_n) est donc décroissante sur $\mathbb{N}$.

14 a. (u_n) est arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 5$.

b. (u_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

c. (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

d. (u_n) est géométrique de raison $\frac{5}{3}$ et de premier terme $u_0 = 5$.

e. (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

f. (u_n) est géométrique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$.

15 1. $u_{50} = u_2 + (50 - 2) \times (-2) = -95$.

$$v_7 = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{7-0} = 0,015625.$$

2. a. $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{50}$

$$S = \frac{(50 - 3 + 1)(u_{50} + u_3)}{2}$$

$$S = \frac{(50 - 3 + 1)(u_{50} + u_3)}{2}$$

$$S = \frac{48(-95 + (-1))}{2} = -2\,304.$$

b. $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$

$$S' = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = 3,984\,375.$$

Exercices d'entraînement

Suites : représentation et propriétés

16 a. $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{3}; u_3 = \frac{1}{4}$.

b. $u_1 = u_0 - 0 = 1; u_2 = u_1 - 1 = 0; u_3 = 0 - 2 = -2$.

c. $u_1 = (-1)^2 = 1; u_2 = (-1)^4 = 1; u_3 = 1$.

d. $u_1 = u_0 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3;$

$u_2 = u_1 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2; u_3 = u_2 + (-1)^2 = 3$.

17 a. Pour tout nombre réel x on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leq 1$.

b. $u_{n+8} = \sin\left(\frac{(n+8)\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\frac{n\pi}{4} = u_n$.

18 (u_n) semble être décroissante et converger vers 2.

19 Faux ; Faux ; Faux.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x\left(1 + \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{3}{\left(1 + \frac{5}{x}\right)} \\ &= 0 \times 3 = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + 2) = -\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

21 a. $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 1 = 1; u_2 = 4; u_3 = 9; u_4 = 16;$
 $u_5 = 25$.

b. Conjecture : $u_n = n^2$.

22 a. $u_2 = 3u_1 + 2u_0 = 9 + 2 = 11; u_3 = 33 + 6 = 39;$
 $u_4 = 139; u_5 = 495$.

b. $u_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{6}; u_3 = \frac{1}{12}; u_4 = \frac{1}{20};$
 $u_5 = \frac{1}{30}$.

23 a. $u_{15} = 3,54 \times 10^7$. **b.** $u_{15} = 229\,326$.

24 a. (u_n) admet un majorant : 5.
 $(n^2 \geq 0 \Rightarrow -n^2 \leq 0 \Rightarrow 5 - n^2 \leq 5)$.

b. $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{2n+2 - (n+2)}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)} \geq 0$$

et $u_n - 1 = \frac{-1}{n+2} < 0$.

c. $2 \leq u_n \leq 4$. En effet $u_{2n} = 4$ et $u_{2n+1} = 2$.

d. $-2 \leq u_n \leq 2$.

En effet $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 1$ donc $-2 \leq 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 2$.

25 a. $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 5 - (-3n+5) = -3 < 0$
donc (u_n) est décroissante.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$ donc
 (u_n) est décroissante.

c. $u_0 = \sin(0) - 3 = -3, u_1 = -2, u_2 = -3$ et $u_3 = -4$ donc
 (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

$$\begin{aligned} \text{d. } u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0. \end{aligned}$$

26 a. (u_n) diverge vers $-\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{3x+2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{5}{x}\right)}{x\left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{2}{3} \\ \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

c. $-1 \leq (-1)^n \leq 1, \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n};$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

27 a. $u_n - 1 = \frac{2n+1}{n+1} \geq 0$ et $u_n - 3 = \frac{-1}{n+1} \leq 0$

donc $u_n \geq 1$ et $u_n \leq 3$.

b. $-1 \leq \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) \leq 1, -3 \leq 3 \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) \leq 3$

donc $-3 + 2 \leq 3 \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) + 2 \leq 3 + 2$.

28 a. Si (u_n) désigne une suite croissante de premier terme u_0 alors, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq u_0$, alors (u_n) est minorée par u_0 .

b. En raisonnant de la même manière, on montre que (u_n) est majorée par son premier terme.

29 a. $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \geq 0$ pour $x \in [0; +\infty[$,

donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Or $u_n = f(n)$ sur $\mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ elle est donc minorée par $u_0 = \sqrt{3}$.

30 a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \times u_n \leq 1 \times u_n$ (car $u_n > 0$) et $u_{n+1} \leq u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \times u_n \geq 1 \times u_n$ (car $u_n < 0$) et $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

31 Conjectures :

(ℓ_n) est décroissante et tend vers 0 ; (L_n) est croissante et tend vers $+\infty$; (a_n) est croissante et tend vers 1.

Suites arithmétiques

32 a. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}$ donc (u_n) est arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

b. $u_0 = 1 ; u_1 = 2 ; u_2 = \frac{7}{3}, u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

c. (u_n) n'est pas arithmétique : $u_0 = 2 ; u_1 = -2 ; u_2 = -4$.

d. (u_n) est arithmétique de raison $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{5}$.

e. $u_{n+1} - u_n = n$ et n n'est pas une constante donc (u_n) n'est pas arithmétique.

f. (u_n) est arithmétique de raison -3 .

33 a. $10 - 6 = 6 - 2$ donc 2 ; 6 et 10 sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4.

b. Non. $n + u - n = 4$ et $n - (n - 3) = 3$.

c. Oui, de raison x .

$3x + 1 - (2x + 1) = x$ et $2x + 1 - (x + 1)$

34 a. $u_{20} = u_0 + 20r = 1 + 20 \times 2 = 41$.

b. $u_0 + u_1 + \dots + u_{20} = \frac{u_0 + u_{20}}{2} \times 21 = 21 \times 21 = 441$.

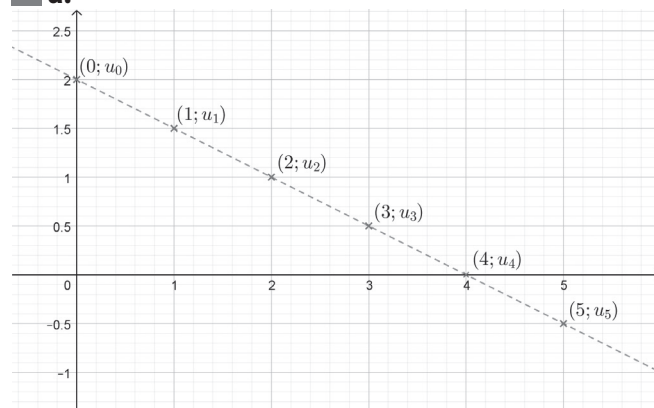
35 a. $u_9 = u_4 + 5r, r = \frac{u_9 - u_4}{5} = \frac{10 - 2}{5} = \frac{8}{5}$.

b. $u_0 + 4r = u_4, u_0 = u_4 - 4r = 2 - \frac{32}{5} = -\frac{22}{5}$.

$u_0 + u_1 + \dots + u_9 = \frac{u_0 + u_9}{2} \times 10 = 28$.

36 $u_n = u_0 + nr, n = \frac{u_n - u_0}{r} = \frac{123}{3} = 41$.

37 a.



b. Ils sont alignés.

Notons $A_1(1; u_1), A_2(2; u_2), A_3(3; u_3), A_4(4; u_4)$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_4} \left(1; -\frac{1}{2}\right)$

Suites géométriques

38 a. $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison 3.

b. $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

c. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{13}{5}; \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

d. (u_n) n'est pas géométrique.

e. $u_{n+1} = -u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison -1 .

39 a. Oui car $\frac{-6}{3} = \frac{12}{-6}$ (de raison -2).

b. Oui pour $n = 0$, et non pour $n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^2}{5n} = \frac{n}{5} = \frac{n}{5}$.

c. $\frac{x}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 2$. Oui pour $x = 2$.

40 a. $u_6 = u_0 \times q^6 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{64}$.

$$\begin{aligned} \text{b. } u_0 + u_1 + \dots + u_6 &= u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{2}} \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{128}\right) = \frac{6 \times 127}{128} = \frac{381}{64}. \end{aligned}$$

41 a. $u_6 = u_4 \times q^2, q^2 = 2, q = -\sqrt{2}$ car $q = \frac{u_5}{u_4} < 0$.

$$\begin{aligned} \text{b. } u_0 &= \frac{u_4}{q^4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = u_0 \times \frac{q^{11} - 1}{q - 1} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}^{11} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3}{2} \frac{32\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}. \end{aligned}$$

42 $u_n = u_0 \times 2^n, 2^n = 256, n = 8$.

43 a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$.

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+2}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0$.

44 a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5} u_n + \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5} u_n - \frac{1}{5}$
 $= \frac{1}{5} (u_n - 1) = \frac{1}{5} v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

b. $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$,

$$u_n = v_n + 1 = 5 \times \frac{1}{5^n} + 1 = \frac{1}{5^{n-1}} + 1.$$

c. (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Compléments sur les suites arithmétiques et géométriques

45 Si $r \leq 0$ alors (u_n) est décroissante et si $r \geq 0$ alors (u_n) est croissante.

46 Si $0 < q \leq 1$ alors (u_n) est décroissante et si $q \geq 1$ alors (u_n) est croissante.

47 a. Elle semble arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Elle semble géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c. Elle ne semble ni arithmétique ni géométrique.

d. Elle semble arithmétique de raison -1 .

48 1. $u_n = u_1 + (n-1)r = 5 + 2(n-1) = 2n + 3$.

2. a. $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2} \times n$
 $= \frac{10 + 2(n-1)}{2} \times n = (n+4)n$.

b. $T_n = \frac{(n+4)n}{n} = n+4$; $T_{n+1} - T_n = 1$ donc (T_n) est arithmétique de raison 1.

49 1. $u_1 = u_0 - 2 \times 0 + 5 = 8, u_2 = 11; u_3 = 12$.

2. (u_n) n'est pas arithmétique : $u_3 - u_2 = 1 \neq u_2 - u_1$.

3. $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$
 $= u_{n+1} - 2(n+1) + 5 - (u_n - 2n + 5)$
 $= u_{n+1} - u_n - 2 = v_n - 2$.

donc (v_n) est arithmétique de raison -2 .

4. a. $S_n = \frac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1) = \frac{5 + 5 - 2n}{2} \times (n+1)$
 $= (5-n)(n+1)$
 $= -n^2 + 4n + 5$.

b. $S_n = u_{n+1} - u_0, u_{n+1} = u_0 + S_n = -n^2 + 4n + 8$.

c. $u_n = -(n-1)^2 + 4(n-1) + 8 = -n^2 + 6n + 3$.

50 1. $u_1 = 1; u_2 = \frac{4}{3}; u_3 = \frac{11}{9}$.

2. (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique :

$$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1 \text{ et } \frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}.$$

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} u_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} u_n - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{3} \left(u_n - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} v_n$.

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b. $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et

$$u_n = v_n + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}.$$

c. $v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$
 $= -\frac{3}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = -\frac{9}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

d. $u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + \frac{3}{2} + v_1 + \frac{3}{2} + \dots + v_n + \frac{3}{2}$
 $= v_0 + v_1 + \dots + v_n + \frac{3}{2} (n+1)$
 $= -\frac{9}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2} (n+1)$
 $= -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} n + \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$
 $= -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} n + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3^n}$.

51 1. Choix 1 : $1\,320\,000 + 70\,000 = 1\,390\,000$.

Choix 2 : $1\,320\,000 + \frac{5}{100} \times 1\,320\,000 = 1\,386\,000$.

2. $a_{n+1} = a_n + 70\,000$, $b_{n+1} = b_n + \frac{5}{100} b_n = 1,05b_n$.

3. a. Choix 1 : 16 350 000, choix 2 : 16 602 818,15.

Nombre d'années	Choix 1	Choix 2
0	1320000	1320000
1	1390000	1386000
2	1460000	1455300
3	1530000	1528065
4	1600000	1604468,25
5	1670000	1684691,663
6	1740000	1768926,246
7	1810000	1857372,558
8	1880000	1950241,186
9	1950000	2047753,245
10	2020000	2150140,907

b. Choix 2.

c. Le choix 2 est plus avantageux s'il s'engage pour au moins 5 ans.

52 1. a. $u_1 = -2$; $u_2 = -3$; $u_3 = -2$; $u_4 = 1$.

b. (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique :

$$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1 \text{ et } \frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}.$$

$$2. a. v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1) - 3 - (u_n + 2n - 3) = u_{n+1} - u_n + 2 = v_n + 2.$$

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

$$b. v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n = \frac{v_0 + v_0 + (n-1) \times 2}{2} \times n = (v_0 + n - 1)n = (n-4)n.$$

On en déduit $u_n - u_0 = (n-4)n$

$$\text{et } u_n = (n-4)n + u_0 = n^2 - 4n + 1.$$

$$53 1. u_p + u_q = u_0 + pr + u_0 + qr = 2u_0 + (p+q)r = 2u_0 + (p'+q')r = u_0 + p'r + u_0 + q'r = u_{p'+q'}.$$

$$2. v_p v_q = v_0 \times r^p \times v_0 \times r^q = v_0 \times v_0 \times r^{p+q} = v_0 \times v_0 \times r^{p'+q'} = v_0 r^{p'} \times v_0 r^{q'} = v_{p'} \times v_{q'}.$$

54 On désigne par r la raison de la suite cherchée.

On a : $x = y - r$ et $z = y + r$, donc y et r sont les solutions du système :

$$\begin{cases} (y-r) + y + (y+r) = 9 \\ (y-r)^2 + y^2 + (y+r)^2 = 59 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 9 \\ 3y^2 + 2r^2 = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ r^2 = 16 \end{cases}$$

Si $r = 4$, on a : $(x, y, z) = (-1; 3; 7)$.

Si $r = -4$, on a : $(x, y, z) = (7; 3; -1)$.

$$55 a. v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + 1}{u_n} = 2 + \frac{1}{u_n} = 2 + v_n$$

donc (v_n) est arithmétique de raison 2.

$$b. v_n = v_0 + n \times 2 = 1 + 2n; u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1+2n}.$$

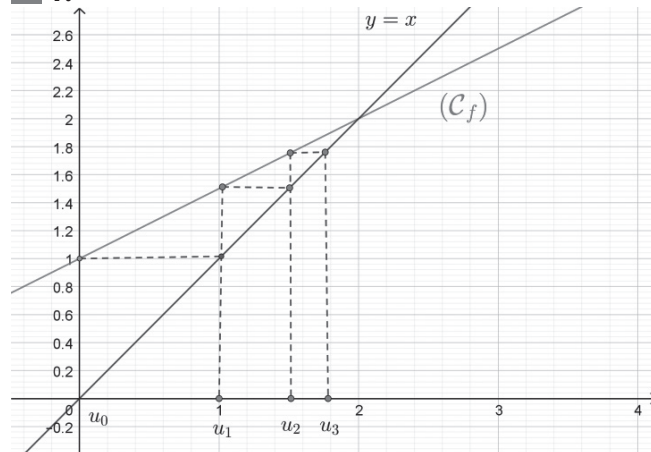
$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = 0.$$

$$56 a. u_n = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$b. S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

57 1.



2. Conjectures : (u_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

$$3. f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$4. a. v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$b. v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{et } u_n = v_n + 2 = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2.$$

$$c. u_{n+1} - u_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0. \text{ Donc la suite } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = 2.$$

58 1. $u_{n+1} - u_n = 2^n$ et 2^n n'est pas une constante donc (u_n) n'est pas arithmétique.

2. $v_n = u_{n+1} - u_n = 2^n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1$.

$$3. a. S_n = v_0 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

$$b. S_n = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - 1$$

$$\text{donc } u_{n+1} = S_n + 1 = 2^{n+1} - 1 + 1 = 2^{n+1}.$$

$$u_n = S_{n-1} + 1 = 2^n - 1 + 1 = 2^n.$$

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

59 a. S_1 est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S_1 = \frac{1 + 100}{2} \times 100 = 101 \times 50 = 5\,050.$$

$$b. \text{Posons } u_0 = 1 \text{ et } u_n = 99, u_n = u_0 + n \times 2,$$

$$\text{donc } 99 = 1 + 2n \text{ et } n = 49.$$

$$\text{Donc } S_2 = \frac{1 + 99}{2} \times 50 = 2\,500.$$

$$c. \text{Posons } u_0 = 14 \text{ et } u_n = -66, u_n = u_0 + n \times (-5)$$

$$\text{donc } -66 = 14 - 5n \text{ et } n = 16.$$

$$\text{Donc } S_3 = \frac{14 - 66}{2} \times 17 = -26 \times 17 = -442.$$

$$60 a. S_1 = 1 \times \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2\,047.$$

$$b. S_2 = \frac{1 \times (-3)^{11} - 1}{-3 - 1} = \frac{(-3)^{11} - 1}{-4} = \frac{-3^{11} - 1}{-4} = \frac{3^{11} + 1}{4}$$

$$= 44\,287.$$

$$c. S_3 = 3^5 \times \frac{3^{16} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{16} - 3^5}{2} = 21\,523\,239.$$

$$61 a. v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3}$$

$$= \frac{\frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4}}{\frac{2u_n + 3 + 3u_n + 12}{u_n + 4}}$$

$$= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} v_n.$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n, \text{ donc } (v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{5}.$$

$$b. v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n;$$

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow u_n v_n + 3v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow (1 - v_n)u_n = 1 + 3v_n,$$

$$u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n} = \frac{1 + \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}.$$

$$c. u_n = -3 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^n = -3 + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^n \Leftrightarrow 1 = -3, \text{ ce qui est impossible.}$$

$$62 1. a. S_n - qS_n = 1 + q + \dots + q^n - (q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1})$$

$$= 1 - q^{n+1}.$$

$$b. \text{D'après a. } (1 - q)S_n = 1 - q^{n+1} \text{ donc } S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$2. a. u_1 = u_0 \times q, u_2 = u_0 \times q^2 \text{ et } u_n = u_0 \times q^n.$$

$$b. s_n = u_0(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \text{ donc } s_n = u_0 S_n.$$

$$c. s_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$3. v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$= 3 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 3(2^{n+1} - 1).$$

63 La droite est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

$$\text{Donc } u_n = \frac{f(n) + f(n+1)}{2} \times (n+1 - n)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}n + 1 + \frac{1}{2}(n+1) + 1}{2} = \frac{n + \frac{5}{2}}{2} = \frac{n}{2} + \frac{5}{4}.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{n}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$ et par conséquent (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

64 a. Notons u_n le nombre de personnes recevant l'information à la $n^{\text{ième}}$ minute. (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$. Le nombre de personnes qui connaissent l'information...

- au bout de 2 minutes : $1 + 2 + 4 = 7$,
- au bout de 3 minutes : $7 + 8 = 15$,
- au bout de 6 minutes : $15 + 16 + 32 + 64 = 127$.

$$b. u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

$$c. 2^{n+1} - 1 \geq 8\,000\,000 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 8\,000\,001$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq \frac{8\,000\,001}{2} \Leftrightarrow n \geq 22$$

donc on peut mettre au courant les 8 millions de personnes en seulement 22 minutes.

Se tester

65 1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Vrai ; 6. Faux ;

7. Faux ; 7. Vrai.

66 1. Faux. $u_0 = \frac{2 \times 0 + 7}{0 + 2} = \frac{7}{2}$ et $u_1 = \frac{2 \times 1 + 7}{1 + 2} = \frac{9}{3}$ donc $u_1 < u_0$.2. Vrai. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+7}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.3. Vrai. $w_n = \frac{\frac{2n+7}{n+2} + 1}{\frac{2n+7}{n+2} - 2} = \frac{\frac{2n+7}{n+2} + \frac{n+2}{n+2}}{\frac{2n+7}{n+2} - \frac{2n+4}{n+2}} = \frac{\frac{3n+9}{n+2}}{\frac{3}{n+2}} = \frac{3n+9}{3} \times \frac{n+2}{3} = \frac{3n+9}{3}$ $w_{n+1} - w_n = n + 1 + 3 - (n + 3) = 1$ donc (w_n) est une suite arithmétique de raison 3.

4. Vrai. Voir la réponse à la question 3.

5. Faux. $v_1 = f(v_0) = f(3) = \frac{2 \times 3 + 7}{3 + 2} = \frac{13}{5}$ et $v_0 = 3$ donc $v_1 < v_0$.6. Faux. $\lim_{x \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (n + 3) = +\infty$.

67 1. a. ; 2. c. ; 3. b. ; 4. a. ; 5. c.

68 1. a. En effet, $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+1)^2 + 2} - \frac{-2}{n^2 + 2} = \frac{-2}{n^2 + 2n + 3} + \frac{2}{n^2 + 2} = \frac{-2(n^2 + 2) + 2(n^2 + 2n + 3)}{(n^2 + 2n + 3)(n^2 + 2)} = \frac{4n + 2}{(n^2 + 2n + 3)(n^2 + 2)}$.Or, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $n \geq 0$, par conséquent $n^2 + 2n + 3 > 0$, $n^2 + 2 > 0$ et $u_n + 2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.2. a. En effet, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $(-1)^n \geq -1$ donc $n + (-1)^n \geq n - 1$.Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + (-1)^n = +\infty$.3. b. En effet, $S_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 3 \times 5 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 15 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{2}{3} < 1$) donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 15$.4. c. En effet, pour tout n de $\mathbb{N}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $2 - 1 \leq 2 + \sin n \leq 2 + 1$,donc $0 < 1 \leq 2 + \sin n \leq 3$, par conséquent $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2 + \sin n} \geq \frac{1}{3}$, $1 \geq \frac{1}{2 + \sin n} \geq \frac{1}{3}$ donc $3 \times 1 \geq \frac{3}{2 + \sin n} \geq 3 \times \frac{1}{3}$ c'est-à-dire $3 \geq u_n \geq 1$.

Exercices d'approfondissement

69 Somme et produit de suites

1. a. $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} + v_{n+1} - u_n - v_n = u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n$, or $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n \geq 0$ donc $w_{n+1} - w_n \geq 0$ et (w_n) est croissante.b. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques de raisons respectives r et r' alors $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} + v_{n+1} - u_n - v_n = u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n = r + r'$.Donc la suite (w_n) est arithmétique de raison $r + r'$.2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques de raisons respectives q et q' alors $t_{n+1} = u_{n+1} v_{n+1} = q u_n q' v_n = q q' u_n v_n = q q' t_n$.Donc la suite (t_n) est géométrique de raison $q q'$.

70 Encadrement du terme général

• $u_n > 0,99 \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+2} > 0,99 \Leftrightarrow n-1 > 0,99n + 1,98 \Leftrightarrow 0,01n > 2,98 \Leftrightarrow n > 298$.• $-1 < 2 \Rightarrow n-1 < n+2 \Rightarrow \frac{n-1}{n+2} < 1 < 1,01$ pour tout n de $\mathbb{N}$.• $n_0 = 299$ convient.

71 Suite et calculatrice

a. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+2}{(n+1)^3 + (n+1)^2} - \frac{n+2}{n^3 + n^2} = \frac{(n+3)(n^3 + n^2) - (n+2)[(n+1)^3 + (n+1)^2]}{[(n+1)^3 + (n+1)^2][n^3 + n^2]} = \frac{-(2n^3 + 10n^2 + 12n + 4)}{[(n+1)^3 + (n+1)^2][n^3 + n^2]} \leq 0$ (car $n \geq 0$).

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^3+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 0.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

c. On effectue quelques essais et on trouve : $n_0 = 33$.

72 Suites arithmétiques et géométriques

1. Pour $a = 0$, $u_n = b$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Donc (u_n) est constante sur $\mathbb{N}^*$ et sa limite est b .

Pour $a = 1$, $u_{n+1} = u_n + b$, donc (u_n) est arithmétique de raison b .

Si $b = 0$ alors $u_n = u_0$ donc la suite est constante et égale à u_0 ;

Si $b > 0$ alors (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

Si $b < 0$ alors (u_n) est décroissante et tend vers $-\infty$.

$$2. ax + b = x \Leftrightarrow b = (1-a)x \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a}.$$

3. α est l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

4. Pour $u_0 = \alpha$, on a $u_1 = \alpha$, $u_2 = \alpha$, ..., par conséquent $u_n = \alpha$. Donc (u_n) est constante et converge vers α .

$$5. \text{a. } v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n + (1-a)\alpha - \alpha = a(u_n - \alpha) = av_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a .

$$\text{b. } v_n = v_0 \times a^n = (u_0 - \alpha) \times a^n$$

$$u_n = v_n + \alpha = (u_0 - \alpha) \times a^n + \alpha.$$

c. (u_n) est convergente pour $-1 < a < 1$, sa limite est alors égale à α .

73 Un paradoxe de Zénon

$$1. d_1 = 8; d_2 = 4; d_3 = 2.$$

$$2. d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n \text{ et } d_n = d_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. a. On conjecture que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 16$.

$$\text{b. } S_n = 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 16 - 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

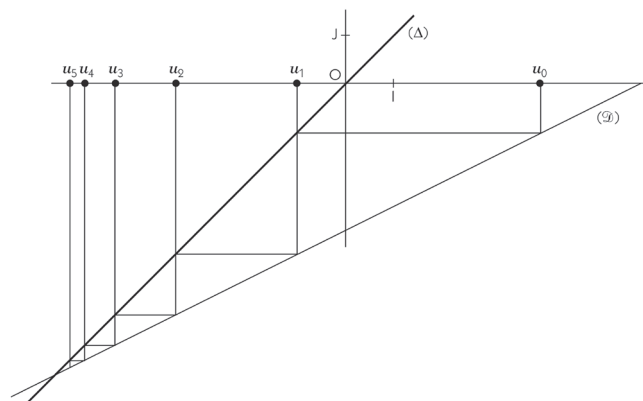
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 16.$$

$$4. S_n = 16 \Leftrightarrow -16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ ce qui est impossible.}$$

74 Suite arithmético-géométrique

1. Dans le repère (O, I, J) , on trace les droites (Δ) et $(\mathcal{D})$ d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x - 3$.

On construit u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 comme indiqué sur la figure.



2. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}u_n - 3\right) - \left(\frac{1}{2}u_{n-1} - 3\right) = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}).$$

b. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = u_n - u_{n-1}$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - u_0 = -5$.

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = v_{n+1} = -5 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$; donc, la suite (u_n) est décroissante.

3. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n + 6 = \left(\frac{1}{2}u_{n-1} - 3\right) + 6 = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6).$$

b. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $w_n = u_n + 6$.

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = u_0 + 6 = 10$.

On en déduit que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n + 6 = (u_0 + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -6.$$

75 Conjecture et démonstration

$$1. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1} + \frac{9}{10^{n+1}}.$$

$$2. \text{On a : } u_1 = 0,1 + \frac{9}{10^2}; u_2 = u_1 + \frac{9}{10^3}; u_3 = u_2 + \frac{9}{10^4};$$

$$\dots; u_n = u_{n-1} + \frac{9}{10^{n+1}}.$$

En additionnant membre à membre les n égalités, on obtient : $u_n = 0,1 + 9 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}}\right)$.

Entre parenthèses, on a la somme de n termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $\frac{1}{10^2}$.

$$\text{Donc : } u_n = 0,1 + \frac{9}{10^2} \times \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = 0,1 + 0,1 \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 0,2 - \frac{1}{10^{n+1}}.$$

3. On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,2$.

76 Suites emmêlées

$$1. a. u_1 = \frac{2u_0 + v_0}{3} = \frac{4}{3}; v_1 = \frac{5}{3}; u_2 = \frac{2u_1 + v_1}{3} = \frac{13}{9};$$

$$v_2 = \frac{14}{9}; \dots$$

b. Conjectures : (u_n) est une suite croissante et (v_n) est décroissante et convergent toutes deux vers $\frac{3}{2}$.

$$2. a. S_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= u_n + v_n = S_n$$

Donc la suite (S_n) est constante et égale à $S_0 = 3$.

$$D_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{u_n - v_n}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(u_n - v_n) = \frac{1}{3} D_n.$$

Donc la suite (D_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $D_0 = -1$.

$$b. S_n + D_n = 2u_n, u_n = \frac{S_n + D_n}{2} = \frac{S_0 + D_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$$

$$= \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}.$$

$$S_n - D_n = 2v_n, v_n = \frac{S_n - D_n}{2} = \frac{3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{2}.$$

77 Suite auxiliaire

$$a. v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}; v_1 = \frac{7}{2}; v_2 = \frac{13}{2}; v_3 = \frac{19}{2}; v_4 = \frac{25}{2}.$$

b. Conjecture : (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3u_n + 1}{u_n} = 3 + \frac{1}{u_n} = 3 + v_n.$$

$$c. v_n = v_0 + 3n = \frac{1}{2} + 3n \text{ donc } u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 3n} = \frac{2}{1 + 6n}.$$

78 Avec paramètre

1. a. Si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$; (u_n) est une suite constante.

b. Si $\alpha \equiv \pi [2\pi]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$; (u_n) est une suite alternée $(-1; 1; -1; 1; \dots)$.

c. Si $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$; (u_n) est la suite nulle.

2. Si α est différent des valeurs précédentes, alors (u_n) est une suite géométrique de raison $\cos \alpha$ tel que :

$$0 < |\cos \alpha| < 1; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

79 Nombres entiers impairs

Notons u_0 le premier entier impair de cette somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme u_0 .

$$\frac{u_0 + u_{99}}{2} \times 100 = 17\,600, \frac{u_0 + u_0 + 2 \times 99}{2} = 17\,600,$$

$$u_0 + 99 = 176$$

$$u_0 = 77. \text{ Les nombres sont : } 77, 79, 81, \dots, 77 + 2 \times 99.$$

80 Le meilleur choix

• Le premier choix rapporte

$$\frac{101 + 100 + 64}{2} \times 64 = 8\,480.$$

• Le second choix rapporte $1 \times \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$.

• Le choix le plus intéressant est de loin le second.

81 Suites extraites

$$1. a. f(x) = x \Leftrightarrow 5 + \frac{3}{x+1} = x \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} = x - 5$$

$$\Leftrightarrow 3 = (x+1)(x-5) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 + \sqrt{48}}{2} \text{ car } x \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 + 4\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{3}.$$

b. $f'(x) = -3/(x+1)^2 < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

c. • Pour $x \leq a$, $f(x) \geq f(a)$ donc $f(x) \geq a$ (car $f(a) = a$); $f(f(x)) \leq f(a)$ ainsi $f(f(x)) \leq a$.

• Pour $x \geq a$, $f(x) \leq f(a)$ donc $f(x) \leq a$ (car $f(a) = a$); $f(f(x)) \geq f(a)$ ainsi $f(f(x)) \geq a$.

2. Conjecture : (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

3. a. Conjectures : (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.

b. Conjecture : Les deux suites ont la même limite $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}$.

82 Le meilleur placement

1. a. On pose : $C_0 = 1\,000\,000$; l'intérêt annuel est $0,065 \times C_0$, c'est-à-dire 65 000 F.

$$C_1 = C_0 + 65\,000 = 1\,065\,000;$$

$$C_2 = C_1 + 65\,000 = 1\,130\,000;$$

$$C_3 = C_2 + 65\,000 = 1\,195\,000.$$

b. Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on a :

$$C_n = C_{n-1} + 65\,000.$$

Donc, (C_n) est une suite arithmétique de premier terme 1 000 000 et de raison 65 000.

2. a. On a : $D_1 = 1\,065\,000$; $D_2 = 1\,134\,225$;

$$D_3 \approx 1\,207\,950.$$

b. Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on a :

$$D_n = D_{n-1} \times 1,065.$$

Donc, (D_n) est une suite géométrique de premier terme 1 000 000 et de raison 1,065.

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = 1\,000\,000 + 65\,000n$;

donc : $C_{10} = 1\,650\,000$.

$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = 1\,000\,000 \times 1,065^n$;

donc : $D_{10} \approx 1\,877\,137$.

83 Les points sur une spirale

1. a. $u_0 = 16$; $u_1 = 16 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$; $u_2 = 8\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 8$;
 $u_3 = 8 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$; donc, (u_n) est une suite géométrique de premier terme 16 et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_{n-1} A_n = u_n$;

donc : $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 16 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2} - 1}$.

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{16}{\sqrt{2} - 1} = 16(\sqrt{2} + 1)$.

3. a. $a_0 = \frac{1}{2} \times (u_1)^2 = 64$; $a_1 = \frac{1}{2} \times (u_2)^2 = 32$;

$a_2 = \frac{1}{2} \times (u_3)^2 = 16$; $a_3 = \frac{1}{2} \times (u_4)^2 = 8$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{2} \times a_{n-1}$; donc, (a_n) est une suite géométrique de premier terme 64 et de raison $\frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n = 128 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$; donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 128$.

84 Un paradoxe de Zénon

Les distances successives, exprimées en mètres, séparant Achille de la tortue sont : 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ;

0,01 ; 0,001 ; ...

Ces distances forment une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $u_0 = 100$.

Le terme général de cette suite est : $u_0 = 100 \times (0,1)^n$.

La somme des n premiers termes de cette suite est :

$$s_n = 100 \times \frac{1 - (0,1)^n}{1 - 0,1} = \frac{1\,000}{9} \times [1 - (0,1)^n].$$

On en déduit :

• la limite de cette suite est 0, donc Achille rattrapera la tortue ;

• la limite de s_n est $\frac{1\,000}{9}$, donc il aura alors parcouru 111,111... m.

85 Carrés coloriés

1. Chaque étape consiste à découper un ou plusieurs carrés non hachurés en 9 carrés égaux et à en hachurer 1 sur les 9. Donc, après chaque découpage, le côté du carré est divisé par 3.

On en déduit :

• après 1 découpage, il reste 8 carrés de côtés $\frac{1}{3}$ non hachurés ;

• après 2 découpages, il reste 8×8 , c'est-à-dire 8^2 carrés de côtés $\frac{1}{3^2}$ non hachurés ;

• après 3 découpages, il reste $8^2 \times 8$, c'est-à-dire 8^3 carrés de côtés $\frac{1}{3^3}$ non hachurés...

Donc, si après $n - 1$ découpages, il reste 8^{n-1} carrés de côtés $\frac{1}{3^{n-1}}$ non hachurés, alors après n découpages,

il reste $8^{n-1} \times 8$, c'est-à-dire 8^n carrés de côtés

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3^n}$, non hachurés.

On en déduit que pour tout entier naturel n non nul, après n découpages, il reste 8^n carrés de côtés $\frac{1}{3^n}$ non hachurés.

2. a. $a_1 = 1 - 8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$;

$a_2 = 1 - 8^2 \times \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 = 1 - 8^2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{17}{81}$;

$a_3 = 1 - 8^3 \times \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = 1 - 8^3 \times \frac{1}{3^6} = \frac{217}{729}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1 - 8^n \times \left(\frac{1}{3^n}\right)^2$
 $= 1 - 8^n \times \frac{1}{3^{2n}} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

86 Bassins et fuites

a. La contenance de B_1 à la fin du 30^e jour est :

$$50 - \frac{20}{100\,000} \times 30 = 49,994 \text{ m}^3.$$

Celle de B_2 est :

$$50 \times \frac{1 - 0,9^{31}}{1 - 0,9} = 500(1 - 0,9^{31}) \approx 48,1 \text{ m}^3$$

b. $\frac{50}{\frac{20}{100\,000}} = 250\,000$

donc B_1 sera vidé à la fin du 250 000^e jour.

B_2 ne se videra jamais : à la fin du n^{e} jour sa contenance sera de $500 \times 0,9^n$ qui n'est nulle que lorsque n tend vers l'infini.

87 Étude d'une épidémie

$$\text{a. } C_{n+1} = C_n - \frac{30}{100} C_n = 0,7 C_n,$$

$$\text{donc } C_n = C_0 \times 0,7^n = 5\,000 \times 0,7^n.$$

$$\text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = 0 \text{ donc l'épidémie tend à disparaître.}$$

Problèmes**88 Évolution du nombre d'abonnés**

$$1. u_{n+1} = 0,8u_n + 2\,000.$$

$$2. 0,8x + 2\,000 = x \Leftrightarrow 0,2x = 2\,000 \Leftrightarrow x = 10\,000.$$

$$3. \text{a. } v_{n+1} = u_{n+1} - 10\,000 = 0,8u_n - 8\,000 \\ = 0,8(u_n - 10\,000) = 0,8v_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

$$\text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ car } (v_n) \text{ est géométrique de raison } 0,8.$$

c. $u_n = v_n + 10\,000$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10\,000$ ce qui signifie que le nombre de clients de cet opérateur se stabilisera aux alentours de 10 000 clients.

89 Suites adjacentes

$$1. f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ et } f'(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

($\Delta = -8 < 0$ et $3 > 0$), donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$2. f(0) = -1 < 0 \text{ et } f(1) = 2 > 0 \text{ donc } f(0) < f(\alpha) < f(1) \\ \text{d'où } 0 < \alpha < 1.$$

Car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$3. \text{a. Si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0, w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2}w_n.$$

$$\text{Si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0, w_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2}w_n.$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$\text{b. } w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

$$4. \text{ Si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n = u_n - u_n = 0$$

$$\text{Si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$$

$$\text{alors } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$$

Donc (u_n) est croissante.

On montre de la même façon que (v_n) est décroissante.

$$5. \text{a. Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } f(u_n) \leq 0 \leq f(v_n), \\ f(u_n) \leq f(\alpha) \leq f(v_n) \\ \text{donc } u_n \leq \alpha \leq v_n, \text{ par conséquent } \ell \leq \alpha \leq \ell'.$$

$$\text{De plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \text{ d'après } 3. \text{ b. donc } \ell' - \ell = 0.$$

$$\text{b. D'après } 5. \text{ a. on a } \ell \leq \alpha \leq \ell' \text{ et } \ell' = \ell \text{ donc } \ell' = \ell = \alpha.$$

$$6. \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{128} \Leftrightarrow n \geq 7. \text{ Donc } u_7 \leq \alpha \leq v_7 \text{ est un en-} \\ \text{cadrement d'amplitude } \frac{1}{128}.$$

90 Demi-vie de l'iode 131

$$\text{a. } u_{n+1} = u_n - \frac{8,3}{100} u_n = 0,917u_n,$$

$$u_n = u_0 \times 0,917^n = 1\,000\,000 \times 0,917^n.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, par conséquent la quantité d'iode tend à disparaître. (Elle disparaîtra le jour où la valeur de u_n devient plus petite que 1).

$$\text{b. } u_n = \frac{1}{2}u_0 \Leftrightarrow u_0 \times 0,917^n = \frac{1}{2}u_0 \Leftrightarrow 0,917^n = \frac{1}{2}.$$

À un jour près, la demi-vie du noyau d'iode est de 8 jours.

91 Mythologie et mathématiques

$$1. \text{a. Soit } u_n \text{ le nombre de cercles après } n \text{ divisions ; on a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n.$$

Pour tout entier naturel n , la somme des diamètres de ces 2^n cercles est égale à 2 ; de plus, ces diamètres sont égaux. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \frac{1}{2^n}$.

$$\text{b. } (r_n) \text{ est une suite géométrique de premier terme est } 1 \text{ et de raison } \frac{1}{2}. \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0.$$

$$2. \text{a. } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^n \times \pi \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 = \frac{\pi}{2^n}.$$

(a_n) est une suite géométrique de premier terme π et de raison $\frac{1}{2}$.

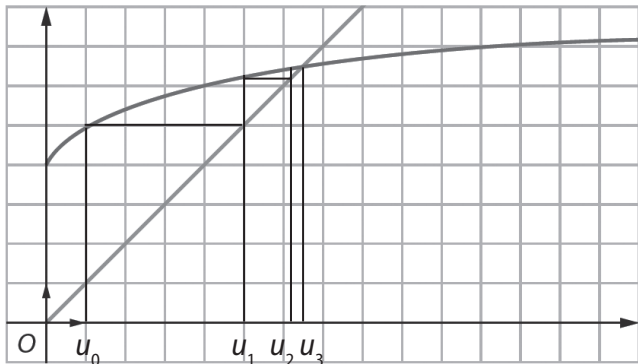
$$\text{b. On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

92 Point fixe

$$1. \text{a. } f(x) = x \Leftrightarrow 7 - \frac{6}{x+2} = x \Leftrightarrow -\frac{6}{x+2} = x-7 \\ \Leftrightarrow -6 = (x+2)(x-7) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \text{ car } x \geq 0.$$

$$\text{b. } f'(x) = 6/(x+2)^2 > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } [0 ; +\infty[.$$

2. • On conjecture que : pour $u_0 \in [0 ; \alpha[$, la suite (u_n) est croissante et converge vers α .



• De même, on conjecture que pour $u_0 \in]\alpha ; +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante et converge vers α .

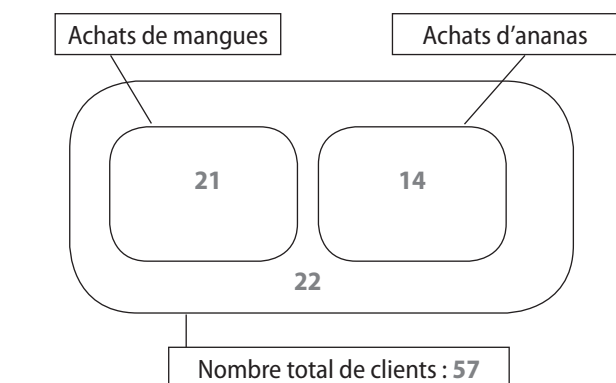
3. a. Pour $u_0 \in [0 ; \alpha[$, $u_n \in [0 ; \alpha[$, donc $f(u_n) \geq u_n$, $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.

b. Pour $u_0 \in]\alpha ; +\infty[$, $u_n \in]\alpha ; +\infty[$, donc $f(u_n) \leq u_n$ et $u_{n+1} \leq u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

Activités d'introduction

1 Diagrammes et tableaux à double-entrée

1. a.

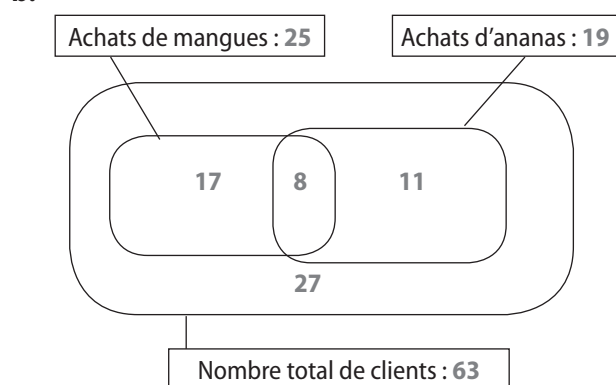


Achat de mangues \ Achat d'ananas	Achat de mangues		
	Oui	Non	Total
Oui	0	14	14
Non	21	22	43
Total	21	36	57

b. 22 clients n'ont acheté ni mangues, ni ananas.

2. a. Parmi les 25 clients ayant acheté des mangues, 8 ont aussi acheté des ananas, donc 17 ($17 = 25 - 8$) ont acheté des mangues mais pas d'ananas.

b.

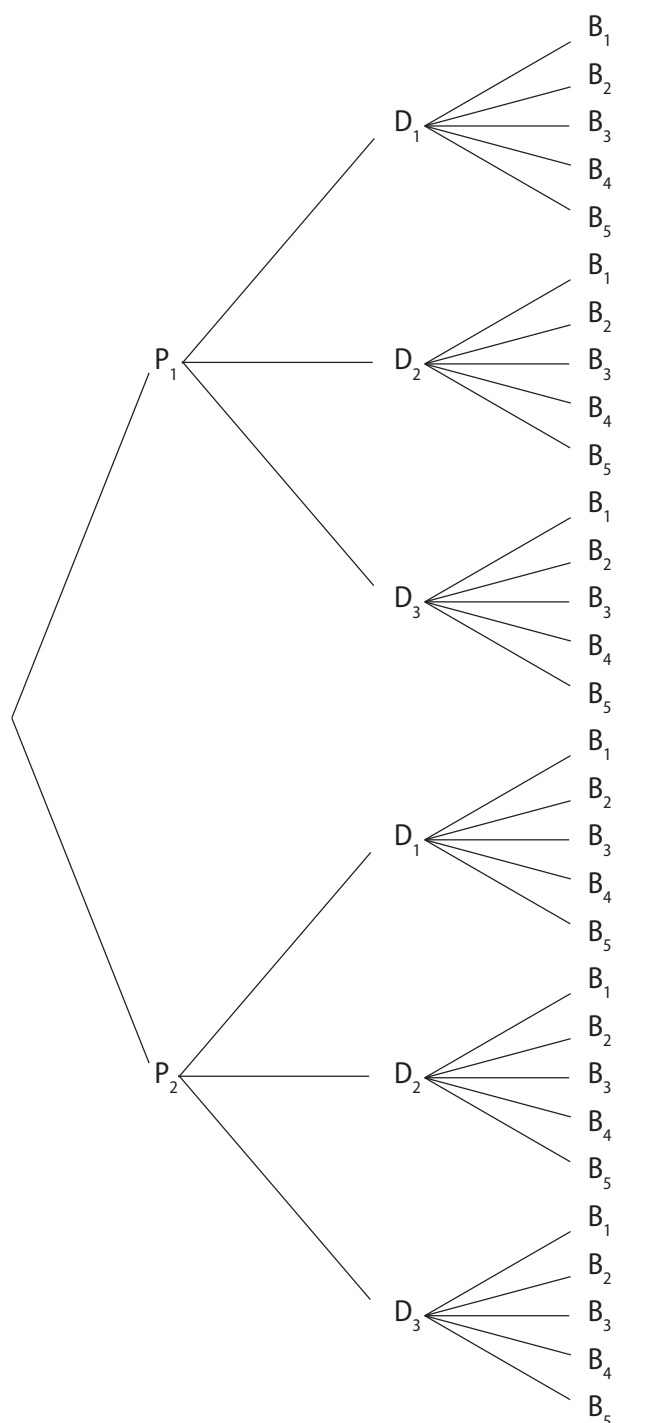


Achat de mangues \ Achat d'ananas	Achat de mangues		
	Oui	Non	Total
Oui	8	11	19
Non	17	27	44
Total	25	38	63

c. 27 clients n'ont acheté ni mangues, ni ananas.

2 Arbres et nombre de choix

1. a. Plats Desserts Boissons



b. Il y a 30 ($2 \times 3 \times 5$) menus possibles.

2. a.

2	3	5
Plats	Desserts	Boissons

→ Nombre total de choix : $2 \times 3 \times 5 = 30$.

b. Il y a 30 menus possibles.

3 p-uplets et arrangements

A p-uplets : lettres distinctes ou non

1. a.

4	4	4
---	---	---

1^{re} lettre 2^e lettre 3^e lettre

→ Nombre de choix : $4^3 = 64$.

b. Il y a 64 mots possibles de 3 lettres distinctes ou non, choisies dans l'ensemble E.

2.

5	5	5
---	---	---

1^{re} lettre 2^e lettre 3^e lettre

→ Nombre de choix : $5^3 = 125$.

Il y a 125 mots possibles de 3 lettres distinctes ou non, choisies dans l'ensemble F.

3.

n	n	...	n
---	---	-----	---

1^{re} lettre 2^e lettre ... p^e lettre

→ Nombre de choix : n^p

Il y a n^p mots possibles de p lettres distinctes ou non, choisies parmi n lettres.

B Arrangements : lettres distinctes

1. a.

4	3
---	---

1^{re} lettre 2^e lettre

→ Nombre de choix : $4 \times 3 = 12$.

b. Il y a 12 mots possibles de 2 lettres distinctes choisies dans l'ensemble E.

2. a.

5	4	3
---	---	---

1^{re} lettre 2^e lettre 3^e lettre

→ Nombre de choix : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Il y a 60 mots possibles de 3 lettres distinctes choisies dans l'ensemble G.

b.

6	5	4	3
---	---	---	---

1^{re} lettre 2^e lettre 3^e lettre 4^e lettre

→ Nombre de choix : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Il y a 360 mots possibles de 4 lettres distinctes choisies dans l'ensemble H.

3.

n	n-1	n-2	n-3	n-4
---	-----	-----	-----	-----

1^{re} lettre 2^e lettre 3^e lettre 4^e lettre 5^e lettre

→ Nombre de choix :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)$$

Il y a $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ mots de 5 lettres distinctes choisies dans l'ensemble I.

4 la notation factorielle et les permutations

1. a. $1! = 1$; $3! = 6$; $5! = 120$; $6! = 720$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = n \times (n-1)!$$

$$n! = n \times (n-1)!$$

2.

4	3	2	1
---	---	---	---

choix ① choix ② choix ③ choix ④

→ Nombre de choix : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$

Les quatre collègues de travail ont 4! (c'est-à-dire 24) façons différentes de s'asseoir.

Savoir-faire

3 On peut utiliser un tableau à double-entrée (ou un diagramme) pour répondre.

Sport individuel Sport collectif	Oui	Non	Total
Oui	17	$36 = 53 - 17$	53
Non	$8 = 25 - 17$	$23 = 59 - 36$	$31 = 84 - 53$
Total	25	$59 = 84 - 25$	84

23 élèves interrogés ne pratiquent ni sport individuel, ni sport collectif.

4 $B_2 = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$, $B_3 = \{3; 6; 9; 12; 15\}$, $B_5 = \{5; 10; 15\}$, $B_7 = \{7; 14\}$.

B_2, B_3, B_5, B_7 ne forment pas une partition de E car, par exemple, $B_2 \cap B_3 = \{6; 12\}$ donc $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$.

8 Pour chaque chiffre, il y a 10 choix : de 0 à 9. Ainsi :

10	10	10	10
----	----	----	----

1^{er} choix 2^e choix 3^e choix 4^e choix

→ Nombre total de choix : $10^4 = 10\,000$.

Il y a donc 10 000 codes possibles.

9 $A = 6! = 720$; $B = 7! = 5\,040$.

10

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

1^{er} rang 2^e rang 3^e rang 4^e rang 5^e rang

→ Nombre total de choix : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$.

La bibliothécaire peut ranger ces livres de 120 façons différentes.

14

5	4	3
---	---	---

1^{re} place 2^e place 3^e place

→ Nombre total de choix : $5 \times 4 \times 3 = A_3^5 = 60$.

Ces voitures peuvent se ranger de 60 façons possibles.

15 On choisit 5 personnes parmi 8, sans répétition et sans que l'ordre des personnes n'ait d'importance.

$C_8^5 = 56$. On peut constituer 56 équipes différentes.

$$16 \cdot A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30.$$

$$\begin{aligned} \cdot C_{10}^4 &= \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4!6!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = \frac{10 \times 3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 10 \times 3 \times 7 = 210. \end{aligned}$$

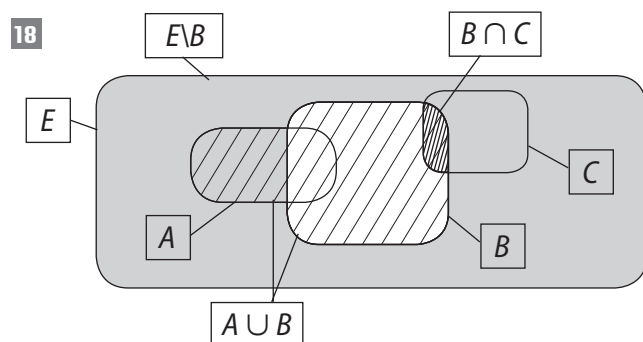
Exercices d'entraînement

Cardinal d'un ensemble, partition

17 a. Card $E = 11$.

b. Card $E = 26$.

c. Card $E = 8$.



19 a. Exemple de partition de E à deux sous-ensembles A et B .

$$A = \{a; b; h\}, B = \{c; d; e; f; g\}.$$

b. Exemple de partition de E à trois sous-ensembles A , B et C .

$$A = \{b; d\}, B = \{a; c; g\}, C = \{e; f; h\}.$$

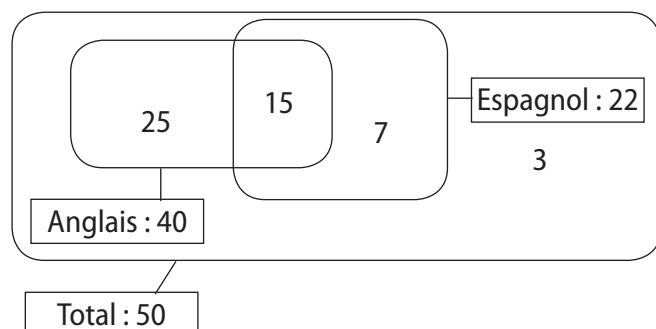
c. Exemple de partition de E à sept sous-ensembles A à G .

$$A = \{a; b\}, B = \{c\}, C = \{d\}, D = \{e\}, E = \{f\}, F = \{g\}, G = \{h\}.$$

20 a.

Anglais \ Espagnol	Oui	Non	Total
Oui	$15 = 22 - 7$	$7 = 10 - 3$	$22 = 50 - 28$
Non	$25 = 28 - 3$	3	28
Total	40	$10 = 50 - 40$	50

b.



21 Q désigne l'ensemble des personnes ayant entendu la publicité à 15 h ;

S désigne l'ensemble des personnes ayant entendu la publicité à 16 h.

D'après l'énoncé, Card $Q = 21\,400$; Card $S = 24\,800$ et Card $(Q \cap S) = 4\,600$.

D'après le cours.

$$\text{Card}(Q \cup S) = \text{Card } Q + \text{Card } S - \text{Card}(Q \cap S)$$

$$\text{Card}(Q \cup S) = 21\,400 + 24\,800 - 4\,600$$

$$\text{Card}(Q \cup S) = 41\,600.$$

Ainsi, 41 600 personnes ont entendu cette publicité à 15 h ou à 16 h.

22 $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; E\}$.
Card $\mathcal{P}(E) = 2^3 = 8$.

23 $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{A\}; \{B\}; \{C\}; \{D\}; \{A; B\}; \{A; C\}; \{A; D\}; \{B; C\}; \{B; D\}; \{C; D\}; \{A; B; C\}; \{A; C; D\}; \{A; B; D\}; \{B; C; D\}; E\}$. Card $\mathcal{P}(E) = 2^4 = 16$.

24 a. $A_2 = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$, $A_3 = \{3; 6; 9; 12\}$, $A_5 = \{5; 10\}$, $A_7 = \{7\}$.

b. A_2, A_3, A_5, A_7 ne forment pas une partition de E car, par exemple, $A_2 \cap A_3 = \{6; 12\}$, donc $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$.

25 a. $B_3 = \{6; 21\}$, $B_4 = \{4; 16; 64\}$, $B_5 = \{10; 25\}$,
 $B_7 = \{7; 14; 21\}$.

b. Les ensembles B_3, B_4, B_5 et B_7 ne forment pas une partition de E car, par exemple, $B_3 \cap B_7 = \{21\}$, donc $B_3 \cap B_7 \neq \emptyset$.

Produit cartésien, p -uplets

26 a. $E \times F = \{(A; 1); (A; 2); (A; 3); (B; 1); (B; 2); (B; 3)\}$.

b. $E \times F \times E = \{(A; 1; A); (A; 1; B); (A; 2; A); (A; 2; B); (A; 3; A); (A; 3; B); (B; 1; A); (B; 1; B); (B; 2; A); (B; 2; B); (B; 3; A); (B; 3; B)\}$.

c. $F \times E = \{(1; A); (2; A); (3; A); (1; B); (2; B); (3; B)\}$.

27 • Card $(E \times F) = 2 \times 3 = 6$;

• Card $(E \times F \times E) = 2 \times 3 \times 2 = 12$;

• Card $(E^5) = 2^5 = 32$;

- Card $(F^4) = 3^4 = 81$;
- Card $(E^2 \times F^3) = 2^2 \times 3^3 = 108$;
- Card $(E^3 \times F^2) = 2^3 \times 3^2 = 72$.

28 a. $\mathcal{E}$ possède 12 éléments.

b. $\mathcal{E} = \{(A; 1; a); (B; 1; a); (A; 2; a); (B; 2; a); (A; 3; a); (B; 3; a); (A; 1; b); (B; 1; b); (A; 2; b); (B; 2; b); (A; 3; b); (B; 3; b)\}$.

29 a. Voici trois exemples de résultats : $(F; 3; P)$, $(F; 4; F)$, $(P; 1; P)$.

b. Il y a 16 résultats possibles. $(2 \times 4 \times 2 = 16)$.

30 • $(A; A) \in \mathcal{E}$ et $(C; D) \in \mathcal{E}$.

Card $\mathcal{E} = 4^2 = 32$.

• $(A; A; A; A) \in \mathcal{E}$ et $(B; C; A; C) \in \mathcal{E}$.

Card $\mathcal{E} = 4^4 = 128$.

• $(A; A; A; A; A; A; A; A; A; A) \in \mathcal{E}$ et $(A; B; C; D; A; B; C; D; A; B) \in \mathcal{E}$.

Card $\mathcal{E}^{10} = 4^{10} = 1\,048\,576$.

31 | 10 choix | 10 choix | ... | 10 choix |
1^{er} chiffre | 2^e chiffre | ... | 8^e chiffre

→ Nombre total de choix : $10^8 = 100\,000\,000$.

Il y a cent millions numéros de téléphone possibles.

32 a. Avec les lettres A, B, C, D , on peut former 4^5 mots de cinq lettres distinctes ou non, c'est-à-dire 1 024 mots.

b. Avec les lettres A, B, C, D, E, F, G, H , on peut former 8^5 mots de cinq lettres distinctes ou non, c'est-à-dire 32 768 mots.

33 L'enfant dispose de 7 couleurs différentes et trois cases à colorier, il peut donc colorier le drapeau de 7^3 , c'est-à-dire 343 façons différentes.

Notation factorielle, permutations

34 • $3! = 6$; • $5! = 120$; • $6! = 720$.

35 À la calculatrice, on trouve :

• $9! = 362\,880$; $12! = 479\,001\,600$; $13! = 6\,227\,020\,800$.

36 a. L'arbre contient 6 branches, il y a donc 6 cas possibles.

b. Il y a $4!$, c'est-à-dire 24 cas possibles.

c. Il y a $6!$, c'est-à-dire 120 cas possibles.

37 a. $A = \frac{12!}{10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!} = 12 \times 11 = 132$;

$$B = \frac{15!}{14!} = \frac{15 \times 14!}{14!} = 15 ;$$

$$C = \frac{20!}{18!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{18!} = 20 \times 19 = 380.$$

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geq 2$,

• $n! = n \times (n-1)!$

• $n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$

38 • Faux, par exemple pour $n = 3$:

$$2 \times 3! = 2 \times 6 = 12 \text{ et } (2 \times 3)! = 6! = 720.$$

• Faux, par exemple pour $n = 3$:

$$3^2! = 9! = 362\,880 \text{ et } 3! \times 3! = 6 \times 6 = 36.$$

• Faux, par exemple pour $n = 3$:

$$2 \times 3 + 1! = 6 + 1! = 6 + 1 = 7$$

$$\text{et } (2 \times 3 + 1)! = 7! = 5\,040.$$

39 a. $(A; B; C; D)$ et $(D; B; A; C)$ sont deux exemples de permutations de E .

Il y a $4!$, c'est-à-dire 24 permutations possibles.

b. $(-3; 1; -1; 0; -2; 1; 2)$ et $(0; 1; 2; -3; -2; -1)$ sont deux exemples de permutations de E .

Il y a $6!$, c'est-à-dire 720 permutations possibles.

40 Il y a $8!$, c'est-à-dire 40 320 positions de départ possibles.

41 a. Il y a $8!$, c'est-à-dire 40 320 façons différentes de garer 8 voitures dans 8 places de parking.

b. En considérant qu'une neuvième voiture « fantôme » se gare sur la place vide, cela revient à considérer les permutations à 9 éléments.

Il y a donc $9!$, c'est-à-dire 362 880 façons de garer ces voitures.

Arrangements, combinaisons

$$\mathbf{42 a.} \bullet A_3^1 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = 3.$$

$$\bullet A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

$$\bullet A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

$$\mathbf{b.} \bullet C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!2!} = 3.$$

$$\bullet C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

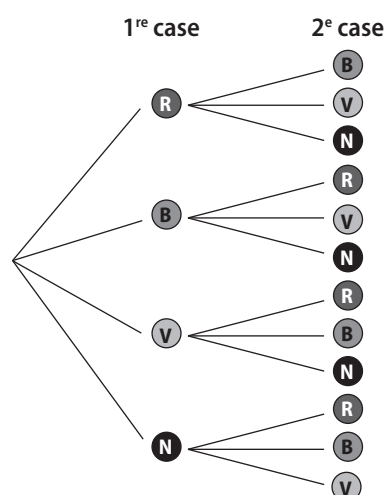
$$\bullet C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

43 À la calculatrice, on trouve :

$$\mathbf{a.} \bullet A_{12}^5 = 95\,040 ; \bullet A_{14}^7 = 17\,297\,280 ; \bullet A_7^3 = 210.$$

$$\mathbf{b.} \bullet C_8^3 = 56 ; \bullet C_{10}^4 = 210 ; \bullet C_{20}^{12} = 125\,970.$$

44 a.



Ainsi, il y a 24 cas possibles (cela correspond au nombre d'arrangements A_4^3).

b. • Dans cette situation, il y a A_4^3 , c'est-à-dire 24 cas possibles.

• Dans cette situation, il y a A_5^2 , c'est-à-dire 20 cas possibles.

45 Il y a A_{252}^6 , c'est-à-dire 127 512 000 classements possibles.

46 • Pour tout n de $\mathbb{N}$, $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$

et $C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \times 1} = 1$.

Ainsi, $C_n^0 = C_n^n$.

• Pour tous n, p de $\mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

et $C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Ainsi, $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Se tester

50 1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Vrai ; 6. Vrai.

51 Tous les choix s'effectuent sans répétitions (on ne prend pas plusieurs fois le même élève) et sans tenir compte de l'ordre. On dénombre donc des combinaisons.

1. Vrai. En effet, il y a C_{32}^6 , c'est-à-dire 906 192 équipes possibles.

2. Faux. En effet, $\text{Card}(F^6) = 15^6 = 11\,390\,625$ et en choisissant 6 élèves parmi les filles, on peut constituer C_{15}^6 , c'est-à-dire 5 005 équipes différentes de filles.

Or, $\text{Card}(F^6) \neq C_{15}^6$.

3. Vrai. En effet, le nombre de garçons est 17 ($32 - 15$). Il y a donc C_{17}^6 , c'est-à-dire 12 376 équipes différentes de garçons.

• Pour tous n, p de $\mathbb{N}$ tels que $p \leq n$,

$n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$

$$= \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-p) \times \dots \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}$$

47 a. Triangle de Pascal :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

b. D'après les coefficients calculés au a.

• $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;

• $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

48 L'entraîneur choisit 3 joueurs parmi 15 joueurs, sans répétitions et sans tenir compte de l'ordre, on dénombre donc des combinaisons.

L'entraîneur peut faire C_{15}^3 , c'est-à-dire 455 équipes différentes.

49 Le contrôleur choisit 4 objets parmi 100 objets,

sans répétitions et sans tenir compte de l'ordre, on dénombre donc des combinaisons.

Le contrôleur peut faire C_{100}^4 , c'est-à-dire 3 921 225 choix différents.

4. Vrai. En effet, on choisit successivement 3 filles parmi 15 filles et 3 garçons parmi 17 garçons. Il y a donc $C_{15}^3 \times C_{17}^3$, c'est-à-dire 309 400 équipes différentes comptant autant de filles que de garçons.

52 1. c. ; 2. a. ; 3. b. ; 4. a.

53 1. a. En effet, on dénombre des p -listes.

5 choix | 5 choix | 5 choix | 5 choix | 5 choix

1^{er} chiffre | 2^e chiffre | 3^e chiffre | 4^e chiffre | 5^e chiffre

→ Nombre total de choix : 5^5 .

2. b. En effet, on dénombre des permutations.

5 choix | 4 choix | 3 choix | 2 choix | 1 choix

1^{er} chiffre | 2^e chiffre | 3^e chiffre | 4^e chiffre | 5^e chiffre

→ Nombre total de choix : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

3. b. En effet, on dénombre des arrangements.

8 choix	7 choix	6 choix	5 choix	4 choix
1 ^{er} chiffre	2 ^e chiffre	3 ^e chiffre	4 ^e chiffre	5 ^e chiffre

→ Nombre total de choix : $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = A_8^5$.

4. a. En effet, on dénombre des combinaisons de 3 fruits choisis parmi 8 fruits. Il y a C_8^3 , c'est-à-dire 56 choix possibles.

Exercices d'approfondissement

54 Nombre d'atomes dans l'Univers

1. a. $\frac{1}{2 \times 10^{-24}} = 5 \times 10^{23}$.

Ainsi, il y a environ 5×10^{23} atomes dans un gramme de matière.

b. $2 \times 10^{33} \times 5 \times 10^{23} = 10^{57}$.

Ainsi, le Soleil contient environ 10^{57} atomes.

c. $100\,000\,000\,000 \times 10^{57} = 10^{68}$.

Ainsi, notre galaxie, la Voie Lactée, contient environ 10^{68} atomes.

2. $1\,000\,000\,000\,000 \times 10^{68} = 10^{80}$.

Ainsi, l'Univers contient environ 10^{80} atomes.

55 Distinguer les cas

	Condition sur n et p	Tenir compte de l'ordre dans une liste	Dans une liste, des répétitions sont possibles
p -uplet de E	Non	Oui	Oui
Permutation de E	Oui $n = p$	Oui	Non
Arrangement à p éléments de E	Oui $p \leq n$	Oui	Non
Combinaison à p éléments de E	Oui $p \leq n$	Non	Non

56 Démontrer une propriété

Pour tous n, p de $\mathbb{N}$ tels que $0 < p < n$,

$$\begin{aligned}
 C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(p-1)! [(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p! [(n-1)-p]!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(p-1)! (n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p! (n-p-1)!} \\
 &= \frac{p \times (n-1)!}{p \times (p-1)! (n-p)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p! (n-p) \times (n-p-1)!} \\
 &= \frac{p \times (n-1)!}{p! (n-p)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p! (n-p)!} \\
 &= \frac{p \times (n-1)! + (n-p) \times (n-1)!}{p! (n-p)!} \\
 &= \frac{p \times (n-1)! + n \times (n-1)! - p \times (n-1)!}{p! (n-p)!} \\
 &= \frac{n \times (n-1)!}{p! (n-p)!} = \frac{n!}{p! (n-p)!} = C_n^p.
 \end{aligned}$$

57 Art

1. a. Il y a C_{50}^4 , c'est-à-dire 230 300 résultats possibles.

b. Il y a $C_{22}^3 \times C_{28}^2$, c'est-à-dire 87 318 résultats possibles.

c. • L'une des quatre œuvres est celle d'une femme : $C_{22}^3 \times C_{28}^1$ résultats possibles.

• Deux des quatre œuvres sont celles de femmes (voir la réponse au **b.**) : $C_{22}^2 \times C_{28}^2$ résultats possibles.

• Trois des quatre œuvres sont celles de femmes : $C_{22}^1 \times C_{28}^3$ résultats possibles.

• Les quatre œuvres sont celles de femmes : C_{28}^4 résultats possibles.

Ainsi, il y a 222 985 résultats possibles pour lesquels au moins une des quatre œuvres est celle d'une femme.

$$(C_{22}^3 \times C_{28}^1 + C_{22}^2 \times C_{28}^2 + C_{22}^1 \times C_{28}^3 + C_{28}^4 = 222\,985).$$

Remarque : On peut également résoudre cette question en soustrayant à tous les résultats possibles (C_{50}^4), les résultats pour lesquels les quatre œuvres sont celles de garçons (C_{28}^4).

$$\text{On a bien } C_{50}^4 - C_{28}^4 = 222\,985.$$

2. a. Il y a A_{50}^4 , c'est-à-dire 5 527 200 résultats possibles.

b. Les classements suivant le sexe sont (F, F, G, G) , (F, G, F, G) , (F, G, G, F) , (G, F, F, G) , (G, G, F, F) , (G, F, G, F) , soit 6 classements.

Il y a donc $6 \times A_{22}^2 \times A_{28}^2$, c'est-à-dire 2 095 632 résultats possibles.

c. On peut, par exemple, utiliser la remarque précédente.

Il y a donc $A_{50}^4 - A_{22}^4$, c'est-à-dire 5 351 640 résultats possibles.

58 Répartition des élèves

Pour répondre aux questions posées, on peut réaliser un diagramme comme ci-dessous.

Dans ce diagramme :

• Les nombres en noir sont donnés pour l'énoncé ;

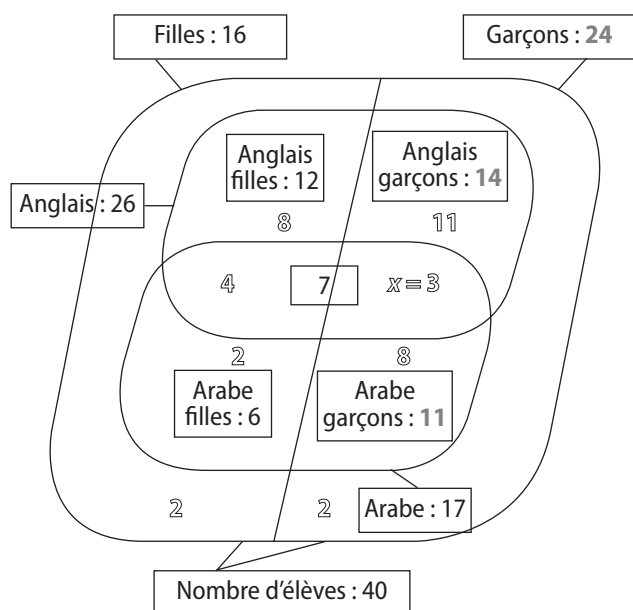
• Les nombres en gris sont déduits très simplement à partir des nombres en noir ;

• Si on pose x le nombre de garçons qui apprennent les deux langues, alors on a l'égalité suivante (qui porte sur le nombre de garçons) :

$$24 = (14 - x) + x + (11 - x) + 2$$

donc $x = 3$.

- Les nombres en contour sont déduits très simplement en utilisant x et les autres nombres.



- 4 filles suivent les deux cours de langue.
- 2 filles ne suivent aucune de ces deux matières.

59 Plus grand que l'Univers

Ces personnes peuvent se placer de $60!$, c'est-à-dire environ $8,3 \times 10^{81}$ façons de se placer.

Remarque : $8,3 \times 10^{81} > 10^{80}$, donc ces 80 personnes ont environ 83 fois plus de façons de se placer qu'il existe d'atomes dans l'Univers (voir exercice 55).

60 Binôme de Newton

a.	p	0	1	2	3	4	5	6	7
n									
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	

Ainsi,

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

$$\text{b. } (1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$$

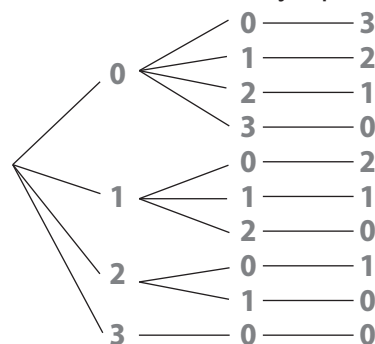
$$(1-x)^7 = 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7.$$

61 Distribution de cahiers

a. Si chaque enfant reçoit un cahier, alors, il y a $3!$ c'est-à-dire 6 façons de distribuer les cahiers.

b. Si chaque enfant peut recevoir entre 0 et 3 cahiers, alors, on peut utiliser un arbre.

(En gris : le nombre de cahiers reçus par l'enfant).

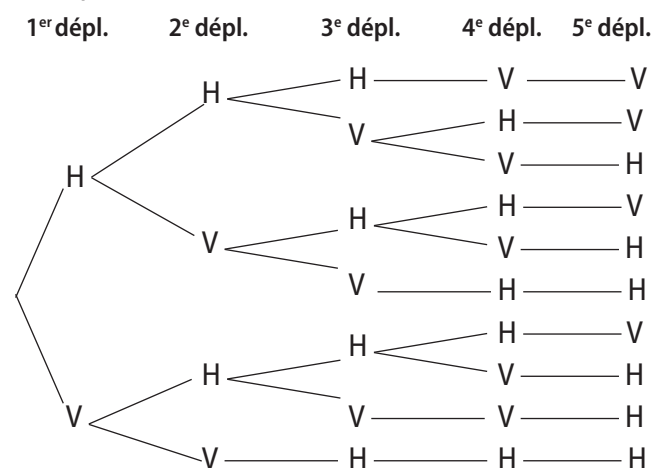


Ainsi, il y a 10 distributions possibles.

62 Déplacement d'un pion

a. Pour aller de la case A à la case B, il faut effectuer trois déplacements : deux déplacements horizontaux et un déplacement vertical.

On peut s'aider d'un arbre pour dénombrer le nombre de déplacements.



Il y a donc dix déplacements possibles.

b. Pour aller de la case B à la case C, il faut effectuer deux déplacements horizontaux et trois déplacements verticaux.

En procédant de même, on trouve qu'il y a dix déplacements possibles.

Problèmes

63 Courses de chevaux

1. a. Avec 18 chevaux au départ, il y a :

- A_{18}^3 , c'est-à-dire 4 896 tiercés dans l'ordre possibles ;
- C_{18}^3 , c'est-à-dire 816 tiercés dans le désordre possibles.

b. Avec n chevaux au départ.

$$A_n^3 = \frac{n!}{(n-3)!} = n \times (n-1) \times (n-2).$$

Il y a $n(n-1)(n-2)$ tiercés dans l'ordre possibles.

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$$

Il y a $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$ tiercés dans le désordre possibles.

2. Pour le quarté :

a. Avec 20 chevaux au départ :

- $A_{20}^4 = 116\,280$ quartés dans l'ordre possibles ;
- $C_{20}^4 = 4\,845$ quartés dans le désordre possibles.

b. Avec n chevaux au départ :

$$A_n^4 = \frac{n!}{(n-4)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \text{ quartés dans l'ordre possibles ;}$$

$$C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{24} \text{ quartés dans le désordre possibles.}$$

Pour la quinté :

a. Avec 20 chevaux au départ :

- $A_{20}^5 = 1\,860\,480$ quintés dans l'ordre possibles ;
- $C_{20}^5 = 15\,504$ quintés dans le désordre possibles.

b. Avec n chevaux au départ :

$$A_n^5 = \frac{n!}{(n-5)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \text{ quintés dans l'ordre possibles.}$$

$$C_n^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{120} \text{ quintés dans le désordre possibles.}$$

64 Dénombrement d'anagrammes

1. a. • Le mot « mari » a $4!$, c'est-à-dire 24 anagrammes.

• Le mot « sortie » a $5!$, c'est-à-dire 120 anagrammes.

• Le mot « afrique » a $7!$, c'est-à-dire 5 040 anagrammes.

b. Un mot à n lettres distinctes a $n!$ anagrammes.

2. a. Un mot de 4 lettres distinctes a $4!$, c'est-à-dire 24 anagrammes.

b. • Les anagrammes du mot « aida » sont : aida, adia, adai, aiad, aaïd, aadi, daai, daia, diaa, iaad, iada, idaa.

• Il y en a 12, c'est-à-dire $\frac{4!}{2!}$.

• Les anagrammes du mot « mere » sont : mere, mree, meer, eemr, eerm, emer, emre, erem, erme, reme, reem, rmee.

Il y en a 12, c'est-à-dire $\frac{4!}{2!}$.

• Les anagrammes du mot « epee » sont : epee, eepe, eeep, peee.

Il y en a 4, c'est-à-dire $\frac{4!}{3!}$.

3. a. • Les anagrammes du mot « bebes » sont : bebes, bebse, besbe, beseb, beebs, beesb, bbees, bbese, bbsee, bseeb, bsebe, bsbee, ebebs, ebesb, ebbes, ebbse, ebsbe, ebseb, esbbe, esbeb, esebb, eebbs, eebbsb, eesbb, sebeb, sebbe, seebb, sbbee, sbebe, sbeeb.

• Il y en a 30, c'est-à-dire $\frac{5!}{2! \, 2!}$.

b. • Les anagrammes du mot « semee » sont : semee, seeme, seeem, smeee, meees, meese, mesee, msee, emees, emese, emsee, eemes, eemse, eesme, eesem, eesms, eeems, eseem, eseme, esmee.

Il y en a 20, c'est-à-dire $\frac{5!}{3!}$.

• Les anagrammes du mot « creee » sont : creee, ceree, ceere, ceeer, reec, reece, reee, rceee, eceer, ecere, ecree, ercee, erece, ereec, eecre, eecer, eerce, eerce, eeecr, eeerc.

Il y en a 20, c'est-à-dire $\frac{5!}{3!}$.

4. a. • Le mot « partirait » possède 8 lettres, dont 3 lettres reprises deux fois.

Il a donc $\frac{8!}{2! \, 2! \, 2!} = 7! = 5\,040$ anagrammes.

• Le mot « engendree » possède 9 lettres dont 1 lettre reprise deux fois et une lettre reprise quatre fois.

Il a donc $\frac{9!}{2! \, 4!} = 7\,560$ anagrammes.

• Le mot « parallele » possède 9 lettres dont 2 lettres reprises deux fois et une lettre reprise trois fois.

Il a donc $\frac{9!}{2! \, 2! \, 3!} = 15\,120$ anagrammes.

b. Un mot de n lettres contenant k_1 fois une lettre et k_2 fois une autre lettre possède $\frac{n!}{k_1! \, k_2!}$ anagrammes.

c. Il faut $k_1 + k_2 + k_3 \leq n$ et un tel nombre a $\frac{n!}{k_1! \, k_2! \, k_3!}$ anagrammes.

65 Les dates d'anniversaires

1. a. On dénombre une liste de 23 dates d'anniversaire dans laquelle des répétitions sont possibles (p -uplets).

1 ^{re} personne	2 ^e personne	...	23 ^e personne
365 choix	365 choix	...	365 choix

→ Au total, il y a $365 \times 365 \times \dots \times 365 = 365^{23}$ possibilités.

b. Dans ce cas, il n'y a pas de répétition possible.

1 ^{re} personne	2 ^e personne	...	23 ^e personne
365 choix	364 choix	...	$365 - 22$ choix

→ Au total, il y a $365 \times 364 \times \dots \times (365 - 22)$

$$= \frac{365!}{(365 - 23)!} = A_{365}^{23} \text{ possibilités.}$$

c. Le contraire est : « Aucune personne n'est née le même jour qu'une autre. » (Voir le b.)

d. Dans un groupe de 23 personnes, les chances qu'il y en ait au moins deux qui soient nées le même jour

$$\text{sont : } \frac{365^{23} - A_{365}^{23}}{365^{23}} \times 100 \approx 50,73 \, \%.$$

2. a. En reprenant le même raisonnement, on trouve 365^n et A_{365}^n .

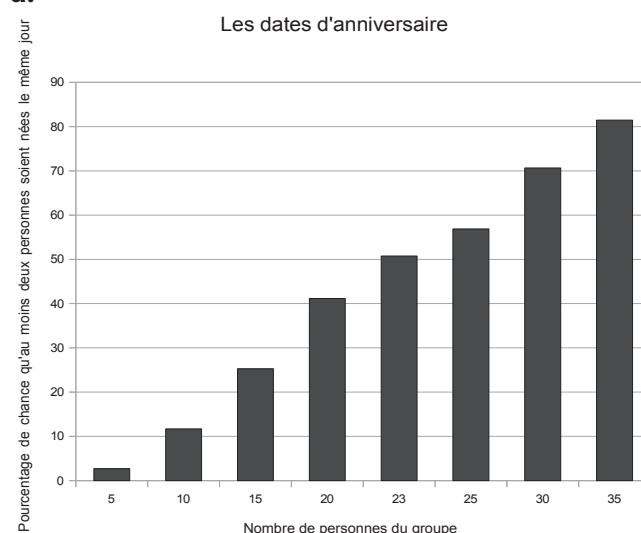
b. En reprenant le même raisonnement, on trouve :

$$\frac{365^n - A_{365}^n}{365^n} \times 100 = \left(1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}\right) \times 100.$$

c.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Nombre de personnes du groupe	5	10	15	20	23	25	30	35
2	Pourcentage de chance qu'au moins deux personnes soient nées le même jour	2,71	11,69	25,29	41,14	50,73	56,87	70,63	81,44

d.



3. Groupe 1 Il y a environ 47,57 % de chances qu'au moins deux personnes soient nées le même jour.

Groupe 2 Il y a environ 53,83 % de chances qu'au moins deux personnes soient nées le même jour.

Groupe 3 Il y a environ 77,5 % de chances qu'au moins deux personnes soient nées le même jour.

Activités d'introduction

1 Série statistique présentée sous forme de classes

1. Classe de plus grand effectif : [38 ; 43[. Classe modale : [38 ; 43[.

2. a.

Classe	[23 ; 28[	[28 ; 33[	[33 ; 38[	[38 ; 43[	[43 ; 48[	[48 ; 53[
Centre de classe	25,5	30,5	35,5	40,5	45,5	50,5
Effectif	3	4	5	20	14	3

b. Moyenne : $\bar{x} = \frac{3 \times 25,5 + \dots + 3 \times 50,5}{49} \approx 40,3$.

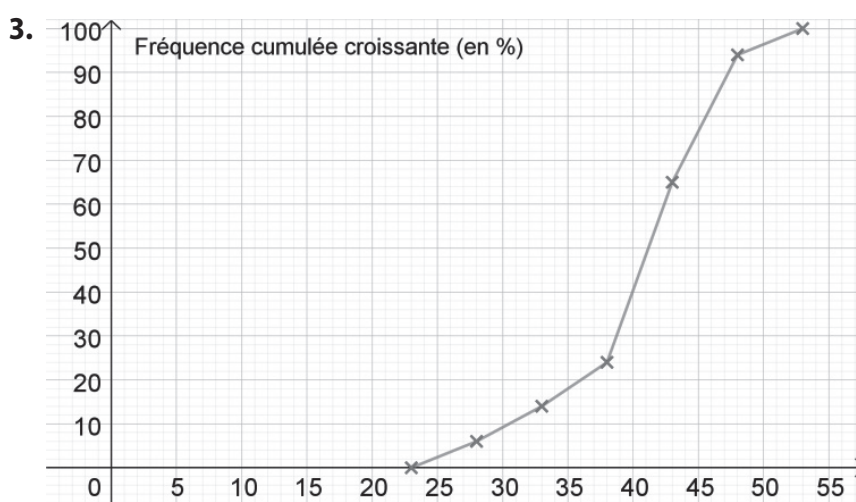
2 Courbe des effectifs cumulés, des fréquences cumulées

1.

Classe	[23 ; 28[	[28 ; 33[	[33 ; 38[	[38 ; 43[	[43 ; 48[	[48 ; 53[
Effectif	3	4	5	20	14	3
ECC	3	7	12	32	46	49
FCC	0,06	0,14	0,24	0,65	0,94	1

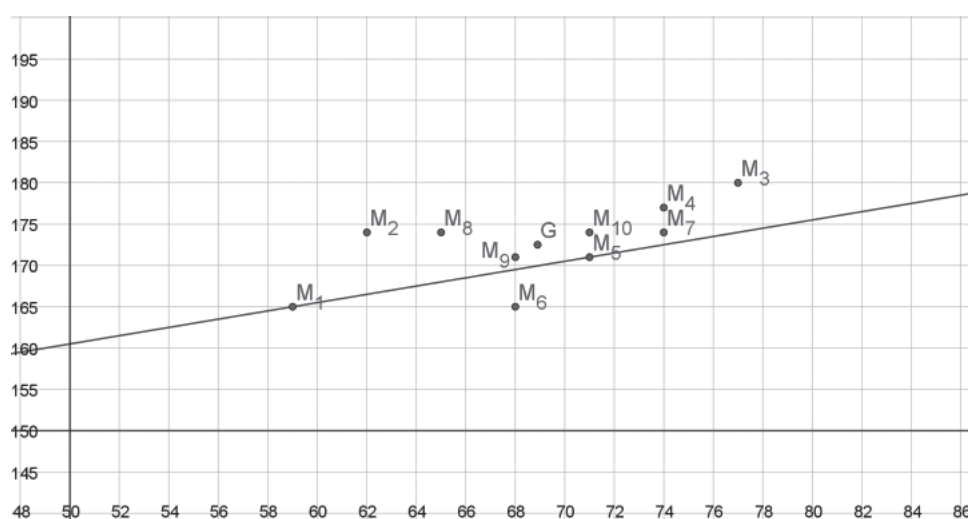
2. • On lit dans les ECC que le numéro du pays est 25, c'est donc le Kenya.

• Il s'agit de la classe [38 ; 43[.



3 Séries statistiques à deux caractères

1., 2. b. et 3. a.



$$2. a. \bar{x} = \frac{59 + 62 + \dots + 71}{10} = 68,9.$$

$$\bar{y} = \frac{165 + 174 + \dots + 174}{10} = 172,5.$$

3. b. (M_1, M_5) est la droite d'équation $y = ax + b$

$$\text{avec } a = \frac{y_{M_5} - y_{M_1}}{x_{M_5} - x_{M_1}} = \frac{171 - 165}{71 - 59} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } y_{M_1} = ax_{M_1} + b$$

$$\text{donc } 165 = \frac{1}{2} \times 159 + b \text{ d'où } b = 135,5.$$

$$\text{Ainsi, } (M_1, M_5) : y = \frac{1}{2}x + 135,5.$$

c. • Pour une masse de 80 kg :

$$y = \frac{1}{2}80 + 135,5 = 175,5. \text{ La taille serait de } 175,5 \text{ cm.}$$

• Pour une taille de 145 cm ; $145 = \frac{1}{2}x + 135,5$

donc $x = 19$. La masse serait de 19 kg.

d. • Pour une masse de 70 kg :

$$y = \frac{1}{2}70 + 135,5 = 165,5. \text{ La taille serait de } 165,5 \text{ cm.}$$

• Pour une taille de 170 cm ; $170 = \frac{1}{2}x + 135,5$

donc $x = 69$. La masse serait de 69 kg.

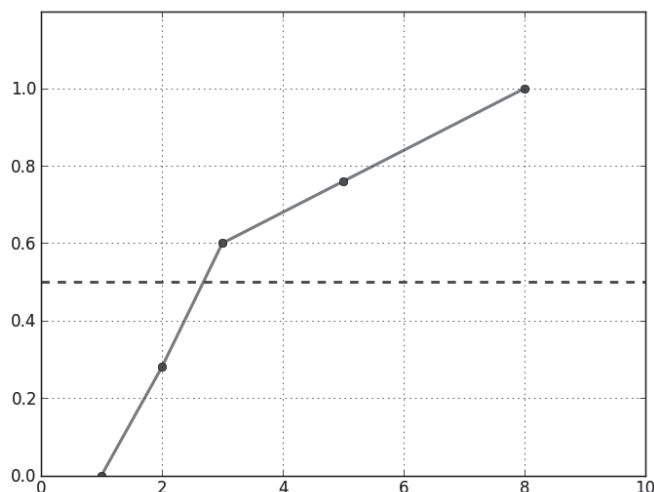
Savoir-faire

2 1. a.

Classe	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 8[
Eff.	7	8	4	6
Freq.	$\frac{7}{25} = 0,28$	$\frac{8}{25} = 0,32$	$\frac{4}{25} = 0,16$	$\frac{6}{25} = 0,24$
FCC	$\frac{7}{25} = 0,28$	$\frac{15}{25} = 0,6$	$\frac{19}{25} = 0,76$	1

$$n = 7 + 8 + 4 + 6 = 25$$

b.



Médiane par zoom 2,68.

2. a. Centre des classes : 1,5 ; 2,5 ; 4 ; 6,5

$$b. \bar{x} = \frac{7 \times 1,5 + 8 \times 2,5 + 4 \times 4 + 6 \times 6,5}{25} = \frac{85,5}{25} = 3,42.$$

3 a.

Classe	[1 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 7[
Centre des classes	2	4	5,5	6,5
Effectif	15	12	6	2

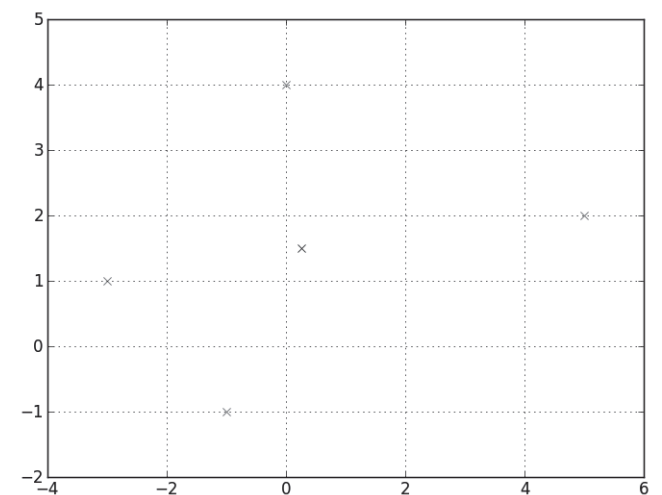
b. La classe de plus grand effectif est la classe [1 ; 3[
Le mode est 2.

$$\bar{x} = \frac{15 \times 2 + 12 \times 4 + 6 \times 5,5 + 2 \times 6,5}{15 + 12 + 6 + 2} = \frac{124}{35} \approx 3,54.$$

$$V = \frac{15 \times (2 - 3,54)^2 + 12 \times (4 - 3,54)^2 + 6 \times (5,5 - 3,54)^2 + 2 \times (6,5 - 3,54)^2}{35} = \frac{78,68}{35} \approx 2,25.$$

$$\sigma = \sqrt{V} \approx 1,5.$$

5 a.



$$b. \bar{x} = \frac{-3 - 1 + 0 + 5}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\bar{y} = \frac{1 - 1 + 4 + 2}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Donc : $G(0,25 ; 1,5)$

c.

					Somme
x_i	-3	-1	0	5	1
y_i	1	-1	4	2	6
x_i^2	9	1	0	25	35
y_i^2	1	1	16	4	22
xy_i	-3	1	0	10	8

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{6}{4} = \frac{13}{8} = 1,625$$

$$V(X) = \frac{35}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{139}{16} = 3,6875$$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{13}{8} \times \frac{16}{139} = \frac{26}{139} \approx 0,19$$

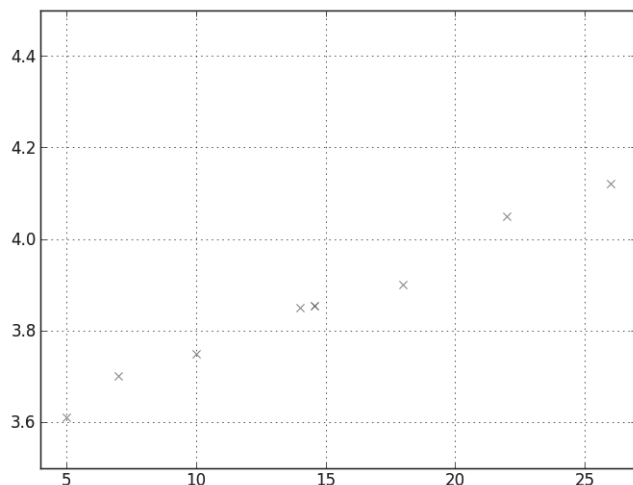
$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} = 1,5 - 0,19 \times 0,25 \approx 1,45$$

Équation de la droite de régression linéaire de y en x :

$$y = 0,19x + 1,45$$

d. $r \approx 0,31$. Un ajustement linéaire n'est pas vraiment approprié.

6 a.



$$\text{b. } \bar{x} = \frac{5 + 7 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26}{7} = \frac{102}{7} \approx 14,57$$

$$\bar{y} = \frac{3,61 + 3,70 + 3,75 + 3,85 + 3,90 + 4,05 + 4,12}{7}$$

$$= \frac{26,98}{7} \approx 3,85$$

								Somme
x_i	5	7	10	14	18	22	26	102
y_i	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12	26,98
x_i^2	25	49	100	196	324	484	676	1854
y_i^2	13,03	13,69	14,06	14,82	15,21	16,4	17,97	104,194
xy_i	18,05	25,9	37,5	53,9	70,2	89,1	107,12	401,77

$$\bar{x} = 14,6 \quad G(14,6 ; 3,85)$$

$$\bar{y} = 3,85 \quad r = 0,993$$

$$\text{c. } \text{Cov}(X, Y) = \frac{401,77}{7} - 14,6 \times 3,85 \approx 1,19$$

$$V(X) = \frac{1854}{7} - 14,6^2 \approx 51,7$$

$$a \approx 0,023$$

$$b = 3,85 - 0,023 \times 14,6 \approx 3,51$$

$$y = 0,023x + 3,51$$

d. Pour $x = 30$ on évalue $y = 0,023 \times 30 + 3,51 \approx 4,2$ kg.

Exercices d'entraînement

Séries statistiques présentées sous forme de classes

7 a. Effectif total : 23 ;

amplitude des classes : $2 - 2 - 2 - 2 - 2$;

classe modale : $[4 ; 6[$;

$$\frac{23}{2} = 11,5 \quad \text{classe médiane } [4 ; 6[.$$

b. Effectif total : 27 ;

amplitude des classes : $2 - 3 - 2 - 1 - 2$;

classes modales : $[2 ; 5[$ et $[5 ; 7[$;

$$\frac{27}{2} = 13,5 \quad \text{classe médiane } [5 ; 7[,$$

car elle contient le 14^e individu.

8 Histogramme b.**9 a.**

Classe	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectif	4	10	1	6

b. Effectif total : $21 = 10 + 1 + 10$

Classe médiane [20 ; 30[

$$\text{Moyenne } \bar{x} = \frac{4 \times 15 + 10 \times 25 + 1 \times 35 + 6 \times 45}{21} = \frac{615}{21} \approx 29,3.$$

Classe	[0 ; 40[	[40 ; 80[	[80 ; 120[	[120 ; 160[	[160 ; 200[
Effectif	10	20	45	15	20

Classe modale [80 ; 120[

Effectif total : 110

11 a. Effectif total : $40 = 20 + 20$

Classe médiane [4 ; 6[

$$\text{Moyenne } \bar{x} = \frac{10 \times 1 + 4 \times 3 + 12 \times 5 + 8 \times 7 + 6 \times 9}{40} = \frac{192}{40} = \frac{24}{5} = 4,8$$

b. Effectif total : $37 = 18 + 1 + 18$

Classe médiane [3 ; 6[

$$\bar{x} = \frac{4 \times 0,5 + 10 \times 2 + 12 \times 4,5 + 8 \times 7 + 3 \times 10}{37} \approx 4,4.$$

12 a. Classe médiane [1 ; 2[

$$\bar{x} = 0,2 \times 0,5 + 0,5 \times 1,5 + 0,1 \times 4 + 0,05 \times 6 + 0,15 \times 7,5 = 2,675.$$

b. Classe médiane [10 ; 11[

Moyenne :

$$\bar{x} = \frac{5 \times 4 + 15 \times 6,5 + 22 \times 9 + 28 \times 10,5 + 30 \times 13}{100} = 9,995.$$

13 a. L'effectif total est $20 = 10 + 10$

La classe médiane est [4 ; 6[.

Les effectifs par classes sont : 3 - 4 - 5 - 6 - 2

$$\bar{x} = \frac{3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 5 + 6 \times 8 + 2 \times 11}{20} = 5,5.$$

b. Effectif total $40 = 20 + 20$

La classe médiane est [3 ; 5[.

Les effectifs par classes sont : 2 - 13 - 8 - 14 - 3

$$\bar{x} = \frac{2 \times 0,5 + 13 \times 1,5 + 8 \times 4 + 14 \times 6 + 3 \times 7,5}{40} = 3,975.$$

Classe	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectif	5	10	15	20	5

$$\text{b. } \bar{x} = \frac{5 \times 5 + 10 \times 15 + 15 \times 25 + 20 \times 35 + 5 \times 45}{55} = \frac{1\,475}{55} \approx 26,8.$$

15 a.

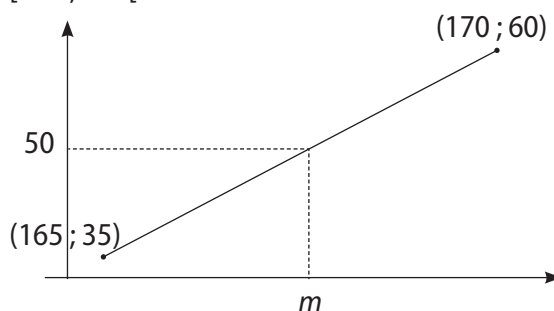
Classe	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectif	5	15	10	0	5	20

$$\text{b. } \bar{x} = \frac{5 \times 5 + 15 \times 15 + 10 \times 25 + 0 \times 35 + 5 \times 45 + 20 \times 55}{55} = \frac{1\,825}{55} \approx 33,18.$$

16 a.

Classe	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[
Effectifs	4	10	10
ECC	4	14	24
FCC	10 %	35 %	60 %

Classe	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Effectifs	6	6	4
ECC	30	36	40
FCC	75 %	90 %	100 %

b. La médiane correspondant à une fréquence cumulée croissante de 50 % se trouve dans la classe [165 ; 170[.

On s'intéresse au segment liant les points de coordonnées (165 ; 35) et (170 ; 60).

$$\text{Pente du segment : } a = \frac{60 - 35}{170 - 165} = \frac{35}{5} = 7.$$

$$\frac{50 - 35}{m - 165} = 7 \Leftrightarrow 15 = 7m - 7 \times 165$$

$$\Leftrightarrow 7m = 15 + 7 \times 165$$

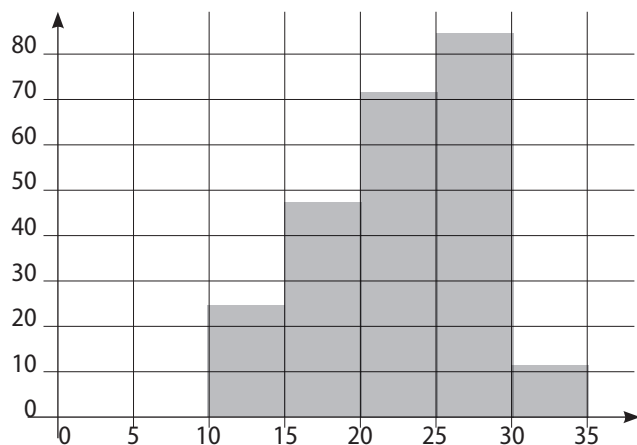
$$\Leftrightarrow m = \frac{15}{7} + 165 \Leftrightarrow m \approx 167,14.$$

Centre de classe	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5
Effectif	4	10	10	6	6	4

$$\bar{x} = \frac{4 \times 157,5 + 10 \times 162,5 + 10 \times 167,5 + 6 \times 172,5 + 6 \times 177,5 + 4 \times 182,5}{40} = \frac{6\,760}{40} = 169.$$

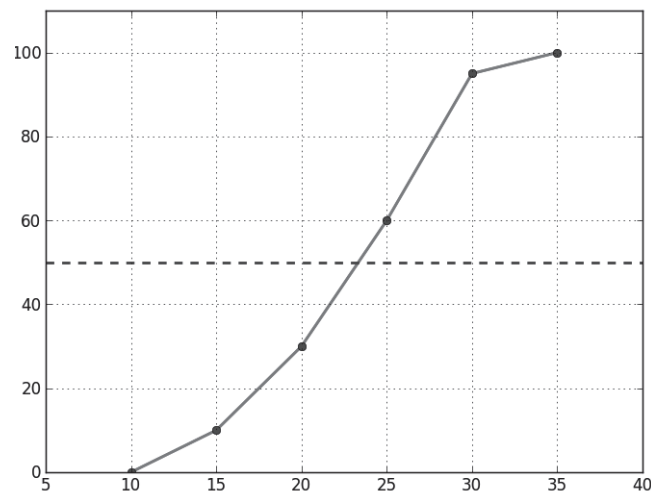
17 a. Effectif total $n = 240$.

b.



d. Valeur approchée de la médiane par zoom : $m \approx 23,3$.

c.

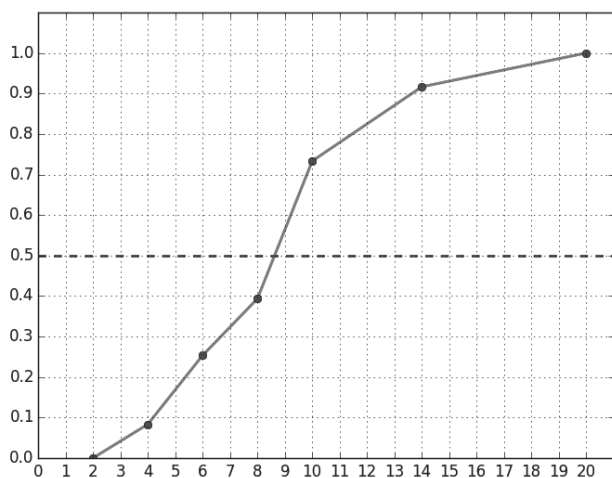


18 a. Effectif total : 600.

Classe médiane : $[8 ; 10[$.

Moyenne :
$$\bar{x} = \frac{50 \times 3 + 102 \times 5 + 84 \times 7 + 204 \times 9 + 110 \times 12 + 50 \times 17}{600} = 8,76.$$

b.



c. Graphique par zoom $m \approx 8,62$

d. La classe $[10 ; 14[$ correspond à une fréquence cumulée comprise entre 73,3 % et 91,7 %, ou à un effectif cumulé croissant compris entre 440 et 550. On raisonne avec les effectifs.

$$550 \times 0,75 = 450$$

Le segment correspondant limité par les points $M(10 ; 440)$ et $M'(14 ; 550)$ a une pente :

$$a = \frac{550 - 440}{14 - 10} = \frac{110}{4} = 27,5$$

Pour une note $n = 12,3$ on obtient l'effectif

$$\frac{y - 440}{12,3 - 10} = 27,5 \Rightarrow y = 27,5 \times 2,3 + 440 = 503,25.$$

503,25 correspond à 83,4 % de la population testée.

L'étudiant a raison.

19
$$\bar{x} = \frac{126\,040}{6\,000} \approx 21.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\,685\,520}{6\,000} - 21^2} \approx 2,57.$$

20 a.

Classe	$[0 ; 5[$	$[5 ; 8[$	$[8 ; 10[$	$[10 ; 12[$
Effectif	6	12	17	15
Centre de classe	2,5	6,5	9	11

$$n = 6 + 12 + 17 + 15 = 50$$

$$\bar{x} = \frac{411}{50} \approx 8,22$$

$$\sum x^2 = 3\,736,5.$$

Écart moyen :

$$e_m = \frac{6 \times |2,5 - 8,22| + 12 \times |6,5 - 8,22| + 17 \times |9 - 8,22| + 15 \times |11 - 8,22|}{50} = \frac{109,92}{50} \approx 2,1984.$$

$$V = \frac{6 \times 2,5^2 + 12 \times 6,5^2 + 17 \times 9^2 + 15 \times 11^2}{50} - 8,22^2 = \frac{3\,736,5}{50} - 8,22^2 \approx 7,16.$$

$$\sigma = \sqrt{V} \approx 2,68.$$

b.

Classe	[10 ; 14[	[14 ; 18[	[18 ; 20[	[20 ; 22[
Effectif	11	20	32	15
Centre de la classe	12	16	19	21

Effectif total $n = 11 + 20 + 32 + 15 = 78$.

$$\bar{x} = \frac{11 \times 12 + 20 \times 16 + 32 \times 19 + 15 \times 21}{78} = \frac{1\,375}{78} = 17,63.$$

Écart moyen :

$$e_m = \frac{11 \times |12 - 17,63| + 20 \times |16 - 17,63| + 32 \times |19 - 17,63| + 15 \times |21 - 17,63|}{78} = \frac{188,92}{78} \approx 2,42.$$

$$V = \frac{11 \times 12^2 + 20 \times 16^2 + 32 \times 19^2 + 15 \times 21^2}{78} - 17,63^2 = \frac{24\,871}{78} - 17,63^2 \approx 8.$$

$$\sigma = \sqrt{V} \approx 2,8.$$

21 a.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 7[	[7 ; 10[	[10 ; 13[	[13 ; 17[
Effectif	334	96	51	12	7
Centre de la classe	2	5,5	8,5	11,5	15

Effectif total $n = 334 + 96 + 51 + 12 + 7 = 500$

$$\bar{x} = \frac{334 \times 2 + 96 \times 5,5 + 51 \times 8,5 + 12 \times 11,5 + 7 \times 15}{500} = \frac{1\,872,5}{500} = 3,745.$$

Écart moyen :

$$e_m = \frac{(334 \times |2 - 3,745| + 96 \times |5,5 - 3,745| + 51 \times |8,5 - 3,745| + 12 \times |11,5 - 3,745| + 7 \times |15 - 3,745|)}{500}$$

$$= \frac{1\,165,66}{500} \approx 2,33.$$

$$V = \frac{334 \times 2^2 + 96 \times 5,5^2 + 51 \times 8,5^2 + 12 \times 11,5^2 + 7 \times 15^2}{500} - 3,745^2 = \frac{11\,086,75}{500} - 3,745^2 \approx 8,148$$

donc $\sigma = \sqrt{V} \approx 2,85$.

b.

Classe	[25 ; 28[	[28 ; 31[	[31 ; 34[	[34 ; 37[	[37 ; 40[	[40 ; 43[	[43 ; 46[
Effectif	8	20	57	99	81	27	8
Centre de la classe	26,5	29,5	32,5	35,5	38,5	41,5	44,5

Effectif total : $n = 300$

$$\bar{x} = \frac{8 \times 26,5 + 20 \times 29,5 + 57 \times 32,5 + 99 \times 35,5 + 81 \times 38,5 + 27 \times 41,5 + 8 \times 44,5}{300} = \frac{10\,764}{300} = 35,88.$$

Écart moyen :

$$e_m = \frac{(8 \times |26,5 - 35,88| + 20 \times |29,5 - 35,88| + 57 \times |32,5 - 35,88| + 99 \times |35,5 - 35,88| + 81 \times |38,5 - 35,88| + 27 \times |41,5 - 35,88| + 8 \times |44,5 - 35,88|)}{300}$$

$$= \frac{865,84}{300} \approx 2,89$$

$$V = \frac{(8 \times 26,5^2 + 20 \times 29,5^2 + 57 \times 32,5^2 + 99 \times 35,5^2 + 81 \times 38,5^2 + 27 \times 41,5^2 + 8 \times 44,5^2)}{300} - 35,88^2$$

$$= \frac{390\,399}{300} - 35,88^2 \approx 13,9556.$$

$$\sigma = \sqrt{V} \approx 3,74.$$

22 a. $\bar{x} = \frac{9,9 \times 10^6}{39\,115} \approx 253,0998 \approx 253,1 \text{ min}$

$\bar{x} \approx 4,22 \text{ h.}$

b. $V = \frac{2,6 \times 10^9}{39\,115} - 253,1^2 = 2\,411,053$

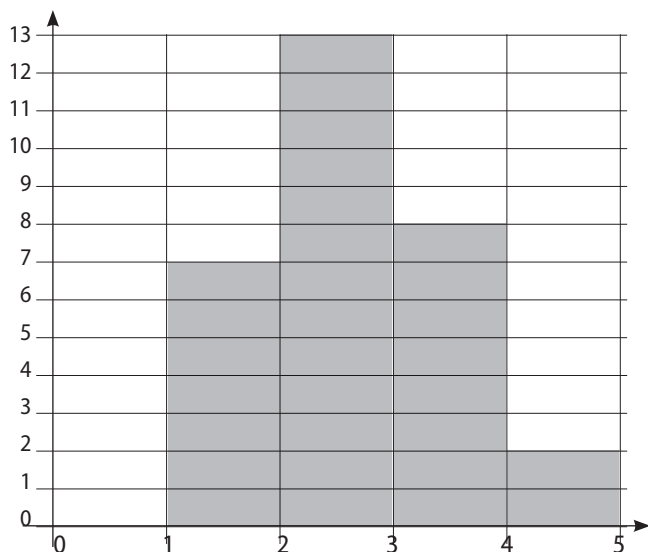
$\sigma = \sqrt{V} \approx 49,1 \text{ en min} \approx 0,82 \text{ h.}$

23 $\bar{x} = \frac{2\,926}{52} \approx 56,27 ;$

$V = \frac{166\,148}{52} - 56,27^2 \approx 28,84.$

$\sigma = \sqrt{V} \approx 5,37.$

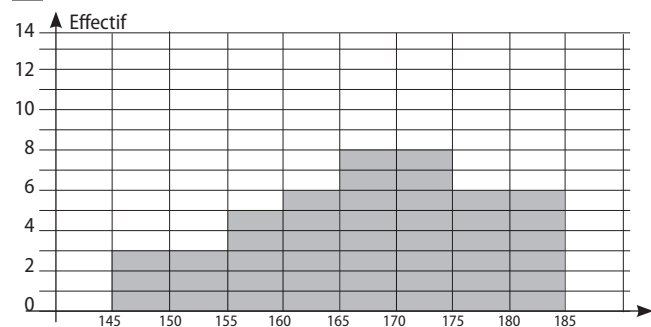
24 a.



b. Classe modale [2 ; 3[.

c. Effectif	7	13	8	2
Centre de la classe	1,5	2,5	3,5	4,5

25 a.



$\bar{x} = \frac{3 \times 150 + 5 \times 157,5 + 6 \times 162,5 + 8 \times 167,5 + 8 \times 172,5 + 6 \times 180}{36} = \frac{6\,012,50}{36} \approx 167,014$

$V = \frac{3 \times 150^2 + 5 \times 157,5^2 + 6 \times 162,5^2 + 8 \times 167,5^2 + 8 \times 172,5^2 + 6 \times 180^2}{36} - 167,014^2 = \frac{1\,006\,868,75}{36} - 167,01^2$

$V \approx 74,89.$

$\sigma = \sqrt{V} \approx 8,65.$

$\bar{x} = \frac{7 \times 1,5 + 13 \times 2,5 + 8 \times 3,5 + 2 \times 4,5}{30} = \frac{80}{30}$

$\approx 2,667.$

$V = \frac{7 \times 1,5^2 + 13 \times 2,5^2 + 8 \times 3,5^2 + 2 \times 4,5^2}{30} - 2,667^2$

$= \frac{235,5}{30} - 2,67^2 \approx 0,73$

$\sigma = \sqrt{V} \approx 0,85$

d.

ECC	7	20	28	30
-----	---	----	----	----

Classe médiane [2 ; 3[

Pente du segment : $a = \frac{20 - 7}{2 - 1} = 13.$

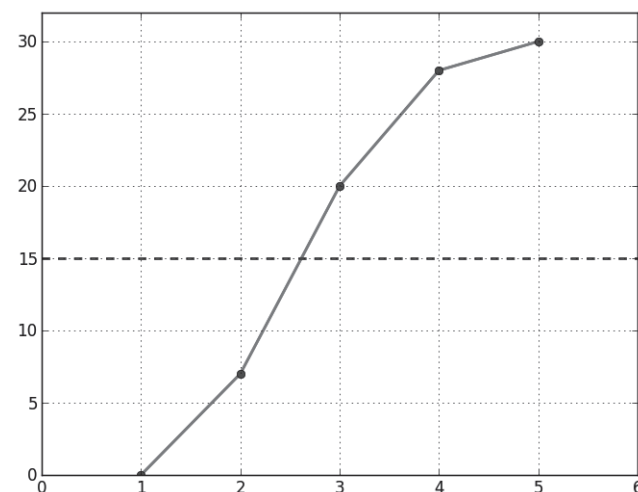
Médiane $a = \frac{15 - 7}{m - 2} = 13 \Leftrightarrow 8 = 13(m - 2)$

$\Leftrightarrow 8 = 13m - 13 \times 2$

$\Leftrightarrow 13m = 8 + 26 = 34$

$\Leftrightarrow m = \frac{34}{13} \approx 2,6$

Médiane calculée 2,6.



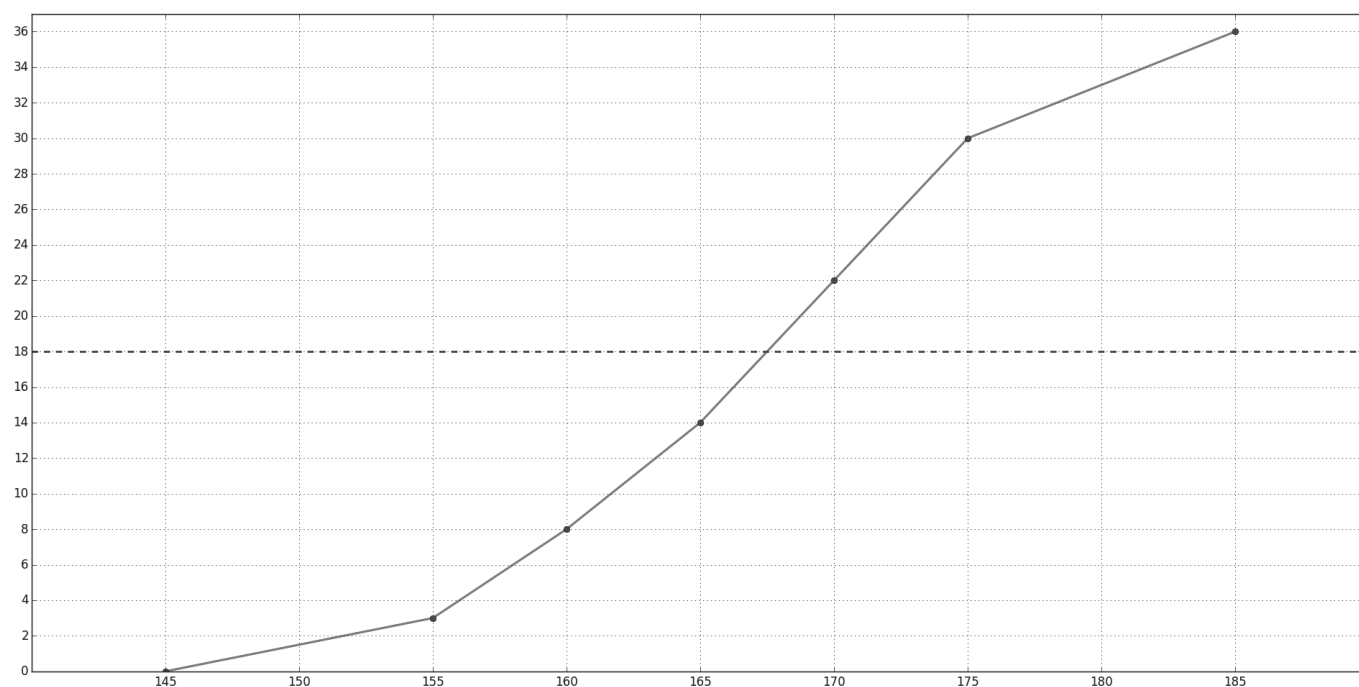
b. Deux classes modales [165 ; 170[et [170 ; 175[

c.

Centre de la classe	150	157,5	162,5	167,5	172,5	180
Effectif	3	5	6	8	8	6

Effectif total : 36.

d.



La médiane se situe dans la classe [165 ; 170[

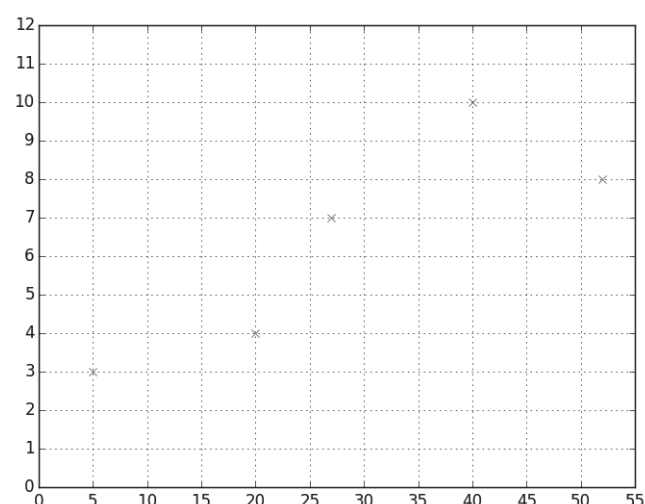
$$\text{Pente : } a = \frac{8}{5} = 1,6.$$

$$\text{ECC : } 3 / 8 / 14 / 22$$

$$a = \frac{18 - 14}{m - 165} = \frac{4}{m - 165} = 1,6 \Rightarrow 4 = 1,6m - 165 \times 1,6 \Rightarrow m = \frac{4}{1,6} + 165 = 167,5.$$

Ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères

26 a.



$$\text{b. } \bar{x} = \frac{5 + 20 + 27 + 40 + 52}{5} = 28,8$$

$$\bar{y} = \frac{3 + 4 + 7 + 10 + 8}{5} = 6,4$$

Donc : $G(28,8 ; 6,4)$.

27 a. Figure 1.

$$\text{b. } \bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10}{5} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{10 + 14 + 13 + 22 + 21}{5} = 16$$

Donc : $G(6 ; 16)$.

$$\text{28 a. } \bar{x} = \frac{98}{7} = 14$$

$$\bar{y} = \frac{174}{7} = 24,857$$

Donc : $G(14 ; 24,86)$.

$$\text{b. } \text{Cov}(X, Y) = \frac{1\,924}{7} - 14 \times \frac{174}{7} \approx -73,143$$

$$V(X) = \frac{1\,484}{7} - 14^2 = 16.$$

$$\text{c. } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \approx -4,57$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 88,86.$$

Équation de la droite de régression de y en x :

$$y = -4,57x + 88,86.$$

29 a. $\bar{x} = \frac{975}{7} \approx 132,29$

$\bar{y} = \frac{1\,716}{7} \approx 245,14$

Donc : $G(132,3 ; 245,1)$.

b. $\text{Cov}(X, Y) = \frac{189\,578}{7} - \frac{975}{7} \times \frac{1\,716}{7} \approx -7\,062,33$

$V(X) = \frac{146\,385}{7} - \left(\frac{975}{7}\right)^2 \approx 1\,511,63$.

c. $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \approx -4,67$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 895,88$

$y = -4,67x + 895,88$

d. On calcule les valeurs y_i^2

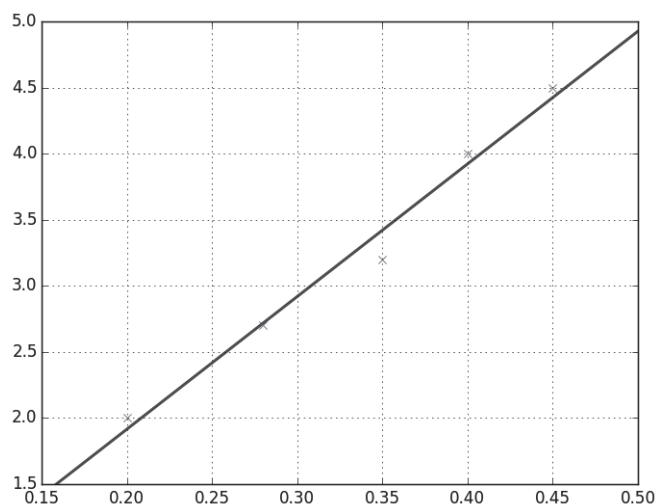
	y_i^2
	289 444
	204 304
	110 889
	36 100
	13 689
	4 225
	441
Total	659 092

Alors $V(Y) = \frac{659\,092}{7} - \left(\frac{1\,716}{7}\right)^2 \approx 34\,060,98$.

$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} \approx -0,98$ proche de 1.

Donc l'ajustement affine est pertinent.

30 a.



b. $\bar{t} = \frac{1,68}{5} = 0,336$ $\bar{v} = \frac{16,4}{5} = 3,28$

Donc : $G(0,336 ; 3,28)$.

c. $\text{Cov}(t, v) = \frac{5,901}{5} - 0,34 \times 3,88 \approx 0,078$

$V(t) = \frac{0,6034}{5} \approx 0,0078$

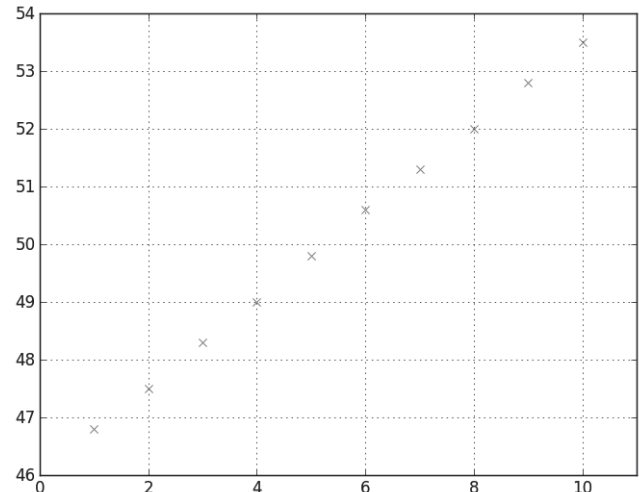
$a = \frac{\text{Cov}(t, v)}{V(t)} \approx 10,036$

$b = \bar{v} - a\bar{t} \approx -0,092$

D'où : $v \approx 10,036t - 0,092$.

d. On a : $g \approx 10$.

31 a.



b. $\bar{x} = \frac{55}{10} = 5,5$ $\bar{y} = \frac{501,6}{10} = 50,16$

$\text{Cov}(X, Y) = \frac{2\,820,6}{10} - 5,5 \times 50,16 \approx 6,18$

$V(X) = \frac{100}{10} - 5,5^2 \approx 8,25$

$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \approx 0,749$ $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 46,04$

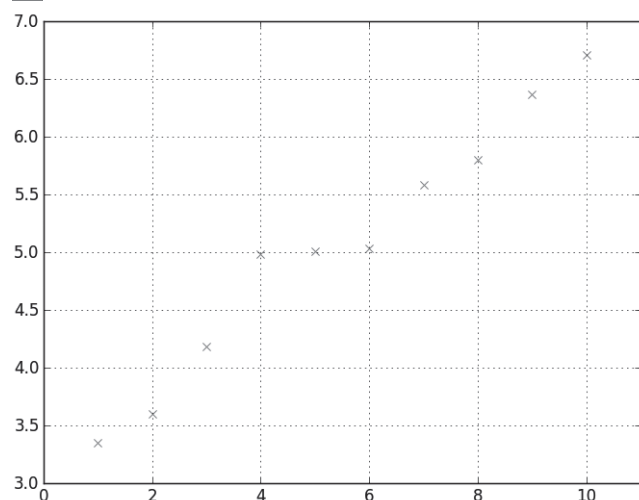
Donc : $y = 0,749x + 46,04$.

c. L'année 2020 sera repérée par $x = 16$.

Alors : $y = 0,749 \times 16 + 46,04 \approx 58,024$.

D'où l'estimation : 58,0 % de population urbaine en 2020.

32 a.



b. $\bar{x} = 5,5$ $\bar{y} = \frac{50,61}{10} = 5,061$
 $\text{Cov}(X, Y) = \frac{308,13}{10} \approx 30,813$
 $V(X) = \frac{100}{10} - 5,5^2 = 8,25$
 $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \approx 0,361$ $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 3,076$.
 D'où l'équation : $y = 0,361x + 3,076$

c. Estimation en 2016 pour $x = 12$:
 $y = 0,361 \times 12 + 3,076 \approx 7,408$.
 Estimation des dépenses en 2012 : 7,41 millions de dollars.
 Estimation en 2020 pour $x = 16$:
 $y = 0,361 \times 16 + 3,076 \approx 8,852$.
 Estimation des dépenses en 2020 : 8,85 millions de dollars.

Se tester

33 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Faux.

34 1. Faux. On a la répartition en classes suivante :

Classe	[20; 25 [	[25; 30 [	[30; 35 [	[35; 40 [	[40; 45 [
Effectif	6	8	12	3	1

La classe modale est la classe [30; 35 [.

2. Vrai.

$$\bar{x} = \frac{6 \times 22,5 + 8 \times 27,5 + 12 \times 32,5 + 3 \times 37,5 + 1 \times 42,5}{6 + 8 + 12 + 3 + 1} = 30.$$

3. Faux. $30 = 15 + 15$. $6 + 8 = 14$. La classe médiane est la classe [30; 35 [. Donc la valeur médiane est strictement supérieure à 30.

4. Vrai.

$$V = \frac{6 \times 22,5^2 + 8 \times 27,5^2 + 12 \times 32,5^2 + 3 \times 37,5^2 + 1 \times 42,5^2}{30} - 30^2 = 26,25.$$

$$\sigma = \sqrt{26,25} = 5,12 \approx 5,1.$$

35 1. c. ; 2. b. ; 3. c.

36 1. c. $\bar{x} = \frac{50 + 100 + 150 + 200 + 250 + 300}{6} = 175$.
 $\bar{y} = \frac{2,8 + 2,5 + 2,2 + 2 + 1,6 + 1,5}{6}$.

2. c. $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)} = \frac{-39,17}{85,39^2} \approx -5,37 \times 10^{-3}$.
 $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 3,04$.

3. a. Pour $x = 500$, on calcule :
 $y = -5,37 \times 10^{-3} \times 500 + 3,04 \approx 0,355 \approx 0,36$.

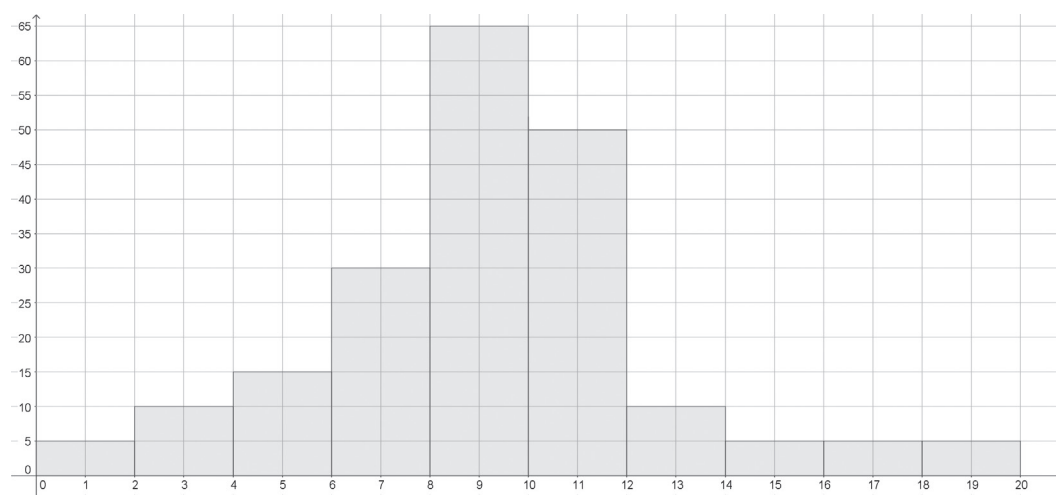
Exercices d'approfondissement

37 Exploiter un histogramme

a.

Note	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 18[	[18 ; 20[
ECC	5	15	30	60	125	175	185	190	195	200
Effectif	5	10	15	30	65	50	10	5	5	5

b.



c. • Nombre de candidats ayant une note supérieure ou égale à 10 : $50 + 10 + 3 \times 5 = 75$. Soit : $\frac{75}{200} = 0,375$.

37,5 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 10.

• Nombre de candidats ayant une note entre 12 et 16 exclu : $10 + 5 = 15$. Soit : $\frac{15}{200} = 0,075$.

7,5 % des candidats ont une note entre 12 et 16 exclu.

d. Moyenne :

$$\bar{x} = \frac{5 \times 1 + 10 \times 3 + 15 \times 5 + 30 \times 7 + 65 \times 9 + 50 \times 11 + 10 \times 13 + 5 \times 15 + 5 \times 17 + 5 \times 19}{200} = 9,2.$$

$$V = \frac{19\,320}{200} - 9,2^2 \approx 11,96.$$

$$\sigma \approx 3,46.$$

38 Population féminine au Sénégal

a. Moyenne : $m = \frac{199\,975}{8\,122} \approx 24,62$. $V \approx 342,565$. $\sigma \approx 18,5$.

b. Effectif total $n = 8\,122$ (en milliers) = $4\,011 + 4\,011$. La médiane est dans la classe $[10 ; 20[$
Détermination de la médiane : recherche de l'équation du segment joignant $A(10 ; 2\,194)$ à $B(20 ; 4\,019)$

$$a = \frac{4\,019 - 2\,194}{10} = \frac{1\,825}{10} = 182,5$$

$$\text{Médiane } M : \frac{4\,011 - 2\,194}{M - 10} = a \Rightarrow 182,5(M - 10) = 1\,817 \Rightarrow M = \frac{1\,817}{182,5 + 10} \approx 19,96.$$

c. La moitié des femmes aurait un âge inférieur ou égal à 19,96, alors que l'âge moyen sera de 24,62.
L'affirmation est vraie.

Nombre de femmes ayant au moins 50 ans : $486 + 278 + 124 + 34 + 3 = 925$.

$\frac{925}{8\,122} \approx 0,114$ soit 11,4 % de la population. Un cinquième fait 20 %, l'affirmation est fausse.

39 Classes d'amplitudes différentes

a.

Classe	[28 ; 30[	...											[52 ; 54[
Centre de la classe	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53
Effectif	3	31	23	45	98	137	155	158	91	51	24	10	2

$$n = 800$$

$$\sum n_i x_i = 32\,916$$

$$\sum n_i x_i^2 = 1\,367\,000 \quad \text{donc } \bar{x} = \frac{32\,916}{800} \approx 41,15$$

$$V \approx 15,84$$

$$\sigma \approx 3,98.$$

b. Nouveau regroupement :

Classe	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[	[40 ; 44[	[48 ; 48[	[48 ; 52[	[52 ; 54[
Centre de la classe	30	34	38	42	46	50	53
Effectif	6	68	235	313	142	34	2

$$\sum n_i x_i = 32\,906$$

$$\text{Nouvelle moyenne } \bar{x}' = \frac{32\,906}{800} \approx 41,13$$

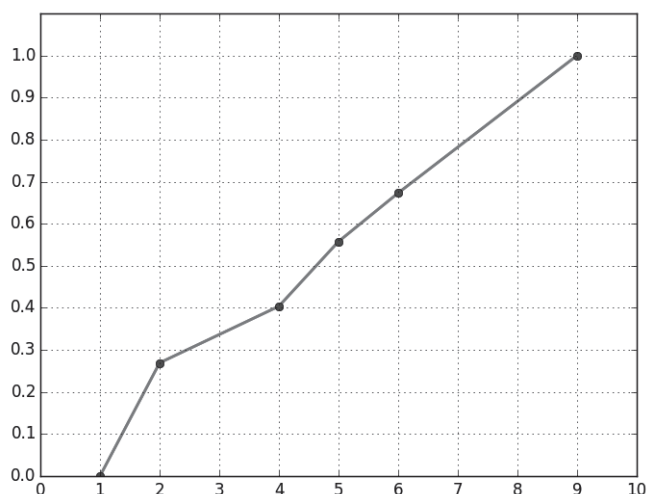
$$\text{Nouvelle variance } V' \approx 16,33$$

$$\text{Nouvel écart-type } \sigma' \approx 4,04.$$

c. Si on se contente de valeurs approchées au dixième, les résultats sont similaires.

40 Fréquences cumulées croissantes

1.



$$2. n = 104 = 52 + 52$$

$$28 + 14 = 42$$

$$28 + 14 + 16 = 58$$

La médiane se trouve dans la classe $[4 ; 5[$.

Équation du segment joignant $A(4 ; 42)$ et $B(5 ; 58)$:

$$a = \frac{58 - 42}{5 - 4} = 16$$

$$\frac{50 - 42}{m - 4} = a = 16 \Leftrightarrow 8 = 16m - 64$$

$$\Leftrightarrow 16m = 8 + 64$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{72}{16} \approx 4,5.$$

3. a. On utilise le segment joignant $M(2 ; 28)$ à $A(4 ; 42)$

$$a_1 = \frac{42 - 28}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Pour $x = 3$, y vérifie $\frac{y - 28}{3 - 2} = 7 \Leftrightarrow y - 28 = 7$

$$\Leftrightarrow y = 35.$$

35 % des individus ont une modalité inférieure à 3.

b. $x = 3$ donne $f = 35$ % ; 5,3 est dans la classe $[5 ; 6[$.

On utilise le segment joignant $B(5 ; 58)$ à $M_2(6 ; 70)$

$$a_2 = \frac{70 - 58}{6 - 5} = 12$$

$$\frac{y - 58}{5,3 - 5} = 12 \Leftrightarrow y = 58 + 12 \times 0,3 = 61,6$$

$$\text{et } 61,6 - 35 = 26,6.$$

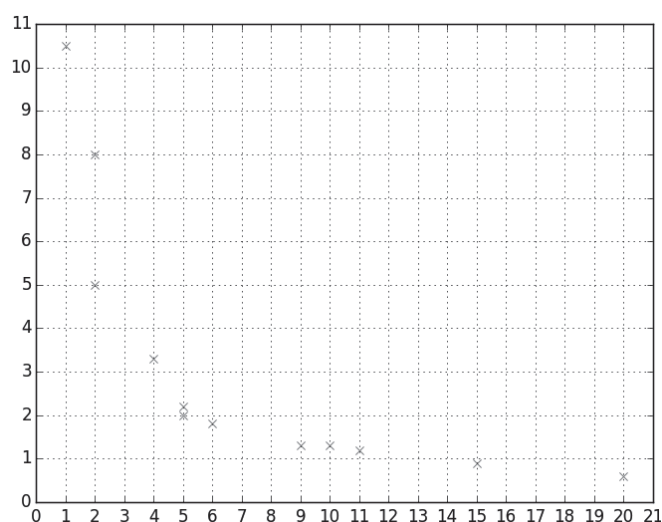
Donc 26,6 % des individus ont une modalité comprise entre 3 et 5,3.

c. $100 - 61,6 = 38,4$ %. 38,4 % des individus ont une modalité supérieure à 5,3.

$$4. \sum n_i x_i = 477 ; n = 104 \text{ donc } \bar{x} = \frac{477}{104} \approx 4,59.$$

$$V \approx 5,78 \text{ et } \sigma \approx 2,4.$$

41 Ajustement non linéaire

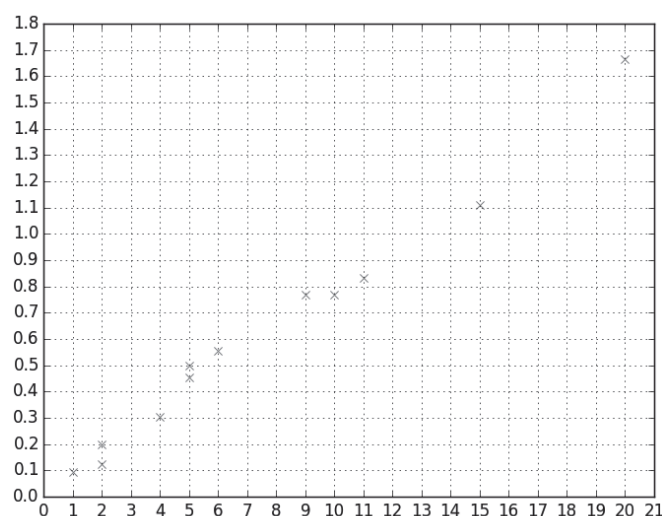


a. Un ajustement linéaire ne semble pas approprié.

b. Valeurs du caractère Z :

$$[0,303 \mid 1,667 \mid 0,095 \mid 0,769 \mid 0,769 \mid 0,455 \mid 0,2 \mid 0,125$$

$$\mid 0,556 \mid 0,5 \mid 0,833 \mid 1,111]$$



c. $\text{Cov}(X, Z) \approx 2,373$

$$a_2 \approx 0,078$$

$$b_2 \approx 0,027$$

$$z = 0,078x + 0,027$$

d. $r_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(x) V(y)}} \approx -0,71$ assez éloigné de 1.

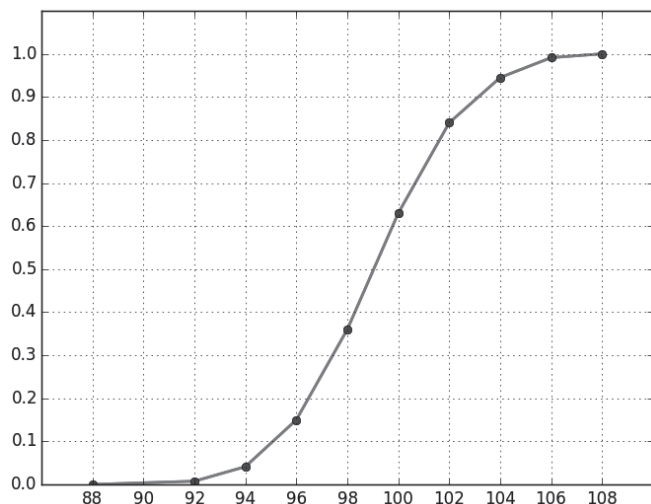
$$r_{xz} = \frac{\text{Cov}(X, Z)}{\sqrt{V(x) V(z)}} \approx 0,99 ; \text{ la régression linéaire est pertinente pour les caractères } X \text{ et } Z.$$

42 Contrôle de qualité

a. $\bar{x} = 99,0625$

$$V = 9,144 \text{ donc } \sigma \approx 3,02$$

b.



$$c. \bar{x} - \sigma \approx 99,06 - 3,02 \approx 96,04$$

$$\bar{x} + \sigma \approx 99,06 + 3,02 \approx 102,08$$

La valeur $\bar{x} - \sigma$ est dans l'intervalle $[96 ; 98[$, et $\bar{x} + \sigma$ dans $[102 ; 104[$.

On utilise les deux segments de la courbe de fréquences cumulées croissantes pour déterminer f_1 correspondant à $x_1 = \bar{x} - \sigma$ et f_2 correspondant à $x_2 = \bar{x} + \sigma$.

Le premier segment est limité par $A_1(96 ; 15)$ et $B_1(98 ; 36)$.

Pente du 1^{er} segment : $a_1 = \frac{36 - 15}{2} = 10,5$

alors $\frac{f_1 - 15}{\bar{x} - \sigma - 96} = a_1$

$$\Rightarrow f_1 = a_1(\bar{x} - \sigma - 96) + 15 = 10,5(96,04 - 96) + 15 = 15,42.$$

Le second segment est limité par $A_2(102 ; 84)$ et $B_2(104 ; 94,5)$

Pente du second segment : $a_2 = \frac{94,5 - 84}{104 - 102} = 5,25$

$$\text{alors } f_2 = a_2(\bar{x} + \sigma - 102) + 84 = 5,25(102,08 - 102) + 84 = 84,42.$$

$$d. f_2 - f_1 = 84,42 - 15,42 = 69 > 68.$$

Donc la chaîne fonctionne correctement.

43 Tests à 1, 2 ou 3 sigmas

a. $n = 800$

$$\bar{x} = 5,99$$

$$\sigma \approx 0,228 \approx 0,23$$

b. La condition sur $\bar{x}$ est vérifiée.

La condition sur σ est vérifiée.

Condition numéro 3 :

$$\bar{x} - \sigma \approx 5,76 \text{ et } \bar{x} + \sigma \approx 6,22$$

$$\bar{x} - \sigma \approx [5,7 ; 5,8[\text{ et } \bar{x} + \sigma \approx [6,2 ; 6,3[$$

$M_1(\bar{x} - \sigma, f_1)$ appartient au segment limité par $A_1(5,7 ; 9,375)$ et $B_1(5,8 ; 19,5)$

$$a_1 = \frac{19,5 - 9,375}{0,1} = 101,25 \text{ donc } \frac{f_1 - 9,375}{5,76 - 5,6} = 101,25$$

$$\text{donc } f_1 = 101,25 \times 0,16 + 9,375 = 15,45$$

$M_1'(\bar{x} + \sigma, f_1')$ appartient au segment limité par $A_1'(6,2 ; 81,75)$ et $B_1'(6,3 ; 90,75)$

$$a_1' = \frac{9}{0,1} = 90 \text{ donc } \frac{f_1' - 81,75}{6,22 - 6,2} = 90$$

$$\text{donc } f_1' = 81,75 + 90 \times 0,02 = 83,55$$

$$f_1' - f_1 = 83,55 - 15,45 = 68,1.$$

La troisième condition est vérifiée.

Condition numéro 4 :

$$\bar{x} - 2\sigma \approx 5,53 \text{ et } \bar{x} + 2\sigma \approx 6,45$$

$$\bar{x} - 2\sigma \approx [5,5 ; 5,6[\text{ et } \bar{x} + 2\sigma \approx [6,4 ; 6,5[$$

$M_2(\bar{x} - 2\sigma, f_2)$ appartient au segment limité par $A_2(5,5 ; 1,375)$ et $B_2(5,6 ; 3,375)$

$$a_2 = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ donc } \frac{f_2 - 1,375}{5,53 - 5,5} = 20$$

$$\text{donc } f_2 = 1,375 + 20 \times 0,03 = 1,975.$$

$M_2'(\bar{x} + 2\sigma, f_2')$ appartient au segment limité par $A_2'(6,4 ; 95,75)$ et $B_2'(6,5 ; 98,88)$

$$a_2' = \frac{98,88 - 95,75}{0,1} = 31,3 \text{ donc } \frac{f_2' - 95,75}{6,45 - 6,4} = 31,3$$

$$\text{donc } f_2' = 95,75 + 31,3 \times 0,05 = 97,315$$

$$f_2' - f_2 = 97,315 - 1,975 = 95,34.$$

La quatrième condition est vérifiée.

Condition numéro 5 :

$$\bar{x} - 3\sigma \approx 5,3 \text{ et } \bar{x} + 3\sigma \approx 6,68$$

Pour $\bar{x} - 3\sigma$ on connaît $f_3 = 0,125$

$$\bar{x} + 3\sigma \approx [6,7 ; 6,8[$$

$M_3(\bar{x} + 3\sigma, f_3')$ appartient au segment limité par $A_3'(6,6 ; 99,75)$ et $B_3'(6,7 ; 99,88)$.

$$a_3' = \frac{99,88 - 99,75}{0,1} = 1,3 \text{ donc } \frac{f_3' - 99,75}{6,68 - 6,6} = 1,3$$

$$\text{donc } f_3' = 99,75 + 1,3 \times 0,08 = 99,854$$

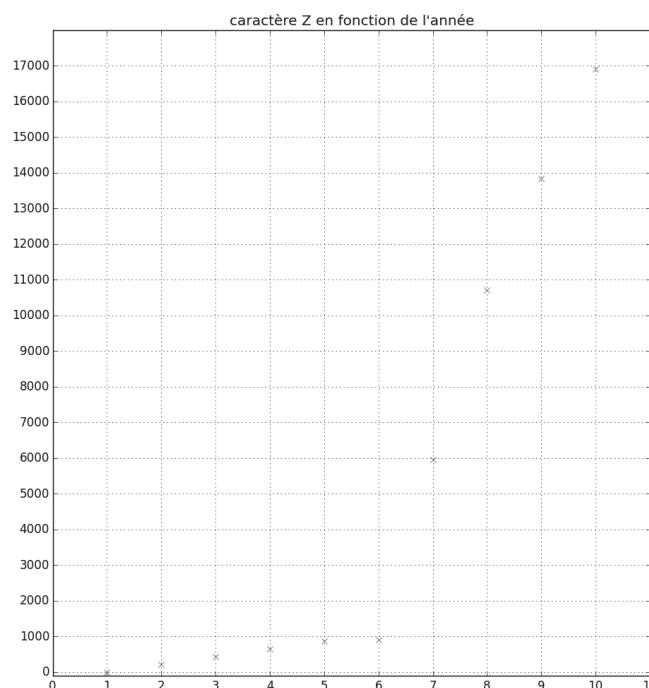
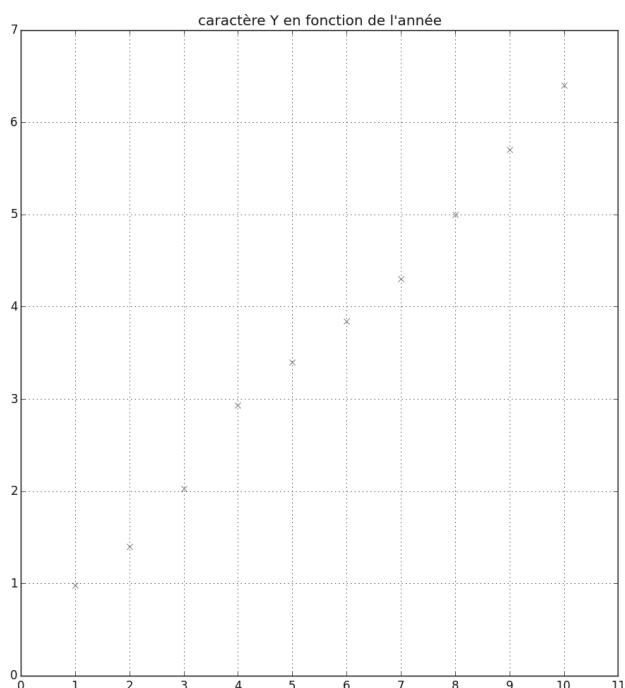
$$f_3' - f_3 = 99,854 - 0,125 = 99,729.$$

La cinquième condition est vérifiée.

Toutes les exigences de qualité sont satisfaites.

44 Interpolation et prévisions

1.

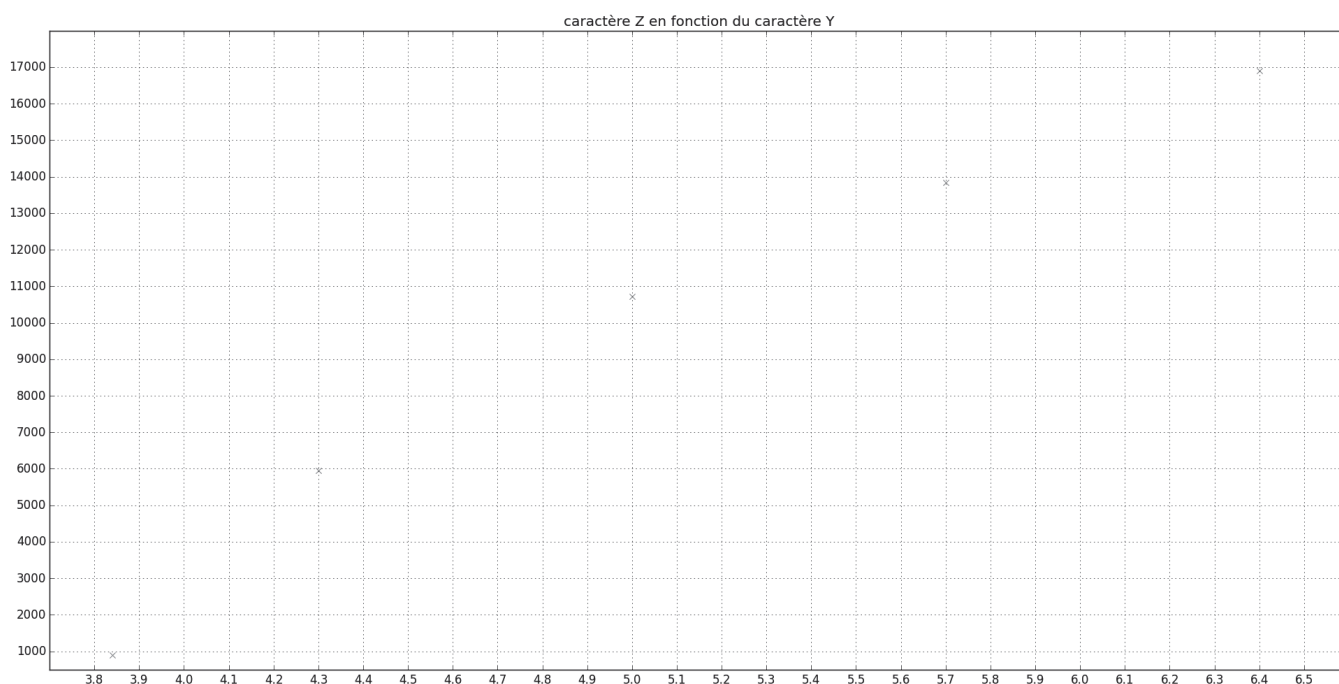
2. a. $\bar{x} = 5,50$ et $\bar{y} = 3,60$ $\text{Cov}(X, Y) = 4,914$ et $V(X) = 8,25$ alors $a \approx 0,596$ et $b \approx 0,322$ Une équation de la droite de régression linéaire de y en x est : $y = 0,596x + 0,322$ b. L'année 2020 est repérée par $x = 17$ alors $y = 0,596 \times 17 + 0,322 \approx 10,454$

En 2020, on prévoit que 10,45 % de la population utilisera Internet.

3. a. On limite les données aux valeurs de rang $X \geq 6$.Alors $\bar{x}' = 8$ et $\bar{z}' = 9\,662,6$ $\text{Cov}(X, Z) = 7\,978,4$ et $V(X) = 2$ $a' \approx 3\,989,2$ $b' \approx -22\,251$ Une équation de la droite de régression linéaire de z en x pour les données de 2009 à 2013 est : $z = 3\,989x - 22\,251$.b. Pour $x = 17$ on calcule $z = 3\,989 \times 17 - 22\,251 = 45\,562$.

On prévoit qu'en 2020, 45 562 personnes auront un accès Internet haute vitesse.

4. a.



b. $\bar{y}' = 5,05$ et $-z' = 9\,662,6$

$\text{Cov}(Y, Z) = 5\,164,27$ et $V(Y) = 0,855$

$a'' = 6\,041,4$

$b'' = -20\,834,3$

Une équation de la droite de régression linéaire de z en y pour les données de 2009 à 2013 est :

$z = 6\,041y - 20\,834$

c. Pour $y = 10$ on a

$z = 6\,041 \times 10 - 20\,834 = 39\,576$

On estime que lorsque 39 576 personnes auront un accès Internet haute vitesse, 10 % de la population utilisera Internet.

5. a. $r_{x'y'} = \frac{\text{Cov}(X', Y')}{\sqrt{V(X') V(Y')}} \approx 0,997$

$r_{xz} = \frac{\text{Cov}(X', Z')}{\sqrt{V(X') V(Z')}} \approx 0,993$

$r_{yz} = \frac{\text{Cov}(Y', Z')}{\sqrt{V(Y') V(Z')}} \approx 0,983$

On note X' , Y' et Z' les données restreintes aux années 2009 à 2013.

Les trois coefficients de corrélation linéaire sont proches de 1, on peut conclure que les réponses données aux questions **2.b.**, **3.b.** et **4.c.** sont pertinentes et fiables.