CARGO

Collection de Mathématiques

1re C/S

LIVRE DU PROFESSEUR

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

ISBN : 978.2.7531.0757.1

Suivi éditorial et mise en page : Acquansù

Sommaire

Sommaire

1 Barycentre de points pondérés

Activités d'introduction

1 La loi d'Archimède

1. a. G est le point d'équilibre lorsque $15 \times GA = 5 \times GB$.

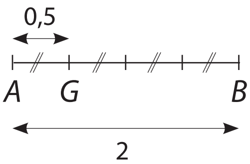
De plus : $2 = AB = GA + GB$ donc $GB = 2 - GA$.

Ainsi, GA vérifie l'équation : $15 \times GA = 5 \times (2 - GA)$;

soit : $15GA = 10 - 5GA \Leftrightarrow 20GA = 10 \Leftrightarrow GA = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Le point G doit être placé sur la perche à une distance du point A égale à 0,5 mètre.

b.



$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{GB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}. \end{cases}$$

Ainsi $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ($a = 3$ et $b = 1$).

2. a. G' étant le point d'équilibre, il vérifie l'égalité $15 \times G'A = m \times G'B$, où m désigne la masse du seau fixé en B.

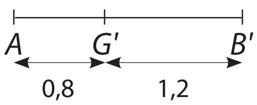
De plus : $G'A = 0{,}8$ et $2 = AB = G'A + G'B$.

Par conséquent, $G'B = 2 - G'A = 2 - 0{,}8 = 1{,}2$.

On obtient alors l'équation : $15 \times 0{,}8 = m \times 1{,}2$;

soit $m = \frac{15 \times 0{,}8}{1{,}2} = 10$. Le seau fixé en B pèse 10 kg.

b.



$G'A = 0{,}8$; $G'B = 1{,}2$ et $AB = 2$.

Ainsi, $G'A = \frac{2}{5}AB$ et $G'B = \frac{3}{5}AB$.

Comme $G' \in [AB]$, $\begin{cases} \overrightarrow{G'A} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{G'B} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}. \end{cases}$

Ainsi, $3\overrightarrow{G'A} + 2\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$. ($a' = 3$ et $b' = 2$.)

2 Quelques propriétés du barycentre

1. a. D'après la relation de Chasles :

$\vec{0} = a\overrightarrow{GA} + b(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = (a + b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB}$

donc $(a + b)\overrightarrow{GA} = -b\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires.

b. Comme $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{GA} = \frac{-b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

Les points A, B, G sont alignés.

2. a. D'après la relation de Chasles :

$\vec{0} = a(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + b(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB})$
$= (a + b)\overrightarrow{GO} + a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$.

Ainsi, comme $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$.

En outre, deux vecteurs sont égaux, si et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées. Par conséquent :

$$\begin{cases} x_G = x_{\overrightarrow{OG}} = \frac{a}{a+b}x_{\overrightarrow{OA}} + \frac{b}{a+b}x_{\overrightarrow{OB}} = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ y_G = y_{\overrightarrow{OG}} = \frac{a}{a+b}\,y_{\overrightarrow{OA}} + \frac{b}{a+b}\,y_{\overrightarrow{OB}} = \frac{ay_A + by_B}{a+b}. \end{cases}$$

b. D'après ce qui précède,
comme $a = 3$, $b = -2$, $a + b = 1$, on a :

$$\begin{cases} x_G = 3 \times \frac{1}{3} + (-2) \times (-\frac{1}{2}) = 1 + 1 = 2. \\ y_G = 3 \times 1 + (-2) \times 0 = 3 \end{cases}$$

3 Barycentre partiel

1. On observe que les points G et H sont confondus.

2. a. $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b. $a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$.

c. En utilisant la relation de Chasles dans la première égalité, on a :
$a(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A}) + b(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B}) + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
soit $(a + b)\overrightarrow{GG'} + a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Or $a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} = \rightarrow 0$ donc $(a + b)\overrightarrow{GG'} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

d. On en déduit alors, comme $(a + b) + c \neq 0$, que G est le barycentre des points pondérés $(G', a + b)$ et (C, c).

4 Ligne de niveau

1. a. $M \in (\mathscr{E}_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MB} = 3$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$
$= 3$

$\Leftrightarrow (MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GA} + GA^2) - (MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GB} + GB^2)$
$= 3$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})+GA^2-GB^2=3$.

De plus, G est le milieu de $[AB]$ (donc $GA^2-GB^2=0$) et $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}$ d'après la relation de Chasles.

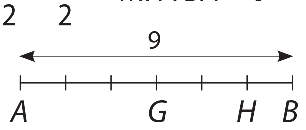
On en déduit alors que : $M\in(\mathscr{E}_3)\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}$.

b. D'après la relation de Chasles :

$M\in(\mathscr{E}_3)\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HG})\,.\,\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HG}\,.\,\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{BA}=0$



$\begin{cases}BA=9\\ \overline{HG}\,.\,\overline{BA}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ donc $HG=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{6}$.

c. $M\in(\mathscr{E}_3)\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{BA}=0$

$\Leftrightarrow M\in\mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est la prependiculaire passant par H à la droite (AB).

2. $M\in(\mathscr{E}_0)\Leftrightarrow MA^2-MB^2=0$

$\Leftrightarrow MA^2=MB^2\Leftrightarrow MA=MB$

($MA\geqslant 0$ et $MB\geqslant 0$)

$\Leftrightarrow M\in\mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Savoir-faire

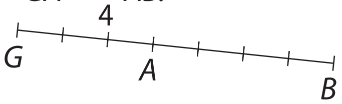
3 **a.** • $a+b=0$, donc le barycentre des points pondérés $(A, 0{,}1)$ et $(B, -0{,}1)$ n'existe pas.

b. $a+b=7+(-3)=4\neq 0$, donc les points pondérés $(A, 7)$ et $(B, -3)$ admettent un unique barycentre G.

De plus, $7\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Par la relation de Chasles, $7\overrightarrow{GA}-3(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$;

$4\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.



4 • D'après la relation de Chasles,

$2\overrightarrow{MP}=3(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN})$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}+3\overrightarrow{PN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}-3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$.

Comme $1+(-3)\neq 0$, $P=\text{bary}\{(M, 1), (N, -3)\}$

• Puis, comme $k=5\neq 0$, $P=\text{bary}\{(M, 5), (N, -15)\}$.

7 **a.** $G=\text{bary}\{(A, 2), (B, -4), (C, 1)\}$

$(2+(-4)+1=-1\neq 0)$.

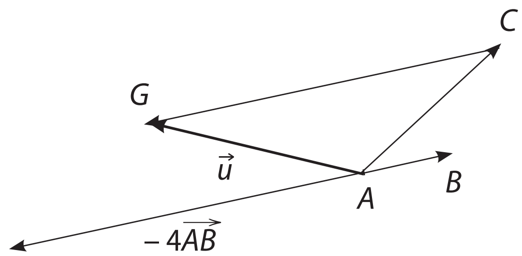
Par définition $2\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

En utilisant la relation de Chasles deux fois :

$2\overrightarrow{GA}-4(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$,

$-\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, soit $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$.

$\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{GA}=\vec{u}.\end{cases}$



b. $G'=\text{bary}\{(A, 6), (B, 3), (C, 3)\}$ $(6+3+3=12\neq 0)$.

Par définition, $6\overrightarrow{G'A}+3\overrightarrow{G'B}+3\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$.

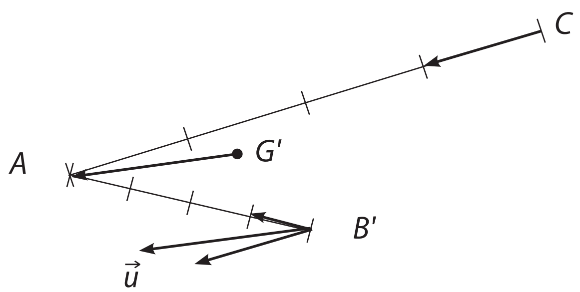
Ainsi, en utilisant la relation de Chasles deux fois :

$6\overrightarrow{G'A}+3(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

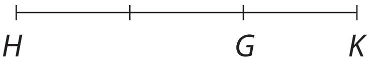
$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{G'A}=3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CA}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{G'A}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}$

$\begin{cases}\vec{u}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{G'A}=\vec{u}.\end{cases}$



8 **a.** D'après la relation de Chasles, on a :
$3\overrightarrow{GH} + 2(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GK}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$
Ainsi, $G = \text{bary}\{(H, 1), (K, 2)\}$ $(1 + 2 \neq 0)$.
b. $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$.



9 **a.** Comme $4 + (-1) + (-2) = 1 \neq 0$, le barycentre G des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$, $(C, -2)$ existe et est unique.
b. Les coordonnées du point G sont :
$$\begin{cases} x_G = 4 \times 0 + (-1) \times 5 + (-2) \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) \\ y_G = 4 \times (-1) + (-1) \times \dfrac{4}{3} + (-2) \times 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_G = -5 + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{8}{5} \\ y_G = -4 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{16}{3}. \end{cases}$$

10 Par définition du barycentre G :
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{3 \times x_E + 2 \times x_F}{5} \\ y_G = \dfrac{3 \times y_E + 2 \times y_F}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{3 + 2x_F}{5} \\ 0 = -\dfrac{-3 + 2y_F}{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 3 + 2x_F \\ 0 = -3 + 2y_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = \dfrac{7}{2} \\ y_F = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

13 Comme $(-0,5) + (-0,5) = -1 \neq 0$, le barycentre, noté H, des points pondérés $(B, -0,5)$ et $(C, -0,5)$ existe et est unique. Ainsi, d'après le barycentre partiel :
$G = \text{bary}\{(A, 5), (B, -0,5), (C, -0,5)\}$
$G = \text{bary}\{(A, 5), (H, (-0,5) + (-0,5))\}$
$G = \text{bary}\{(A, 5), (H, -1)\}$.

14 Comme $2 + (-1) = 1 \neq 0$ et $2 + 3 = 5 \neq 0$, les barycentres, notés respectivement E et F, des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -1)$ et respectivement $(C, 2)$ et $(D, 3)$ existent et sont uniques.
Ainsi, d'après le barycentre partiel :
$G = \text{bary}\{(A, 2), (B, -1), (C, 2), (D, 3)\}$
$G = \text{bary}\{(E, (2 + (-1))), (F, 2 + 3)\}$
$G = \text{bary}\{(E, 1), (F, 5)\}$.

15 • On cherche a, b, c trois nombres réels tels que : $a + b + c \neq 0$ et $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
• On sait que $I = \text{bary}\{(B, 1), (C, 1)\}$ car I milieu de $[BC]$.
Ainsi, le barycentre partiel permet d'écrire que :
$G = \text{bary}\{(A, 2), (I, 1)\}$
$G = \text{bary}\left\{(A, 2), \left(B, \dfrac{1}{2}\right), \left(C, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$ car $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.
• On vérifie que $2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 3 \neq 0$.

16 • Comme $a = b = 1$, d'après la propriété du paragraphe **5.b.**, on note $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$, c'est le milieu de $[AB]$.
On note $\alpha = \dfrac{100 - GA^2 - GB^2}{2}1.$
• Comme $AB = 3$, $GA = GB = \dfrac{6}{2} = 3$.
Donc $\alpha = \dfrac{100 - 9 - 9}{2} = \dfrac{82}{2} = 41$.
• Par conséquent, comme $\alpha > 0$, l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{41}$.

Exercices d'entraînement

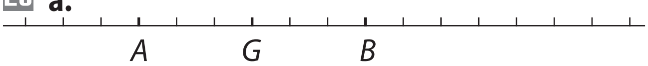
Barycentre de deux points pondérés

17 **a.** $3,7 + (-3) = 0,7 \neq 0$. Donc oui.
b. $\dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{\sqrt{16}}{3}\right) = \dfrac{4}{3} + \left(-\dfrac{4}{3}\right) = 0$. Donc non.
c. $-5 + \sqrt{25} = -5 + 5 = 0$. Donc non.
d. $\dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \neq 0$. Donc oui.

18 **b.** et **d.**

19 $3\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{HE} = \vec{0}$. Donc **a.**

20 **a.**



$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

b.

$-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

c.

$-\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

d.

$\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

21 **a.** $\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$

Donc $M = \text{bary}\{(A, -1), (B, 4)\}$. $(-1 + 4 \neq 0)$.

b. $\overrightarrow{BM} = 7\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$

Donc $M = \text{bary}\{(A, 7), (B, 1)\}$ $(7 + (1) \neq 0)$.

c. $\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$

Donc $M = \text{bary}\left\{\left(A, \frac{1}{2}\right), (B, -1)\right\}$ $(\frac{1}{2} + (-1) \neq 0)$.

d. $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}.$

Donc $M = \text{bary}\{(A, 1), (B, 4)\}$ $(1 + 4 \neq 0)$.

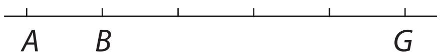
22 **a.** Comme $3 + (-4) = -1 \neq 0$, G existe.

Par définition : $3\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

En utilisant la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{GA} - 4(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AB}.$



b. Comme $-1 + 5 = 4 \neq 0$, G existe.

Par définition : $-\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

En utilisant la relation de Chasles :

$-\overrightarrow{GA} + 5(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.$

c. Comme $7 + (-7) = 0$, G n'existe pas.

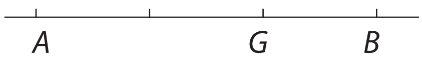
d. Comme $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \neq 0$, G existe.

Par définition : $\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

En utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$



e. Comme $(-5) + (-10) = -15 \neq 0$, G existe.

Par définition : $-5\overrightarrow{GA} - 10\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

On retrouve le point G de la question **d.**

f. Comme $0{,}5 + (-3) = -2{,}5 \neq 0$, G existe.

Par définition, $0{,}5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

En utilisant la relation de Chasles :

$0{,}5\overrightarrow{GA} - 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -2{,}5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB}.$

23 M désigne un point du plan. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} &= a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= (a + b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = b\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

24 **a.** $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

$a = 2$ et $b = 1$.

b. $5\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

$a = 5$ et $b = -1$.

c. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$ $\qquad a = b = 1.$

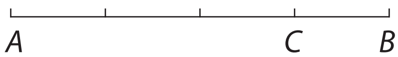
d. $\begin{cases} \overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{BA} \end{cases}$ donc $3\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

$a = 3$ et $b = -4$.

25 **Dispositif 1**

$\begin{cases} M \times CA = 3M \times CB \\ C \in [AB] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} CA = 3CB \\ C \in [AB] \end{cases}$ (car $M > 0$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}.$

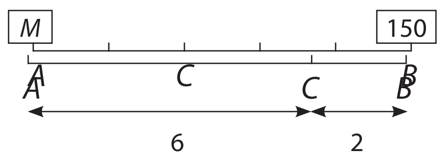


Dispositif 2

$\begin{cases} 3M \times CA = 2M \times CB \\ C \in [AB] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3CA = 2CB \\ C \in [AB] \end{cases}$ (car $M > 0$)

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}.$

26



$\begin{cases} M \times AC = 150 \times CB \\ C \in [AB]. \end{cases}$

Donc $M = 150 \times \frac{2}{6}$ soit $M = 50$ kg.

27 **a.** Par définition, d'une part $2\overrightarrow{GE} - 3\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ et $-3\overrightarrow{EH} + 2\overrightarrow{FH} = \vec{0}$.

En utilisant la relation de Chasles, on a :

• $2\overrightarrow{GE} - 3(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF}$

• $-3\overrightarrow{EH} + 2\overrightarrow{FH} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -3(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}) + 2\overrightarrow{FH} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FH} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FH} = -3\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{FE}.$

b. Les points E, F et G sont alignés d'une part, et d'autre part, les points E, F et H sont alignés. Ainsi, les points E, F, G, H sont alignés.

28 **a.** Par définition du barycentre, $-\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
En utilisant la relation de Chasles :

$-(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + 5(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}$

On a alors :

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(-\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB})$

b. Ainsi :

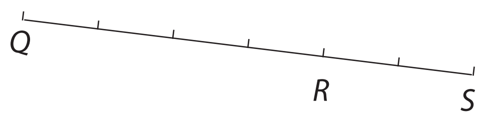
$$\begin{cases} x_G = x_{\overrightarrow{OG}} = \frac{1}{4}(-x_A + 5x_B) = \frac{1}{4}\left(1 + 5 \times \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4} \\ y_G = y_{\overrightarrow{OG}} = \frac{1}{4}(-y_A + 5y_B) = \frac{1}{4}\left(-3 + 5 \times 2\right) = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

29 **a.** Par définition : $3\overrightarrow{QR} - 2\overrightarrow{QS} = \vec{0}$.

Ainsi, d'après l'égalité de Chasles :

$3\overrightarrow{QR} - 2(\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{RS}.$



b. $3\overrightarrow{QR} - 2\overrightarrow{QS} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{QR'} - \overrightarrow{QS'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{QR'} - 2\overrightarrow{QS'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow Q = \text{bary}\{(R', 3), (S', -2)\}$ $(3 + (-2) \neq 0)$.

Barycentre de trois ou quatre points

30 **a.** $1 + 3 + (-4) = 0$. Donc non.

b. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12} + \left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Donc oui.

c. $0{,}2 + 0{,}2 + (-2 \times 0{,}2) = 0$. Donc non.

d. $\sqrt{7} - \sqrt{3} - \sqrt{4} \neq 0$. Donc oui.

31 **a.** $\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

donc $A = \text{bary}\{(B, 1), (C, 5), (D, -4)\}$ $(1 + 5 + (-4) \neq 0)$.

b. $A = \text{bary}\{(B, 2), (C, 10), (D, -8)\}$.

32 $2\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{EH}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EG} - 3\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EH} = \vec{0}$

donc $E = \text{bary}\{(G, 2), (F, -3), (H, 2)\}$ $(2 + (-3) + 2 \neq 0)$.

33 G est le centre de gravité du triangle ABC, donc $A = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$.

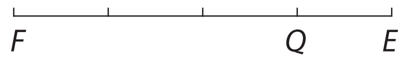
34 **a.** On a : $3\overrightarrow{EP} + 2\overrightarrow{FP} - 2\overrightarrow{GP} = \vec{0}$.

Comme $3 + 1 + (-2) = 2 \neq 0$, le barycentre (noté P) des points pondérés $(E, 3)$, $(F, 1)$ et $(G, -2)$ existe et est unique.

b. Par définition : $3\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QF} = \vec{0}$ $(3 + 1 \neq 0)$.

En utilisant la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{QE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FE}.$



c. • D'après le barycentre partiel :

$P = \text{bary}\{(E, 3), (F, 1), (G, -2)\}$

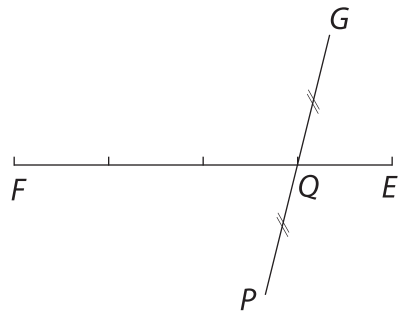
$P = \text{bary}\{(Q, 3 + 1), (G, -2)\}$

$P = \text{bary}\{(Q, 4), (G, -2)\}$.

Donc $4\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{PG} = \vec{0}$

• En utilisant la relation de Chasles, on a :

$2\overrightarrow{PQ} - (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QG}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QG} \Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QG}.$



35 • $3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{CI} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow I = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1), (C, 2)\}$ $(3 + (-1) + 2 \neq 0)$.

• On note $H = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1)\}$
(existe car $3 + (-1) = 2 \neq 0$).

• D'après le barycentre partiel, on a :

$I = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1), (C, 2)\}$

$I = \text{bary}\{(H, 3 + (-1)), (C, 2)\}$

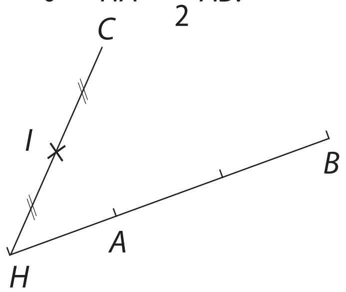
$I = \text{bary}\{(H, 2), (C, 2)\}$

I est donc le milieu de $[HC]$.

• Construisons d'abord le point H. D'après la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HA} - (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$



36 M désigne un point du plan. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} &= a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + c(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= (a + b + c)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}. \end{aligned}$$

Or $G = \text{bary}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$,
donc $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$,
donc $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$.

37 D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} &= a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + c(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= (a + b + c)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

38 **a.** Par définition et la relation de Chasles :

$-\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}.$

b. Par définition et la relation de Chasles :

$2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{JC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}.$

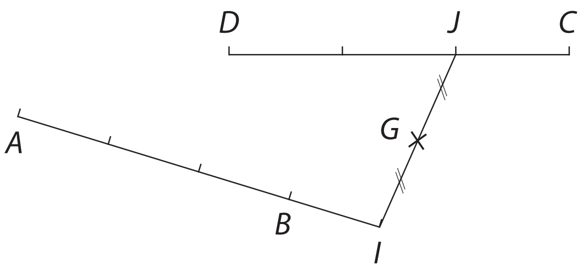
c. • Par le barycentre partiel :

$G = \text{bary}\{(A, -1), (B, 4), (C, 2), (D, 1)\}$

$G = \text{bary}\{(I, (-1) + 4), (J, 2 + 1)\}$

$G = \text{bary}\{(I, 3), (J, 3)\}$

• G est donc le milieu de $[IJ]$.



39 • D'après le barycentre partiel :

$G = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1), (C, 3), (D, -1)\}$

$G = \text{bary}\{(I, 3 + (-1), (J, (3 + (-1))\}$

$G = \text{bary}\{(I, 2), (J, 2)\}$

où $\{I = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1)\}$

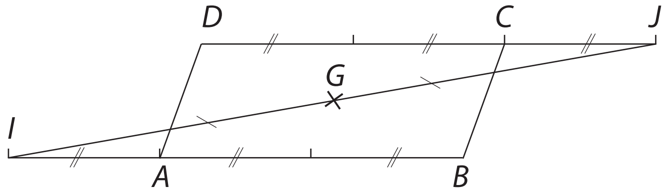
$\{J = \text{bary}\{(C, 3), (D, -1)\}$ $(3 + (-1) \neq 0)$.

• Construction des points I et J :

$3\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$

Idem : $\overrightarrow{JC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$



• On place G milieu de $[IJ]$.

40 **a.** Comme $ABCD$ est un parallélogramme :

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow D = \text{bary}\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$ $(1 + (-1) + 1 = 1 \neq 0)$.

b. I est le milieu de $[DC]$, donc $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
En utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ &\quad (\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow I = \text{bary}\{(A, 1), (B, -1)\ (C, 2)\}$ $(1 + (-1) + 2 = 2 \neq 0)$.

41 **a.** G est l'isobarycentre des points A, B, C. Donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

• En utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$

(A' milieu de $[BC]$).

• Idem pour les deux autres.

b. • $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$, donc les points G, A, A' sont alignés.

• $3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BB'} = \vec{0}$, donc les points G, B, B' sont alignés.

• $3\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$, donc les points G, C, C' sont alignés.

c. (AA'), (BB') et (CC') sont les trois médianes du triangle ABC. D'après la question **b.**, $G \in (AA')$, $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$. G est donc l'intersection des trois médianes : c'est le centre de gravité du triangle ABC.

42 On cherche G tel que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

• On note $H = \text{bary}\{(A, 2), (B, 3)\}$.

Alors par définition et d'après la relation de Chasles :

$2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HA} + 3(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = \dfrac{3}{5}\,\overrightarrow{BA}$

• D'après le barycentre partiel, on a :

$G = \text{bary}\{\underbrace{(A, 2), (B, 3)}, (C, 4)\}$

$G = \text{bary}\{(H, 2 + 5), (C, 4)\}$

$G = \text{bary}\{(H, 5), (C, 4)\}$.

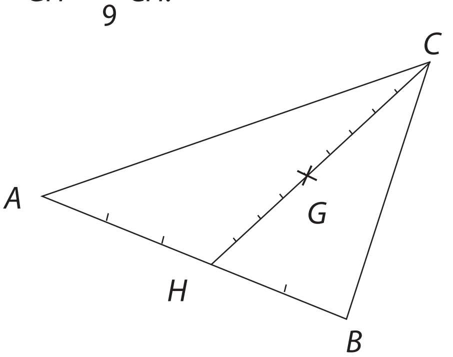
• On écrit alors $5\overrightarrow{GH} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D'après la relation de Chasles :

$5\overrightarrow{GH} + 4(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{GH} + 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \dfrac{4}{9}\,\overrightarrow{CH}$.



$$\begin{cases} \overrightarrow{GH} = \dfrac{4}{9}\,\overrightarrow{CH} \\ \overrightarrow{HA} = \dfrac{3}{5}\,\overrightarrow{BA} \end{cases}$$

43 • L est le milieu de $[AK]$ donc $L = \text{bary}\{(A, 2\}, (K, 2)\}$.

• K milieu de $[BC]$ donc $K = \text{bary}\{(B, 1), (C, 1)\}$.

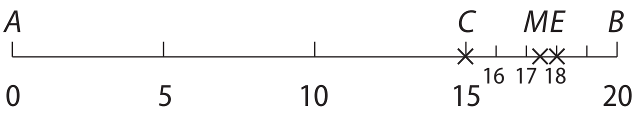
• Ainsi, par le barycentre partiel :

$L = \text{bary}\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$.

44 **a.** $m = \dfrac{15 \times 2 + 18 \times 1 + 17 \times 3}{2 + 1 + 3} = \dfrac{99}{6} = 16{,}5$

Ali a 16,5 de moyenne.

b. c.



d. On pose $a = 2$, $b = 1$ et $c = 3$. Le point C représente la note 15.

Le point D représente la note 18.

Le point E représente la note 17.

On a alors : $2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{ME} = \vec{0}$.

45 **a.** Par le barycentre partiel, comme

$I = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$,

$J = \text{bary}\{(B, 1), (C, 1)\}$,

$K = \text{bary}\{(C, 1), (D, 1)\}$,

$L = \text{bary}\{(D, 1), (A, 1)\}$,

(car ce sont les milieux des segments associés), on a :

• $G = \text{bary}\{\underbrace{(A, 1), (B, 1)}, \underbrace{(C, 1), (D, 1)}\}$

$G = \quad \text{bary}\{(I, 2), \qquad (K, 2)\}$

• $G = \text{bary}\{\underbrace{(A, 1), (D, 1)}, \underbrace{(C, 1), (B, 1)}\}$

$G = \quad \text{bary}\{(L, 2), \qquad (J, 2)\}$.

b. Comme $G = \text{bary}\{(I, 2), (K, 2)\}$, $G \in (IK)$ et comme $G = \text{bary}\{(L, 2), (J, 2)\}$, $G \in (LJ)$. Donc les diagonales de $IJKL$ se coupent en G et c'est le milieu de $[IK]$ et de $[LJ]$.

• Comme les diagonales du quadrilatère $IJKJ$ se coupent en leur milieu, c'est un parallélogramme.

46 **a.** On a :

$$\begin{cases} M\overrightarrow{GA} + M_1\overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ M_2\overrightarrow{GA} + M\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{cases}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\begin{cases} M\overrightarrow{GA} + M_1(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \\ M_2\overrightarrow{GA} + M(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (M + M_1)\overrightarrow{GA} = M_1\overrightarrow{BA} \\ (M_2 + M)\overrightarrow{GA} = M\overrightarrow{BA} \end{cases}$$

or $M_1 > 0$ et $M > 0$

donc $\dfrac{M + M_1}{M_1} = \dfrac{M_2 + M}{M}$

$\Leftrightarrow M_1(M_2 + M) = M(M + M_1)$

$\Leftrightarrow M_1M_2 + M_1M = M^2 + MM_1$

$\Leftrightarrow M^2 = M_1M_2$

donc $M = \sqrt{M_1M_2}$ (car $M \geqslant 0$).

b. • $\sqrt{M_1M_2} \geqslant 0$ et $\dfrac{M_1 + M_2}{2} \geqslant 0$.

Ainsi, comparer ces deux nombres revient à comparer leurs carrés :

$(\sqrt{M_1M_2})^2 - \left(\dfrac{M_1 + M_2}{2}\right)^2 = M_1M_2 - \dfrac{M_1^{\,2} + 2M_1M_2 + M_2^{\,2}}{4}$

$= M_1M_2 - \dfrac{1}{2}M_1M_2 - \dfrac{1}{4}(M_1^{\,2} + M_2^{\,2})$

$= -\dfrac{M_1^{\,2} - 2M_1M_2 + M_2^{\,2}}{4} = -\dfrac{(M_1 - M_2)^2}{4} \leqslant 0$

donc $(\sqrt{M_1M_2})^2 \leqslant \left(\dfrac{M_1 + M_2}{2}\right)^2$

donc $\sqrt{M_1M} \leqslant \dfrac{M_1 + M_2}{2}$.

c. Le choix de la marchande n'est donc pas équitable.

Ligne de niveau

47 $a = b = 1$ et $k = 2$.

On note $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$ et on pose $\alpha = \dfrac{2 - GA^2 - GB^2}{1 + 1}$.

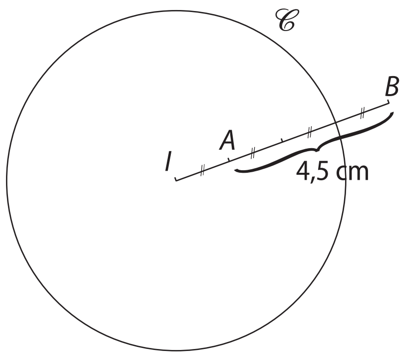
Ainsi, comme G milieu de $[AB]$ avec $AB = 2$, on a :

$$\alpha = \frac{2 - 1^2 - 1^2}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0.$$

Comme $\alpha = 0$, l'ensemble cherché est le point G.
Donc réponse **c.**

48 **a.** Par définition et en utilisant la relation de Chasles :

$$4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$



b. M désigne un point du plan. On a, d'après la relation de Chasles :

$$4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = 4(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) - (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = \underbrace{4\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}}_{=\vec{0}} + 3\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IM}$$

car $I = \text{bary}\{(4, 1), (B, -1)\}$.

c. $\|4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\| = 3AB \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{IM}\| = 3AB$
$\Leftrightarrow 3IM = 3AB$
$\Leftrightarrow IM = AB$
$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(I\,;AB)$

(voir figure au **a.**)

49 **a.** Par définition et en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} - 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{AB}.$$

b. Par définition et en utilisant la relation de Chasles :

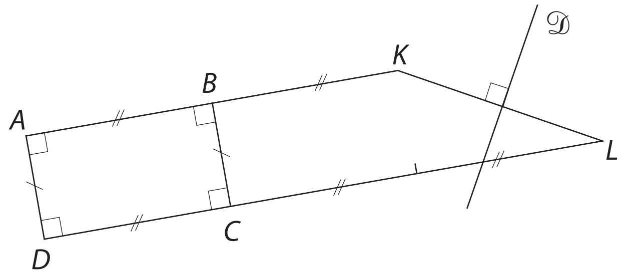
$$-3\overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{LD} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{LC} + 2(\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{LC} = 2\overrightarrow{CD}.$$

c. M désigne un point du plan.

• $\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM}) - 2(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM}) = \underbrace{\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{BK}}_{=\vec{0}} - \overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{KM}$

• $-3\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{DM} = -3(\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{LM}) + 2(\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LM}) = \underbrace{-3\overrightarrow{CL} + 2\overrightarrow{DL}}_{=\vec{0}} - \overrightarrow{LM} = -\overrightarrow{LM}$

d. $\|\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}\| = \|-3\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{DM}\|$
$\Leftrightarrow \|-\overrightarrow{KM}\| = \|-\overrightarrow{LM}\|$
$\Leftrightarrow KM = LM$
$\Leftrightarrow M \in \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est la médiatrice du segment $[KL]$.



50 **1. a.** On note $K = \text{bary}\{(A, 1), (B, 4)\}$.

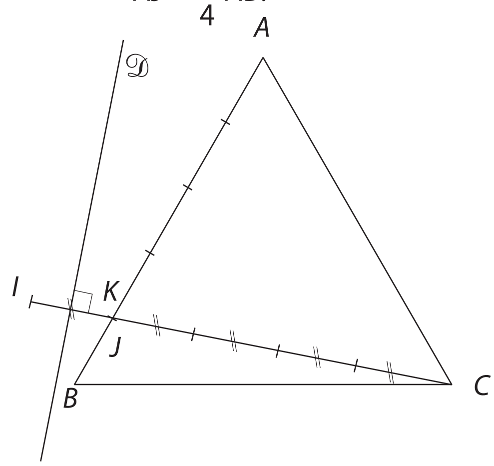
On a : $\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

Puis par le barycentre partiel, $I = \text{bary}\{(K, 5), (C, -1)\}$.

On a : $5\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IK} - \overrightarrow{KC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{KC}.$

b. On a :

$$\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$



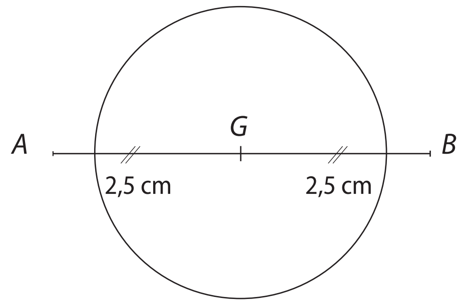
c. $\|\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$
$\Leftrightarrow \|4\overrightarrow{IM}\| = \|4\overrightarrow{JM}\|$
$\Leftrightarrow IM = JM$
$\Leftrightarrow M \in \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment $[IJ]$.

2. • On pose $I' = \text{bary}\{(A, 5), (B, -1), (C, -2)\}$,
$K = \text{bary}\{(A, 5), (B, -1)\}$.
On a : $5\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB}$
et $5\overrightarrow{I'A} - \overrightarrow{I'B} - 2\overrightarrow{I'C} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{I'K} - 2\overrightarrow{I'C} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{I'K} - \overrightarrow{I'K} - \overrightarrow{KC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{I'K} = \overrightarrow{KC}$
On note J' le milieu du segment $[AB]$.
Ainsi, $\|5\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$
$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{I'M}\| = \|2\overrightarrow{J'M}\|$
$\Leftrightarrow I'M = J'M$
$\Leftrightarrow M \in \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment $[I'J']$.

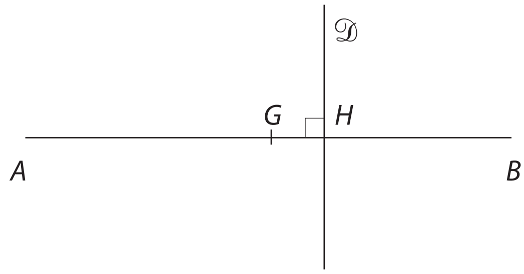
51 $a = b = 1$. On note $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$, soit G le milieu de $[AB]$.

a. On pose $\alpha = \dfrac{4 - GA^2 - GB^2}{1+1}$.
$\alpha = \dfrac{4 - 2^2 - 2^2}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 < 0$
Donc l'ensemble est vide.

b. On pose $\alpha = \dfrac{20 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 2}{1+1}$.
$\alpha = \dfrac{20 - \frac{25}{2}}{2} = \dfrac{15}{4}$.
Donc l'ensemble est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.



52 On note G le milieu de $[AB]$. On a :
$MA^2 - MB^2 = 1$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = 1$
$\Leftrightarrow (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2) - (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2) = 1$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) = 1$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BA} = 1$.
On note H le point de la droite (AB) tel que $2\overline{HG} \cdot \overline{BA} = 1$.
Alors :
$MA^2 - MB^2 = 1 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG}) \cdot \overrightarrow{BA} = 1$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BA} = 1$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$
Donc l'ensemble des points M est la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à la droite (AB) passant par H.



Se tester

53 **1.** Faux ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai.

54 **1.** Faux. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC}$.
D'après la relation de Chasles :
$3\overrightarrow{AG} - (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow G = \text{bary}\ \{(A, 2), (C, 1)\}$.

2. Vrai. F est le milieu de $[BC]$ donc $F = \text{bary}\ \{(B, 1), (C, 1)\}$.
Ainsi, d'après le barycentre partiel,
$E = \text{bary}\ \{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$
$E = \text{bary}\ \{(A, 2), (F, 2)\}$
et E est le milieu de $[AF]$.

3. Faux. $3\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{GE}$
$3\overrightarrow{RE} - (\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RE}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{RE} - \overrightarrow{GR} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RG} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow R = \text{bary}\ \{(E, 2), (G, 1)\}$.

4. Vrai. $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{FT}$. D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{EF} - 2(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ET}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{ET} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{ET} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow E = \text{bary}\ \{(F, 3), (T, -2)\}$.

5. Vrai. Dans ce cas, $a = b = 1$ et $k = 10$. On note G le milieu de $[LK]$. On pose $\alpha = \dfrac{k - GK^2 - GL^2}{1+1}$,
soit $\alpha = \dfrac{10 - 1^2 - 1^2}{1+1} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Comme $\alpha > 0$, l'ensemble des points M du plan tels que $MK^2 + ML^2 = 10$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{4} = 2$.

55 **1.** c. ; **2.** b. ; **3.** a. ; **4.** a.

56 **1. b.** D'après le barycentre partiel, on a :
$G = \text{bary}\{(A, -5), (B, 5), (C, 3)\}$.
$G = \text{bary}\{(A, -5), (H, 5 + 3)\}$.
$G = \text{bary}\{(A, -5), (H, 8)\}$.
où $H = \text{bary}\{(B, 5), (C, 3)\}$.
• Ainsi, $G = \text{bary}\left\{(A, 1), \left(H, -\frac{8}{5}\right)\right\}$ par multiplication par k (homogénéité du barycentre).

2. c. On observe que : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D'après la relation de Chasles,
$\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow G = \text{bary}\{(C, 3), (D, -1)\}$.

3. b. • F étant le milieu de $[DC]$,
$F = \text{bary}\{(D, 3), (C, 3)\}$.
Ainsi, par la propriété du barycentre partiel,
$H = \text{bary}\{(E, 5), (F, 6)\}$.
$H = \text{bary}\{(E, 5), (D, 3), (C, 3)\}$.

4. a. On cherche un nombre réel α tel que $1+(-1)+\alpha \neq 0$ et $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \alpha\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
Or, comme $ABCD$ est un rectangle,
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.
Ainsi, $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ et $\alpha = 1$.

Exercices d'approfondissement

57 **Concours de droites**

a. $G = \text{bary}\{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\}$
• Montrons que $I = \text{bary}\{(A, 2), (B, 1)\}$.
Par définition, $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$.
Donc par la relation de Chasles :

$$3\overrightarrow{AI} - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow I = \text{bary}\{(A, 2), (B, 1)\}.$$

• Montrons que $J = \text{bary}\{(B, 1), (C, 3)\}$.
Par définition, $4\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CB}$.
Donc par la relation de Chasles :

$$4\overrightarrow{CJ} - (\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{JB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow J = \text{bary}\{(B, 1), (C, 3)\}.$$

• Montrons que $K = \text{bary}\{(A, 2), (C, 3)\}$.
Par définition, $5\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{CA}$.
Donc par la relation de Chasles :

$$5\overrightarrow{CK} - 2(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KA}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CK} - 2\overrightarrow{KA} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KA} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow K = \text{bary}\{(A, 2), (C, 3)\}.$$

• On utilise alors la propriété du barycentre partiel :

$$G = \text{bary}\{\underbrace{(A, 2), (B, 1)}, (C, 3)\}$$
$$G = \text{bary}\{\quad (I, 3), \qquad (C, 3)\}$$

puis

$$G = \text{bary}\{(A, 2), \underbrace{(B, 1), (C, 3)}\}$$
$$G = \text{bary}\{(A, 2), \qquad (J, 4)\}$$

et enfin,

$$G = \text{bary}\{(B, 1), \underbrace{(A, 2), (C, 3)}\}$$
$$G = \text{bary}\{(B, 1), \qquad (K, 5)\}.$$

b. Ainsi, $\begin{cases} G \in (IC) \\ G \in (AJ) \\ G \in (BK) \end{cases}$

Ces trois droites sont donc concourantes (en G).

58 **Points alignés**

a. Par définition :
$3\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA}$. Donc d'après la relation de Chasles :

$$3\overrightarrow{CQ} - (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QA}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{QA} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QA} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow Q = \text{bary}\{(A, 1), (C, 2)\} \ (a = 1 \text{ et } b = 2).$$

b. • Comme R est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QR}$ (propriété du parallélogramme).
• Comme C est le milieu de $[PB]$, $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QC}$ soit $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}$ (propriété du parallélogramme).

c. • $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}$ (d'après **b.**)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA}$ (d'après **a.**)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = -2\overrightarrow{QR}$ (d'après **b.**)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{QR} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow Q = \text{bary}\{(P, 1), (R, 2)\}$.
• Les points Q, P, R sont donc alignés.

59 Lieu de points et paramètre

1. a. G_m existe si et seulement si $m^2 + (2m - 3) \neq 0$.

On remarque que :

$m^2 + (2m - 3) = m^2 + 2m - 3 = (m - 1)(m + 3)$.

Ainsi, G_m existe, si et seulement si, $m \in \mathbb{R}\backslash\{1 ; -3\}$.

b. m désigne un nombre de $\mathbb{R}\backslash\{1 ; -3\}$ et M un point du plan :

Alors par la relation de Chasles et la définition de G_m, on a :

$$\begin{aligned} m^2\,\overrightarrow{MA} + (2m-3)\,\overrightarrow{MB} &= m^2(\overrightarrow{MG_m} + \overrightarrow{G_mA}) + (2m-3)(\overrightarrow{MG_m} + \overrightarrow{G_mB}) \\ &= (m^2 + 2m - 3)\overrightarrow{MG_m} + m^2\,\overrightarrow{G_mA} + (2m-3)\overrightarrow{G_mB} \\ &= (m^2 + 2m - 3)\overrightarrow{MG_m} \end{aligned}$$

(car $G_m = \text{bay}\{(A ; m^2), (B ; 2m - 3)\}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{E}_m) &\Leftrightarrow \|(m^2 + 2m - 3)\overrightarrow{MG_m}\| = AB \\ &\Leftrightarrow |m^2 + 2m - 3|MG_m = AB. \end{aligned}$$

c. $M \in (\mathscr{E}_m)$

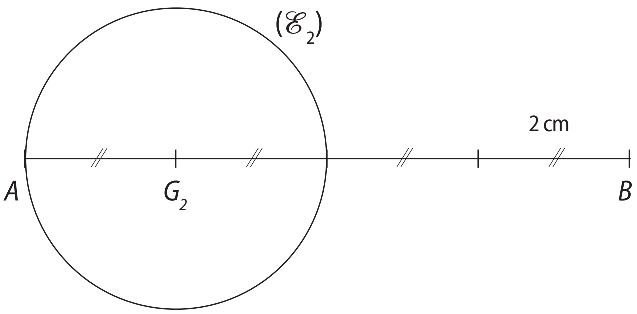
$\Leftrightarrow MG_m = \dfrac{AB}{|m^2 + 2m - 3|}$ (car $m \neq 1$ et $m \neq -3$)

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}\left(G_m ; \dfrac{AB}{|m^2 + 2m - 3|}\right)$.

2. • Pour $m = 2$, $|m^2 + 2m - 3| = |2^2 + 2 \times 2 - 3| = 5$

donc $\dfrac{AB}{|m^2 + 2m - 3|} = 2$.

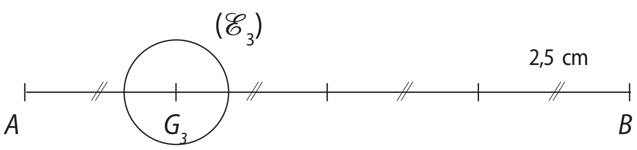
$(\mathscr{E}_2)$ est donc le cercle de centre $G_2 = \text{bary}\{(A ; 4), (B ; 1)\}$ et de rayon 2 cm.



Pour $m = 3$, $|m^2 + 2m - 3| = |3^2 + 2 \times 3 - 3| = 12$

donc $\dfrac{AB}{|m^2 + 2m - 3|} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

$(\mathscr{E}_3)$ est donc le cercle de centre $G_3 = \text{bary}\{(A ; 9), (B ; 3)\}$ et de rayon $\dfrac{5}{6}$ cm.



60 Cercle inscrit dans un triangle

1. a. D'après la relation de Chasles et la définition de I :

$(a + b + c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$

or $(a + b + c) \neq 0$ donc

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

• Ainsi, comme P et Q sont respectivement les points de $[AB]$ et $[AC]$ tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$, il suit que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \frac{b}{a+b+c}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{c}{a+b+c}\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AQ}\|$$

b. • Par construction, le quadrilatère $AQIP$ est un parallélogramme. Comme de plus, $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AQ}\|$, c'est un losange.

• Ainsi, la diagonale (AI) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Le point I appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. • Soient P' et Q' les points respectifs des segments $[BA]$ et $[BC]$ tels que $\overrightarrow{BP'} + \overrightarrow{BQ'} = \overrightarrow{BI}$.

De la même manière,

comme $(a + b + c)\overrightarrow{BI} = a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}$, on montre que I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

• Par conséquent, I appartient à deux bissectrices, donc c'est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

61 Centres d'inertie

1. a. $(\mathscr{P}_1)$ est de forme rectangle.

Son centre d'inertie, noté I_1, est le centre de ses diagonales.

Sa masse m_1 est $5 \times 3 \times 1 \times 10{,}5 \times 10^{-6} = 157{,}5 \times 10^{-6}$.

$(\mathscr{P}_2)$ est de forme triangle.

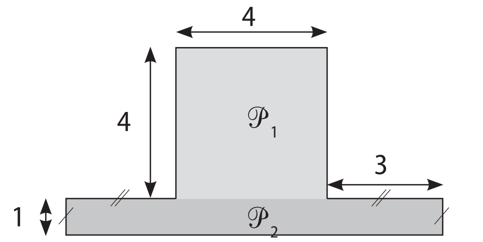
Son centre d'inertie, noté I_2, est le centre de gravité du triangle ABC.

Sa masse m_2 est $\dfrac{2 \times 5}{2} \times 1 \times 19{,}3 \times 10^{-6} = 96{,}5 \times 10^{-6}$.

b. Le centre d'inertie, noté I, de la plaque $(\mathscr{P})$ est alors :

$I = \text{bary}\{(I_1, m_1), (I_2, m_2)\}$.

2.



• $\mathcal{P}_1$ est de forme rectangle.
Son centre d'inertie, noté I_1, est le centre de ses diagonales.
Sa masse, m_1 est $4 \times 4 \times 1 \times 10 \times 10^{-6} = 16 \times 10^{-5}$.
• $\mathcal{P}_2$ est de forme rectangle.
$m_2 = 1 \times (4 + 2 \times 3) \times 10 \times 10^{-6}$
$m_2 = 10 \times 10 \times 10^{-6}$
$m_2 = 10^{-4}$.
• Donc $I = \text{bary}\{(I_1, m_1), (I_2, m_2)\}$.

62 Centre d'inertie et isobarycentre

a. Dans le triangle ABC, (MN) est la droite passant par les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$, elle est donc parallèle à la droite (BC). Ainsi, le quadrilatère $MNCB$ est un trapèze

b. Le triangle ABC peut être considéré comme la juxtaposition de deux plaques homogènes : le triangle AMN et le trapèze $MNCB$.

On désigne par J et K les centres d'inertie respectifs des tiangles AMN et ABC, c'est-à-dire leur centre de gravité, et par G le centre d'inertie du trapèze $MNCB$.
Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Donc $\dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(ABC)} = \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNCB)} = \dfrac{1}{3}$.
Les plaques AMN, ABC et $MNBC$ sont homogènes, donc leurs masses sont proportionnelles à leurs aires.

Donc K est le barycentre des points pondérés $(J, 1)$ et $(G, 3)$.

On a : $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AK}$. (1)

Soit A' le milieu de $[BC]$:

$\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

en remplaçant dans (1), on obtient :

$$3\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{7}{18}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \qquad (2)$$

c. L'isobarycentre I des points M, N, C et B est tel que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{3}{8}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right). \qquad (3)$$

d. $\overrightarrow{GA} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$ donc $GA = \left|\dfrac{b}{a+b}\right| BA$.

Or, $|a| > |b|$ lorsque :

• 1[er] cas : $a > b > 0$; dans ce cas, $\left|\dfrac{b}{a+b}\right| = \dfrac{b}{a+b} < \dfrac{1}{2}$, donc G est plus proche de A.

• 2[e] cas : $a < b < 0$; dans ce cas, $\left|\dfrac{b}{a+b}\right| = \dfrac{|b|}{|a| + |b|} < \dfrac{1}{2}$, donc G est plus proche de A.

• 3[e] cas : $a < 0$, $b > 0$; dans ce cas, $\dfrac{b}{a+b} < 0$, donc G est plus proche de A.

• 4[e] cas : $a > 0$, $b < 0$; dans ce cas, $\dfrac{b}{a+b} < 0$, donc G est plus proche de A.

63 Position du barycentre

Par définition de G, on a $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

a. • Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et $\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Donc $G = B$.

• Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $\overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

Donc $G = A$.

b. Comme $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{GA} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$.

On a $0 < \dfrac{b}{a+b} < 1$, donc $G \in [AB]$

c. Si a et b sont de signe opposé, alors $G \in (AB)\backslash[AB]$.

64 Orthocentre

a. • Dans le triangle ABA' rectangle en A', on a :
$\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AA'}{A'B}$.

Puis, dans le triangle $AA'C$ rectangle en A', on a
$\tan(\widehat{BCA}) = \dfrac{AA'}{A'C}$.

De plus, $A' \in [BC]$.

Ainsi, $AA' = A'B\tan(\widehat{ABC}) = A'C\tan(\widehat{BCA})$

or $A'B$ et $A'C$ sont de sens contraire ; $\tan(\widehat{ABC}) > 0$ et $\tan(\widehat{BCA}) > 0$,

d'où $\tan(\widehat{BCA})\overrightarrow{A'C} + \tan(\widehat{ABC})\overrightarrow{A'B} = \vec{0}$.

• On procède de même pour B' et pour C'.

b. Chaque angle $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ est dans $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

donc $\tan(\widehat{BAC}) > 0$, $\tan(\widehat{ABC}) > 0$ et $\tan(\widehat{ACB}) > 0$.

Par conséquent, $\tan(\widehat{ABC}) + \tan(\widehat{BAC}) + \tan(\widehat{ACB}) \neq 0$.

D'où l'existence de K.

c. Par le barycentre partiel :

• $K = \text{bary}\{(A, \tan(\widehat{BAC})), \underbrace{(B, \tan(\widehat{ABC})), (C, \tan(\widehat{ABC})}\}$

$K = \text{bary}\{(A, \tan(\widehat{BAC})), (A', \underbrace{\tan(\widehat{ABC}) + \tan(\widehat{ACB})}_{\neq 0})\}$

donc $K \in (AA')$.

• Idem $K \in (BB')$, $K \in (CC')$.

d. (AA'), (BB') et (CC') désignent les trois hauteurs du triangle ABC. H désigne l'orthocentre. Or d'après la question **c.**, K est le point de concours de ces trois droites. Ainsi, $H = K$.

65 Des démonstrations

1. a. Comme $a + b \neq 0$, G existe.

b. Pour tout point M du plan :

$aMA^2 + bMB^2 = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= a(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GA} + GA^2) + b(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GB} + GB^2)$

$= (a + b)MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}) + aGA^2 + bGB^2$.

Or $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (car $G = \text{bary}\{(A, a), (B, b)\}$)

Donc $aMA^2 + bMB^2 = (a + b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2$

Ainsi :

$M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow aMA^2 + bMB^2 = k$

$\Leftrightarrow (a + b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 = k$

$\Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{h - aGA^2 - bGB^2}{a + b}$ (car $a + b \neq 0$).

c. Posons $\alpha = \dfrac{k - aGA^2 - bGB^2}{a + b}$.

• **1er cas** : $\alpha < 0$. Alors $(\mathscr{E}_k)$ est l'ensemble vide.

• **2e cas** : $\alpha > 0$. $(\mathscr{E}_k)$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\alpha}$.

• **3e cas** : $\alpha = 0$. Ainsi, $M \in \mathscr{E}_k \Leftrightarrow MG = 0 \Leftrightarrow M = G$. $(\mathscr{E}_k)$ est l'ensemble formé par l'unique point G.

2. a. Pour tout point M du plan :

$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= (MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GA} + GA^2) - (MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GB} + GB^2)$

$= 2\overrightarrow{MG}\,.\,(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) + GA^2 - GB^2$

$= 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{BA}$ (car $GA = GB$)

$= 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GM}$.

b. $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GM} = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HM}) = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{HM} = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{HM} = k'$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{HM} = 0$.

c. $(\mathscr{E}_k)$ est la droite passant par H perpendiculaire à la droite (AB).

66 Une ligne de niveau

1. a.

$2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(2x_A - x_B + x_C - 2x\,;\, 2y_A - y_B + y_C - 2y)$

et $\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME}(x_D + 2x_E - 3x\,;\, y_D + 2y_E - 3y)$.

Ainsi, $M \in (\mathscr{E})$

$\Leftrightarrow 12 = (2x_A - x_B + x_C - 2x)(x_D + 2x_E - 3x)$
$\quad + (2y_A - y_B + y_C - 2y)(y_D + 2y_E - 3y)$

$\Leftrightarrow 12 = 6x^2 + x[-2(x_D + 2x_E) - 3(2x_A - x_B + x_C)]$
$\quad + (x_D + 2x_E)(2x_A - x_B + x_C) + 6y^2 + y[-2(y_D + 2y_E)$
$\quad - 3(2y_A - y_B + y_C)] + (y_D + 2y_E)(2y_A - y_B + y_C)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x[-\frac{1}{3}(x_D + 2x_E) + 1/2\,(x_B - x_C - 2x_A)]$
$\quad + y[-\frac{1}{3}(y_D + 2y_E) + \frac{1}{2}(y_B - y_C - 2y_A)]$

$= 2 + (x_D + 2x_E)(x_B - x_C - 2x_A) + \dfrac{(y_D + 2y_E)(y_B - y_C - 2y_A)}{6}$.

$$\text{Posons} \begin{cases} a = \dfrac{x_B - x_C - 2x_A}{2} \\ b = \dfrac{x_D + 2x_E}{3} \\ c = \dfrac{y_B - y_C - 2y_A}{2} \\ d = \dfrac{y_D + 2y_E}{3} \end{cases}$$

Ainsi,

$M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (a - b)x + (c - d)y = 2 + ab + cd$

b. $M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{b - a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{d - c}{2}\right)^2$
$= 2 + ab + cd + \dfrac{(b - a)^2 + (d - c)^2}{4}$

or $\dfrac{(b - a)^2 + (d - c)^2}{4} + \dfrac{(ab + cd) \times 4}{4}$
$= \dfrac{b^2 + a^2 + d^2 + c^2 + 2ab + 2cd}{4}$
$= \dfrac{(b + a)^2 + (c + d)^2}{4} \geqslant 0$

donc en posant $r = \dfrac{\sqrt{(b + a)^2 + (c + d)^2}}{2}$,

$M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{b - a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{d - c}{2}\right)^2 = x^2$

$(\mathscr{E})$ est donc le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{b - a}{2}\,;\,\dfrac{d - c}{2}\right)$ et de rayon r.

2. a. Comme $2 + (-1) + 1 = 2 \neq 0$ et $1 + 2 = 3 \neq 0$, les barycentres G_1 et G_2 existent.

b. Pour tout point M du plan, d'après la relation de Chasles :

• $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_1} + \underbrace{2\overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}}_{=\ \vec{0}} = 2\overrightarrow{MG_1}$

• $\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME} = 3\overrightarrow{MG_2} + \underbrace{\overrightarrow{G_2D} + \overrightarrow{G_2E}}_{=\ \vec{0}} = 3\overrightarrow{MG_2}$

• Ainsi, $M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG_1} . 3\overrightarrow{MG_2} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} . \overrightarrow{MG_2} = 2.$

c. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG_1} . \overrightarrow{MG_2} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG_1}) + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG_2})\\ &= MH^2 + \overrightarrow{MH} . \underbrace{(\overrightarrow{HG_1} + \overrightarrow{HG_2})}_{=\ \vec{0}} + \overrightarrow{HG_1} . \overrightarrow{HG_2}\\ &= MH^2 - HG_1{}^2 \text{ car } \begin{cases} \overrightarrow{HG_1} + \overrightarrow{HG_2} = \vec{0} \\ \overrightarrow{HG_1} = -\overrightarrow{HG_2} \end{cases}\\ &= MH_2 - \frac{G_1G_2{}^2}{4}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} . \overrightarrow{MG_2} = 2 \Leftrightarrow MH^2 = 2 + \dfrac{G_1G_2{}^2}{4}$

$\Leftrightarrow$ M est sur le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{2 + \dfrac{G_1G_2{}^2}{4}}$.

67 Produit scalaire et ligne de niveau

a. Pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) . (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} . \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{=\ \vec{0} \text{ car } I \text{ milieu de } [AB]} + \overrightarrow{IA} . \overrightarrow{IB}\\ &= MI^2 - IA^2\\ &= MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = k$

$\Leftrightarrow MI^2 = k + \dfrac{AB^2}{4}.$

b. • **1^er^ cas** : $k + \dfrac{AB^2}{4} > 0$;

$(\mathscr{E}_k)$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \dfrac{AB^2}{4}}$.

• **2^e^ cas** : $k = -\dfrac{AB^2}{4}$; $(\mathscr{E}_k)$ est réduit au point I.

• **3^e^ cas** : $k < -\dfrac{AB^2}{4}$; $(\mathscr{E}_k) = \varnothing$ (ensemble vide).

68 Prise d'initiative

a. $G = \text{bary}\{(A, 1), (I, 3)\}$; $I = \text{bary}\{(C, 2), (B, 1)\}$

donc $G = \text{bary}\{(A, 1), (C, 2), (B, 1)\}$.

b. On note G' milieu de $[AB]$.

Alors : $G = \text{bary}\{(G', 2), (C, 2)\}$ d'après la propriété du barycentre partiel. Donc G milieu de $(G'C)$; donc $G' \in (CG)$. Or $G' \in (AB)$ par définition de G', donc $G' = H$; H est le milieu de $[AB]$.

Problèmes

69 Ligne de niveau : $\dfrac{MA}{MB} = k$

1. $k < 0$; $(\mathscr{E}_k)$ est l'ensemble vide.

2. $k = 0$: $M \in (\mathscr{E}_0) \Leftrightarrow MA = 0$. Donc $\mathscr{E}_0 = \{A\}$.

3. $k = 1$. $M \in (\mathscr{E}_1) \Leftrightarrow MA = MB$. Donc $\mathscr{E}_1$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

4. $k > 0$ et $k \neq 0$.

a. $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 = k^2MB^2$

b. $1 + (-k^2) \neq 0$ car $k > 0$ et $k \neq 1$ donc G existe et est unique.

c. $MA^2 - k^2MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - k^2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= (1 - k^2)MG^2 + 2\overrightarrow{MG} . \underbrace{(\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB})}_{=\vec{0}} + GA^2 - k^2GB^2$

Donc $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow (1 - k^2)MG^2 = k^2GB^2 - GA^2$.

d. $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2}$ $\quad k \neq 1, k > 0$.

Ainsi : • si $\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2} < 0$, $(\mathscr{E}_k)$ est l'ensemble vide

• si $\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2} = 0$, $(\mathscr{E}_k)$ est $\{G\}$.

• si $\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2} > 0$, $(\mathscr{E}_k)$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2}}$.

e. $AB = 4$ cm.

• Pour $k = 0{,}5$; $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, -025)\}$

donc $\overrightarrow{GA} - 0{,}25\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AG} = \dfrac{0{,}25}{1 - 0{,}25}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Donc $AG = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{4}{3}$ cm.

De même, $BG = \dfrac{4}{3}AB = \dfrac{16}{3}$ cm.

Ainsi $\sqrt{\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1-k^2}} = \sqrt{\dfrac{0{,}25 \times \left(\dfrac{16}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2}{1 - 0{,}25}} = \dfrac{8}{3} > 0.$

$(\mathscr{E}_{0,5})$ est donc le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{8}{3}$ cm.

• Pour $k = 3$; $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, -9)\}$

donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-9}{-8}\overrightarrow{AB} = \dfrac{9}{8}\overrightarrow{AB}$. Donc $AG = \dfrac{9}{2}$ cm.

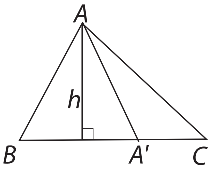
De même, $BG = \dfrac{1}{8}AB$. Donc $BG = \dfrac{1}{2}$ cm.

Ainsi $\sqrt{\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1-k^2}} = \sqrt{\dfrac{9 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{9}{2}\right)^2}{1 - 9}} = 1{,}5 > 0.$

$(\mathscr{E}_3)$ est donc le cercle de centre G et de rayon 1,5 cm.

70 Barycentre et aires

1. a. $\begin{cases} \text{aire}(ABC) = \dfrac{h \times BC}{2} \\ \text{aire}(AA'B) = \dfrac{h \times A'B}{2} \end{cases}$



donc $\dfrac{\text{aire}(ABC)}{BC} = \dfrac{h}{2} = \dfrac{\text{aire}(AA'B)}{A'B}$

donc $\dfrac{\text{aire}(AA'B)}{\text{aire}(ABC)} = \dfrac{A'B}{BC}$.

b. $A' \in [BC]$ et $A' = \text{bary}\{B, A'C), (C, A'B)\}$.

En effet : $\begin{cases} \overrightarrow{BA'} = \dfrac{A'B}{BC} \times \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CA'} = \dfrac{A'C}{BC} \times \overrightarrow{CB} \end{cases}$

donc $\dfrac{BC}{A'B}\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC} = -\dfrac{BC}{A'C}\overrightarrow{CA'}$

soit $A'C \times \overrightarrow{BA'} = -A'B \times \overrightarrow{CA'}$

$\Leftrightarrow A'C \times \overrightarrow{A'B} + A'B \times \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

c. On sait que $A'B = \dfrac{\text{aire}(AA'B)}{\text{aire}(ABC)} \times BC$.

De la même manière, $A'C = \dfrac{\text{aire}(AA'C)}{\text{aire}(ABC)} \times BC$.

Donc $A' = \text{bary}\{(B, \dfrac{\text{aire}(AA'B)}{\text{aire}(ABC)} \times BC), (C, \dfrac{\text{aire}(AA'C)}{\text{aire}(ABC)} \times BC)\}$.

En multipliant par $h = \dfrac{BC}{\text{aire}(ABC)} \neq 0$, par homogénéité du barycentre, on a :

$A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(AA'C)), (C, \text{aire}(AA'B))\}$.

2. a. D'après le lemme des proportions, appliqué dans les triangles $AA'C$ avec $M \in [AA']$, on a :

$\dfrac{\text{aire}(A'MC)}{\text{aire}(AA'C)} = \dfrac{MA'}{AA'}$.

Écrit dans le triangle $AA'B$ avec $M \in [AA']$, on a :

$\dfrac{\text{aire}(A'MB)}{\text{aire}(AA'B)} = \dfrac{MA'}{AA'}$.

Donc $\text{aire}(AA'B) = \dfrac{AA'}{MA'}\text{aire}(A'MA)$

et $\text{aire}(AA'C) = \dfrac{AA'}{MA'}\text{aire}(A'MC)$.

De plus, d'après le **1.** :

$A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(AA'C)), (C, \text{aire}(AA'B))\}$ donc par homogénéité : $(\dfrac{AA'}{MA'} \neq 0)$

$A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(A'MC)), (C, \text{aire}(A'MB))\}$.

De plus,

$\begin{cases} \text{aire}(MAB) = \text{aire}(ABA') - \text{aire}(A'MB) \\ \text{aire}(MAC) = \text{aire}(ACA') - \text{aire}(A'MC) \end{cases}$

$\begin{cases} \text{aire}(MAB) = \left(\dfrac{AA'}{MA'} - 1\right)\text{aire}(A'MB) \\ \text{aire}(MAC) = \left(\dfrac{AA'}{MA'} - 1\right)\text{aire}(A'MC). \end{cases}$

Donc par homogénéité, $(k = \dfrac{AA'}{MA'} - 1 \neq 0)$, on a le résultat

b. Même raisonnement.

c. • $G = \text{bary}\{(A, \text{aire}(BMC)), (C, \text{aire}(AMB)), (B, \text{aire}(AMC))\}$

$= \text{bary}\{(B', \text{aire}(BMC) + \text{aire}(AMB)), (B, \text{aire}(AMC))\}$

donc $G \in (BB')$.

• $G = \text{bary}\{(A, \text{aire}(BMC)), (B, \text{aire}(AMC)), (C, \text{aire}(AMB))\}$

$G = \text{bary}\{(A, \text{aire}(BMC)), (A', \text{aire}(AMC) + \text{aire}(AMB))\}$

donc $G \in (AA')$.

• Ainsi $G = (AA') \cap (BB')$. Or $M = (AA') \cap (BB')$

donc $M = G$.

71 Centre d'inertie et barycentre

1. $m_1 = 2 \times \pi \times 5^2 \times 5 \times 10^{-3}$

$m_1 = 0{,}25\pi$

$m_2 = 2 \times \pi \times 10^2 \times 5 \times 10^{-3} = \pi = 4m_1$.

On note I le centre d'inertie des plaques de masses m_1 et m_2 et de centres O_1 et O_2. On a alors :

$m_1\overrightarrow{IO_1} + m_2\overrightarrow{IO_2} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IO_1} + \overrightarrow{IO_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1I} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{O_1O_2}$.

2. $m_1 = \pi \times 9 \times 1 \times 8 = 72\pi$

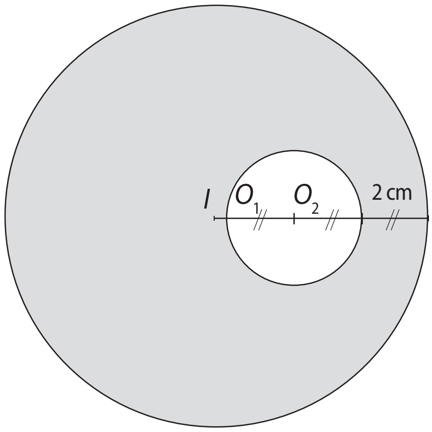
$m_2 = \pi \times 1 \times 1 \times 8 = 8\pi = 9m_1$.

a. $I = \text{bary}\{(O_1 ; 72\pi), (O_2 ; -8\pi)\}$

Par exemple, $\alpha = 72\pi$ et $\beta = -8\pi$

b. $9\overrightarrow{O_1I} - \overrightarrow{O_2I} = \vec{0} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_2O_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IO_1} = -\frac{1}{8}\overrightarrow{O_2O_1}$.



72 Le croissant d'or

a. Le disque de centre *O* est la réunion du croissant et du disque de centre *O*'. Donc, *G* est le barycentre de $(O, 1)$ et $(O', -r^2)$.

On a : $r^2\,\overrightarrow{OO'} + (1 - r^2)\overrightarrow{OG} = \vec{0}$.

O'(1 – r ; 0) et O(0 ; 0) donc G $\left(\frac{-r^2}{1+r} ; 0\right)$.

b. La condition est réalisée lorsque l'abscisse de *G* est : $1 - 2r$.

$\frac{-r^2}{1+r} = 1 - 2r \Rightarrow r^2 + r - 1 = 0$.

De plus, *r* est positif ; donc : $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

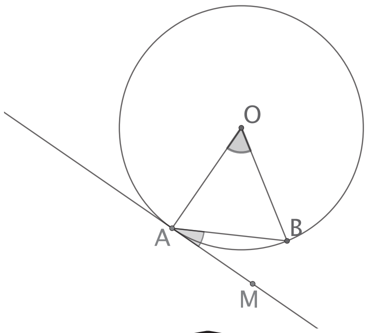
Remarque : $\frac{1}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (**nombre d'or**).

2 Trigonométrie

Activités d'introduction

1 Tangente à un cercle

1.



On conjecture que mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2$ mes $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$.

2. $M \in (T) \Leftrightarrow 2$ mes $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}) = \pi$

$\Leftrightarrow$ 2mes $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + 2$ mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \pi$. (1)

Le triangle OAB est isocèle car les segments $[OA]$ et $[OB]$ sont des rayons du cercle.

D'où : mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi -$ 2mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$. (2)

Les égalités (1) et (2) entraînent :

mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2$ mes $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$.

2 Formules d'addition

1. a. $M(\cos(a) ; \sin(a))$; $N(\cos(b) ; \sin(b))$.

b. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = a - b$.

c. $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OM \times ON \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

2. a. $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$.

b. $\cos(a+b) = \cos(a-(-b))$

$= \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)$

$= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

c. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin(b)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(b)$.

d. $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$

$= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(-b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b)$

$= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

3 Mesures de grandes distances

a. $\tan(\beta) = \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{h}{x}$. **b.** $\tan(\alpha) = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{h}{10+x}$.

c. $h = x\tan(\beta)$ et $h = (10+x)\tan(\alpha)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{h - 10\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)}$.

Ainsi $h = \dfrac{h - 10\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)}\tan(\beta)$ qui donne :

$h = -10\dfrac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}$.

On en déduit $h \approx 55$m.

d. $h = l\dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\beta-\alpha)} = l\dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)}$

$= l\dfrac{\dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)}}{\dfrac{\sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)}} = l\dfrac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}$.

4 Lignes trigonométriques d'angles moitié

1. a. $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$

$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

b. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(2x)}{2}}$

car $\cos(x) \geqslant 0$.

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Leftrightarrow \sin(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(2x)}{2}}$

car $\sin(x) \geqslant 0$.

2. a. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

b. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

c. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Savoir-faire

3 **a.** $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = -\alpha$; **b.** $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}}) = \alpha - \pi$;
c. $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}}) = -\alpha$.

4 $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{5\pi}{6}$; $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}}) = -\frac{\pi}{12}$.

5 $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{22\pi}{3}$.

6 **a.** $x \equiv y\ [2\pi]$ car $\frac{3\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4}$.
b. $x \not\equiv y\ [2\pi]$ car $\frac{7\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \neq k\,2\pi$.
c. $x \not\equiv y\ [2\pi]$ car $\frac{37\pi}{12} - \left(-\frac{25\pi}{12}\right) \neq k\,2\pi$.
d. $x \equiv y\ [2\pi]$ car $\frac{37\pi}{3} = 6\pi + \frac{19\pi}{3}$.

10 **a.** $x = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
b. $x = -\frac{\pi}{4} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

11 $A = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$
$A = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

12 $\sin^2(x) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.
Or, $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right] \Rightarrow \sin(x) = 0{,}8$.

15 $A = \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

$$\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x).$$

$$\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x).$$

D'où $A = 0$.

16 **a.** $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\,2\pi ; \frac{\pi}{4} + k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
b. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\,2\pi ; \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
c. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

17 $S = \left]\frac{\pi}{3} + k\,2\pi ; \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$.

18 **a.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = 1$
$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = 1$
$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
$S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b. On multiplie l'équation par $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi,

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,2\pi ; \pi + k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercices d'entraînement

Angles orientés

19 $-\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$.

20 **a.**, **b.**, **c.** et **e.**

21 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$; **b.** mes $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) = -\frac{\pi}{3}$;
c. mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}}) = -\frac{\pi}{3}$; **d.** mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

22 La mesure principale de $\frac{19\pi}{3}$ est égale à $\frac{\pi}{3}$ car :
$\frac{19\pi}{3} = \frac{19\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$.
Trois autres mesures : $\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{25\pi}{3}$.

23 $x = \frac{7\pi}{4} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
$11\pi \leqslant x \leqslant 12\pi \Leftrightarrow 11\pi \leqslant \frac{7\pi}{4} + k\,2\pi \leqslant 12\pi$
$\Leftrightarrow \frac{37\pi}{4} \leqslant k\,2\pi \leqslant \frac{41\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{37}{8} \leqslant k \leqslant \frac{41}{8}$.
k est un nombre entier, donc $k = 5$.
Ainsi, $x = \frac{7\pi}{4} + 5 \times 2\pi = \frac{47\pi}{4}$.

24 $x = \frac{\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$-4\pi \leqslant x \leqslant 4\pi \Leftrightarrow -4\,\pi \leqslant \frac{\pi}{12} + k\,2\pi \leqslant 4\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{49\pi}{12} \leqslant k\,2\pi \leqslant \frac{47\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{49}{24} \leqslant k \leqslant \frac{47}{24}$.

k est un nombre entier, donc $-2 \leqslant k \leqslant 1$.

Ainsi $x \in \left\{-\frac{47\pi}{12}\ ; -\frac{23\pi}{12}\ ; \frac{\pi}{12} ; \frac{25\pi}{12}\right\}$.

25 **1.** mes $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. a. mes $(\widehat{\vec{v}, -\vec{v}}) = \pi$.

b. $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, -\vec{v}})$.

mes $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) =$ mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) +$ mes $(\widehat{\vec{v}, -\vec{v}}) = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.

Donc mes $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = \frac{7\pi}{6} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

26 **a.** mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = -\frac{\pi}{6}$; **b.** mes $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = -\frac{\pi}{3}$;

c. mes $(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{5\pi}{6}$; **d.** mes $(\widehat{\vec{v}, 2\vec{u}}) = -\frac{\pi}{6}$;

e. mes $(\widehat{\vec{u}, 3\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$; **f.** mes $(\widehat{-3\vec{u}, 2\vec{v}}) = -\frac{5\pi}{6}$.

27 **a.** $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) \Leftrightarrow 0 = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$.
Ainsi, $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

b. $(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{-\vec{u}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) + (\widehat{-\vec{v}, \vec{v}}) = \pi + (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) + \pi$
$= (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$.

$(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{-\vec{u}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

28 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, -\overrightarrow{OB}}) = \alpha - \pi$;

b. mes $(\widehat{3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}}) = 0$;

c. mes $(\widehat{2\overrightarrow{AO}, -\overrightarrow{BO}}) = \alpha - \pi$;

d. mes $(\widehat{-3\overrightarrow{OA}, 2\overrightarrow{OB}}) = \alpha - \pi$;

e. mes $(\widehat{\overrightarrow{AO}, 2\overrightarrow{OB}}) = \alpha - \pi$;

f. mes $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}}) = \alpha$.

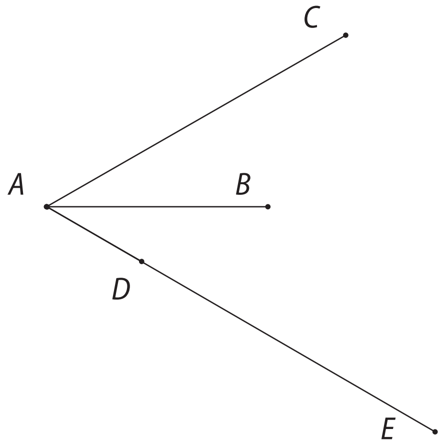
29 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}}) = \frac{2\pi}{3}$; **b.** mes $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{2}$;

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{\pi}{6}$; **d.** mes $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{5\pi}{6}$.

30 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \pi$; **b.** mes $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}) = \frac{\pi}{4}$;

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{5\pi}{8}$; **d.** mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}}) = \frac{7\pi}{8}$.

31 **a.**



b. mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et

mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c. D'après la relation de Chasles,
$(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) = (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}})$ et donc
mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) =$ mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) +$ mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}})$

$= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$.

Ainsi mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) = k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d. Les points A, D et E sont alignés dans cet ordre.

32 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{4}$; **b.** mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{3\pi}{4}$;

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}}) = \pi$; **d.** mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}}) = 0$;

e. mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}}) = 0$; **f.** mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{3\pi}{4}$.

33 Pour construire le triangle, il est préférable de connaître une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$.

La relation de Chasles donne :

$(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}})$.

Ainsi, mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}})$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est donc équilatéral.

Angles associés

34 **a.** Faux : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

b. Vrai.

c. Faux : $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$.

35 **a.** $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b. $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$.

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c. $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$.

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

d. $\frac{5}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$.

36 **1.** $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) + 0,16 = 1$.

Ainsi $\cos(\alpha) = -\sqrt{0,84}$ car $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, donc $\cos(\alpha) < 0$.

2. a. $\cos(\pi - \alpha) = \sqrt{0,84}$; **b.** $\sin(\pi + \alpha) = -0,4$;

c. $\cos(-\alpha) = -\sqrt{0,84}$; **d.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sqrt{0,84}$;

e. $\tan(\alpha) = -\frac{\sqrt{0,84}}{0,4}$; **f.** $\tan(\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{0,84}}{0,4}$.

37 **1.** $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \frac{1}{9} = 1$.

Ainsi $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ car $\alpha \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin(\alpha) < 0$.

2. a. $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$; **b.** $\cos(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$;

c. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{3}$.

38 $A = \cos(x)$; $B = -2\cos(x)$;

$C = -\cos(x) - \sin(x)$; $D = \cos(x) - \sin(x)$.

39 $E = 0$; $F = 0$; $G = 0$.

40 **1.** $-\cos(t) - \cos(t) + \cos(t) = -\cos(t)$.

2. $-\sin(t) + \sin(t) + \sin(t) = \sin(t)$.

3. $-\cos(t) + \cos(t) - \cos(t) = -\cos(t)$.

Formules de transformation

41 $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;

$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

42 $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$.

43 **a.** $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

b. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

c. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

44 **a.** $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}$

$= \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$; or, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, donc :

$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

b. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

c. $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$.

$\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

$= 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{10} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$.

Donc $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

$\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{-\sqrt{5}-1}$.

45 $\cos(3a) = \cos(2a + a)$

$= \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a)$

$= (2\cos^2(a) - 1)\cos(a) - 2\sin(a)\cos(a)\sin(a)$

$= 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$.

$\sin(3a) = \sin(2a + a) = \sin(2a)\cos(a) + \cos(2a)\sin(a)$

$= 2\sin(a)\cos(a)\cos(a) + 1 - 2\sin^2(a)\sin(a)$

$= 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$.

46 **a.** $\sin(\alpha) = \sqrt{0,84}$ et $\tan(\beta) = \dfrac{4}{3}$.

b. $\sin(2\alpha + \beta) = \sin(2\alpha)\cos(\beta) + \cos(2\alpha)\sin(\beta)$

$= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\beta) - (2\cos^2(\alpha) - 1)\sin(\beta)$

$= 2\sqrt{0,84} \times 0,4 \times 0,6 - (2 \times 0,16 - 1)0,8$

$= 0,48\sqrt{0,84} + 0,544$.

$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos(\alpha)\cos(2\beta) - \sin(\alpha)\sin(2\beta)$

$= \cos(\alpha)(2\cos^2(\beta) - 1) - \sin(\alpha)2\sin(\beta)\cos(\beta)$

$= 0,4 \times (2 \times 0,36 - 1) - \sqrt{0,84} \times 2 \times 0,8 \times 0,6$

$= 0,96\sqrt{0,84} - 0,112$.

47 **a.** $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2} = \dfrac{1}{4}$, $\cos(a) = \dfrac{1}{2}$,

$\sin(a) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan(a) = \sqrt{3}$.

b. $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2} = 0,6$, $\cos(a) = -\sqrt{0,6}$,

$\sin(a) = \sqrt{0,4}$ et $\tan(a) = -\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)}$.

48 **a.** $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 2 \times (-0,6)^2 - 1 = -0,28$;

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) - 1 = 2 \times (-0,8) \times (-0,6)$

$= 0,96$.

b. $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a) = 1 - 2 \times (0,2)^2 = 0,92$;

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = 2 \times 0,2 \times \sqrt{0,96} \approx 0,39$.

Équations trigonométriques

49 **a.** $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$; **b.** $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{7\pi}{6}$; **c.** $-\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

Nota : dans les exercices suivants, k est un nombre entier relatif.

50 **a.** $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi\right\}$;

b. $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$;

c. $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

51 **a.** $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{4\pi}{3} + k\,2\pi\right\}$;

b. $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$;

c. $S = \left\{\dfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{7\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$;

d. $S = \left\{-\dfrac{3\pi}{4} + k\,2\pi \,;\, -\dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi\right\}$.

52 **a.** $\sin(x) = \pm\dfrac{1}{2}$,

$S = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, -\dfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$.

b. $\cos(x) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$S = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, -\dfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \dfrac{5\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$.

53 $2x = \pi + k\,2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Dans $[\pi \,;\, 5\pi]$, $S = \left\{\dfrac{3\pi}{2} \,;\, \dfrac{5\pi}{2} \,;\, \dfrac{7\pi}{2} \,;\, \dfrac{9\pi}{2}\right\}$.

54 $\begin{cases} x - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{5} + k\,2\pi \\ x - \dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{5} + k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13\pi}{15} + k\,2\pi \\ x = \dfrac{22\pi}{15} + k\,2\pi. \end{cases}$

Dans $[-2\pi \,;\, 2\pi]$, $S = \left\{-\dfrac{8\pi}{15} \,;\, -\dfrac{17\pi}{15} \,;\, \dfrac{13\pi}{15} \,;\, \dfrac{22\pi}{15}\right\}$.

55 **a.** $\cos(3x) = \cos(\pi - x)$.

$\begin{cases} 3x = \pi - x + k\,2\pi \\ 3x = -\pi + x + k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$

Dans $[-2\pi \,;\, \pi]$,

$S = \left\{-\dfrac{7\pi}{4} \,;\, -\dfrac{5\pi}{4} \,;\, -\dfrac{3\pi}{4} \,;\, -\dfrac{\pi}{4} \,;\, \dfrac{\pi}{4} \,;\, \dfrac{3\pi}{4} \,;\, -\dfrac{3\pi}{2} \,;\, -\dfrac{\pi}{2} \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

b. $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin(-x)$.

$\begin{cases} 2x + \dfrac{\pi}{4} = -x + k\,2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = \pi + x + k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\,2\pi. \end{cases}$

Dans $[4\pi \,;\, 6\pi]$, $S = \left\{\dfrac{19\pi}{4} \,;\, \dfrac{55\pi}{12} \,;\, \dfrac{63\pi}{12} \,;\, \dfrac{71\pi}{12}\right\}$.

c. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(2x)$.

$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - 3x = 2x + k\,2\pi \\ \dfrac{\pi}{2} - 3x = -2x + k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{2\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{cases}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{2\pi}{5} \,;\, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$.

56 **a.** $\Delta = 49$, $\Delta > 0$, donc deux racines, $X_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = -4$.

b. $S_1 = \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \,;\, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$;

$S_2 = \emptyset$, car $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

c. $S = S_1$.

57 $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -1$, donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} ; \pi\right\}$.

58 **a.** $\dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi. \end{cases}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{12} + 2\,k\pi ; \dfrac{7\pi}{12} + 2k\,\pi\right\}$.

b. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi. \end{cases}$

$S = \left\{-\dfrac{\pi}{12} + 2\,k\pi ; \dfrac{7\pi}{12} + 2k\,\pi\right\}$.

59 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(3\,x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k\,2\pi \\ 3x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k\,2\pi. \end{cases}$

$S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\right\}$.

60 **a.** $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\Leftrightarrow 2\sin(x)\sin(y) = 0$.

b. $x = 0 + k\pi$ et y quelconque ou $y = 0 + k\pi$ et x quelconque.

61 **a.** $\cos\left(2 \times \dfrac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

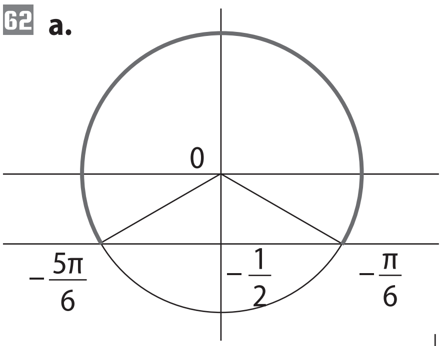
b. $\cos(2x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + k\,\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k\,\pi. \end{cases}$

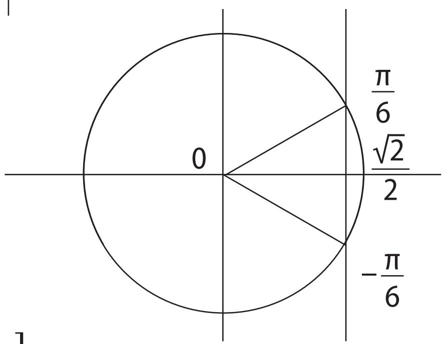
Babila a oublié de diviser $k2\pi$ par 2.

Inéquations trigonométriques

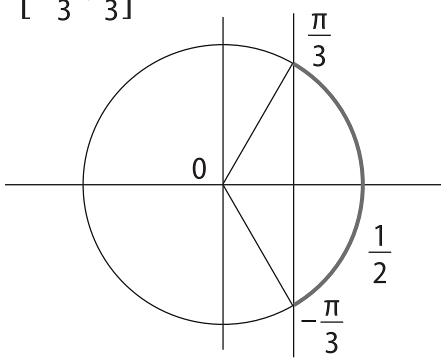
62 **a.**



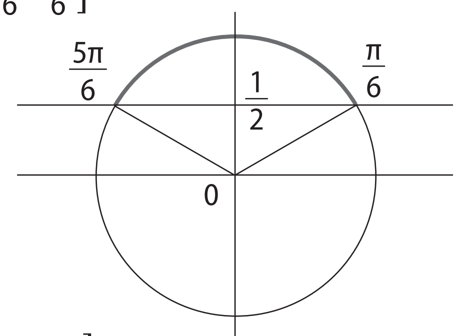
b.



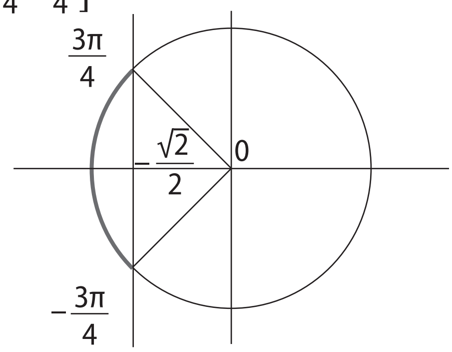
63 **a.** $S = \left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$ *modulo* 2π.



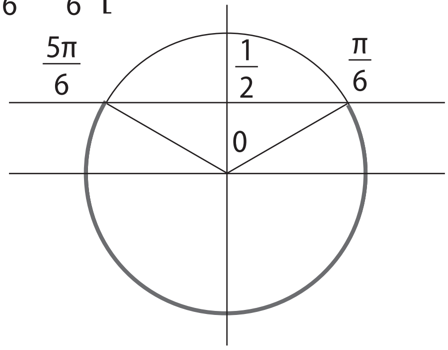
b. $S = \left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ *modulo* 2π.



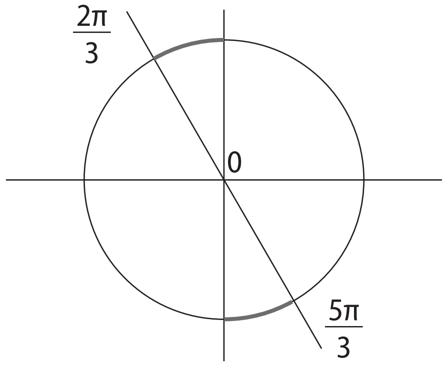
c. $S = \left[\dfrac{3\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ *modulo* 2π.



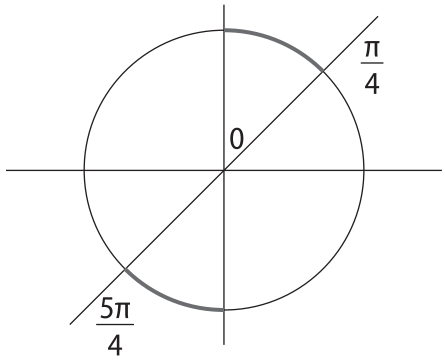
d. $S = \left]\dfrac{5\pi}{6}\,;\,\dfrac{13\pi}{6}\right[$ *modulo* 2π.



e. $S = \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}\,;\,\dfrac{5\pi}{3}\right[$ *modulo* 2π.



f. $S = \left]\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right[$ *modulo* 2π .



64 $\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

$\sin(x) - \cos(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant \cos(x)$

Donc $S = \left[-\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ *modulo* 2π.

65 **a.** $\sin^2(x) - \dfrac{1}{2} = \left(\sin(x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin(x) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b.

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
(I)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

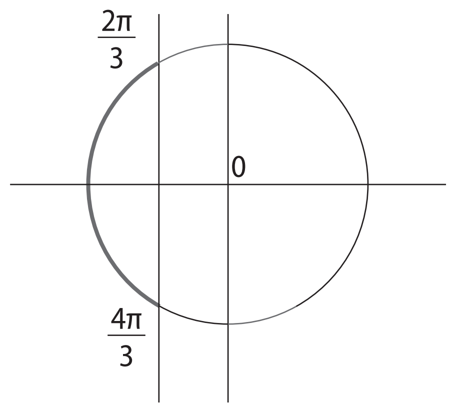
c. $S = \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\dfrac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{4}\,;\,2\pi\right]$.

66

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$1 - 2\cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$0{,}5 + \cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
(I)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{3}\,;\,2\pi\right[$.

67 $S = \left]\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{4\pi}{3}\right[$ *modulo* 2π.



Se tester

68 **1.** Vrai ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai ; **6.** Faux.

69 **1.** Vrai. Les points sont alignés et *A* est entre *B* et *C*.

2. Faux. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin(x)$

$= \dfrac{1}{2}\cos(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$

3. Vrai. $S = \left\{-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\,\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$.

4. Faux. $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

70 **1.** b. • **2.** b. • **3.** c. • **4.** c. • **5.** b.

71 **1.** c. En effet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est de sens indirect.

2. b. $\frac{7\pi}{5} = \pi + \frac{2\pi}{5}$. Ainsi, $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. b. $X = \sin(x)$ L'équation s'écrit $X^2 + X - 2 = 0$.

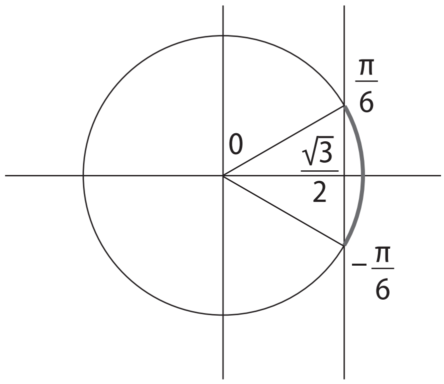
Elle a deux solutions : -2 et 1.

Ainsi on a $\sin(x) = -2$ qui est impossible ou $\sin(x) = 1$.

4. c. Le maximum de la fonction cosinus étant égal à 1, l'équation donnée implique que $\cos(x) = 1$ et $\cos(3x) = 1$.

$S = \{0 + k2\pi\}$

5. a.



Exercices d'approfondissement

72 Droites parallèles, perpendiculaires

$$\text{mes}\,(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_4}) = \text{mes}\,(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_1}) + \text{mes}\,(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_4}) = -\frac{\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = -\pi.$$

Ainsi, $(D_3) // (D_4)$.

$$\text{mes}\,(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \text{mes}\,(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_3}) + \text{mes}\,(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_2}) = \frac{\pi}{7} + \frac{5\pi}{14} = \frac{7\pi}{14} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, $(D_1) \perp (D_2)$.

73 Une formule de transformation

a. $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$.

Ainsi :

$\sin(p) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

et

$\sin(q) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

En additionnant les deux égalités, on obtient :

$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

b. $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(2x)\cos(x)$;

$\sin(2x) + \sin(4x) = 2\sin(3x)\cos(x)$.

c. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)$

$= 2\sin(2x)\cos(x) + 2\sin(3x)\cos(x)$ (résultats du **b.**)

$= 2[\sin(2x) + \sin(3x)]\cos(x)$

$= 2\left[\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cos(x)$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \pi + 4k\pi \,;\, -\pi + 4k\pi \,;\, \frac{2k\pi}{5} \,;\, -\frac{2k\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5}\right\}$.

74 Une équation du troisième degré

1. a. $2X^3 - 17X^2 + 7X + 8 = 0$.

b. On conjecture que $X_0 = 1$ est solution de (E').

En effet, $2 \times 1^3 - 17 \times 1^2 + 7 \times 1 + 8 = 0$.

c. $(X - 1)(2X^2 - 15X - 8)$.

d. Trois racines : $X_1 = 1$, $X_2 = -\frac{1}{2}$ et $X_3 = 8$.

2. • $\sin(x) = 1$ a pour solutions $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

• $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ a pour solutions $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$;

• $\sin(x) = 8$ n'a pas de solution.

Finalement, $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,;\, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$.

75 Une égalité

a. $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

b. $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(3x) - \cos(3x)}{\sin(x)\cos(x)}$

$= \frac{[3\sin(x) - 4\sin^3(x)]\cos(x) - [(4\cos^3(x) - 3\cos(x)]\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)}$

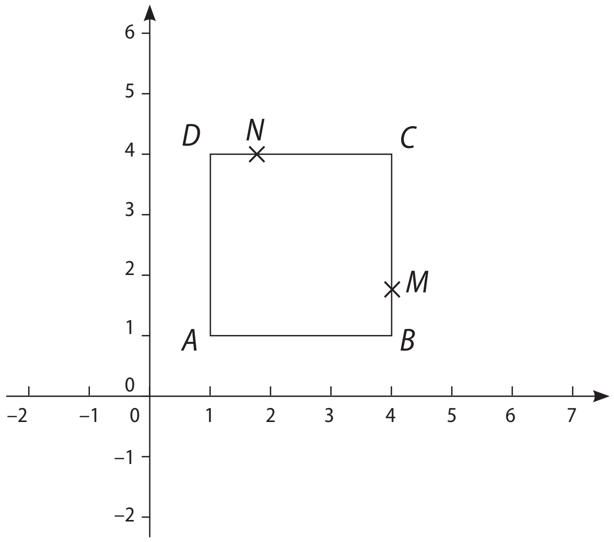
$= \frac{3\sin(x)\cos(x) - 4\sin^3(x)\cos(x) - 4\cos^3(x)\sin(x) + 3\cos(x)\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)}$

$= \frac{6\sin(x)\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)[\sin^2(x) + \cos^2(x)]}{\sin(x)\cos(x)}$

$= 2$.

76 Triangle équilatéral inscrit dans un carré

a.



On conjecture que CM est égale à 0,7 fois le côté du carré.

b. $CM = x$. $AB = a$.

Dans le triangle AMB, $AM^2 = AB^2 + MB^2 = a^2 + (a - x)^2$.

Dans le triangle CMN, $MN^2 = CM^2 + CN^2 = 2CM^2 = 2\,x^2$.

Ainsi, $a^2 + (a - x)^2 = 2\,x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$.

Le discriminant de cette équation est égal à $12a^2$.

L'équation a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-2a + \sqrt{12a^2}}{2} = a(-1 + \sqrt{3}) \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-2a - \sqrt{12a^2}}{2} = a(-1 - \sqrt{3}).$$

x_2 est négative et ne peut être une longueur, la seule solution est donc x_1.

c. Dans le triangle AMB :

$AB = a$, $BM = a - a(-1 + \sqrt{3}) = a(2 - \sqrt{3})$,

$AM = x\sqrt{2} = a(-1 + \sqrt{3})\sqrt{2} = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

De plus, $\text{mes}\,\widehat{BAM} = \text{mes}\,\widehat{BAD} - \text{mes}\,\widehat{MAN} - \text{mes}\,\widehat{NAD}$

$$= \frac{\pi}{12}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin(\widehat{BAM}) = \frac{BM}{AM} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos(\widehat{BAM}) = \frac{AB}{AM} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

77 Équation trigonométrique

On pose $X = \sin(x)$.

On obtient : $-2X^2 + X + 6 = 0$.

Cette équation a deux solutions : $-\dfrac{3}{2}$ et 2.

Ces deux nombres ne sont pas dans $[-1\,;1]$, l'équation de départ n'a donc pas de solution.

78 Une suite de doubles

a. $\dfrac{\sin(4x)}{4\sin(x)} = \dfrac{2\sin(2x)\cos(2x)}{4\sin(x)} = \dfrac{4\sin(x)\cos(x)\cos(2x)}{4\sin(x)}$.

b. $\dfrac{\sin(8x)}{8\sin(x)} = \dfrac{2\sin(4x)\cos(4x)}{8\sin(x)} = \dfrac{\sin(4x)}{4\sin(x)}\cos(4\,x)$.

Le résultat du **a.** permet de conclure.

c. $\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x) = \dfrac{\sin(16x)}{16\sin(x)}$.

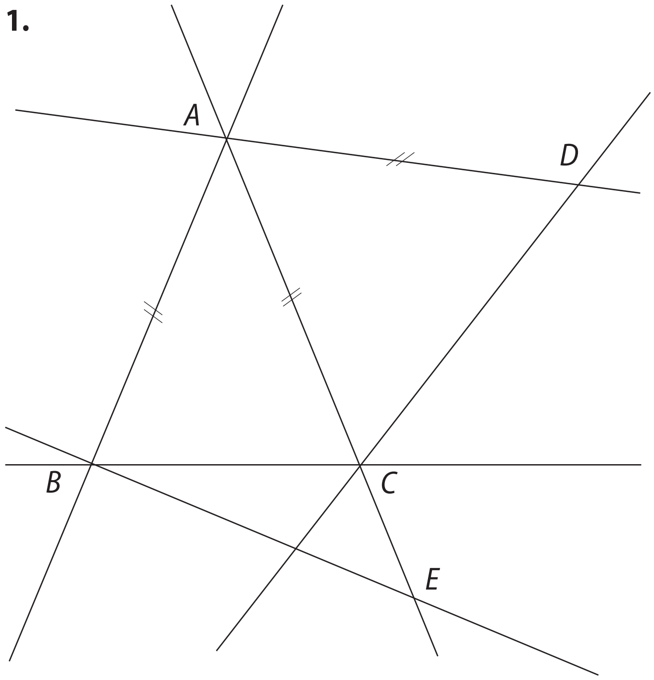
Même démonstration que pour le **b.** en remarquant que $16x = 2 \times 8x$.

d. Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$,

$\cos(x)\cos(2x)....\cos(2^n x) = \dfrac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$.

79 Construction de points

1.



2. a. $\text{mes}\,(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) = \text{mes}\,(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) + \text{mes}\,(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})$

$+ \text{mes}\,(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE})$

$$= -\frac{\pi}{4} - \pi + \pi - \frac{19\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi - 76\pi - 5\pi}{12} = -\frac{78\pi}{12}$$

$$= -6\,\pi - \frac{\pi}{2}.$$

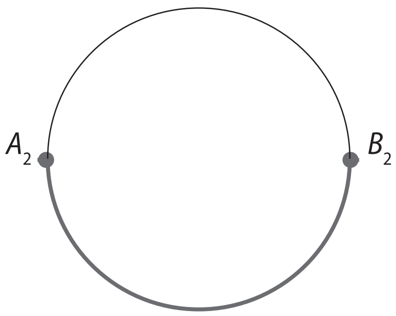
Ainsi, les droites (AB) et (BE) sont perpendiculaires.

b. Le point E est donc le point d'intersection de la droite (AC) et de la perpendiculaire à (AB) passant par B.

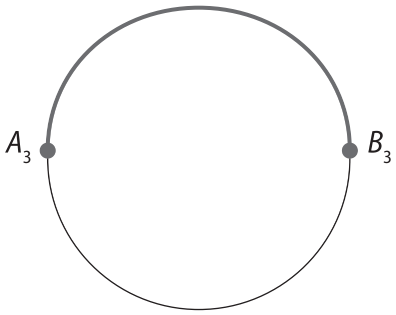
80 Ensembles de points

a.

b.



c.



d.

81 Équation trigonométrique

1. 0 et $\frac{\pi}{2}$.

2. a. $\sin(x) + \cos(x) = \sin(x) + \sqrt{1 - \sin^2(x)}$.

b. X appartient à l'intervalle $[-1 ; 1]$.

$(E) \Leftrightarrow \sin(x) + \sqrt{1 - \sin^2(x)} = 1 \Leftrightarrow X + \sqrt{1 - X^2} = 1$.

Ainsi $\sqrt{1 - X^2} = 1 - X$.

c. En élevant au carré et en réduisant l'équation, on obtient : $2X^2 - 2X = 0$ qui a pour solutions 0 et 1.

d. $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

3. $S = \{0\}$.

4. $S = \left\{0 + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$.

5. Il suffit de multiplier l'équation (E) par $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$(E') \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

(E') a le même ensemble de solutions que (E).

82 Calcul formel

1. a. $S = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

b. $S = \left\{-\frac{11\pi}{6} ; -\frac{3\pi}{2} ; -\frac{7\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

c. $S = \left\{\frac{13\pi}{6} ; \frac{5\pi}{2} ; \frac{17\pi}{6}\right\}$.

2. On pose $X = \sin(x)$. L'équation s'écrit :

$2X^2 - 3X + 1 = 0$.

Cette nouvelle équation a deux solutions : 1 et $\frac{1}{2}$.

$\sin(x) = 1$ a pour solutions $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. On retrouve bien les solutions du **1**.

83 Mesures d'angles orientés

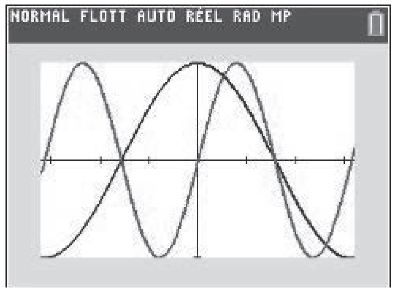
a. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$; **b.** $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}}) = -\frac{5\pi}{6}$;

c. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{3\pi}{4}$; **d.** $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{12}$;

e. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{2\pi}{3}$. **f.** $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\pi}{2}$.

84 Plusieurs méthodes de résolution

Méthode 1



Méthode 2

a. $\cos(x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\Leftrightarrow \cos(x)(2\sin(x) - 1) = 0$.

b. $S_{E'} = \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\} = S_E$.

Méthode 3

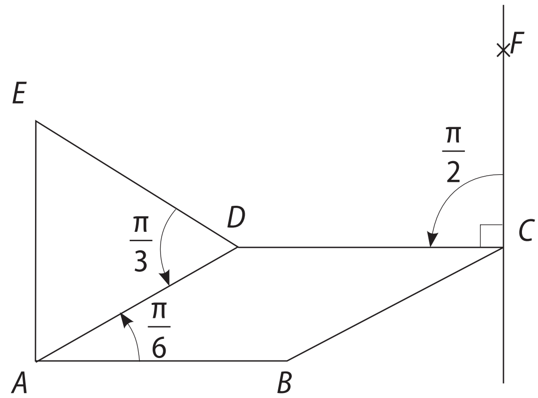
a. $\cos(x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{cases}$

On retrouve les solutions de la méthode 2.

85 Droites parallèles, perpendiculaires

a. b. c.



d. • mes $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AE}}) = -\dfrac{\pi}{2}$; • mes $(\widehat{\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{AE}}) = 0$.
Les droites (CD) et (AE) sont perpendiculaires.
Les droites (CF) et (AE) sont parallèles.

86 Une fraction de π

a. On teste quelques valeurs de n telles que
$\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \approx . \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{16}$. On trouve $n = 12$.

b. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 2 \times \dfrac{2(4+2\sqrt{3})}{16} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$= \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

c. Ainsi, $2x = \dfrac{\pi}{6}$. D'où, $x = \dfrac{\pi}{12}$.

87 Une inéquation du second degré

a. $I \in [-1\,;1]$. (E'): $2X^2 - 3X + 1 \leqslant 0$.

b. (E') a pour solution $S = \dfrac{1}{2}\,; 1\Big]$.

c. $\cos(x) = 1$ a pour solutions $x = 0 + 2k\pi$;
$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ a pour solutions :
$x = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\,\pi$.

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π	
$\cos(x) - 1$	0	−		−		−	0	
$\cos(x) - \frac{1}{2}$		+	0	+	0	−		+
(E')	0	−	0	−	0	+	0	−

Ainsi, $S = \left[0\,; \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{3}\,; 2\pi\right[$.

88 Inéquation quotient

$1 - \cos(x) \geqslant 0$ car $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
Ainsi le quotient est du signe de $0,5 + \cos(x)$.
$0,5 + \cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{2\pi}{3}\,; \dfrac{4\pi}{3}\right[$ modulo 2π.

89 Une rotation

a. $x = r\cos(\alpha)$, $y = r\sin(\alpha)$.

b. $\begin{cases} x' = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) r\cos(\alpha) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) r\sin(\alpha) \\ y' = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) r\cos(\alpha) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) r\sin(\alpha) \end{cases}$

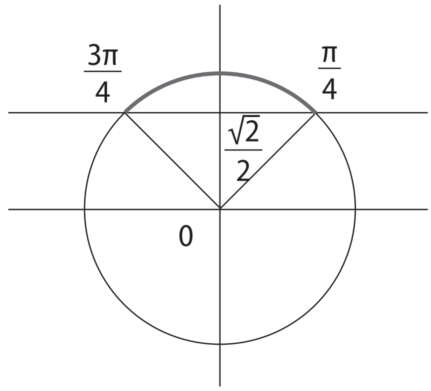
$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = r\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ y' = r\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right). \end{cases}$

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}'}) = \alpha + \dfrac{\pi}{3}$.

90 Charge d'une batterie

a. $12\sqrt{2}\sin(t) > 12 \Leftrightarrow \sin(t) > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(t) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b.



c. $\left]\dfrac{\pi}{4}\,; \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

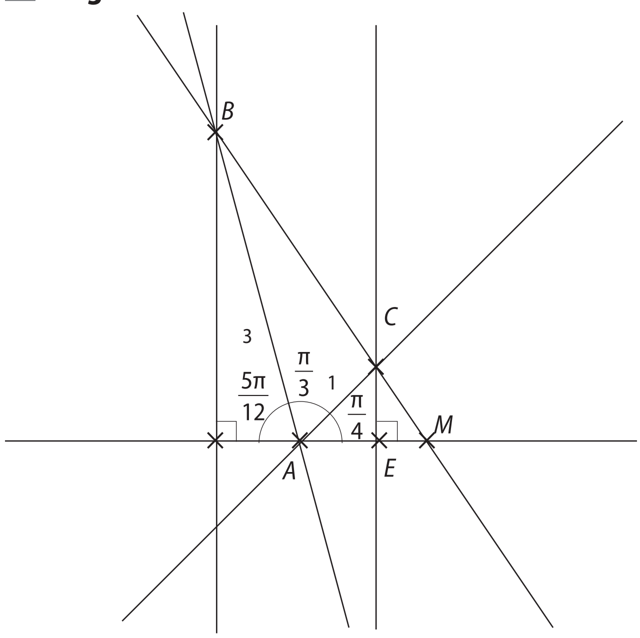
91 Une équation du second degré

1. a. $(E) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{2}\,x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.
$S = \{1 - \sqrt{2}\,; 1 + \sqrt{2}\}$.

b. $(E) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}\,x - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 1 = 0$.
$S = \{2 + \sqrt{3}\,; -2 + \sqrt{3}\}$.

2. $\Delta = 4\sin^2(\alpha) + 4\cos^2(\alpha) = 4$.
$\Delta > 0$, (E) a donc deux solutions.
$S = \left\{\dfrac{\sin(\alpha) - 1}{\cos(\alpha)}\,;\ \dfrac{\sin(\alpha) + 1}{\cos(\alpha)}\right\}$.

92 Alignement ?



On peut conjecturer avec GeoGebra que la distance $x = AM \approx 1,19$.
Dans le triangle ACE, $AE = CE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans le triangle ABD,

$BD = 3\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$

$AD = 3\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{3\sqrt{2}}{4}(-1 + \sqrt{3})$

Le théorème de Thalès donne :

$\frac{ME}{MD} = \frac{CE}{BD} \Leftrightarrow \frac{x - AE}{x + AD} = \frac{CE}{BD}$

$x = \frac{CE \times AD + AE \times BD}{BD - CE} = \frac{CE(AD + BD)}{BD - CE}$

$= \frac{3\sqrt{6}}{1 + 3\sqrt{3}} \approx 1{,}19.$

93 Logique

C'est la troisième affirmation qui est vraie.

En effet, on a :

$\cos(2a) = 2\cos(a) \Leftrightarrow 2\cos^2(a) - 1 = 2\cos(a)$.

On pose $X = \cos(a)$.

L'équation s'écrit alors $2X^2 - 2X - 1 = 0$.

Elle a deux solutions : $X_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

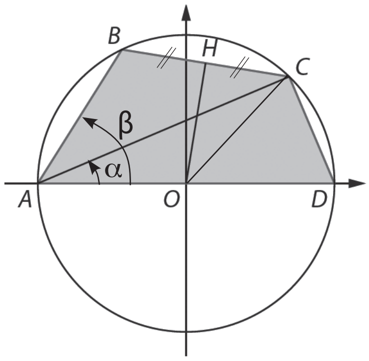
$\cos(a) = X_2$ n'a pas de solution car $X_2 > 1$.

L'ensemble des nombres a tels que $\cos(a) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ sont les solutions de l'équation de départ.

Problèmes

94 Théorème de Ptolémée

a. et **d.**



b. $\sin(\alpha) = \frac{DC}{AD}$ et $\cos(\alpha) = \frac{AC}{AD}$.

$DC = AD\sin(\alpha)$ et $AC = AD\cos(\alpha)$.

c. $\sin(\beta) = \frac{BD}{AD}$ et $\cos(\beta) = \frac{AB}{AD}$.

$BD = AD\sin(\beta)$ et $AB = AD\cos(\beta)$.

e. Le triangle HOC est isocèle en O donc

$\text{mes}\widehat{HOC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{BOC}$.

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc,

donc $\text{mes}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{BOC}$.

Ainsi, $\text{mes}\widehat{HOC} = \text{mes}\widehat{BAC} = \beta - \alpha$.

f. Dans le triangle HOC, rectangle en H,

$\sin(\widehat{HOC}) = \frac{HC}{OC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BC}{AD}$.

g. $\sin(\beta - \alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)$. Ainsi

$\frac{BC}{AD} = \frac{BD}{AD} \times \frac{AC}{AD} - \frac{AB}{AD} \times \frac{DC}{AD}$.

En multipliant par AD^2, on obtient l'égalité traduisant le théorème de Ptolémée.

95 Distance maximale

1. $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$.

Ainsi,

$\cos(p) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$

et

$\cos(q) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

En additionnant les deux égalités, on obtient :

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

2. a. Le triangle de sommets A et M et dont le milieu de l'hypoténuse est le point O est rectangle en A car il est inscrit dans un cercle et un de ses côtés est un diamètre du cercle. Ainsi $\cos(\widehat{AMO}) = \cos(\alpha) = \frac{MA}{2R}$.

On démontre de même que $MB = 2R\cos(\beta)$.

b. $MA + MB = 2R(\cos(\alpha) + \cos(\beta))$

$= 2R\left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)$.

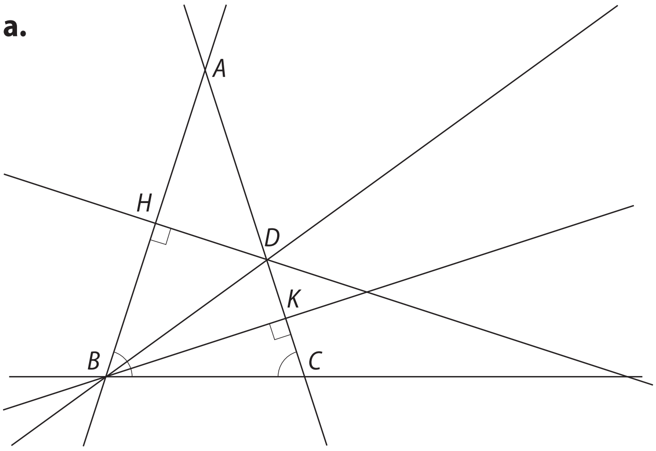
3. Les angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc sont de même mesure. C'est le cas des angles $\widehat{AMB}$ qui ont donc tous pour mesure $\alpha + \beta$ quelle que soit la position du point M.

4. D'après la question **2.b.**, la variation de $MA + MB$ ne dépend donc plus que de $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ qui est maximal s'il est égal à 1.

5. $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

96 **36°**

a.



b. Triangle *ABC* :
$\text{mes}\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$, $\text{mes}\widehat{BCA} = \frac{2\pi}{5}$ et $\text{mes}\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$.

Triangle *ABD* :
$\text{mes}\widehat{ABD} = \frac{\pi}{5}$, $\text{mes}\widehat{BAD} = \frac{\pi}{5}$ et $\text{mes}\widehat{ADB} = \frac{3\pi}{5}$.

Triangle *BDC* :
$\text{mes}\widehat{BDC} = \frac{2\pi}{5}$, $\text{mes}\widehat{DBC} = \frac{\pi}{5}$ et $\text{mes}\widehat{BCD} = \frac{2\pi}{5}$.

c. Les triangles *ADB* et *DCB* sont respectivement isocèles en *D* et en *B*.

d. Dans le triangle *ADB*, le point *H* est la hauteur issue de *D*. Dans le triangle *HBD*, on a :

$\cos(\widehat{HBD}) = \frac{BH}{BD} = \frac{\frac{1}{2}AB}{BC} = \frac{AB}{2x}$, ce qui donne :
$AB = 2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

e. On procède de manière identique dans le triangle *BKC* pour obtenir : $CD = 2x\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

f. $BC = BD = AD$ (triangles isocèles).
$BC = AD = AB - CD \Leftrightarrow x = 2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\,x\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

Les triangles *ABC* et *BCD* ont leurs angles de même mesure, ils sont donc semblables.
Ainsi : $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$. On a alors :
$$AB \times CD = BC^2 \Leftrightarrow 2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times 2x\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x^2$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}.$$

g. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2\,ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$
$= 4\,ab$.

Ainsi $\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2$
$= 4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

h. $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. D'où, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$.

$-\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

D'où, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$.

97 **Droite de Simson**

1. Les angles $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc. Ils sont donc égaux à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Ainsi $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$.

2. a. Les triangles *CQM* et *CRM* sont respectivement rectangles en *Q* et *R*. Ils ont la même hypoténuse et sont donc inscrits dans le même cercle. Ainsi les points *C*, *Q*, *R* et *M* sont cocycliques.

D'où $2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}) = 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ})$.

b. c. Démonstrations analogues au **a.**

d. $2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = 2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RM}) + 2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ})$
$= -2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}) + 2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ})$
$= -2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ})$
$= -2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) = \hat{0}$.

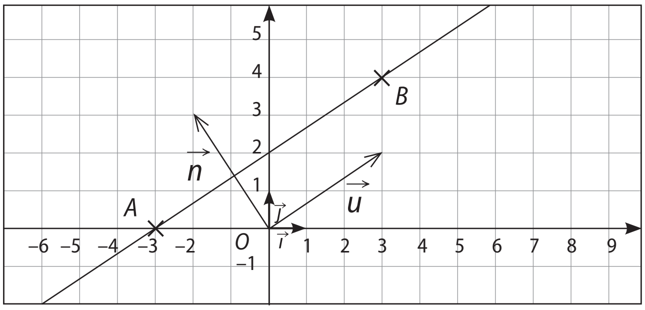
Ainsi les points *R*, *P* et *Q* sont alignés.

3 Géométrie analytique du plan

Activités d'introduction

1 Vecteur normal à une droite

1. et **2. a.** et **c.**



2. b. $\overrightarrow{AB}(6\,;4)$ et $\overrightarrow{AM}(x+3\,;y)$ sont colinéaires si, et seulement si, $6y-4(x+3)=0$ d'où $-4x+6y-12=0$. (AB) a pour équation $-2x+3y-6=0$.

c. $\vec{n}(-2\,;3)$. $\vec{n}\cdot\vec{u}=-2\times3+3\times2=0$.
Donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

3. a. $M(x\,;y)\in(AB)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3+t\\ y=2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

b. $AM(-3+3t-(-3)\,;2t-0)$ donc $AM\,(3t\,;2t)$ et $n\,(-2\,;3)$.
Ainsi $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=3t\times(-2)+2t\times3=0$.
Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

4. a. Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal à une droite ($\mathscr{D}$) si $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de ($\mathscr{D}$).

b. Il en existe une infinité (tous ceux qui sont non nuls et colinéaires avec $\vec{n}$). Par exemple $\vec{n}'\,(-4\,;6)$ et $\vec{n}''\,(2\,;-3)$.

2 Droite définie par un point et un vecteur normal

1. a. On vérifie facilement que $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$, que $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$ et que $\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0$.

b. On constate que les points A, B, C et E sont alignés.

c. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow(x-1)\times3+(y-2)\times(-2)=0$
$\Leftrightarrow 3x-2y+1=0.$

d. $3x-2y+1=0$ est l'équation d'une droite : la droite (AB). Elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2\,;-3)$ donc aussi $\vec{u}=\overrightarrow{BA}(2\,;3)$.

2. a. $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}'=-2\times(-6)+(-3)\times4=0$. Donc $\vec{n}'$ est un vecteur normal à la droite (AB).

b. $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}'=0\Leftrightarrow(x-1)\times(-6)+(y-2)\times4=0$
$\Leftrightarrow -6x+4y-2=0$
$\Leftrightarrow -2(3x+2y-1)=0$
$\Leftrightarrow 3x+2y-1=0.$

Il s'agit bien de la même droite.

3 Distance d'un point à une droite

1. a. $\vec{n}(1\,;2)$ est un vecteur normal à ($\mathscr{D}$)
et $\|\vec{n}\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.
Ainsi, $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{n}$ est un vecteur unitaire et normal à ($\mathscr{D}$).
$\vec{v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,;\,\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{v}=\|\overrightarrow{AH}\|\times\|\vec{v}\|=\overline{AH}\times1=\overline{AH}$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens).

c. $H(-2\,;3)$.

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=8\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}+1\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ donc $AH=2\sqrt{5}$.

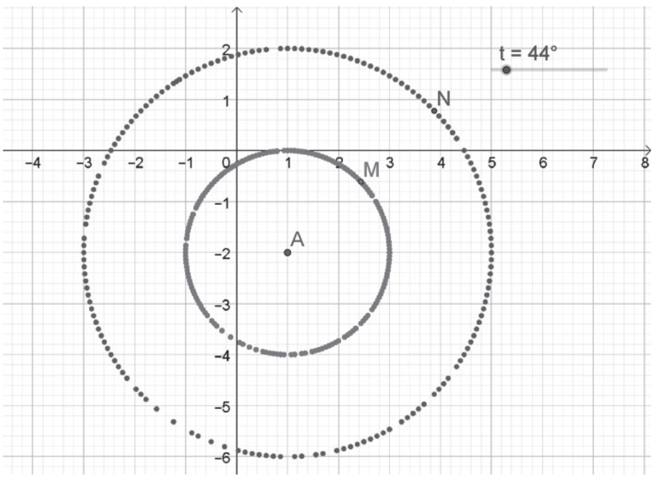
2. a. $\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}=(x_0-x_H)\times a+(y_0-y_H)\times b$
$=ax_0+b\,y_0-a\,x_H-b\,y_H$
$=ax_0+b\,y_0+c$
car $H\in(d)$ donc $a\,x_H+b\,y_H+c=0$
donc $-a\,x_H-b\,y_H=c$.

b. $\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}=\pm\,HA\times\|\vec{n}\|$ car $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
Donc $|\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}|=HA\times\|\vec{n}\|$.

c. $HA=\dfrac{|\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4 Équation paramétrique d'un cercle

1. On conjecture que le point M décrit le cercle $A(1\,;2)$ et de rayon 2. On conjecture que le point N décrit le cercle de centre $A(1\,;-2)$ et de rayon 4.



2. a. $\overrightarrow{AM}(2\cos(t)\ ;\ 2\sin(t))$ et $AN(4\cos(t)\ ;\ 4\sin(t))$.

b. $AM = \sqrt{(2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2} = \sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t)}$

$= \sqrt{4} = 2$.

De même, $AN = 4$.

c. $AM = 2 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre A et de rayon 2.

$AN = 4 \Leftrightarrow N$ appartient au cercle de centre A et de rayon 4.

Savoir-faire

$M\ (x\ ;\ y)$; $(\mathscr{D})$ désigne la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

4 $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x+1) \times 3 + (y-5) \times (-2) = 0$
$\Leftrightarrow 3x + 3 - 2y + 10 = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 2y + 13 = 0$.

Une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ est : $3x - 2y + 13 = 0$.

5 $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x-3) \times \dfrac{7}{3} + (y-0) \times \dfrac{4}{5} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{7}{3}x - 7 + \dfrac{4}{5}y = 0$
$\Leftrightarrow 15 \times \dfrac{7}{3}x - 15 \times 7 + 15 \times \dfrac{4}{5}y = 0$.
$\Leftrightarrow 35x - 105 + 12y = 0$.

Une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ est :
$35x + 12y - 105 = 0$.

6 $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x-1) \times 0 + (y+1) \times 6 = 0$
$\Leftrightarrow 6y + 6 = 0$
$\Leftrightarrow y + 1 = 0$.

Une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ est : $y = -1$.

7 $M(x\ ;\ y)$

• (h_1) désigne la hauteur issue de A, de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.

$M \in (h_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\Leftrightarrow (x-1) \times (1-7) + (y-4) \times (-2-2) = 0$
$\Leftrightarrow -6(x-1) - 4(y-4) = 0$
$\Leftrightarrow -6x + 6 - 4y + 16 = 0$
$\Leftrightarrow 6x + 4y - 22 = 0$
$\Leftrightarrow 3x + 2y - 11 = 0$.

Une équation cartésienne de (h_1) est : $3x + 2y - 11 = 0$.

• (h_2) désigne la hauteur issue de B, de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.

$M \in (h_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
$\Leftrightarrow (x-7) \times (1-1) + (y-2) \times (-2-4) = 0$
$\Leftrightarrow 0(x-7) - 6(y-2) = 0$
$\Leftrightarrow y = 2$.

Une équation cartésienne de (h_2) est : $y = 2$.

• (h_3) désigne la hauteur issue de C, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$M \in (h_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
$\Leftrightarrow (x-1)\ (7-1) + (y+2)\ (2-4) = 0$
$\Leftrightarrow 6(x-1) - 2(y+2) = 0$
$\Leftrightarrow 6x - 6 - 2y - 4 = 0$
$\Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$.

Une équation cartésienne de (h_3) est : $3x - y - 5 = 0$.

8 $(\mathscr{D})$ d'équation $3x + y - 7 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(3\ ;\ 1)$ et vecteur directeur $\vec{u}\,(1\ ;\ -3)$.

$M\ (x\ ;\ y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$
$\Leftrightarrow (x-0) \times 1 + (y-1) \times (-3) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3y + 3 = 0$.

Une équation cartésienne de (Δ) est : $x - 3y + 3 = 0$.

11 (d) a pour équation normale :

$\dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}x - \dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}y + \dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0$

Soit $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{1}{5} = 0$.

12 $\dfrac{1}{\sqrt{1+6^2}}x + \dfrac{6}{\sqrt{1+6^2}}y - \dfrac{2}{\sqrt{1+6^2}} = 0$

Soit $\dfrac{1}{\sqrt{37}}x + \dfrac{6}{\sqrt{37}}y - \dfrac{2}{\sqrt{37}} = 0$.

13 $\overrightarrow{AB}(6-0\ ;\ -2-3)$ soit $\overrightarrow{AB}(6\ ;\ -5)$

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), donc $\vec{n}\,(5\ ;\ 6)$ est un vecteur normal de la droite (AB).

$\|\vec{n}\| = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$.

Un vecteur unitaire normal de (AB) est $\vec{n}'\left(\dfrac{5}{\sqrt{61}}\ ;\ \dfrac{6}{\sqrt{61}}\right)$.

$M(x\ ;\ y)$;

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}' = 0$
$\Leftrightarrow (x-0) \times \dfrac{5}{\sqrt{61}} + (y-3) \times \dfrac{6}{\sqrt{61}} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{61}}x + \dfrac{6}{\sqrt{61}}y - \dfrac{18}{\sqrt{61}} = 0$

Une équation normale de (AB) est :
$\dfrac{5}{\sqrt{61}}x + \dfrac{6}{\sqrt{61}}y - \dfrac{18}{\sqrt{61}} = 0$.

14 $\begin{cases} x = 5 + 2\cos(t) \\ y = 1 + 2\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

15 $R = \Omega A = \sqrt{(3+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$.

$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{26}\cos(t) \\ y = 1 + \sqrt{26}\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

16 $3x^2 + 3y^2 - 6x + 6y - 42 = 0$

$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 2y) = 42$

$\Leftrightarrow 3((x-1)^2 - 3 + 3(y+1)^2 - 3 = 42$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 3(y+1)^2 = 48$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 16.$

Centre $\Omega(1 ; -1)$, rayon $R = \sqrt{16} = 4$.

Représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 1 + 4\cos(t) \\ y = -1 + 4\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

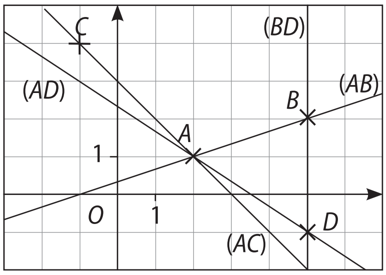
Exercices d'entraînement

Othogonalité et droites

17 • Droite (AB) : vecteur directeur $\vec{u}(-4 ; -2)$; vecteur normal $\vec{n}(2 ; -4)$.

• Droite (AC) : vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -5)$; vecteur normal $\vec{n}(5 ; 2)$.

18 **a.**



b. Droite (AB) : vecteur directeur $\vec{u}(3 ; 1)$; vecteur normal $\vec{n}(1 ; -3)$.

Droite (AC) : vecteur directeur $\vec{u}(-3 ; 3)$; vecteur normal $\vec{n}(3 ; 3)$.

Droite (AD) : vecteur directeur $\vec{u}(3 ; -2)$; vecteur normal $\vec{n}(2 ; 3)$.

Droite (BD) : vecteur directeur $\vec{u}(0 ; -3)$; vecteur normal $\vec{n}(3 ; 0)$.

19 **a.** Vecteurs normaux de (d_1) : $\vec{n_1}(5 ; -2)$
$\vec{n_2}(-5 ; 2)$.

Vecteurs directeurs de (d_1) : $\vec{u_1}(2 ; 5)$
$\vec{u_2}(-2 ; -5)$.

b. Mêmes notations $\vec{n_1}\left(\frac{1}{2} ; 3\right)$ et $\vec{n_2}\left(-\frac{1}{2} ; -3\right)$
$\vec{u_1}\left(3 ; -\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{u_2}\left(-3 ; \frac{1}{2}\right)$.

c. Mêmes notations $\vec{n_1}(1 ; 0)$ et $\vec{n_2}(-1 ; 0)$
$\vec{u_1}(0 ; 1)$ et $\vec{u_2}(0 ; -1)$.

d. Mêmes notations $\vec{n_1}(0 ; 1)$ et $\vec{n_2}(0 ; -1)$
$\vec{u_1}(1 ; 0)$ et $\vec{u_2}(-1 ; 0)$.

20 (d) passe par $B(1 ; -4)$, a pour vecteur normal $\vec{n}(3 ; 2)$.

(d') passe par $A(-4 ; -3)$, a pour vecteur normal $\vec{n}(1 ; 5)$.

21 (d) a pour vecteur normal $\vec{n}(4 ; 6)$;
(d') a pour vecteur normal $\vec{n'}(3 ; -2)$;
$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 4 \times 3 + 6 \times (-2) = 12 - 12 = 0$.
(d) et (d') sont perpendiculaires.

22 (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(6 ; -4)$.
(d') a pour vecteur directeur $\vec{u'}(3 ; -2)$.
$\text{dét}(\vec{u}, \vec{u'}) = 6 \times (-2) - 3 \times (-4) = -12 + 12 = 0$
donc (d) et (d') sont parallèles.
(d) et (d') ne sont pas confondues car leurs équations cartésiennes ne sont pas proportionnelles.
$2(2x + 3y - 7) = 2 \times 0 \Leftrightarrow 4x + 6y - 14 = 0$.

23 (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(3 ; 1)$.
(d') a pour vecteur directeur $\vec{u'} = \overrightarrow{AB}(6 ; -18)$.
$\vec{u} \cdot \vec{u'} = 3 \times 6 + 1 \times (-18) = 0$
donc (d) et (d') sont perpendiculaires.

24 (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 3)$.
(d') a pour vecteur directeur $\vec{u'}(6 ; -2)$.
$\vec{u} \cdot \vec{u'} = 6 - 6 = 0$, donc (d) et (d') sont perpendiculaires.

25 **a.** (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; a)$.
(d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u_1}(-2 ; 3)$.
(d) est perpendiculaire à (d_1) si et seulement si,
$\vec{u} \cdot \vec{u_1} = 0 \Leftrightarrow 1 \times (-2) + a \times (-3) = 0$
$\Leftrightarrow -2 - 3a = 0$
$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$.

b. (d_2) a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(3 ; -2)$.
(d) est parallèle à (d_2) si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}, \vec{u_2}) = 0$
soit $1 \times (-2) - a \times 3 = 0 \Leftrightarrow -2 - 3a = 0$
$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$.

26 (d) a pour vecteur normal $\vec{n}(2\,;-1)$.
$\vec{n}$ est un vecteur directeur de (Δ) perpendiculaire à (d).
Représentation paramétrique de (Δ) :
$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

27 $M(x\,;y)$.
$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x-3) \times 1 + (y-4) \times (-3) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 - 3y + 12 = 0$
$\Leftrightarrow x - 3y + 9 = 0$
équation cartésienne de ($\mathscr{D}$).

28 **a.** $\overrightarrow{BC}(-2\,;-2)$.
(d) : droite passant par A, de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.
$M(x\,;y)$;
$M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\Leftrightarrow (x-3) \times (-2) + (y-0) \times (-2) = 0$
$\Leftrightarrow -2x + 6 - 2y = 0$
$\Leftrightarrow x + y - 3 = 0$.
b. $\overrightarrow{CD}(-2\,;-6)$.
(d') : droite passant par B, de vecteur normal $\overrightarrow{CD}$.
$M \in (d') \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
$\Leftrightarrow (x-1) \times (-2) + (y-4) \times (-6) = 0$
$\Leftrightarrow -2x + 2 - 6y + 24 = 0$
$\Leftrightarrow -2x - 6y + 26 = 0$
$\Leftrightarrow x + 3y - 13 = 0$.

29 ($\mathscr{D}$) a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;-4)$
$\|\vec{n}\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.
Donc $\frac{3}{\sqrt{17}}\vec{n}$ et $-\frac{3}{\sqrt{17}}\vec{n}$ sont deux vecteurs normaux à ($\mathscr{D}$) de norme 3.
Soit $\vec{n}_1\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\,;\frac{-12}{\sqrt{17}}\right)$ et $\vec{n}_2\left(\frac{-3}{\sqrt{17}}\,;\frac{12}{\sqrt{17}}\right)$.

30 Coordonnées des différents points :
$E(5\,;1)$, $F(1\,;5)$, $G(6\,;10)$, $H(16\,;10)$ et $I(19\,;1)$.
a. (EF) : $\overrightarrow{EM}(x-5\,;y_1)$; $\overrightarrow{EF}(-4\,;4)$;
$\text{dét}(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EF}) = 0 \Leftrightarrow 4(x-5) - (-4)(y-1) = 0$
$\Leftrightarrow 4x - 20 + 4y - 4 = 0$
$\Leftrightarrow 4x + 4y - 24 = 0$
$\Leftrightarrow x + y - 6 = 0$.
(FG) : $\overrightarrow{FG}(5\,;5)$; $\overrightarrow{FM}(x-1\,;y-5)$.
$M \in (FG) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FG}) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1) \times 5 - 5 \times (y-5) = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 - y + 5 = 0$
$\Leftrightarrow x - y + 4 = 0$.
(GH) : $\overrightarrow{GH}(10\,;0)$; $\overrightarrow{GM}(x-6\,;y-10)$.
(GM) droite horizontale d'équation $y = 10$.
(HI) : $\overrightarrow{HI}(3\,;-9)$; $\overrightarrow{HM}(x-16\,;y-10)$.
$M \in (HI) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HI}) = 0$
$\Leftrightarrow -9(x-16) - 3(y-10) = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 48 + y - 10 = 0$
$\Leftrightarrow 3x + y - 58 = 0$.
Les vecteurs directeurs sont tous non perpendiculaires deux à deux, donc il n'y a pas de droites parallèles.
$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = -4 \times 5 + 4 \times 5 = 0$.
(EF) et (FG) sont perpendiculaires.
b. La nouvelle trajectoire est (HJ) avec $\overrightarrow{HJ}$ colinéaire à $\overrightarrow{EF}$.
J a pour coordonnées $(19\,;y)$, $\overrightarrow{HJ}(3\,;y-10)$.
$\det(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{EF}) = 0 \Leftrightarrow 3 \times 4 - (y-10) \times (-4) = 0$
$\Leftrightarrow 12 + 4y - 40 = 0$
$\Leftrightarrow 4y - 28 = 0$
$\Leftrightarrow y = 7$.
J a pour coordonnées $(19\,;7)$.

31 **a.** $\overrightarrow{AB}(1\,;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(-5\,;-6)$.
$\text{dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \times (-6) - (-4) \times (-5)$
$= -6 - 20$
$= -26$.
$\text{dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.
b. (h_A) : hauteur issue de A.
(h_B) : hauteur issue de B.
(h_C) : hauteur issue de C.
$M(x\,;y)$;
$M \in (h_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\Leftrightarrow (x-3) \times (-6) + (y-5) \times (-2) = 0$.
$\Leftrightarrow -6x + 18 - 2y + 10 = 0$
$\Leftrightarrow 6x + 2y - 28 = 0$
$\Leftrightarrow 3x + y - 14 = 0$.
$M \in (h_B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
$\Leftrightarrow (x-4)(-5) + (y-1)(-6) = 0$
$\Leftrightarrow -5x + 20 - 6y + 6 = 0$
$\Leftrightarrow -5x - 6y + 26 = 0$
$\Leftrightarrow 5x + 6y - 26 = 0$.
$M \in (h_C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
$\Leftrightarrow (x+2) \times 1 + (y+1) \times (-4) = 0$
$\Leftrightarrow x + 2 - 4y - 4 = 0$
$\Leftrightarrow x - 4y - 2 = 0$.

32 Coordonnées des points $A(3 ; -6)$, $B(0 ; 9)$ et $C(-9 ; 0)$.

a. $\overrightarrow{AB}(-3 ; 15)$;

$M(x ; y) : M \in (h_C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow (x+9) \times (-3) + (y-0) \times 15 = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 27 + 15y = 0$

$\Leftrightarrow x - 5y + 9 = 0$

b. On détermine une équation cartésienne de (h_A), hauteur issue de A :

$\overrightarrow{BC}(-9 ; -9)$;

$M \in (h_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow (x-3) \times (-9) + (y+6) \times (-9) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 + y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + y + 3 = 0.$

H point d'intersection de (h_A) et (h_C) a pour coordonnées $(x ; y)$ tels que :

$$\begin{cases} x - 5y + 9 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y - 9 \\ 5y - 9 + y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y - 9 \\ 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Donc $H(-4 ; 1)$.

33 **a.** U_2 est associé à la droite rouge.

U_1 est associé à la droite bleue.

b. E : valeur de U_1 pour $I = 0$

donc $E = 4{,}5$ V.

$U_2 = RI$ pour I_1 : $I = 0{,}5$; $U_2 = 5$ donc $R = \dfrac{U_2}{I} = 10\ \Omega$.

Pour A' : $I = 1$; $U = E - rI$

soit $4{,}3 = 4{,}5 - r \times 1 \Leftrightarrow r = 4{,}5 - 4{,}3 = 0{,}2\ \Omega$.

c. Le point de fonctionnement est le point d'intersection des deux droites.

Son abscisse vaut I_0. Son ordonnée vaut U_0.

d. Calcul : $4{,}5 - 0{,}2 \times I_0 = 10 \times I_0$

$\Leftrightarrow 10{,}2\, I_0 = 4{,}5 \Leftrightarrow I_0 = \dfrac{4{,}5}{10{,}2} \approx 0{,}44$ A.

Puis $U_0 = 10 \times I_0 \approx 4{,}4$ V.

Équation normale de droite

34 **a.** $2x - y + 4 = 0$

$a = 2 > 1$; a n'est pas de la forme $\cos\theta$.

Ce n'est pas une équation normale de droite.

b. $0{,}3x + 1{,}5y + 2 = 0$.

$b = 1{,}5 > 1$; b n'est pas de la forme $\sin\theta$.

Ce n'est pas une équation normale de droite.

35 $-\dfrac{1}{\sqrt{17}}x - \dfrac{4}{\sqrt{17}}y - \dfrac{5}{\sqrt{17}} = 0$ est une autre équation normale de (d).

36 $2x - y + 4 = 0$.

a. $\vec{n}(2 ; -1)$ est normal à (d).

$\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{n}.$

$\vec{u}_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{n}.$

$\vec{u}_1\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} ; \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\vec{u}_2\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}} ; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

b. Les deux équations normales de (d) sont :

$\dfrac{2}{\sqrt{5}}x - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y + \dfrac{4}{\sqrt{5}} = 0$ et $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}x + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y - \dfrac{4}{\sqrt{5}} = 0.$

37 **a.** $\vec{n}(-1 ; 2)$; $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}.$

Donc $\vec{u}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}} ; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ unitaire et normal à $(\mathscr{D}_1)$.

$M(x ; y)$

$M \in (\mathscr{D}_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0.$

$\Leftrightarrow (x-5) \times \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right) + (y+2) \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{5}}x + \dfrac{5}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y + \dfrac{4}{\sqrt{5}} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{5}}x + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y + \dfrac{9}{\sqrt{5}} = 0$

équation normale de $(\mathscr{D}_1)$.

b. $3x - 4y + 1 = 0$.

On multiplie l'équation par $\dfrac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{1}{5}$.

Équation normale de $(\mathscr{D}_2)$: $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{1}{5} = 0.$

38 **a.** $\vec{n}(5 ; 2)$ est normal à $(\mathscr{D}_3)$.

$\vec{n}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}.$

$\vec{n}_1\left(\dfrac{5}{\sqrt{29}} ; \dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$ est unitaire et normal à $(\mathscr{D}_3)$.

$M(x ; y)$;

$M \in (\mathscr{D}_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{29}}(x-3) + \dfrac{2}{\sqrt{29}}(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{29}}x + \dfrac{2}{\sqrt{29}} - \dfrac{17}{\sqrt{29}} = 0$

équation normale de $(\mathscr{D}_3)$.

b. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(6 ; 3)$ dirige $(\mathscr{D}_4)$.

$\vec{n}(3 ; -6)$ est normal à $(\mathscr{D}_4)$.

$\vec{n}_1 = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$; $\vec{n}_1\left(\frac{3}{\sqrt{45}} ; \frac{-6}{\sqrt{45}}\right)$ or $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$\vec{n}_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}} ; \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$.

$M(x ; y)$;

$M \in (\mathscr{D}_4) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2) - \frac{2}{\sqrt{5}}(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.$

équation normale de $(\mathscr{D}_4)$.

39 $(\mathscr{D}_5)$ passe par $A(2 ; 5)$ et est dirigée par $\vec{u}(1 ; -1)$.

$M(x ; y)$;

$M \in (\mathscr{D}_5) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow -1 \times (x-2) - 1\,(y-5) = 0$

$\Leftrightarrow -x - y + 7 = 0.$

Une équation normale de $(\mathscr{D}_5)$ est :

$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{7}{\sqrt{2}} = 0.$

Distance d'un point à une droite

40 **a.** $d(A, (d)) = \frac{|1 + 3 \times 2 + 1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$.

b. $d(A, (d)) = \frac{|3 \times (-1) - 2 \times (1,5)|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|-3-3|}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

41 **a.** L'équation est une équation normale donc :

$d(A, (d)) = \left|\frac{1}{2} \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-2) - 2\right| = \left|\frac{3}{2} - \sqrt{3} - 2\right|$

$= \left|-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right| = \frac{1}{2} + \sqrt{3}.$

b. L'équation est une équation normale donc :

$d(A, (d)) = \left|\frac{2}{\sqrt{13}} \times 1 + \frac{3}{\sqrt{13}} \times 4 + \frac{6}{\sqrt{13}}\right| = \frac{20}{\sqrt{13}}$.

42 **a.** $d(A, (\mathscr{D}))$: l'équation de $(\mathscr{D})$ est une équation normale, donc :

$d(A, (\mathscr{D})) = \left|1 \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

b. $d(A, (\mathscr{D})) = \frac{|2 \times (-2) - 5 \times 1 + 11|}{\sqrt{4+25}} = \frac{|-9+11|}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$.

c. $d(A, \mathscr{D}) = \frac{\left|\frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{3} \times (-2) + 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}} = \frac{\left|2 + \frac{2}{3} + 1\right|}{\sqrt{\frac{13}{36}}}$

$= \frac{11}{3} \times \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{22}{\sqrt{13}}$.

43 **a.** Équation de (d).

$M(x ; y)$;

$M \in (d) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow -2(x-1) - 1(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 2 - y = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$

équation normale de (d).

b. $d(B, (d)) = \left|\frac{2}{\sqrt{5}} \times 4 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times (-3) - \frac{2}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{8-5}{\sqrt{5}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

44 Équation de (BC) : $\overrightarrow{BC}(3 ; -8)$;

$M(x ; y)$;

$M \in (BC) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow -8(x+1) - 3(y-5) = 0$

$\Leftrightarrow -8x - 8 - 3y + 15 = 0$

$\Leftrightarrow 8x + 3y - 7 = 0.$

$d(A, (BC)) = \frac{|8 \times 1 + 3 \times (-2) - 7|}{\sqrt{64+9}} = \frac{|8-6-7|}{\sqrt{73}}$

$= \frac{|-5|}{\sqrt{73}} = \frac{5}{\sqrt{73}}$.

45 $(\mathscr{D})$ passe par $B(3 ; -1)$, a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2)$.

Équation de $(\mathscr{D})$:

$M(x ; y)$;

$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow$ dét $(BM, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-3) - (y+1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 6 - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 7 = 0.$

$d(A, (\mathscr{D})) = \frac{|2 \times 2 - (-2) - 7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|4+2-7|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

46 **a.** $\vec{u}(\cos(70°) ; \sin(70°))$ est un vecteur directeur unitaire de (OB).

b. $O(0 ; 0) \in (OB)$; $M(x ; y)$;

$M \in (OB) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(70°)\,x - \cos(70°)\,y = 0$

équation normale de (OB).

c. $\vec{v}(-\cos(65°) ; \sin(65°))$ est un vecteur directeur unitaire de (AB).

$M \in (AB) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(65°)(x-3) + \cos(65°)\,y = 0$

$\Leftrightarrow \sin(65°)\,x + \cos(65°)\,y - 3\sin(65°) = 0$

équation normale de (AB).

d. $B\,(x\,;y)$;

$$\begin{cases} B \in (OB) \\ B \in (AB) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(70)\,x - \cos(70)\,y = 0 \\ \sin(65)\,x + \cos(65)\,y = 3\sin(65) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\cos(70)}{\sin(70)}\,y \\ \left[\sin(65) \times \dfrac{\cos(70)}{\sin(70)} + \cos 65\right] y = 3 \times \sin(65) \end{cases}$$

$$y = \frac{3 \times \sin(65) \times \sin(70)}{\sin(65)\cos(70) + \cos(65)\sin(70)}$$

$$x = \frac{\cos(70)}{\sin(70)} \times \frac{3 \times \sin(65) \times \sin(70)}{\sin(65)\cos(70) + \cos(65)\sin(70)}$$

$$= \frac{3 \times \sin(65) \times \sin(70)}{\sin(65)\cos(70) + \cos(65)\sin(70)}.$$

B a pour coordonnées $(x_B\,;y_B)$ soit environ (17,8 ; 21,7).

e. (OA) a pour équation normale : $y = 0$.

$d\,(B\,;(OA)) = |y_B| \approx 21{,}7$ km.

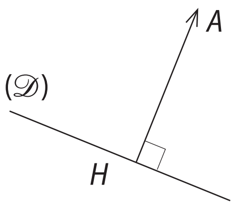
47 Propriété du cours

a. Si $ax + by + c = 0$ est une équation de droite alors $\vec{n}\,(a\,;b)$ est normal à $(\mathscr{D})$.

Ici $a = \cos(\theta)$; $b = \sin(\theta)$; $\vec{v}\,(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ est normal à $(\mathscr{D})$.

De plus $\|\vec{v}\| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. $\vec{v}$ est unitaire.

b.



(AH) est perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ donc :

$\overrightarrow{AH} = \pm\,\|\overrightarrow{AH}\| \cdot \vec{v}$ ($\vec{v}$ unitaire).

Soit $M\,(x\,;y)$ et $M \in (\mathscr{D})$.

$|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}| = |(x - x_0)\cos(\theta) + (y - y_0)\sin(\theta)|$.

De plus $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}| = |(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{u}|$

$= |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}|$

$= |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + 0|$ car $HM \perp \vec{u}$

$= |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}| = \|\overrightarrow{AH}\| = AH$.

Donc $AH = |(x - x_0)\cos(\theta) + (y - y_0)\sin(\theta)|$

c. On sait que $d(A\,;(\mathscr{D})) = AH$

$= |(x - x_0)\cos(\theta) + (y - y_0)\sin(\theta)|$.

On va choisir un point m de $(\mathscr{D})$.

Pour H point de $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(x_H\,;y_H)$, on a :

$x_H\cos(\theta) + y_H\sin(\theta) + k = 0$.

Puis $d(A, (\mathscr{D})) = AH$

$= |(x_H - x_0)\cos(\theta) + (y_H - y_0)\sin(\theta)|$

$= |-x_0\cos(\theta) - y_0\sin(\theta) - k|$

$= |x_0\cos(\theta) + y_0\sin(\theta) + k|$.

Cercles

48 $\Omega(5\,;-3)$; $R = 2$.

49 $\begin{cases} x = 6 + \sqrt{3}\cos(t) \\ y = -2 + \sqrt{3}\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

50 $(x - 4)^2 + y^2 = 6 = \sqrt{6}^2$ alors : $\Omega(4\,;0)$ et $R = \sqrt{6}$.

$\begin{cases} x = 4 + \sqrt{6}\cos(\alpha) \\ y = \sqrt{6}\sin(\alpha) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

51 $R = AB = \sqrt{(5 + 1)^2 + (-3 - 1)^2}$

$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$.

$\begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{13}\cos(\alpha) \\ y = 1 + 2\sqrt{13}\sin(\alpha). \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

52 Ω milieu de $[AB]$.

$x_\Omega = \dfrac{2 + 8}{2} = 5$; $y_\Omega = \dfrac{1 - 5}{2} = -2$.

$R = \dfrac{1}{2}AB$.

$AB = \sqrt{(8 - 2)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$\begin{cases} x = 5 + 6\sqrt{2}\cos(\alpha) \\ y = -2 + 6\sqrt{2}\sin(\alpha) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

53 $\Omega(1\,;0)$; $R = 3$.

$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 8$.

54 **a.** Représentation paramétrique de $(\mathscr{C}_1)$

$A(-2\,;3)$; $B(2\,;1)$.

$R = AB = \sqrt{(2 + 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$\begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{5}\cos(\alpha) \\ y = 3 + 2\sqrt{5}\sin(\alpha) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

b. $(\mathscr{C}_2)$ de diamètre $[AB]$. Centre Ω milieu de $[AB]$.

$x_\Omega = \dfrac{-2 + 2}{2} = 0$; $y_\Omega = \dfrac{3 + 1}{2} = 2$.

$R_2 = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R}{2} = \sqrt{5}$.

$\begin{cases} x = \sqrt{5}\cos(\alpha) \\ y = 2 + \sqrt{5}\sin(\alpha) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

55 **a.** $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 7$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 = 7$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 17$

Centre $\Omega(3\,;1)$; rayon $R = \sqrt{17}$.

D'où la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{17}\cos(\alpha) \\ y = 1 + \sqrt{17}\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

b. $x^2 + y^2 + 3x + 8y + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y+4)^2 - 16 + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+4)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}.$$

Centre $\Omega\left(-\frac{3}{2}\,;-4\right)$; rayon $R = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos(\alpha) \\ y = -4 + \frac{5}{2}\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

c. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 17 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 8.$$

Centre $\Omega(-4\,;-3)$; rayon $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 + 2\sqrt{2}\cos(\alpha) \\ y = -3 + 2\sqrt{2}\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

56 **a.** $\overrightarrow{\Omega A}(a + R\cos(t) - a\,;\, b + R\sin(t) - b)$

donc $\overrightarrow{\Omega A}(R\cos(t), R\sin(t))$.

On pose $\vec{u}(\cos(t)\,;\sin(t))$; $\vec{u}$ est non nul car $\|\vec{u}\| = 1$

alors $\overrightarrow{\Omega A} = R\,\vec{u}$. $\overrightarrow{\Omega A}$ dirige (ΩA), donc $\vec{u}$ dirige (ΩA).

b. $\vec{n}(\sin(t)\,;-\cos(t))$ est orthogonal à $\vec{u}$, donc normal à (ΩA) et $\vec{n}$ est unitaire car $\|\vec{n}\| = 1$.

c. (T) passe par A et est dirigée par $\vec{n}$.

$M(x\,;y)$; $M \in (T) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{n}) = 0$.

Or $\overrightarrow{AM}(x - (a + R\cos(t)\,;\, y - (b + R\sin(t))$.

Donc $\text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{n}) = 0$

$\Leftrightarrow -\cos(t)(x - a - R\cos(t)) - \sin(t)(y - b - R\sin(t)) = 0$

$\Leftrightarrow -x\cos(t) + a\cos(t) + R\cos^2(t) - y\sin(t) + b\sin(t) + R\sin^2(t) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(t) \cdot x + \sin(t)y - (a\cos(t) + b\sin(t) + R) = 0$

équation cartésienne de (T).

57 **a.** $A(-5\,;1)$ et $B(1\,;-2)$; Ω est le milieu de $[AB]$.

$x_\Omega = \frac{-5+1}{2} = -2$ et $y_\Omega = \frac{1 + (-r)}{2} = -\frac{1}{2}$.

$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1+5)^2 + (-2-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+9}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{45} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$:

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{3\sqrt{5}}{2}\cos(t) \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\sin(t) \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. (T_A) tangente au cercle au point A : passe par A, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(6\,;-3)$.

$M(x\,;y)$;

$M \in (TA) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow 6(x+5) + (-3)(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 6x + 30 - 3y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 3y + 33 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 11 = 0$

équation cartésienne de (T_A).

(T_B) tangente au cercle au point B : passe par B, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$M \in (TB) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow 6(x-1) - 3(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 6 - 3y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 3y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$

équation cartésienne de (T_B).

58 **a.** $d(A, (d)) = \frac{|3 \times 4 + 2 \times 2 + 10|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|12 + 4 + 10|}{\sqrt{13}}$

$= \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$.

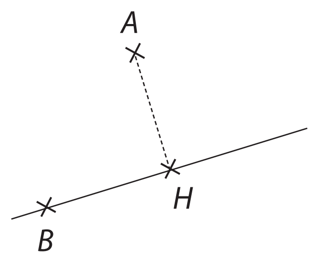
b. $\mathscr{C}$ a pour centre A et pour rayon $R = d(A, (d))$.

$$\begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{13}\cos(\alpha) \\ y = 2 + 2\sqrt{13}\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

59 **a.** $d(A, (\mathscr{D})) = \frac{|2 \times 2 - 1 + 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

b. $\vec{n}(2\,;-1)$ est un vecteur normal à $(\mathscr{D})$.

$\frac{1}{\sqrt{5}}(2\,;-1) = \vec{n}_1$ est un vecteur unitaire normal à $(\mathscr{D})$.



$B(-1\,;1)$ est un point de $(\mathscr{D})$ alors $(\mathscr{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;2)$ $(\vec{u} \cdot \vec{n} = 0)$.

Représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

H est l'unique point de $(\mathscr{D})$ tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$

$1(-1 + t - 2) + 2(1 + 2t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t - 3 + 2 \times 2t = 0$

$\Leftrightarrow 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$

donc $x_H = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$ et $y_H = 1 + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$

$H\left(-\frac{2}{5}\,;\frac{11}{5}\right)$.

c. $(\mathscr{C})$ a pour centre A et rayon $R = AH = d(A\,;(\mathscr{D}))$

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{36}{5}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \dfrac{36}{5}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5 - \dfrac{36}{5} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - \dfrac{11}{5} = 0.$

60 **a.** $x^2 + y^2 - 12x + 6y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-6)^2 - 36 + (y+3)^2 - 9 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (y+3)^2 = 50$

donc $\Omega(6\,;-3)$ et $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

b. $d(R\,;(\mathscr{D})) = \dfrac{|6-(-3)+1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} = R$

donc $(\mathscr{D})$ est tangente à $(\mathscr{C})$.

c. Point de contact I.

Représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$:

$x - y + 1 = 0\,;\ A(-1\,;0) \in (\mathscr{D})\,;$

vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1)$;

$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

I est l'unique point de $(\mathscr{D})$ tel que $\overrightarrow{RI} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow 1 \times (-1 + t - 6) + 1 \times (t+3) = 0$

$\Leftrightarrow -7 + t + t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2t = 7 - 3 = 4$

$\Leftrightarrow t = 2$

alors $\begin{cases} x_I = -1 + 2 = 1 \\ y_I = 2 \end{cases}$ Ainsi, $I(1\,;2)$.

61 **a.** $d(\Omega\,;d) = \dfrac{|-4\times 2 + 5 \times 3 - 31|}{\sqrt{16+25}} = \dfrac{24}{\sqrt{41}} \approx 3{,}75.$

$d(\Omega\,;d) < R$. Deux points d'intersection.

b. $d(\Omega\,;(d)) = \dfrac{|2+18-31|}{\sqrt{1+36}} = \dfrac{11}{\sqrt{37}} \approx 1{,}81.$

$d(\Omega\,;(d)) > \sqrt{2}$. Pas de point d'intersection.

c. $d(\Omega\,;(d)) = \dfrac{|-28+24-26|}{\sqrt{49+64}} = \dfrac{30}{\sqrt{113}} \approx 2{,}8.$

$d(\Omega\,;(d)) > 2$. Pas de point d'intersection.

62 **a.** $R = OA = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$

Équation cartésienne de $(\mathscr{C})$: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$

$x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0.$

b. $AB = \sqrt{(5-4)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

c. $(\mathscr{C}')$ de diamètre $[AB]$. Le centre de $(\mathscr{C}')$ est Ω, milieu de $[AB]$.

$x_\Omega = \dfrac{4+5}{2} = \dfrac{9}{2}\,;\ y_\Omega = \dfrac{-3+4}{2} = \dfrac{1}{2}.\ \Omega\left(\dfrac{9}{2}\,;\ \dfrac{1}{2}\right).$

$R' = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ rayon de $(\mathscr{C}')$.

Équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$:

$\left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + \dfrac{81}{4} + y^2 - y + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9x - y + \dfrac{82}{4} - \dfrac{50}{4} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9x - y + 8 = 0$

équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$.

d. $M(x\,;y)\,;\ M \in (\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}')$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 9x - y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 7y + 8 = 0 & \\ x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 & (L_1 - L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 7y & \\ (8-7y)^2 + y^2 - 8(8-7y) + 6y & (L_2) \end{cases}$

On résout (L_2) :

$64 - 112y + 49y^2 + y^2 - 64 + 56y + 6y = 0$

$\Leftrightarrow 50y^2 - 50y = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - y = 0$

$\Leftrightarrow y(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 1$

Si $y = 0$ alors $x = 8 - 7 \times 0 = 8$.

Si $y = 1$ alors $x = 8 - 7 \times 1 = 1$.

D'après la figure, on identifie $I(1\,;1)$ et $J(8\,;0)$.

e. I (resp. J) appartient au cercle de diamètre $[AB]$, donc le triangle ABI (resp. ABJ) est rectangle en I (resp. J), d'où $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ (resp. $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$).

f. Les tangentes à $(\mathscr{C})$ issues de B sont les droites (BI) et (BJ), de vecteur normal respectif $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$.

$(\mathscr{T}_1)$ tangente issue de B passant par I :

$M(x\,;y)$;

$M \in (\mathscr{T}_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$

$\Leftrightarrow (x-5) \times (1-4) + (y-4) \times (1+3) = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 15 + 4y - 16 = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 4y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 4y + 1 = 0$ équation de $(\mathscr{T}_1)$.

$(\mathscr{T}_2)$ tangente issue de B passant par J :

$M(x\,;y)$;

$M \in (\mathscr{T}_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$

$\Leftrightarrow (x-5) + (8-4) + (y-4) \times (0+3) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 20 + 3y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 3y - 32 = 0$ équation de $(\mathscr{T}_2)$.

63 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 3$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 3$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$

Centre $\Omega(2\,;1)$, rayon $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D})) = \frac{|2+1+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = R.$$

$d(\Omega\,;(\mathscr{D})) = R$, donc $(\mathscr{D})$ est tangente à $(\mathscr{C})$ en A, unique point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.

A est aussi le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathscr{D})$.

Représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$: $(\mathscr{D})$ passe par $B(0\,;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1)$.

D'où $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

A est déterminé par $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow (t-2) \times 1 + (1+t+1) \times 1 = 0$

$\Leftrightarrow t - 2 + t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2t = 0$

$\Leftrightarrow t = 0.$

Donc $A = B$; $A(0\,;1)$.

Se tester

64 **1.** Faux ; **2.** Vrai ; **3.** Vrai ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai ; **6.** Faux.

65 **1.** Faux. (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-3)$; $\overrightarrow{AO}\,(2\,;-1)$.

$\overrightarrow{AO} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + (-3) \times (-1) = 5 \neq 0$

$\overrightarrow{AO}$ et u ne sont pas orthogonaux.

2. Faux. Rayon de $(\mathscr{C})$:

$R = \Omega A = \sqrt{(4+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

$\Omega B = \sqrt{(-3-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$.

$\Omega B \neq R$.

3. Faux. Le centre est $\Omega(4\,;3)$.

Représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$:

$\begin{cases} x = 4 + 40\cos(t) \\ y = 3 + 40\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Vrai. Un point de (d) est $A(-2\,;1)$.

Soit $M\,(x\,;y)$, $M \in (d) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow -3(x+2) - (y-1) = 0$

$\Leftrightarrow -3x - y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + y + 5 = 0$.

Une équation normale de (d) est :

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y + \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$$

5. Faux.

$\overrightarrow{B\Omega}(7\,;-1)$ donc $\vec{v}\left(1\,;-\frac{1}{7}\right)$ dirige $(B\Omega)$.

Soit $E(-10\,;5)$; alors $\overrightarrow{BE}(13\,;1)$.

$$\text{dét}\,(\overrightarrow{BE}, \vec{v}) = \frac{-1}{7} \times 13 - 1 = \frac{-20}{7} \neq 0.$$

$\overrightarrow{BE}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. E n'appartient pas à $(B\Omega)$.

66 **1.** b. ; **2.** c. ; **3.** a. ; **4.** b. ; **5.** b.

67 **1. c.** Le centre de $(\mathscr{C})$ est Ω milieu de $[AB]$, donc $\Omega\,(2\,;-6)$.

Le rayon de $(\mathscr{C})$ est $R = \frac{1}{2}AB$.

$AB = \sqrt{(5+1)^2 + (-10+2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

donc $R = 5$.

2. c. La tangente à $(\mathscr{C})$ en I a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega I}\,(-4\,;-3)$.

Soit $M\,(x\,;y)$, $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{\Omega I} = 0 \Leftrightarrow -4(x+2) - 3(y+9) = 0$

$\Leftrightarrow -4x - 3y - 35 = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 3y + 35 = 0$.

3. b. $$d(J, (d)) = \frac{|4 \times 2 + 3 \times 3 + 35|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8+9+35|}{5} = \frac{52}{5}.$$

$d(J, (d)) = 10{,}4$.

Exercices d'approfondissement

68 Droites parallèles

a. $\overrightarrow{OB}(1\,;3)$.

Représentation paramétrique de (OB) :

$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

B' doit vérifier $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{A'B}$ sont colinéaires, soit dét$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{A'B}) = 0$. On a $B'(t\,;3t)$.

$\overrightarrow{AB'}(t-4\,;3t)$; $\overrightarrow{A'B}(-6\,;3)$

donc $3(t-4) - (-6) \times 3t = 0 \Leftrightarrow 3t - 12 + 18t = 0$

$\Leftrightarrow 21t - 12 = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$

$B'\left(\dfrac{4}{7}\,;\dfrac{12}{7}\right)$.

b. • $C(x\,;y)$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x - 1 \\ 0 = y - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Donc $C(5\,;3)$.

• $C'(x\,;y)$

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = x - \dfrac{4}{7} \\ 0 = y - \dfrac{12}{7}. \end{cases}$

Donc $C'\left(\dfrac{53}{7}\,;\dfrac{12}{7}\right)$.

c. • Équation de (AB') : soit $M(x\,;y)$; $\overrightarrow{AB'}\left(\dfrac{4}{7} - 4\,;\dfrac{12}{7}\right)$.

Soit $\overrightarrow{AB'}\left(\dfrac{-24}{7}\,;\dfrac{12}{7}\right)$.

$M \in (AB') \Leftrightarrow$ dét$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB'}) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{12}{7}(x-4) + \dfrac{24}{7}(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow 12x - 48 + 24y = 0$

$\Leftrightarrow x - 4 + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$

équation de (AB').

• Équation de $(A'B)$; $\overrightarrow{A'B}(-6\,;3)$.

dét$(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B}) = 0 \Leftrightarrow 3(x-7) + 6(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 21 + 6y = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0.$

équation de $(A'B)$

• Équation de (CC') ; $\overrightarrow{CC'}\left(\dfrac{53}{7} - 5\,;\dfrac{12}{7} - 3\right)$

soit $\overrightarrow{CC'}\left(\dfrac{18}{7}\,;\dfrac{-9}{7}\right)$.

dét$(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-9}{7}(x-5) - \dfrac{18}{7}(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -9(x-5) - 18(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -9x + 45 - 18y + 54 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 5 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$ équation de (CC').

d. D'après les trois équations obtenues $\vec{n}(1\,;2)$ est un vecteur normal à (AB'), $(A'B)$ et (CC'), donc ces trois droites sont parallèles.

69 Droites concourantes

a. • $\overrightarrow{OA}(4\,;0)$; $\overrightarrow{OA'}(9\,;0)$

donc $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{9}{4}\overrightarrow{OA}$

O, A et A' sont alignés et $A' \in (OA)$.

• $\overrightarrow{OB}(1\,;3)$; $\overrightarrow{OB'}(-3\,;-9)$.

$\overrightarrow{OB'} = -3\overrightarrow{OB}$, de même $B' \in (OB)$.

b. $C(x\,;y)$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x - 1 \\ 0 = y - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

$C'(x\,;y)$; $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = x + 3 \\ 0 = y + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -9 \end{cases}$

Ainsi, $C(5\,;3)$ et $C'(6\,;-9)$.

c. • Équation de (AB')

$\overrightarrow{AB'}(-3-4\,;-9-0)$ donc $\overrightarrow{AB'}(-7\,;-9)$.

Soit $M(x\,;y)$;

$M \in (AB') \Leftrightarrow$ dét$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow (x-4) \times (-9) + 7(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow -9x + 36 + 7y = 0$

$\Leftrightarrow 9x - 7y - 36 = 0$ équation de (AB')

• Équation de $(A'B)$

$\overrightarrow{A'B}(1-9\,;3-0)$ donc $\overrightarrow{A'B}(-8\,;3)$.

$M \in (A'B) \Leftrightarrow$ dét$(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B}) = 0$

$\Leftrightarrow (x-9) \times 3 + 8(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 8y - 27 = 0$ équation de $(A'B)$.

• Équation de (CC')

$\overrightarrow{CC'}(1\,;-12)$.

$M \in (CC') \Leftrightarrow$ dét$(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CC'}) = 0$

$\Leftrightarrow -12(x-5) - 1(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -12x + 60 - y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 12x + y - 63 = 0$ équation de (CC').

d. $M \in (AB') \cap (A'B) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 7y - 36 = 0 \\ 3x - 27 + 8y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 7y = 36 \\ 9x + 24y = 81 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -31y = 36 - 81 = -45 \quad (L_1 - L_2) \\ 9x + 24y = 81 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-45}{-31} = \dfrac{45}{31} \\ 9x + 24 \times \dfrac{45}{31} = 81 \end{cases}$

$9x = \dfrac{81 \times 31 - 24 \times 45}{31} = \dfrac{1\,431}{31}$

$x = \dfrac{159}{31}$; $y = \dfrac{45}{31}$.

$I\left(\dfrac{159}{31} ; \dfrac{45}{31}\right)$ est le point d'intersection de (AB') et $(A'B)$.

On vérifie :

$12 \times \dfrac{159}{31} + 1 \times \dfrac{45}{31} - 63 = \dfrac{1}{31}[12 \times 159 + 45 - 63 \times 31]$

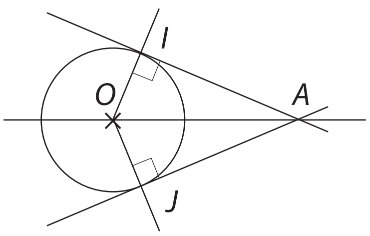
$= \dfrac{0}{31} = 0.$

Donc $I \in (CC')$.

Les trois droites $(A'B)$, (AB') et (CC') sont concourantes en $I\left(\dfrac{159}{31} ; \dfrac{45}{31}\right)$.

70 Tangente à un cercle issue d'un point

a. On cherche les points $M(x ; y)$ appartenant à $(\mathscr{C})$ tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.



On a $x(a - x) + y(0 - y) = 0 \Leftrightarrow ax - x^2 - y^2 = 0$.

M est un point de $(\mathscr{C})$ donc $x^2 + y^2 = 1$.

Il reste $ax - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{a}$.

On a alors $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2 - 1}{a^2} > 0$

$\Leftrightarrow |y| = \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$.

Les points d'intersection des tangentes issues de A avec $(\mathscr{C})$ sont $I\left(\dfrac{1}{a} ; \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$ et $J\left(\dfrac{1}{a} ; \dfrac{-\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$

b. Équation de la tangente (AI) :

$M(x ; y)$;

$M \in (AI) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OI} = 0$

$\Leftrightarrow (x - a) \times \dfrac{1}{a} + (y - 0) \times \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}x - 1 + \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}y = 0$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{a^2 - 1}y - a = 0$ équation de (AI).

Équation de la tangente (AJ) :

$M \in (AJ) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OJ} = 0$

$\Leftrightarrow (x - a) \times \dfrac{1}{a} + (y - 0) \times \left(\dfrac{-\sqrt{a^2-1}}{a}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{a^2 - 1}y - a = 0$ équation de (AJ).

71 Orthocentre et hyperbole

a. Équation de (h_3) :

$M(x ; y)$;

$M \in (h_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_3M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_3)(x_2 - x_1) + \left(y - \dfrac{1}{x_3}\right)\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x - x_3) + \left(y - \dfrac{1}{x_3}\right)\dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2} = 0$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)\left[(x - x_3) - \left(y - \dfrac{1}{x_3}\right)\dfrac{1}{x_1x_2}\right] = 0$

$x_2 - x_1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x - x_3 - \left(y - \dfrac{1}{x_3}\right)\dfrac{1}{x_1x_2} = 0$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x_1x_2}y - x_3 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0$

équation cartésienne de (h_3).

b. $M \in (\mathscr{H}) \cap (h_3) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ et $x - \dfrac{1}{x_1x_2}y - x_3 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x_1x_2} \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} - x_3 = 0.$

$x \neq 0$ sinon $M \notin (\mathscr{H})$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(\dfrac{1}{x_1x_2x_3} - x_3\right)x - \dfrac{1}{x_1x_2} = 0.$

On doit vérifier que M_3 est une solution évidente.

$x_3{}^2 + \dfrac{1}{x_1x_2} - x_3{}^2 - \dfrac{1}{x_1x_2} = 0.$

c. La 2e racine du trinôme vérifie $x' \times x_3 = \dfrac{-1}{x_1x_2}$

donc $x' = \dfrac{-1}{x_1x_2x_3}$.

Alors $I\left(\dfrac{-1}{x_1x_2x_3} ; -x_1x_2x_3\right)$.

d. En changeant les rôles de x_1 ; x_2 et x_3,

équation de (h_1) : $x - \dfrac{1}{x_2x_3}y - x_1 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0$

équation de (h_2) : $x - \dfrac{1}{x_1x_3}y - x_2 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0.$

On a : $\dfrac{-1}{x_1x_2x_3} + x_1 - x_1 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0$ donc $I \in (h_1)$

$$\frac{-1}{x_1x_2x_3} + x_2 - x_2 + \frac{1}{x_1x_2x_3} = 0 \text{ donc } I \in (h_2).$$

I est un point d'intersection des trois hauteurs du triangle $M_1M_2M_3$, c'est l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$.

72 Triangle délimité par trois droites

• $A(x\,;y)$;

$$A \in (d_1) \cap (d_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-5=0 \\ x-2y-4=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x-2(5-x)-4=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x-10+2x-4=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=14 \\ y=5-x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14}{3} \\ y=5-\dfrac{14}{3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$A\left(\dfrac{14}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

• $B(x\,;y)$;

$$B \in (d_1) \cap (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-5=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ 2x-(5-x)-2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5+x-2=0 \\ y=5-x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=5-x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=5-\dfrac{7}{3}=\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$B\left(\dfrac{7}{3}\,;\dfrac{8}{3}\right)$.

• $C(x\,;y)$;

$$C \in (d_2) \cap (d_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ x-2y-4=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ x-(2x-2)-4=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-2) \\ x-2x+4-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

$C(0\,;-2)$.

b. $BC = \sqrt{\left(0-\dfrac{7}{3}\right)^2 + \left(-2-\dfrac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{49}{9}+\dfrac{142}{9}} = \sqrt{\dfrac{245}{9}}$
$= \dfrac{7\sqrt{5}}{3}$.

c. $M(x\,;y)$

$$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-0)\times\left(\frac{7}{3}-\frac{14}{3}\right)+(y+2)\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-7}{3}x+\frac{7}{3}(y+2)=0$$
$$\Leftrightarrow -x+y+2=0$$
$$\Leftrightarrow x-y-2=0 \qquad (\mathscr{D})$$

d. $E(x\,;0)$ et $E \in (\mathscr{D})$ donc $x-0-2=0 \Leftrightarrow x=2$.
$E(2\,;0)$.

e. F projeté orthogonal de E sur la droite (d_2).
(d_2) est dirigée par $\vec{u}(1\,;2)$.
Représentation paramétrique de (d_2) :

$$\begin{cases} x=t \\ y=-2+2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

et (d_2) passe par $I(0\,;-2)$.
F est l'unique point de (d_2) vérifiant $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{u} = 0$.
Soit $(t-2)\times 1 + (-2+2t-0)\times 2 = 0$
$\Leftrightarrow t-2-4+4t=0 \Leftrightarrow 5t=6 \Leftrightarrow t=\dfrac{6}{5}$.
$F\left(\dfrac{6}{5}\,;-2+2\times\dfrac{6}{5}\right)$ soit $F\left(\dfrac{6}{5}\,;\dfrac{2}{5}\right)$.

f. $d(F\,;(d_1)) = \dfrac{\left|\dfrac{6}{5}+\dfrac{2}{5}-5\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\left|\dfrac{8}{5}-\dfrac{25}{5}\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{17}{5\sqrt{2}}$.

73 Famille de droites

a. $(\mathscr{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;2)$.
(Δ_m) a pour vecteur directeur $\vec{v}_m(m\,;m-2)$

$$(\mathscr{D}) \,//\, (\Delta_m) \Leftrightarrow \text{dét}(\vec{u} \cdot \vec{v}_m)=0$$
$$\Leftrightarrow -1(m-2)-2\times m=0$$
$$\Leftrightarrow -m+2-2m=0$$
$$\Leftrightarrow -3m+2=0$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}.$$

b. $(\mathscr{D}) \perp (\Delta_m) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v}_m = 0$

$$\Leftrightarrow -m+2(m-2)=0$$
$$\Leftrightarrow -m+2m-4=0$$
$$\Leftrightarrow m-4=0$$
$$\Leftrightarrow m=4.$$

74 Représentation paramétrique de droites

a. (d_1) passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2\,;1)$ car $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
D'où la représentation paramétrique de (d_1) :

$$\begin{cases} x=0+2t \\ y=2+t \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} x=2t \\ y=2+t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

D a pour abscisse $x=2$ alors $y=2+1=3$ donc $t=1$.

$D(2\,;3)$.

b. (d_2) a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;1)$ donc pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-1)$.

Représentation paramétrique de (d_3) :

$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

C d'abscisse $x=1$ donc $t=2$ et $y=-2$.

$C(1\,;-2)$.

c. • Droite (AC) équation cartésienne

$\overrightarrow{AC}(1-0\,;-2-2)\,;\overrightarrow{AC}(1\,;-4)\,;M(x\,;y)\,;$

$$\begin{aligned} M\in(AC) &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AC})=0\\ &\Leftrightarrow -4(x-0)-1(y-2)=0\\ &\Leftrightarrow -4x-y+2=0\\ &\Leftrightarrow 4x+y-2=0. \end{aligned}$$

• Droite (BD) équation cartésienne.

$\overrightarrow{BD}(2+1\,;3-0)\,;\overrightarrow{BD}(3\,;3)\,;$

$$\begin{aligned} M\in(BD) &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{BD})=0\\ &\Leftrightarrow 3(x+1)-3(y-0)=0\\ &\Leftrightarrow x+1-y=0\\ &\Leftrightarrow x-y+1=0. \end{aligned}$$

• Ainsi, le point $I(x\,;y)$ cherché est ;

$$I\in(AC)\cap(BD)\Leftrightarrow\begin{cases}4x+y-2=0\\ x-y+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\ 4x+x+1-2=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\ 5x-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=+\dfrac{1}{5}\\ y=+\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

Donc $I\left(\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{6}{5}\right)$.

d. P point de paramètre t : $\begin{cases}x_P=2t\\ y_P=2+t.\end{cases}$

Q point de paramètre t' : $\begin{cases}x_Q=-1+t'\\ y_Q=-t'\end{cases}$

et I est le milieu de $[PQ]$, soit $\begin{cases}x_I=\dfrac{x_P+x_Q}{2}\\ y_I=\dfrac{y_P+y_Q}{2}\end{cases}$

$$\text{D'où}\begin{cases}2t-1+t'=2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{2}{5}\\ 2+t-t'=2\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{12}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2t+t'=1+\dfrac{2}{5}=\dfrac{7}{5}\\ t-t'=\dfrac{12}{5}-2=\dfrac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=\dfrac{7}{5}-2t\\ t-\dfrac{7}{5}+2t=\dfrac{2}{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3t=\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{5}=\dfrac{9}{5}\\ t'=\dfrac{7}{5}-2t\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}\\ t'=\dfrac{7}{5}-\dfrac{6}{5}=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$$

Donc $x_P=\dfrac{6}{5}\,;y_P=2+\dfrac{3}{5}=\dfrac{13}{5}\,;P\left(\dfrac{6}{5}\,;\dfrac{13}{5}\right)$.

$x_Q=-1+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{4}{5}\,;y_Q=-\dfrac{1}{5}\,;Q\left(-\dfrac{4}{5}\,;-\dfrac{1}{5}\right)$.

75 Bissectrices de deux droites

a. Équation cartésienne de $(\mathscr{D}')$.

$(\mathscr{D}')$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2\,;-1)$.

Soit $M(x\,;y)$.

$$\begin{aligned} M\in(\mathscr{D}') &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB})=0\\ &\Leftrightarrow -1(x+1)+2(y-1)=0\\ &\Leftrightarrow -x-1+2y-2=0\\ &\Leftrightarrow -x+2y-3=0\\ &\Leftrightarrow x-2y+3=0 \quad \text{équation de } (\mathscr{D}'). \end{aligned}$$

$I(x\,;y)$.

$$I\in(\mathscr{D})\cap(\mathscr{D}')\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ x-2y+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\ x-4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\ -3x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

Donc $I(1\,;2)$.

b. $d_1=\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}|2x-y|$

$d_2=\dfrac{|x-2y+3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}|x-2y+3|$

c. $d_1=d_2\Leftrightarrow|2x-y|=|x-2y+3|$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=x-2y+3\\ \text{ou } 2x-y=-(x-2y+3).\end{cases}$$

Cas 1 : $2x-y=x-2y+3\Leftrightarrow x+y-3=0$ équation d'une droite (Δ).

Cas 2 : $2x-y=-x+2y-3\Leftrightarrow 3x-3y+3=0$
$\Leftrightarrow x-y+1=0$ équation d'une droite (Δ').

75 Triangles tracés dans un cercle

a. $(AB)=(AI)\,;\overrightarrow{AI}(-2+3\,;-3-5)$ donc $\overrightarrow{AI}(1\,;-8)$.

Équation cartésienne de (AB) :

$M(x\,;y)\,;$

$$\begin{aligned} M\in(AB) &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI})=0\\ &\Leftrightarrow -8(x+3)-1(y-5)=0\\ &\Leftrightarrow -8x-24-y+5=0\\ &\Leftrightarrow 8x+y+19=0 \quad \text{équation de } (AB). \end{aligned}$$

$(A'B')$ est la perpendiculaire à (AI) passant par I.

Donc $\overrightarrow{AI}$ est un vecteur normal de $(A'B')$.

$M(x\,;y)$;

$M \in (A'B') \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$

$\Leftrightarrow 1 \times (x+2) - 8(y+3) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 - 8y - 24 = 0$

$\Leftrightarrow x - 8y - 22 = 0$ équation de $(A'B')$.

b. Équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.

$R = OA = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$x^2 + y^2 = 34$.

$B(x\,;y)$ vérifie $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ 8x + y + 19 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -19 - 8x \\ x^2 + (19+8x)^2 = 34 \end{cases}$

$x^2 + (19+8x)^2 = 34 \Leftrightarrow x^2 + 361 + 304x + 64x^2 = 34$

$\Leftrightarrow 65x^2 + 304x + 327 = 0$

1re racine $x = -3$ abscisse de A

2e racine $-3 \times x = \dfrac{327}{65} \Leftrightarrow x = \dfrac{327}{-3 \times 65} = \dfrac{-109}{65}$

$(\approx -1{,}68)$

$y = -19 - 8 \times \left(\dfrac{-109}{65}\right) = \dfrac{-363}{65}$ $(\approx -5{,}58)$.

Donc $B\left(\dfrac{-109}{65}\,;\dfrac{-363}{65}\right)$.

c. Coordonnées de A' et B' ; $M(x\,;y)$.

$M \in (\mathscr{C}) \cap (A'B') \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x - 8y - 22 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y + 22 \\ (8y+22)2 + y^2 = 34. \end{cases}$

On a :

$(8y+22)2 + y^2 = 34 \Leftrightarrow 64\,y^2 + 352y + 484 + y^2 = 34$

$\Leftrightarrow 65\,y^2 + 352y + 450 = 0.$

2 racines $y_1 = \dfrac{-176}{65} + \dfrac{\sqrt{1\,726}}{65}$ et $y_2 = \dfrac{-176}{65} - \dfrac{\sqrt{1\,726}}{65}$

alors $x_1 = 8y_1 + 22 = \dfrac{22}{65} + \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}$

$x_2 = 8y_2 + 22 = \dfrac{22}{65} - \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}$.

Sur la figure $x_{A'} \leqslant x_{B'}$

donc $A'\left(\dfrac{22}{65} - \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}\,;\dfrac{-176}{65} - \dfrac{\sqrt{1\,726}}{65}\right)$.

$B'\left(\dfrac{22}{65} + \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}\,;\dfrac{-176}{65} + \dfrac{\sqrt{1\,726}}{65}\right)$.

d. A'' est le milieu de $[AA']$.

$x_{A''} = \dfrac{-173}{130} - \dfrac{4}{65}\sqrt{1\,726}$.

$y_{A''} = \dfrac{149}{130} - \dfrac{1}{130}\sqrt{1\,726}$.

$\overrightarrow{A''I}\left(\dfrac{-87}{130} + \dfrac{4}{65}\sqrt{1\,726}\,;\ \dfrac{-539}{130} + \dfrac{1}{130}\sqrt{1\,726}\right)$.

$\overrightarrow{BB'}\left(\dfrac{131}{65} + \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}\,;\dfrac{187}{65} + \dfrac{1}{65}\sqrt{1\,726}\right)$.

On veut prouver $\overrightarrow{A''I}$ et $\overrightarrow{BB''}$ orthogonaux.

$130\,\overrightarrow{A''I} = \vec{u}(-87 + 8\sqrt{1\,726}\,;-539 + \sqrt{1\,726})$

$65\overrightarrow{BB'} = \vec{v}(131 + 8\sqrt{1\,726}\,;187 + \sqrt{1\,726})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-87 + 8\sqrt{1\,726})(131 + 8\sqrt{1\,726})$
$+ (-539 + \sqrt{1\,726})(187 + \sqrt{1\,726})$

$= -87 \times 131 + (8 \times 131 - 8 \times 87)\sqrt{1\,726} + 1726$
$+ 64 \times 1\,726 - 539 \times 187 + (187 - 539)\sqrt{1\,726} + 1\,726$

$= -11\,397 + 352\sqrt{1\,726} + 110\,464 - 100\,793$
$- 352\sqrt{1\,726} + 1\,726$

$= 0$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux soit $\overrightarrow{A''I}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont orthogonaux. Donc (IA'') est la hauteur issue de I dans le triangle IBB'.

77 Vecteurs directeurs des bissectrices

a. $(\mathscr{D})\ //\ (\mathscr{D}')$ si et seulement si :

$\vec{n}(a\,;b)$ et $\vec{n}(a'\,;b')$ sont colinéaires, soit dét$(\vec{n}\,;\vec{n'}) = 0$, soit $ab' - a'b = 0$.

Donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.

b. $d(M\,;\mathscr{D}) = \dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $d(M\,;\mathscr{D}') = \dfrac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$.

c. $d(M\,;\mathscr{D}) = d(M\,;\mathscr{D}') \Leftrightarrow \dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a'^2 + b'^2}\,|ax + by + c| = \sqrt{a^2 + b^2}\,|a'x + b'y + c'|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a'^2 + b'^2}\,(ax + by + c) = \sqrt{a^2 + b^2}\,(a'x + b'y + c') \\ \text{ou } \sqrt{a'^2 + b'^2}\,(ax + by + c) = -\sqrt{a^2 + b^2}\,(a'x + b'y + c'). \end{cases}$

Δ : Éq. On pose : $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\gamma' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$

$(\gamma' a - \gamma a')x + (\gamma' b - \gamma b')y + (\gamma' c - \gamma c') = 0$

Δ' : Éq. $(\gamma' a + \gamma a')x + (\gamma' b + \gamma b')y + (\gamma' c + \gamma c') = 0$.

On vérifie $(\gamma' a - \gamma a'\,;\gamma' b - \gamma b') \neq (0\,;0)$.

On a $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$ donc $\gamma > 0$ et $\gamma' > 0$.

$\begin{cases} \gamma' a - \gamma a' = 0 \\ \gamma' b - \gamma b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \gamma'\gamma a \\ b' = \gamma'_\gamma b \end{cases}$

alors $ab' - a'b = ab\gamma'_\gamma - ab\gamma'_\gamma = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes.

D'où $(\gamma' a - \gamma a'\,;\gamma' b - \gamma b') \neq (0\,;0)$.

On a $(\gamma' a - \gamma a')x + (\gamma' b - \gamma b')y + (\gamma' c - \gamma c') = 0$ est l'équation cartésienne d'une des bissectrices (Δ) par exemple).

De même si $\begin{cases} \gamma' a + \gamma a' = 0 \\ \gamma' b + \gamma b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -\gamma'_\gamma a \\ b' = -\gamma'_\gamma b. \end{cases}$

On a alors $ab' - a'b = -\gamma'_\gamma ab + \gamma'_\gamma ab = 0$,
ce qui est impossible.
Donc $(\gamma' a + \gamma a')x + (\gamma' b + \gamma b')y + (\gamma' c + \gamma c') = 0$ est l'équation cartésienne d'une des bissectrices (Δ') par exemple).

d. $\vec{n_1}(\gamma' a - \gamma a' ; \gamma' b - \gamma b')$ est un vecteur normal à (Δ).
$n_2(\gamma' a + \gamma a' ; \gamma' b + \gamma b')$ est un vecteur normal à (Δ').

$\vec{n_1} \bullet \vec{n_2} = (\gamma' a - \gamma a')(\gamma' a + \gamma a') + (\gamma' b - \gamma' b)(\gamma' b + \gamma b')$
$= (\gamma' a)^2 - (\gamma a')^2 + (\gamma' b)^2 - (\gamma b')^2$
$= (a'^2 + b'^2)a^2 - (a^2 + b^2)a'^2 + (a'^2 + b'^2)b^2 - (a^2 + b^2)b'^2$
$= a'^2a^2 + b'^2a^2 - a^2a'^2 - b^2a'^2 + a'^2b^2 + b'^2b^2 - a^2b'^2 - b^2b'^2$
$= 0.$

Donc (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.

e. Équation de $(\mathscr{D})$: $ax + by + c = 0$,
alors $\vec{u_1}(b ; -a)$ ou $\vec{u_1}(-b ; a)$ donc vecteur unitaire.

$\vec{u}\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

et de même $\vec{v}\left(\dfrac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} ; \dfrac{-a'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\right)$

$\vec{u}\left(\dfrac{b}{\gamma} ; \dfrac{-a}{\gamma}\right)$ et $\vec{v}\left(\dfrac{b'}{\gamma'} ; \dfrac{-a}{\gamma'}\right)$.

Soit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{w'} = \vec{u} - \vec{v}$.

$\vec{w}\left(\dfrac{b}{\gamma} + \dfrac{b'}{\gamma'} ; -\left(\dfrac{a'}{\gamma'} + \dfrac{a}{\gamma}\right)\right)$

ou $\vec{w} = \dfrac{1}{\gamma\gamma'}(\gamma' b + \gamma b' ; -(\gamma' a + \gamma a'))$

on a $\vec{w} \bullet \vec{n_2} = 0$.
$\vec{w}$ est un vecteur directeur de (Δ').

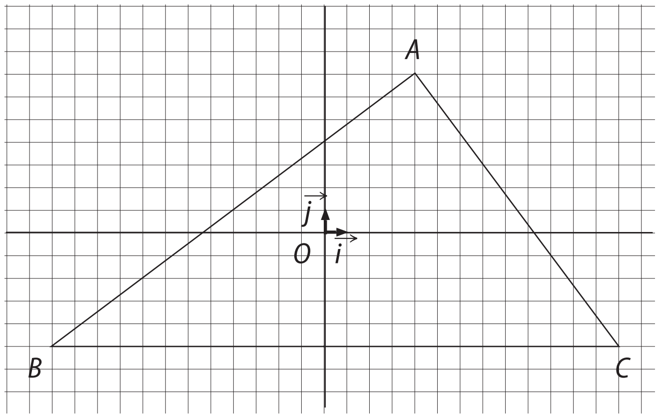
$\vec{w'}\left(\dfrac{b}{\gamma} - \dfrac{b'}{\gamma'} ; \dfrac{a'}{\gamma'} - \dfrac{a}{\gamma}\right)$ ou $\vec{w'} = \dfrac{1}{\gamma\gamma'}(\gamma' b - \gamma b' ; \gamma a' - \gamma' a)$.

On a $\vec{w'} \bullet \vec{n_1} = 0$ donc $\vec{w'}$ est un vecteur directeur de (Δ).

78 Bissectrices d'un triangle

a. $\vec{AB}(-16 ; -12)$; $\vec{AC}(9 ; -12)$; $\vec{BC}(25 ; 0)$.
M(x ; y).

$M \in (AB) \Leftrightarrow \text{dét}(\vec{AM} ; \vec{AB}) = 0$
$\Leftrightarrow 3(x - 4) - 4(y - 7) = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 12 - 4y + 28 = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 4y + 16 = 0$ équation cartésienne de (AB)



$M \in (AC) \Leftrightarrow \text{dét}(\vec{AM} ; \vec{AC}) = 0$
$\Leftrightarrow -12(x - 4) - 9(y - 7) = 0$
$\Leftrightarrow 4(x - 4) + 3(y - 7) = 0$
$\Leftrightarrow 4x - 16 + 3y - 21 = 0$
$\Leftrightarrow 4x + 3y - 37 = 0$ équation cartésienne de (AC).

$M \in (BC) \Leftrightarrow \text{dét}(\vec{BM} ; \vec{BC}) = 0$
$\Leftrightarrow 0(x + 12) - 25(y + 5) = 0$
$\Leftrightarrow y + 5 = 0$ équation cartésienne de (BC).

b. $d(M ; (AB)) = \dfrac{|3x - 4y + 16|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{1}{5}|3x - 4y + 16|$

$d(M ; (AC)) = \dfrac{|4x + 3y - 37|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{1}{5}|4x + 3y - 37|$

$d(M ; (AB)) = d(M ; (AC)) \Leftrightarrow |3x - 4y + 16| = |4x + 3y - 37|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 16 = 4x + 3y - 37 \\ \text{ou } 3x - 4y + 16 = -4x - 3y + 37 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y - 53 = 0 \\ \text{ou } 7x - y + 16 - 37 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - y - 21 = 0 \ (1) \\ \text{ou } x + 7y - 53 = 0 \ (2) \end{cases}$

La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ a une équation de la forme $y = ax + 5$ avec $a > 0$.

Donc elle a pour équation :

$7x - y - 21 = 0 \Leftrightarrow y = 7x - 21$ (d_1).

c. Bissectrices de $\widehat{B}$:

$d(M ; (\text{AB})) = d(M ; (BC)) \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}|3x - 4y + 16| = \dfrac{|y + 5|}{1}$

$\Leftrightarrow |3x - 4y + 16| = 5|y + 5|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 16 = 5(y + 5) \\ \text{ou } 3x - 4y + 16 = -5(y + 5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 16 = 5y + 25 \\ \text{ou } 3x - 4y + 16 = -5y - 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 9y - 9 = 0 \\ \text{ou } 3x + y + 41 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \ (1) \\ \text{ou } 3x + y + 41 = 0 \ (2) \end{cases}$

Bissectrice intérieure de $\widehat{B}$: d'équation $x - 3y - 3 = 0$ (d_2).

Bissectrice de $\widehat{C}$:

$d(M\,;(AC)) = d(M\,;(BC)) \Leftrightarrow \frac{1}{5}|4x + 3y - 37| = |y + 5|$

$\Leftrightarrow |4x + 3y - 37| = 5|y + 5|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 37 = 5(y + 5) \\ \text{ou } 4x + 3y - 37 = -5(y + 5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 37 = 5y + 25 \\ \text{ou } 4x + 3y - 37 = -5y - 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 62 = 0 \\ \text{ou } 4x + 8y - 12 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 31 = 0 \ (1) \\ \text{ou } x + 2y - 3 = 0 \ (2). \end{cases}$

D'après la figure, la bissectrice intérieure de $\widehat{C}$ a une équation de la forme $y = ax + b$ où $a < 0$.

Donc bissectrice d'équation $x + 2y - 3 = 0$ (d_3).

d. On cherche le point $I(x\,;y)$ tel que :

$I \in (d_1) \cap (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 21 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 21 \\ x - 21x + 63 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 21 \\ -20x + 60 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad I(3\,;0)$.

On vérifie $I \in (d_3)$: $3 + 2 \times 0 - 3 = 0$.

Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en $I(3\,;0)$.

e. $d(I, (AB)) = d(I, (AC)) = d(I, (BC)$

$d(I, (BC)) = |0 + 5| = 5$.

79 Cercle tangent à une droite donnée

a. A est le point de $(\mathscr{D})$ d'abscisse -1.

$x_A = -1 + t$ donc $t = 0$; alors $y_A = -1$ et $A(-1\,;-1)$.

$(A\Omega)$ est la perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ passant par A. $(\mathscr{D})$ est dirigée par $\vec{u}(1\,;-3)$.

Soit $M(x\,;y)$.

$M \in (A\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow 1\,(x + 1) - 3(y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3y + 1 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x - 3y - 2 = 0$ équation cartésienne de $(A\Omega)$.

b. On sait que le triangle AOA' est rectangle en O car inscrit dans le cercle de diamètre $[AA']$.

$A'(x\,;y)$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = 0 \Leftrightarrow -1 \times x - 1 \times y = 0$

$\Leftrightarrow -x - y = 0$

$\Leftrightarrow x = -y$.

De plus $(AA') = (A\Omega)$ donc les coordonnées de A' vérifient l'équation de $(A\Omega)$.

$\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3x - 2 = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2 \\ x = -y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = +\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad A'\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$.

c. On veut une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

Le centre Ω est le milieu de $[AA']$, le rayon R vaut $\frac{1}{2}AA'$.

$x_\Omega = (-1 + \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

$y_\Omega = (-1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$.

$AA' = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

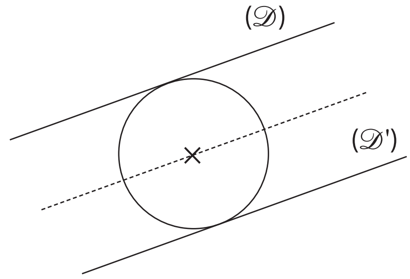
D'où $(\mathscr{C})$: $\begin{cases} x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4}\cos(t) \\ y = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4}\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

80 Cercles tangents à deux droites données

a. $\vec{n}(4\,;-3)$ est normal à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{D}')$, donc les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles.

b.



Les centres des cercles tangents simultanément à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont situés sur une droite parallèle à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$, située à égale distance de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

c. $M(x\,;y)$; $d(M, (\mathscr{D})) = d(M, (\mathscr{D}'))$.

$\Leftrightarrow \frac{|4x - 3y + 2|}{5} = \frac{|4x - 3y - 23|}{5}$

$\Leftrightarrow |4x - 3y + 2| = |4x - 3y - 23|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 2 = 4x - 3y - 23 \\ \text{ou } 4x - 3y + 2 = -4x + 3y + 23 \end{cases}$

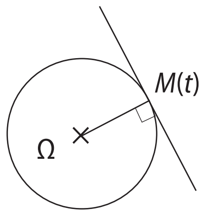
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -23 \text{ impossible} \\ \text{ou } 8x - 6y - 21 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 8x - 6y - 21 = 0$ équation cartésienne de la droite (Δ).

81 Tangentes à un cercle

a. Représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

$\begin{cases} x = 3 + 4\cos(t) \\ y = -2 + 4\sin(t). \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.



Soit M un point de $(\mathscr{C})$ de paramètre t, alors $\Omega M = 4\,(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j})$.

(ΩM) a pour vecteur directeur $\vec{v_t}(\cos(t), \sin(t))$.

La tangente à $(\mathscr{C})$ en M de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1)$ vérifie :

$\vec{v_t} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \cos(t) + \sin(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = -\cos(t)$.

On sait que $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $2\cos^2(t) = 1$ et $\cos^2(t) = \frac{1}{2}$.

On a $\begin{cases} \cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou } \cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Donc $t = -\frac{\pi}{4}$ ou $t = \frac{3\pi}{4}$.

Pour $t = -\frac{\pi}{4}$ $\quad A \begin{cases} x = 3 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \\ y = -2 + 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

Pour $t = \frac{3\pi}{4}$ $\quad A' \begin{cases} x = 3 - 2\sqrt{2} \\ y = -2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$

$A(3 + 2\sqrt{2}\,; -2 - 2\sqrt{2})$ et $A'(3 - 2\sqrt{2}\,; -2 + 2\sqrt{2})$.

b. $\vec{n}(1\,;-1)$ est normal à $\vec{u}(1\,;1)$.

(d_1) tangente à $(\mathscr{C})$ en A :

$M(x\,;y) : M \in (d_1) \Leftrightarrow \vec{n} \bullet \overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow 1(x - 3 - 2\sqrt{2}) - (y + 2 + 2\sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 3 - 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 5 - 4\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{5}{\sqrt{2}} - 4 = 0$

équation normale de (d_1).

(d_2) tangente à $(\mathscr{C})$ en A' :

$M \in (d_2) \Leftrightarrow n \bullet A'M = 0$

$\Leftrightarrow 1(x - 3 + 2\sqrt{2}) - 1(y + 2 - 2\sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 + 2\sqrt{2} - y - 2 + 2\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 5 + 4\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{5}{\sqrt{2}} + 4 = 0$

équation normale de (d_2).

c. B et B'. On cherche M de paramètre t de $(\mathscr{C})$ tel que $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, soit $\det(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{n}) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \times 4\cos(t) - 1 \times 4\sin(t) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(t) = \sqrt{3}\cos(t)$.

De plus $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(t) + 3\cos^2(t) = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2(t) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(t) = \frac{1}{2}$ ou $\cos(t) = -\frac{1}{2}$.

Si $\cos(t) = \frac{1}{2}$ alors $\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x = 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 3 + 2 = 5$

$y = -2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}$.

$B(5\,; -2 + 2\sqrt{3})$.

Si $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ alors $\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x = 3 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 - 2 = 1$

$y = -2 + 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 - 2\sqrt{3}$.

$B'(1\,; -2 - 2\sqrt{3})$.

d. (d'_1) tangente à $(\mathscr{C})$ en B.

$M \in (d_1) \Leftrightarrow \vec{n} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow 1(x - 5) + \sqrt{3}(y + 2 - 2\sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow x - 5 + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} - 11 = 0.$

(d'_2) tangente à $(\mathscr{C})$ en B.

$M \in (d_2) \Leftrightarrow \vec{n} \bullet \overrightarrow{B'M} = 0$

$\Leftrightarrow 1(x - 1) + \sqrt{3}(y + 2 + 2\sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + 5 + 2\sqrt{3} = 0.$

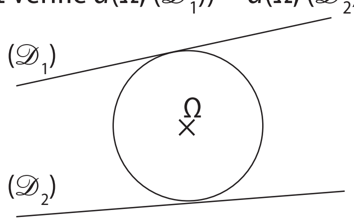
82 Cercle tangent à deux droites

a. $(\mathscr{D}_1)$ a pour vecteur normal $\vec{n_1}(-1\,;5)$

$(\mathscr{D}_2)$ a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(5\,;1)$

$\vec{n_1} \bullet \vec{u_2} = -1 \times 5 + 5 \times 1 = 0$, donc $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont parallèles.

b. $\Omega(x\,;0)$; Ω vérifie $d(\Omega, (\mathscr{D}_1)) = d(\Omega, (\mathscr{D}_2))$.



Soit d$(\Omega, (\mathscr{D}_1)) = \dfrac{|-x + 5 \times 0 - 4|}{\sqrt{26}} = \dfrac{|x + 4|}{\sqrt{26}}$.

$(\mathscr{D}_2)$ passe par $A(8\,;-8)$; $M(x\,;y)$;

$M \in (\mathscr{D}_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0$

$\Leftrightarrow -1(x - 8) + 5(y + 8) = 0$

$\Leftrightarrow -x + 8 + 5y + 40 = 0$

$\Leftrightarrow -x + 5y + 48 = 0$

équation cartésienne de $(\mathscr{D}_2)$.

Donc $d(\Omega, (\mathscr{D}_2)) = \dfrac{|x - 48|}{\sqrt{26}}$

$d(\Omega, (\mathscr{D}_1)) = d(\Omega, (\mathscr{D}_2)) \Leftrightarrow |x + 4| = |x - 48|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = x - 48 \text{ impossible} \\ \text{ou } x + 4 = -x + 48 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x = 44 \Leftrightarrow x = 22$.

Donc $\Omega(22\,;0)$.

$d(\Omega, (\mathscr{D}_1)) = \dfrac{|22 + 4|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}$.

$R = d(\Omega, (\mathscr{D}_1))$.

Donc représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$:

$\begin{cases} x = 22 + \sqrt{26}\cos(t) \\ y = \sqrt{26}\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

c. Même étude mais avec $\Omega'(2\,;y)$.

$d(\Omega', (\mathscr{D}_1)) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|-2 + 5y - 4| = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|6 - 5y|$

$d(\Omega', (\mathscr{D}_2)) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|-2 + 5y + 48| = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|46 + 5y|$

donc $d(\Omega', (\mathscr{D}_1)) = d(\Omega', (\mathscr{D}_2))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 5y = 46 + 5y \\ \text{ou } 6 - 5y = -46 - 5y \text{ impossible} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 10y = -40 \qquad \Leftrightarrow y = -4$.

Alors $\Omega'(2\,;-4)$.

$R' = d(\Omega', (\mathscr{D}_1)) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|6 - 5 \times (-4)| = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|6 + 20|$

$= \sqrt{26}$.

Équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$:

$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 4 + y^2 + 8y + 16 = 26$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$.

83 Cercles tangents

a. On cherche le centre Ω de$(\mathscr{C})$.

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 27 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 - 27 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 32$

donc $\Omega(-1\,;-2)$ et $R = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

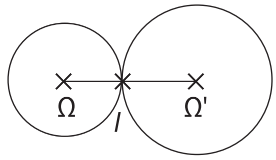
$(\mathscr{C}')$ a pour centre $\Omega'(5\,;4)$ et rayon $R' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$\Omega\Omega' = \sqrt{(5 + 1)^2 + (4 + 2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$R + R' = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = \Omega\Omega'$.

Il y a un seul point d'intersection, $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont donc tangents.

b. (Δ) tangente commune à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.



$\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ est un vecteur normal à (Δ).

I point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, vérifie :

$\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{R}{\|\Omega\Omega'\|}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$; $\overrightarrow{\Omega\Omega'}(6\,;6)$, donc :

$x_I = x_\Omega + \dfrac{R}{6\sqrt{2}} \times 6 = -1 + \dfrac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \times 6 = -1 + 4 = 3$

$y_I = y\Omega + \dfrac{R}{6\sqrt{2}} \times 6 = -2 + \dfrac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \times 6 = 2$.

Ainsi, $I(3\,;2)$.

$M(x\,;y)$;

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{\Omega\Omega'} = 0$

$\Leftrightarrow 6(x - 3) + 6(y - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 + y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 5 = 0 \qquad$ Équation de (Δ).

c. $A(10\,;y)$;

$A \in (\Delta)$ donc $10 + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -5$. Donc $A(10\,;-5)$.

Équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$:

$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 8y = -33$.

$J(x\,;y)$ vérifie $\Omega'J = \sqrt{8}$ et $JA = IA$.

Or $IA^2 = (10 - 3)^2 + (-5 - 2)^2 = 7^2 + 7^2 = 98$.

On a $JA^2 = (x - 10)^2 + (y + 5)^2 = 98$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 20x + 10y + 125 = 98$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 20x + 10y = -27$.

On résout $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 8y = -33 \\ x^2 + y^2 - 20x + 10y = -27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 18y = -6 & (L_1 - L_2 \rightarrow L_1) \\ x^2 + y^2 - 20x + 10y = -27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 9y = -3 \\ x^2 + y^2 - 20x + 10y = -27 \end{cases}$

$x = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{5}y$

$\left(-\dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{5}y\right)^2 + y^2 - 20\left(-\dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{5}y\right) + 10y = -27$

$\frac{9}{25} - \frac{54}{25}y + \frac{81}{25}y^2 + y^2 + 12 - \underbrace{36y + 10y}_{-26y} = -27$

$\frac{9}{25} - \frac{54}{25}y + \frac{81}{25}y^2 + y^2 - 26y + 39 = 0$

$984 - 704y + 106\,y^2 = 0$

$492 - 352y + 53\,y^2 = 0$

On sait que $y = 2$ est solution.

L'autre solution vérifie $2 \times y = \frac{492}{53} \Rightarrow y = \frac{246}{53}$.

Puis $x = -\frac{3}{5} + \frac{9}{5} \times \frac{246}{53} = \frac{411}{53}$.

Donc $J\left(\frac{411}{53} ; \frac{246}{53}\right)$.

Équation de la deuxième tangente soit la droite (AJ) :

$\overrightarrow{AJ}\left(\frac{411}{53} - 10 ; \frac{246}{53} + 5\right)$

$\text{dét}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AJ}) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 10)\left(\frac{246}{53} + 5\right) - (y + 5)\left(\frac{411}{53} - 10\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{511}{53}x - \frac{4\,515}{53} + \frac{119}{53}y = 0$

$\Leftrightarrow 511x + 119y - 4515 = 0$

$\Leftrightarrow 73x + 17y - 645 = 0.$

84 Calcul de distances non accessibles

a. $M_1(0 ; 16{,}7)$; $M_2(40 ; 30)$; $N_1(0 ; -5{,}6)$; $N_2(40 ; -10)$.

• Équation cartésienne de $(AM_1) = (M_1M_2)$

$\overrightarrow{M_1M_2}(40 ; 13{,}3)$; $M(x ; y)$

$M \in (M_1M_2) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}) = 0$

$\Leftrightarrow 13{,}3(x - 0) - (y - 16{,}7) \times 40 = 0$

$\Leftrightarrow 13{,}3x - 40y + 668 = 0.$

• Équation cartésienne de $(AN_2) = (N_1N_2)$

$\overrightarrow{N_1N_2}(40 ; -4{,}4)$

$M \in (N_1M_2) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{N_1M}, \overrightarrow{N_1N_2}) = 0$

$\Leftrightarrow x \times (-4{,}4) - (y + 5{,}6) \times 40 = 0$

$\Leftrightarrow -4{,}4x - 40y - 224 = 0$

$\Leftrightarrow 4{,}4x + 40y + 224 = 0.$

b. $A \in (M_1M_2) \cap (N_1N_2)$

$A(x ; y)$ vérifie $\begin{cases} 13{,}3x - 40y + 668 = 0 \\ 4{,}4x + 40y + 224 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17{,}7x + 892 = 0 & L1 + L2 \to L1 \\ 4{,}4x + 40y + 224 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-892}{17{,}7} \approx -50{,}4 \\ y = \frac{1}{40}\left[-224 - 4{,}4 \times \left(\frac{-892}{17{,}7}\right)\right] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -50{,}4 \\ y \approx -0{,}06. \end{cases}$

Normalement on devrait trouver $y = 0$ pour avoir l'alignement de A, O et B.

Conclusion : $A(-50{,}4 ; 0)$; la largeur de la rivière est d'environ 50 m.

85 Tangentes à une parabole

a. $y = f(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f'(x) = \frac{2x}{2} = x$.

Équation de (T_a) : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$y = a(x - a) + \frac{a^2}{2} = ax - a^2 + \frac{a^2}{2} = ax - \frac{a^2}{2}$

ou encore $ax - y - \frac{a^2}{2} = 0$.

Équation de (T_b) : $bx - y - \frac{b^2}{2} = 0$

$(T_a) \perp (T_b) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}(a ; -1) \perp \overrightarrow{n_2}(b ; -1) \Leftrightarrow ab + 1 = 0$

$\Leftrightarrow b = \frac{-1}{a}$ (on a imposé $a \neq 0$).

Donc b est unique.

b. Le point $I_a(x ; y)$ est tel que :

$I_a \in (T_a) \cap \mathrm{T}(_b) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - y - \frac{a^2}{2} = 0 \\ bx - y - \frac{b^2}{2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - y - \frac{a^2}{2} = 0 \\ (a - b)x - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - y - \frac{a^2}{2} = 0 \\ (a - b)x - \frac{a^2 - b^2}{2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - y - \frac{a^2}{2} = 0 \\ (a - b)x - \frac{(a - b)(a + b)}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - y - \frac{a^2}{2} = 0 \\ x = \frac{a + b}{2} \end{cases}$

c. On reprend le résultat précédent.

$x = \frac{a + b}{2}$ et $y = ax - \frac{a^2}{2} = a\left(\frac{a + b}{2}\right) - \frac{a^2}{2} = \frac{ab}{2}$.

Ainsi, $I_a\left(\frac{a + b}{2} ; \frac{ab}{2}\right)$.

d. Puisque $b = -\frac{1}{a}$, $I_a\left(\frac{a - \frac{1}{a}}{2} ; \frac{a \times \left(-\frac{1}{a}\right)}{2}\right)$.

Donc $I_a\left(\frac{a^2 - 1}{2a} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Donc lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$, les points I_a décrivent la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

Problèmes

86 Collision de particules

a. $M \in (d_1) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM_1}\,;\vec{v_1}) = 0$
$\Leftrightarrow 1 \times (x-3) - 1 \times (y-1) = 0$
$\Leftrightarrow x - y - 3 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x - y - 2 = 0$ équation de (d_1).

b. $M \in (d_2) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{BM_2}\,;\ \vec{v_2}) = 0$
$\Leftrightarrow -1(x+1) - 2(y-5) = 0$
$\Leftrightarrow -x - 1 - 2y + 10 = 0$
$\Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$ équation de (d_2).

c. $(\Gamma_1) : \begin{cases} x - 3 = t \times 1 \\ y - 1 = t \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$ avec $t \geqslant 0$.

$(\Gamma_2) : \begin{cases} x + 1 = t \times 2 \\ y - 6 = t \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 - t. \end{cases}$ avec $t \geqslant 0$

d. Soit $M\,(x\,;\mathrm{y})$ point de paramètre t de (Γ_1).
Alors $x = 3 + t$ et $y = 1 + t$.
$x - y - 2 = (3 + t) - (1 + t) - 2 = 2 - 2 = 0$
donc $M \in (d_1)$.
Soit $M\,(x\,;\mathrm{y})$ de paramètre t de (Γ_2).
Alors $x = -1 + 2t$ et $y = 6 - t$
$(-1 + 2t) + 2(6 - t) - 11 = -1 + 2t + 12 - 2t - 11 = 0$
donc $M \in (d_2)$.
On a bien $(\Gamma_1) \subset (d_1)$ et $(\Gamma_2) \subset (d_2)$.

e. $I(x\,;y) \in (d_1) \cap (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x + 2x - 4 - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 15 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 - 2 = 3 \end{cases}$

Donc $I(5\,;3)$.

f. $M_1(t_1)\ (3 + t_1\,;1 + t_1)$
$M_1(t_1) = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t_1 = 5 \\ 1 + t_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_1 = 2 \end{cases}$

$M_1(2) = I$
$M_2(t_2)\quad (-1 + 2t_2\,;6 - t_2)$
$\begin{cases} -1 + 2t_2 = 5 \\ 6 - t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_2 = +6 \\ t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow t_2 = 3.$

α est en I à l'instant $t_1 = 2$, et ß est en I à l'instant $t_2 = 3$.
Donc les particules α et ß ne peuvent pas être au même endroit au même instant.

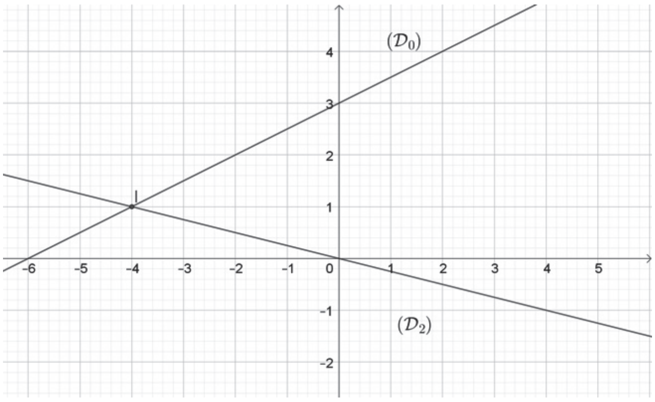
g. Nouvelle représentation paramétrique de (d_2) :
$\begin{cases} x = x_0 + 2t \\ y = y_0 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^+$.

Il faut, pour $t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2t = 5 \\ y_0 - t = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 4 = 5 \\ y_0 - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 4 = 1 \\ y_0 = 3 + 2 = 5 \end{cases}$

Donc il faut $B(1\,;5)$.

87 Famille de droites



1. $(\mathscr{D}_0) : -x + 2y - 6 = 0\,;(\mathscr{D}_2)\ x + 4y = 0\,;M(x\,;y)$.

$M \in (\mathscr{D}_0) \cap (\mathscr{D}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 6 = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 6 = 0 \\ x = -4y \end{cases}\qquad L_1 + L_2 \to L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases}$

Donc $I(-4\,;1)$ est le point d'intersection de $(\mathscr{D}_0)$ et de $(\mathscr{D}_2)$.

2. F doit être point d'intersection de toutes les droites donc en particulier de $(\mathscr{D}_0)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'où $F = I$.
Réciproquement soit $F(-4\,;1)$ vérifions que $F \in (\mathscr{D}_m)$.
$(m - 1) \times (-4) + (2 + \mathrm{m}) \times 1 + 3m - 6$
$= -4m + 4 + 2 + m + 3m - 6$
$= -4m + 6 + 4m - 6$
$= 0.$
Donc $F(-4\,;1)$ appartient à toutes les droites $(\mathscr{D}_m)$.

3. • $A(-5\,;0)$
$\mathrm{A} \in (\mathscr{D}_m) \Leftrightarrow (m - 1)(-5) + (2 + m)0 + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow -5m + 5 + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow -2m - 1 = 0$
$\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$
$A \in (\mathscr{D}_{-\frac{1}{2}})$.

• $B(1\,;4)$
$B \in (\mathscr{D}_m) \Leftrightarrow (m - 1) \times 1 + (2 + m) \times 4 + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow m - 1 + 8 + 4m + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow 8m + 1 = 0$
$\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{8}$
$B \in (\mathscr{D}_{-\frac{1}{8}})$.

• $C(2\,;-7)$

$C \in (\mathscr{D}_m) \Leftrightarrow (m-1)\times 2 + (2+m)(-7) + 3m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2m - 2 - 14 - 7m + 3m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -2m - 22 = 0$

$\Leftrightarrow m = -11$

$C \in (\mathscr{D}_{-11})$.

4. a. $M(x_M\,; y_M) \in (\mathscr{D}_m)$

$\Leftrightarrow (m-1)x_M + (2+m)y_M + 3m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow m(x_M + y_M + 3) - x_M + 2y_M - 6 = 0$

$\Leftrightarrow m(x_M + y_M + 3) = x_M - 2y_M + 6.$

Si $x_M + y_M + 3 \neq 0$ on a $m = \dfrac{x_M - 2y_M + 6}{x_M + y_M + 3}$.

b. Si $x_M + y_M + 3 = 0$ alors il n'existe pas de valeur de m telle que $M \in (\mathscr{D}_m)$. Ces points M sont alors situés sur la droite (Δ) d'équation $x + y + 3 = 0$.

5. a. Équation de $(\mathscr{D}_m)$:

$(m-1)x + (2+m)y + 3m - 6 = 0$.

Soit $\vec{u}_m(2+m\,; 1-m)$; (peut-on avoir $\vec{u}_m = \vec{0}$?

$\begin{cases} 2+m=0 \\ 1-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=1 \end{cases}$ impossible),

donc $\vec{u}_m \neq \vec{0}$ et $(\mathscr{D}_m)$ a pour vecteur directeur : $\vec{u}_m(2+m\,; 1-m)$.

b. • $(\mathscr{D}_m)$ parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si, $\text{dét}(\vec{u}_m, \vec{i}) = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Seule $(\mathscr{D}_1)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

• $(\mathscr{D}_m)$ parallèle à l'axe des ordonnées si, et seulement si $\text{dét}(\vec{u}_m, \vec{j}) = 0 \Leftrightarrow 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Seule $(\mathscr{D}_{-2})$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

• $(\mathscr{D}_m)$ parallèle à (d) d'équation $y = x + 1$.

(d) a pour vecteur directeur $\vec{v}(1\,; 1)$

$\det(\vec{u}_m, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (2+m) - (1-m) = 0$

$\Leftrightarrow 2 + m - 1 + m = 0$

$\Leftrightarrow 2m = -1$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Seule $(\mathscr{D}_{-\frac{1}{2}})$ est parallèle à (d).

88 Famille de cercles

1. $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$

donc $\Omega(-2\,; 4)$ et $R = 5$.

$x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35 = 0$

$\Leftrightarrow (x-8)^2 - 64 + (y+1)^2 - 1 - 35 = 0$

$\Leftrightarrow (x-8)^2 + (y+1)^2 = 100$

donc $\Omega'(8\,; -1)$ et $R' = 10$.

2. $M(x\,; y)$

$M \in (\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}')$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x - 10y + 30 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \end{cases}$ $(L_1 - L_2 \rightarrow L_1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + (2x+3)^2 + 4x - 8(2x+3) - 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + 4x^2 + 12x + 9 + 4x - 16x - 24 - 5 = 0 \end{cases}$

$5x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

$I(2\,; 7)$ et $J(-2\,; -1)$.

3. a. $k \in \mathbb{R}$,

$(\Omega M^2 - R^2) + k(\Omega' M^2 - (R')^2) = 0$.

I vérifie $\Omega I = R$ et $\Omega' I = R'$ d'où $0 + k \times 0 = 0$.

J vérifie $\Omega J = R$ et $\Omega' J = R'$ d'où $0 + k \times 0 = 0$.

Pour tout k réel, $I \in (E_k)$ et $J \in (E_k)$.

b. $M(x\,; y)$; $M \in (E_k) \Leftrightarrow$

$((x+2)^2 + (y-4)^2 - 25) + k((x-8)^2 + (y+1)^2 - 100) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5) + k(x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35) = 0$.

c. Si $k = -1$, on a :

$x^2 + y^2 + 4x - 8x - 5 - x^2 - y^2 + 16x - 2y + 35 = 0$

$\Leftrightarrow 20x - 10y + 30 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$

Équation d'une droite passant par I et J donc c'est (IJ)

$(E_k) = (IJ)$.

d. Si $k \neq -1$

$M \in (E_k) \Leftrightarrow (1+k)(x^2 + y^2) + (4 - 16k)x + (-8 + 2k)y - 5 - 35k = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{4(1-4k)}{1+k}x + \dfrac{2(k-4)}{1+k}y - \dfrac{-5(1+7k)}{1+k} = 0$

$\alpha = \dfrac{4(1-4k)}{1+k}$; $ß = \dfrac{2(k-4)}{1+k}$; $\gamma = \dfrac{-5(1+7k)}{1+k}$

$x^2 + y^2 + \alpha x + ßy + \gamma = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 - \dfrac{\alpha^2}{4} + \left(y + \dfrac{ß}{2}\right)^2 - \dfrac{ß^2}{4} + \gamma = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{ß}{2}\right)^2 - \dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{ß^2}{4} + \gamma = 0$

Ensemble non vide car contenant I et J donc

$\dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{ß^2}{4} - \gamma > 0$.

C'est un cercle, dont on connait deux points : I et J.

4. a. $\Omega_k\left(-\frac{\alpha}{2} ; -\frac{ß}{2}\right)$

$\alpha = \frac{4(1-4k)}{1+k}$ et $ß = \frac{2(k-4)}{1+k}$

$-\frac{\alpha}{2} = \frac{2(4k-1)}{1+k}$ et $-\frac{ß}{2} = \frac{4-k}{1+k}$

$\Omega_k\left(\frac{2(4k-1)}{1+k} ; \frac{4-k}{1+k}\right)$.

b. (Δ) passe par $A(8 ; -1)$ et est dirigée par $\vec{u}(-10 ; 5)$ ou $\vec{v}(-2 ; 1)$.

$$\det(\overrightarrow{A\Omega_k}, \vec{v}) = \left(\frac{2(4k-1)}{1+k} - 8\right) \times 1 + \left(\frac{2(4k-1)}{1+k} + 1\right)$$

$$= \frac{8k-2}{1+k} - 8 + \frac{8k-2}{1+k} + 2$$

$$= \frac{8k-2+8-2k-6(1+k)}{1+k} = \frac{6k+6-6-6k}{1+k} = 0.$$

Donc $\Omega_k \in (\Delta)$.

c. Soit $\begin{cases} x = 8 - 10t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$ (avec $t \neq 0$ car $M \neq A$)

$M(x ; y)$ est un point de (Δ) distinct de A.

On cherche $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \frac{8k-2}{1+k} \\ y = \frac{4-k}{1+k} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (8-10t)(1+k) = 8k-2 \\ (-1+5t)(1+k) = 4-k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 10t + (8-10t-8)k = -2 \\ -1 + 5t + (-1+5t+1)k = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -10tk = -2 - 8 + 10t \\ 5tk = 4 + 1 - 5t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-10+10t}{-10t} = \frac{-t+1}{t} = -1 + \frac{1}{t} \\ k = \frac{5-5t}{5t} = \frac{1}{t} - 1. \end{cases}$

Tout point de (Δ) distinct de A est un centre Ω_k avec $k = \frac{1}{t} - 1$ où t est le paramètre identifiant le point de (Δ) dans la représentation paramétrique de (Δ).

d. L'ensemble des Ω_k pour $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est (Δ) privée de A.

5. a. (Γ) est le cercle passant par I et J de centre ω et de rayon r.
Donc $\omega I = \omega J = r$.
Ainsi ω appartient à la médiatrice de $[IJ]$
Or $\Omega I = \Omega J = R$ car I et J appartiennent à $(\mathscr{C})$.
De même, $\Omega' I = \Omega' J = R'$.
Ω et Ω′ sont aussi sur la médiatrice de $[IJ]$
donc la médiatrice de $[IJ]$ est la droite (ΩΩ′)
et $\omega \in (\Omega\Omega')$.

b. Si $\omega = \Omega'$, alors (Γ) est le cercle passant par I et J et de centre Ω′ donc $(\Gamma) = (\mathscr{C}')$; $\lambda = 0$, $\mu = 1$ convient.

c. Si $\omega \neq \Omega'$, $\Omega' = A(8 ; -1)$.
Comme $\omega \in (\Delta)$ et $\omega \neq A$, alors, d'après le **4. c.**, ω est un point Ω_k avec $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Alors (E_k) est un cercle de centre ω passant par I et J donc $(E_k) = (\Gamma)$ et l'équation de (E_k) (lorsque $k \neq -1$) est ;
$1(x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5) + k(x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35) = 0.$

4 Transformations du plan

Manuel pages 53 à 72

Activités d'introduction

1 Photographie

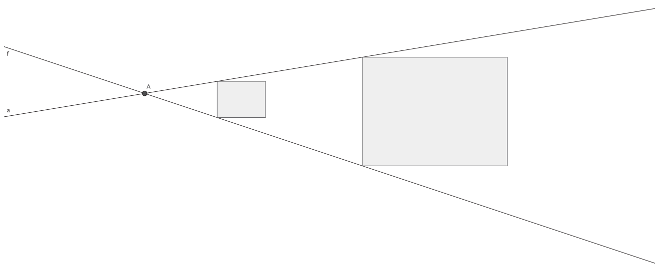
1.

Hauteur en cm	2, 4	10	15	20
Largeur en cm	3, 6	15	22, 5	30
rapport de l'homothétie		4, 17	6, 25	8, 33

2. a. $\frac{10}{3} \neq \frac{15}{4}$.

b. Le format papier utilisé est du 10×13 ou du $11,5 \times 15$.
En effet, $\frac{10}{3} \approx 3,33$ et $\frac{13}{4} \approx 3,25$ qui sont des nombres assez proches, ainsi que pour l'autre format.

3.



2 Pavage

- Le pavé 1 a pour image le pavé 2 par une translation ;
- le pavé 1 a pour image le pavé 3 par une rotation;
- le pavé 1 a pour image le pavé 5 par une translation ;
- le pavé 2 a pour image le pavé 5 par une translation ;
- le pavé 3 a pour image le pavé 2 par une rotation.

3 Aire d'un quadrilatère intersection de deux carrés

1. f. On conjecture que l'aire de la partie hachurée est égale au quart de l'aire de *ABCD*.

2. a. r désigne la rotation de centre E et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
$r(C) = B$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et $EC = EB$. De même $r(B) = A$.
Ainsi $r([CB]) = [BA]$.
$(EJ) \perp (EI)$. De plus, $J \in [CB]$ d'où $r(J) \in [BA]$.
Ainsi $r(J) = I$.

b. $r(ECJ) = EBI$. Une rotation est une isométrie qui conserve donc les longueurs. Ainsi les triangles *ECJ* et *EBI* sont isométriques.

c. Aire $EIBJ$ = Aire EBI + Aire EBJ
= Aire ECJ + Aire EBJ
= Aire $EBC = \frac{1}{4}$ Aire $ABCD$.

d. Quelle que soit la position du point *F*, l'aire du quadrilatère *EIBJ* est égale au quart de l'aire du carré *ABCD*.

4 Des triangles et des cercles

1. a. h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.

$2AE = AB$ et $2AF = AC$ donc $h(E) = B$ et $h(F) = C$. De plus, $h(A) = A$.

On en déduit que $h(AEF) = ABC$.

b. Les triangles ont leurs angles égaux deux à deux .

2. a. $(EF)//(BC)$ donc $\frac{EF}{EA} = \frac{BC}{AB}$.

Or $EA = EB$, d'où $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{EB} = \frac{r_2}{r_1}$.

De même $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{FC} = \frac{r_2}{r_3}$.

c. ABC rectangle en A donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Leftrightarrow BC^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}BC\right)^2 + \left(\frac{r_3}{r_2}BC\right)^2 \Leftrightarrow r_2{}^2 = r_1{}^2 + r_3{}^2$.

Savoir-faire

3 Le centre de l'homothétie est le point d'intersection des médianes (centre de gravité) du triangle ABC.

Le rapport est $-\frac{1}{2}$.

4 h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
$h(B') = C$ ainsi l'image de (BB') est la droite parallèle passant par C.
De même, l'image de (CC') est la droite parallèle passant par B.

L'image de leur point d'intersection G est donc D.
A, G et D sont donc alignés .
De plus $G \in (AA')$, ainsi A, A' et D sont alignés .

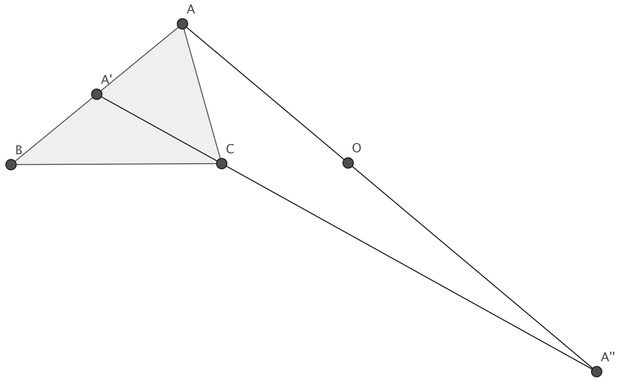
7 h est l'homothétie de centre I milieu de $[AB]$ et de rapport $\frac{1}{3}$. $h(M) = G$.

L'image d'un cercle par une homothétie est un cercle. Le lieu cherché est donc le cercle de centre $h(O) = O'$ et de rayon égal au tiers du rayon de $(\mathscr{C})$.

L'agalité $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ donne la position de O'.

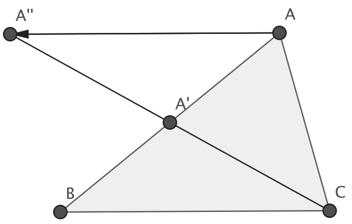
8 **a.** Le rapport de h est égal à $\frac{1}{2} \times (-3) = -\frac{3}{2}$.

b. Les points A, A'' et O sont alignés et $O \in (BC)$. On en déduit l'emplacement du point O.



9 **a.** Le rapport de h est égal à $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. donc h est la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

b.

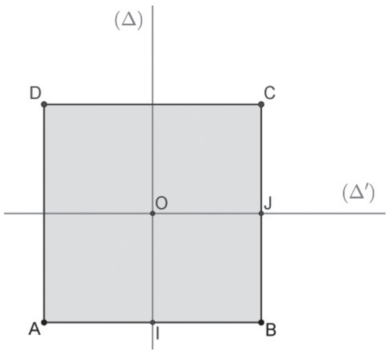


12 Le lieu du point B est la droite (Δ') symétrique de la droite (Δ) par rapport à la droite (D).

13 **a.** $(AB) // (CD)$ donc $s_{(AB)} \circ s_{(CD)} = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} = 2\overrightarrow{AH}$ *(H projeté orthogonal de A sur (CD))* ;

b. (AB) et (AC) sont sécantes en A donc $s_{(AB)} \circ s_{(AC)} = r$ *(r rotation de centre A et d'angle $2\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$* ;

14 **1. a.**



Par $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$:
- les points A, B, C, D et O ont pour images respectives C, D, A, B et O ;
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont pour images respectives les segments $[CD]$ et $[AB]$;
- le carré $ABCD$ est sa propre image.

b. $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$ est la symétrie de centre O.

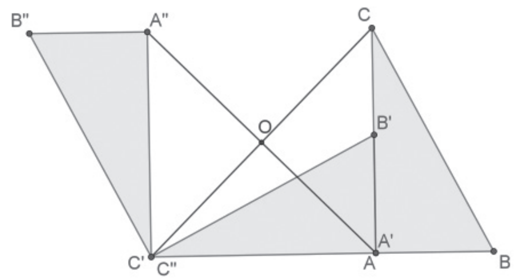
2. a. par $s_{(BC)} \circ s_{(\Delta)}$:
- les points A, B, C, D et O ont pour images respectives B, B', C', C et O' où B', C' et O' sont les symétriques respectifs de A, D et O par rapport à la droite (BC). ;
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont pour images respectives les segments $[BB']$ et $[CC']$;
- le carré $ABCD$ a pour image le carré $BB'C'C$.

b. $s_{(BC)} \circ s_{(\Delta)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

16 **a.** Les six triangles sont équilatéraux et ils ont deux côtés qui sont des rayons du cercle donc de même longueur. Ainsi ils sont isométriques.

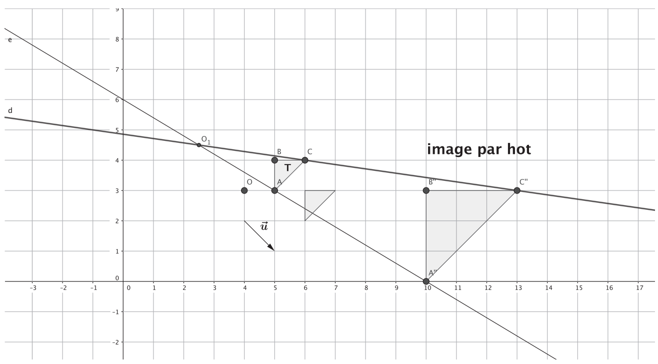
b. • La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme OAB en OBC ;
- la symétrie de centre O transforme OAB en OED ;
- la symétrie d'axe la médiatrice de [AF] transforme OAB en OEF.

17 **a. b. c.**



d. Symétrie de centre O intersection des segments $[AA'']$ et $[CC'']$.

20 **a. b.**



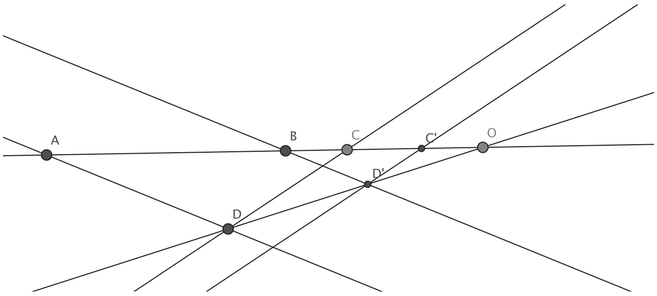
21 **a.** Les angles des triangles étant tous égaux, ils sont semblables.

b. $s = h \circ r$ avec h homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et r rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

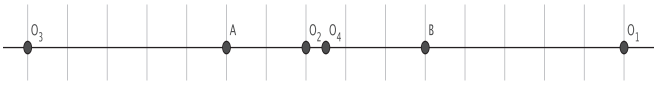
Exercices d'entraînement

Homothéties

22



23



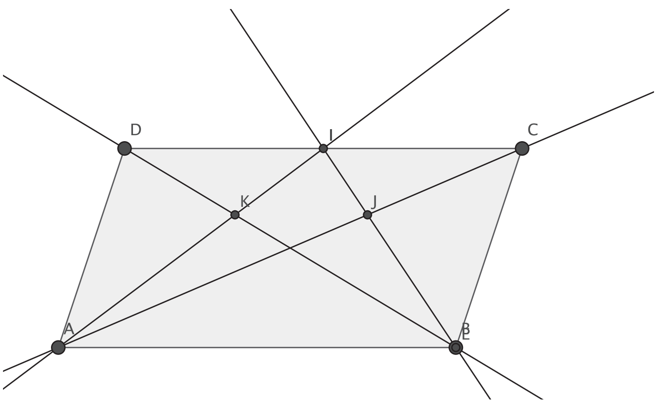
24 **a.** Homothétie ; **b.** translation ; **c.** homothétie ; **d.** homothétie.

25 • $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ donc *C* est l'image de *B* par l'homothétie de centre *A* et de rapport -3 ;

• $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc *B* est l'image de *C* par l'homothétie de centre *A* et de rapport $-\frac{1}{3}$;

• $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA}$ donc *C* est l'image de *A* par l'homothétie de centre *B* et de rapport 4.

26 **a.**



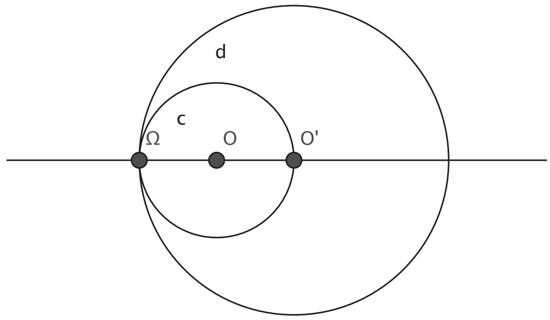
b. *J* est le centre de gravité car il est à l'intersection des médianes (*BI*) et (*CJ*).

c. C'est l'homothétie de centre *I* et de rapport 3.

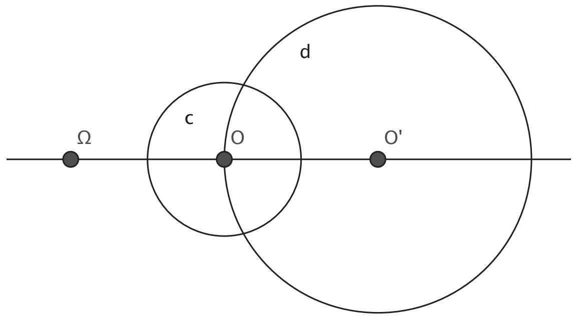
27 Le lieu est le cercle de centre le milieu de [*AB*] et de rayon égal à $\frac{1}{3}AB$.

28 Dans les trois cas, le point Ω est le centre de l'homothétie cherchée.

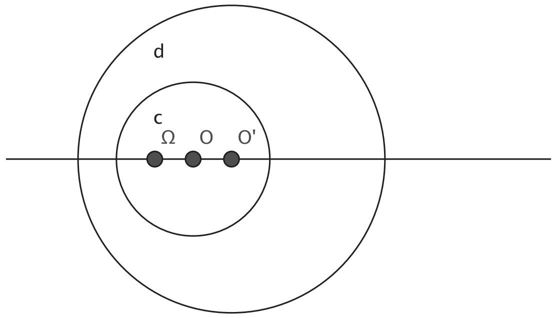
a.



b.



c.



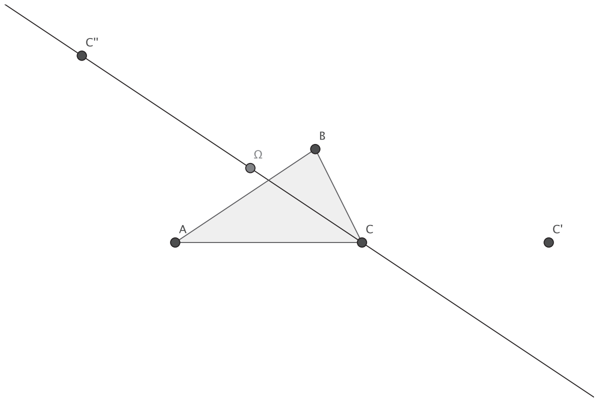
29 On a $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{GF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$.

Ainsi, il existe un homothétie, de rapport $\frac{3}{2}$, qui transforme [*AD*] en [*FE*], [*AB*] en [*FG*] et [*AC*] en [*FA*], et donc qui transforme *A* en *F*, *B* en *G* et *C* en *E*.

Donc les droites (*AF*), (*BG*) et (*DE*) sont concourantes en le centre de cette homothétie.

30 **a.** La composée de deux homothéties de centres différents est une homothétie si le produit des rapport s est différent de 1. Ainsi *h'* o *h* est une homothétie de rapport –2.

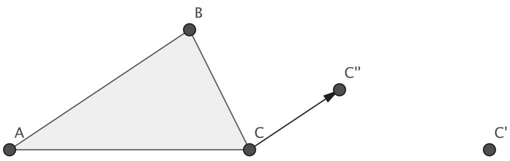
b.



c. Le centre est sur la droite (CC''). Le rapport étant égal à –2, on a $\overrightarrow{\Omega C''} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC''}$.

31 **a.** Le produit des rapport s est égal à 1.

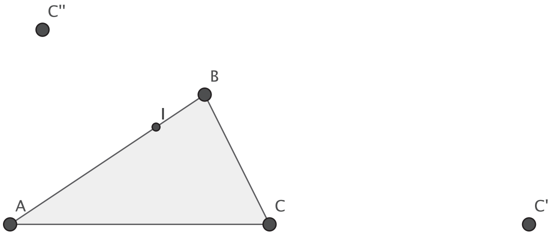
b.



c. Le vecteur de la translation est le vecteur $\overrightarrow{CC''}$.

32 **a.** Le produit des rapport s est égal à –1, donc il s'agit d'un symétrie centrale.

b.



c. $h' \circ h = s_I$ donc $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IA}$. De plus, $\overrightarrow{BA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Ainsi $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

33 h désigne l'homothétie de centre A qui transforme G en D. (GE)//(DB) donc h ((GE)) = (DB) et h (E) = B.

L'image d'un parallélogramme par h est un parallélogramme, donc h ($AEFG$) = $ABCD$.
Ainsi h (F) = C . donc les points A, F et C sont alignés .

34 h est l'homothétie de centre le centre du cercle et de rapport $\frac{1\,000}{400} = \frac{5}{2}$.

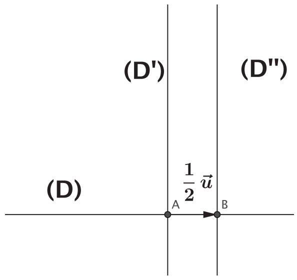
Isométries

35 **a.** $t_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}}$; **b.** Identité ; **c.** rotation de centre A et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$; **d.** translation .

36 **a.** Déplacement ; **b.** antidéplacement ; **c.** antidéplacement ; **d.** déplacement .

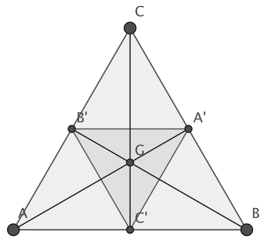
37 **a.** ODC ; **b.** OBC ; **c.** ADB, BCD et ADC.

38 $t_{\vec{u}} \circ s_{(D')}$ est un antidéplacement donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite (D'').



39 **a.** $f = s_D$; **b.** ; $g = s_B$; **c.** $h = t_{2\overrightarrow{BD}}$.

40 **1.**



2. a. $s_{(BB')}$; **b.** $s_{(CC')}$;

c. rotation de centre G et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$;

d. rotation de centre G et d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

41 r désigne la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

- $r(B) = C$ et $r(B') = C'$. Ainsi $r((BB')) = (CC')$
- Les droites (BB') et (CC') sont donc perpendiculaires.

De plus, r étant une isométrie, $BB' = CC'$.

42 **a.** $AA' = BB'$; $AB' = AB + BB' = BC + CC' = BC'$.

mes$\widehat{A'AB'} = \pi -$ mes$\widehat{B'AC'} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$.

mes$\widehat{B'BC'} = \frac{2\pi}{3}$. Ainsi $\widehat{A'AB'} = \widehat{B'BC'}$.

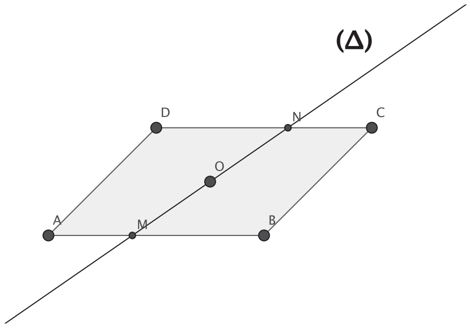
Les triangles $A'AB'$ et $B'BC''$ ont un angle de même mesure car les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles, donc les angles alterne-interne $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ sont de même mesure. Les triangles $A'AB'$ et $B'BC'$ sont isométriques.

On procéderait de même avec le triangle $A'CC'$.

b. On en déduit que $A'B' = A'C' = B'C'$. Ainsi le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

43 Les triangles ABF' et CDE ont un angle de même mesure compris entre deux côtés égaux. Ils sont isométriques. Ainsi $AF = DE$.

44 **a.**



b. O est le milieu de $[AC]$; donc $OA = OC$.
$\widehat{OAM} = \widehat{OCN}$ car ils sont alterne-interne.
$\widehat{AOM} = \widehat{NOC}$ car ils sont opposés par le sommet.
Les triangles OMA et ONC ont un côté égal compris entre deux angles de même mesure. Ils sont isométriques. Ainsi $AM = NC$.

45 **a.** $CB = AB$ et $BE = BG$.

$\text{mes}(\widehat{CBE}) = \text{mes}(\widehat{CBA}) + \text{mes}(\widehat{ABE}) = \dfrac{\pi}{2} + \text{mes}(\widehat{ABE})$

et

$\text{mes}(\widehat{ABG}) = \text{mes}(\widehat{ABE}) + \text{mes}(\widehat{EBG}) = \text{mes}(\widehat{ABE}) + \dfrac{\pi}{2}$

Ainsi $\widehat{CBE} = \widehat{ABG}$.

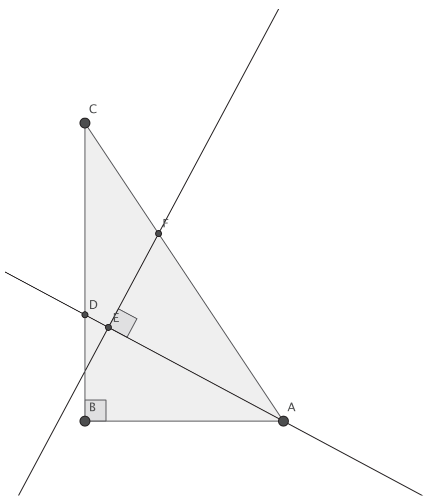
Les triangles ABG et CBE ont un angle de même mesure compris entre deux côtés égaux. Ils sont isométriques.

b. r désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

$r(C) = A$ et $r(E) = G$. Ainsi $r\,((CE)) = (AG)$.

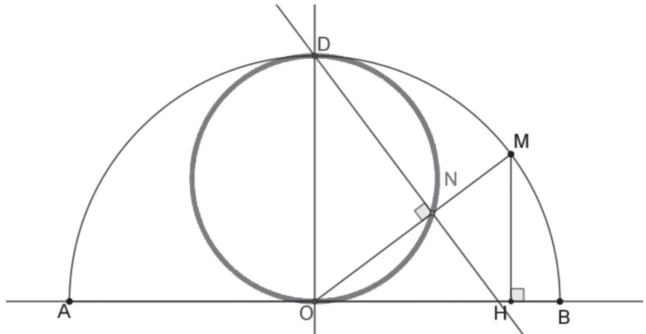
Les droites (CE) et (AG) sont donc perpendiculaires.

46 **a.**



b. Les triangles ABD et AEF ont un côté égal compris entre deux angles de même mesure **.** Ils sont isométriques.

47 **1. a.** et **b.**



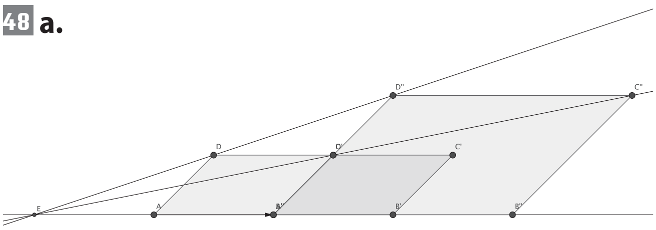
c. On conjecture que le lieu des points N est le cercle de centre milieu de $[OD]$ et de rayon égal à la moitié du cercle initial.

2. a. $ON = MH$ et $OM = OD$ car ce sont deux rayons du cercle.
$\widehat{DON} = \widehat{OMH}$ car ils sont alterne-interne.
Les triangles ODN et OMH ont un angle de même mesure compris entre deux côtés égaux. Ils sont isométriques.

b. On en déduit que l'angle $\widehat{OND}$ est droit. Le triangle rectangle ODN est donc inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse $[OD]$.

c. Le cercle est décrit en entier et cela vient confirmer la conjecture.

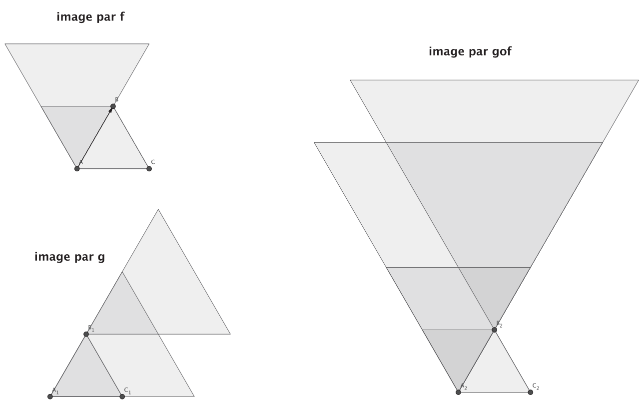
48 **a.**



b. La transformation est l'homothétie de rapport 2 et de centre le point E tel que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$.

49 r est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
h est l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

50 **a.**



b. $g \circ f$ est la composée de la symétrie de centre B et de l'homothétie de centre B et de rapport 4.

51 **a.** $s([AB]) = [BC]$; **b.** rapport $= \dfrac{BC}{AB}$;

c. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$; **d.** $\text{mes}\,\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

52 **a.** $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC} = 1{,}5$.

Les triangles ABC et ADE ont leurs côtés proportionnels. Ils sont semblables.

b. Les angles correspondants sont donc égaux. Ainsi $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ et la droite(AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$.

53 $\overrightarrow{AM_1} = 3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x - 2 \\ y_1 = 3y - 4 \end{cases}$.

$\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 + x_1 \\ y' = 1 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 3 \\ y' = 3y - 3 \end{cases}$.

54 **a.** $AG = 5\sqrt{2}$; $AE = 5\sqrt{10}$; $AF = 5\sqrt{5}$.

b. $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{GF}{CE} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

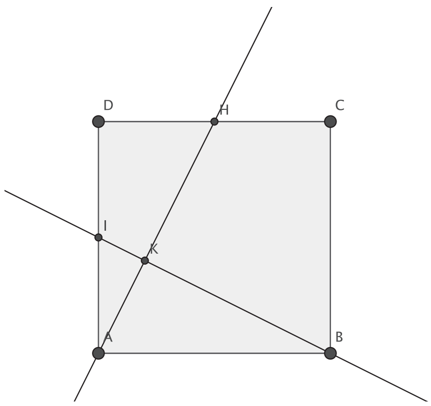
Les triangles CEA et GFA ont leurs côtés proportionnels. Ils sont semblables.

c. Les angles correspondants sont égaux. Ainsi :

$\widehat{GAF} = \widehat{AC} \Leftrightarrow \widehat{GAF} + \dfrac{1}{2}\widehat{FAE} = \widehat{ACE} + \dfrac{1}{2}\widehat{FAE} = \dfrac{1}{2}\widehat{DAG}$.

donc les angles $\widehat{DAG}$ et $\widehat{EAF}$ ont la même bissectrice.

55 **a.**



b. $AI = DH = \dfrac{1}{2}AB$; $AB = AD$; $\text{mes}\,\widehat{BAI} = \text{mes}\,\widehat{ADH} = \dfrac{\pi}{2}$.

Les triangles ABI et ADH ont un angle de même mesure compris entre deux côtés égaux. Ils sont isométriques.

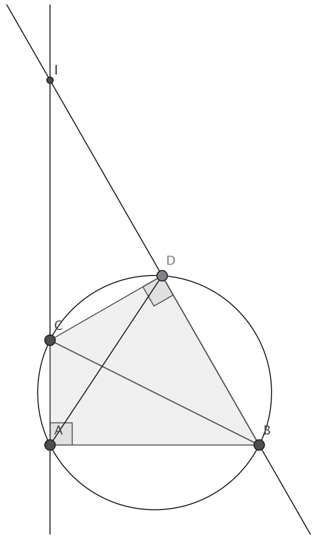
c. On en déduit que $\text{mes}\,\widehat{BIA} = \text{mes}\,\widehat{AHD}$.
De plus, $\text{mes}\,\widehat{KAI} = \text{mes}\,\widehat{HAD}$.
Les triangles AIK et ADH ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

d. Par conséquent, le troisième angle a la même mesure . Ainsi $\text{mes}(\widehat{AKI}) = \text{mes}(\widehat{ADH}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (BI) et (AH) sont perpendiculaires.

56 **a.** $\text{mes}\,\widehat{AIB} = \text{mes}\,\widehat{BAC}$ et $\text{mes}\,\widehat{IBA} = \text{mes}\,\widehat{CBA}$.
Les triangles ABI et ABC ont deux angles de même mesure. Ils sont semblables.

b. Rapport de similitude : $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

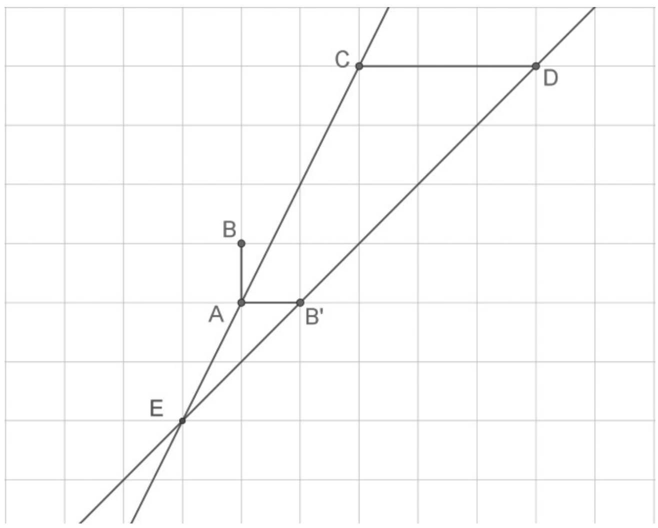
57 **a.**



b. Les angles $\widehat{IAD}$ et $\widehat{CBI}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc $\overset{\frown}{CD}$. Ils sont donc égaux.
De plus l'angle $\widehat{AID}$ est commun aux deux triangles .

Les triangles ADI et BCI ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

58 **a.**



b. L'angle de la rotation a pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

c. Le rapport de l'homothétie est égal à 3 car son centre E est situé sur (AC) et sur $(B'D)$ où $r(B) = B'$.

Se tester

59 **1.** Vrai ; **2.** Faux ; **3.** Vrai ; **4.** Vrai ; **5.** Faux : **6.** Vrai ; **7.** Vrai.

60 **1.** Faux : il faudrait que l'angle mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.

2. Vrai : si h désigne l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{1}{2}$, $h\,(B) = A'$ et $h\,(A) = B'$. Ainsi $h([AB]) = [A'B']$ et donc $A'B' = \dfrac{1}{2}AB$.

3. Vrai : leurs trois angles sont respectivement de même mesure : $\dfrac{\pi}{3}$.

4. Vrai : $\text{mes}(\widehat{A'GB'}) = \text{mes}(\widehat{B'GC'}) = \text{mes}(\widehat{C'GA'}) = \dfrac{2\pi}{3}$ et $GA' = GB' = GC'$.

5. Vrai : car $BC = AC$; $B'C = A'C$ et $\text{mes}\,(\widehat{B'CB}) = \text{mes}\,(\widehat{ACA'}) = \dfrac{\pi}{3}$.

61 **1.** a. ; **2.** b. ; **3.** a. ; **4.** b. ; **5.** c.

62 **1.** a. Les triangles ont des angles de même mesure. En effet, $\widehat{ICG} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{IJC} = \widehat{BAC}$.

2. b. $BC = \sqrt{34}$. Donc $\dfrac{IC}{BC} = \dfrac{2}{\sqrt{34}} \approx 0,34$. Ainsi $BC \approx \dfrac{IC}{0,34}$.

3. c. Les triangles sont semblables. Il existe donc une similitude qui les échange. Or une similitude conserve les milieux. Comme l'image de $[JC]$ est $[BC]$, l'image du milieu de $[JC]$ est le milieu de $[BC]$.

4. b. $\dfrac{BC}{IC} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Exercices d'approfondissement

63 Calcul d'une distance par rapport à un cercle

1. a. Les angles $\widehat{EBC}$ et $\widehat{CDE}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc $\overset{\frown}{CE}$, donc ils sont de même mesure.

De plus l'angle $\widehat{CAE}$ est commun aux deux triangles .

Les triangles ABE et ADC ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

b. On a donc $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC} \Leftrightarrow AB \times AC = AD \times AE$.

2. On note J le point d'intersection de la diagonale $[AC]$ et du cercle (situé dans le demi-cercle contenant K).

$AJ = \dfrac{1}{2}(AC - 4) = \dfrac{1}{2}(4\sqrt{2} - 4) = 2\sqrt{2} - 2.$

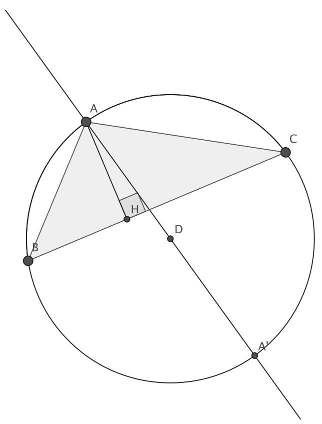
$AI = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

En appliquant les résultats du 1., on obtient :

$AJ \times AC = AK \times AI \Leftrightarrow AK = \dfrac{AJ \times AC}{AI} = \dfrac{(2\sqrt{2}-2)4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}.$

64 Usinage

a.



b. Le triangle $AA'C$ est rectangle en C car il est inscrit dans le cercle de diamètre $[AA']$.

Ainsi $\text{mes}\,\widehat{ACA'} = \text{mes}\,\widehat{AHB}$.

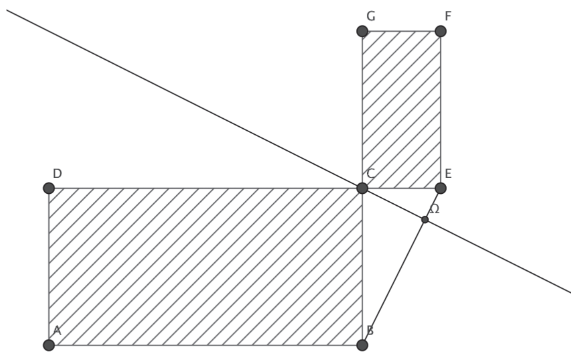
$\text{mes}\,\widehat{AA'C} = \text{mes}\,\widehat{ABC}$ car ces deux angles sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc.

Les triangles AHB et $AA'C$ ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

c. $\dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{AC}{AH} \Leftrightarrow AA' = \dfrac{AB \times AC}{AH} = 4,8.$

65 Centres de similitudes

a.



b. $\text{mes}\,\widehat{B\Omega C} = \text{mes}\,\widehat{C\Omega E}$ car ce sont deux angles droits.

$\widehat{CE\Omega}$ est l'angle complémentaire de l'angle $\widehat{EC\Omega}$ dans le triangle $C\Omega E$ et de l'angle $\widehat{EBC}$ dans le triangle CEB. Ainsi $\text{mes}\,\widehat{EC\Omega} = \text{mes}\,\widehat{EBC} = \text{mes}\,\widehat{\Omega BC}$.

Les triangles $C\Omega E$ et $C\Omega B$ ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

c. Le rapport de h est égal à 2 et l'angle de r est de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

d. $s' = h' \circ r'$ où h' est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$ et r' est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

66 Alignement

a. $ABCD$ est un carré donc la droite (AC) est la médiatrice du segment$[BD]$.

Le triangle GBD est équilatéral donc $GB = GD$; de plus, $AB = AD$, donc la droite (AG) est la médiatrice du segment $[BD]$.

Ainsi G, A et C sont alignés .

b. r désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$. $r(G) = D$, $r(A) = E$ et $r(C) = F$.

Une rotation conserve l'alignement. Donc les points G, A et C alignés ont pour image les points D, E et F alignés .

67 Composées de symétries centrales

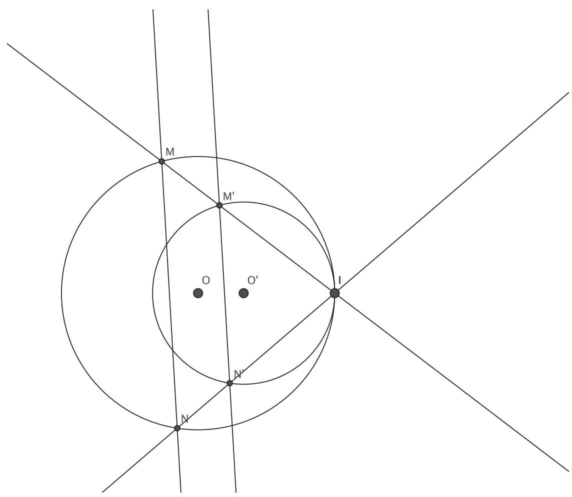
a. Image de B : $s_I \circ s_B(B) = s_I(B) = A$. donc $s_I \circ s_B = t_{\overrightarrow{BA}}$.

b. $s_I \circ s_B = s_M \circ s_C \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{BA}} = t_{2\overrightarrow{CM}} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Ainsi M est le milieu de $[CD]$.

68 Parallélisme

a. et **c.**



b. $O'I = OI - OO' = 3 - 1 = 2$ donc le point I appartient au cercle$(\mathscr{C}')$.

d. La transformation qui transforme le cercle $(\mathscr{C})$ en le cercle $(\mathscr{C}')$ est l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.

e. L'image par h du point M du cercle $(\mathscr{C})$ est un point du cercle $(\mathscr{C}')$ et de la droite (IM). Ainsi $h(M) = M'$.

De même $h(N) = N'$.

Par conséquent, $h((MN)) = (M'N')$

L'image par une homothétie est une droite parallèle. On en déduit que $(MN) // (M'N')$.

69 Perpendicularité

a. Le rapport de h est égal à 2.

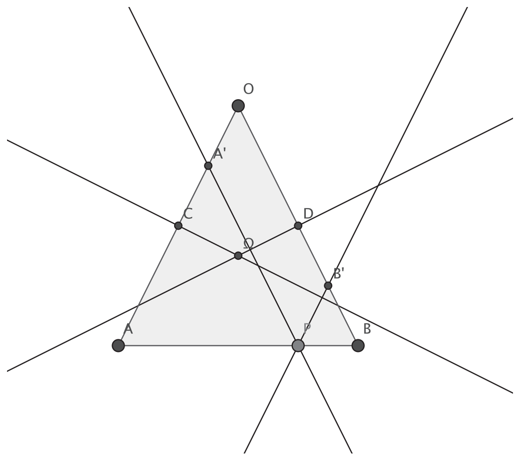
b. r est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

c. $r((AM)) = (B'C')$. Ainsi $(AM) \perp (B'C')$.

d. $h \circ r([AM]) = [B'C']$. Le rapport de h est égal à 2 donc $B'C' = 2AM$.

70 Centre d'une rotation

a.



b. $OB'PA'$ est un parallélogramme (côtés opposés parallèles) donc $OA' = PB'$.

Le triangle $B'PB$ est isocèle en B' donc $PB' = BB'$.

Ainsi $OA' = BB'$.

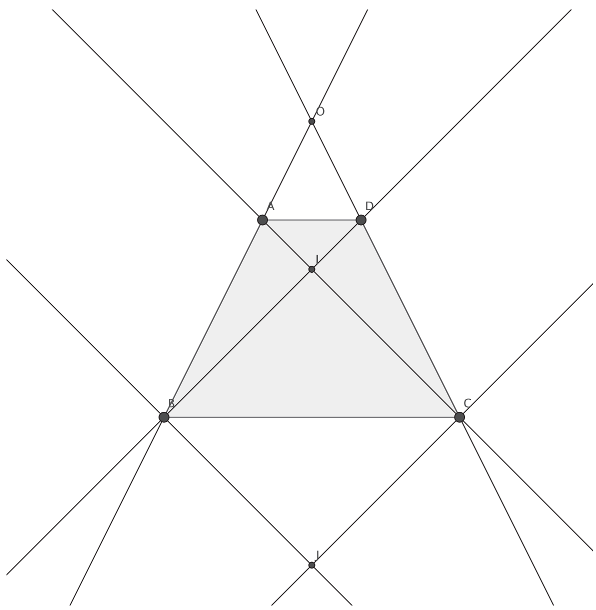
c. $r((OA')) = (BB')$ et $A \in (OA')$ donc $r(A) \in (BB')$.

De plus l'image du segment $[AO]$ est un segment de même longueur de la droite (BB') et d'extrémité B. donc $r(A) = O$.

d. Le centre Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments $[OB]$ et $[OA]$ c'est-à-dire le centre du cercle circonscrit au triangle OAB.

71 Homothéties dans un trapèze

a.



• Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle. De plus, $h(A) = B$ donc $h((AC)) = (d_1)$ où (d_1) est la parallèle à (AC) passant par B.

• $h(A) = B$ et $(AD) // (BC)$ donc $h(D) = C$.

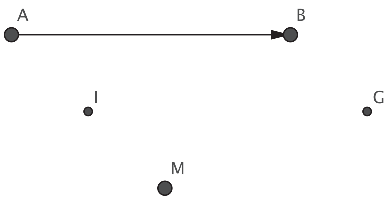
En reprenant le raisonnement ci-dessus, on montre que (d_2) est a droite parallèle à (BD) passant par C.

b. $I \in (BD)$ et $h((BD)) = (d_2)$, donc $h(I) \in (d_2)$.
$I \in (AC)$ et $h((AC)) = (d_1)$, donc $h(I) \in (d_1)$.
Ainsi $h(I)$ est le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2). donc $h(I) = J$ et O, I et J sont alignés .

c. $h(B)$ est le point d'intersection des droites (AB) et (d_2).
$h(C)$ est le point d'intersection des droites (DC) et (d_1).

72 Barycentres et lieux de points

1.



2. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. I est donc l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

3. $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} = -2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IA}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AB}$.

G est donc l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4. a. Le point I décrit le cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{AB}{4}$.

b. Le point G décrit le cercle de centre Ω tel que $\overrightarrow{B\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et de rayon $\frac{AB}{4}$.

c. Le point I décrit la médiatrice de $[AB]$.

d. Le point G décrit la droite perpendiculaire à (AB) passant par C telle que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

73 Une transformation du plan

1. a. $\overrightarrow{MM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$

f est donc l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

b. L'image du triangle ABC est le triangle $A'B'C'$.

En effet, $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{A'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2. $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

f est donc la translation de vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

3. $\overrightarrow{MM'} = (k+1)\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (k+1)\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = k\overrightarrow{MG} = -k\overrightarrow{GM}$.

f est donc l'homothétie de centre G et de rapport $-k$.

74 Un problème de construction

a. $h([BP]) = [BA]$; $h([PQ]) = [AQ']$.

$BP = PQ$ donc le point Q appartient au cercle de centre P et de rayon BP. Son image Q' appartient à l'image du cercle qui est le cercle de centre A, image de P, et de rayon AB.

b. Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle donc $(Q'C')//(QC)$.

$CC'Q'R$ est un parallélogramme donc $CR = C'Q'$.

Or $h([CQ]) = [C'Q']$ et $h([BP]) = [BA]$.

De plus, $CQ = BP$ donc $C'Q' = BA$.

Finalement $CR = AB$.

$(BC) = (CC')$ et $CC'Q'R$ parallélogramme entraînent que $(Q'R)//(BC)$. Ainsi le point Q' appartient à la droite parallèle à la droite (BC) passant par R.

c. • Tracer le cercle de centre A et de rayon AB.

• Construire le point R de la demi-droite $[AC)$ tel que $CR = AB$.

• Construire le point Q' intersection du cercle et de la parallèle à (BC) passant par$R$.

• Construire le point Q intersection de la droite (BQ') et de la droite (AC).

• Construire le point P intersection de la droite (AB) et de la parallèle à la droite (BC) passant par Q.

75 La droite d'Euler

a. $h(A') = A$; $h(B') = B$ et $h(C') = C$.

En effet, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{B'C'}$.

b. La hauteur issue de A' dans le triangle $A'B'C'$ est perpendiculaire à $(B'C')$ donc (BC) en A'. Or A' est le milieu de $[BC]$. Donc cette hauteur est la médiatrice de $[BC]$, la droite (OA'). L'image de la hauteur (OA') par h est la hauteur du triangle ABC issue de A.

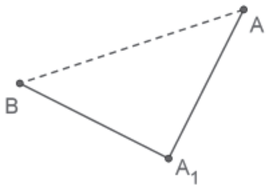
De même pour les droites (OB') et (OC').

c. Ainsi $h(O) = H$.

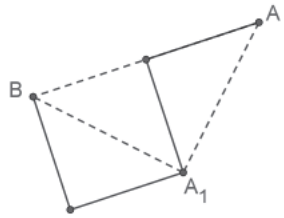
d. Les points G, O et H sont donc alignés puisqu'un point, son image par un homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.

76 La courbe du dragon

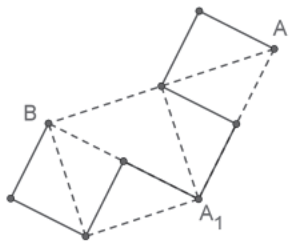
1re étape



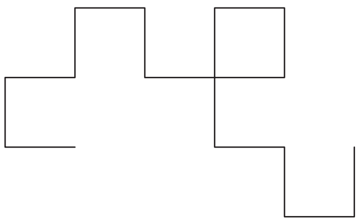
2e étape



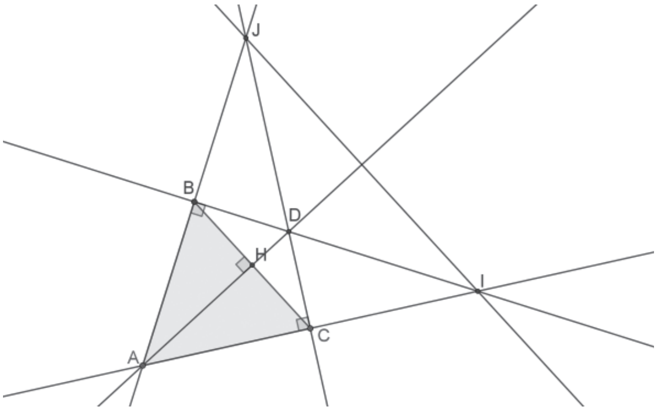
3e étape



4e étape



77 Cerf-volant



a. Les droites(AC) et (BD) sont sécantes en un point I donc la composée des deux symétries est la rotation de centre I et d'angle de mesure : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}}) = \frac{\pi}{6}$.

En effet l'angle $\text{mes}(\widehat{AIB}) = \frac{\pi}{2} - \text{mes}(\widehat{BAI}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

b. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point J donc la composée des deux symétries est la rotation de centre J et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$. En effet l'angle $\text{mes}(\widehat{AJC}) = \frac{\pi}{3} - \text{mes}(\widehat{CAJ}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

c. (AD) est la médiatrice de $[BC]$.

or, $s_{(AD)}(A) = A$, $s_{(AD)}(B) = C$ et $s_{(AD)}(D) = D$,

donc $s_{(AD)}(AB) = ((AC))$ et $s_{(AD)}(CD) = ((BD))$.

Ainsi, le point J, intersection de (AB) et (CD), a pour image par $s_{(AD)}$ le point I, intersection de (AC) et (BD).
Donc (AD) est aussi la médiatrice de $[IJ]$.
Le triangle AIJ est donc isocèle en A et comme il possède un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ (l'angle $\widehat{IAJ}$), c'est qu'il est équilatéral.

Problèmes

78 Règle de Dostor

a. Les deux triangles ont deux angles de même mesure. Ils sont donc semblables.

b. $k = \frac{ED}{AB} = \frac{FD}{AC} = \frac{EF}{BC}$.

c. Le produit en croix donne :
$AB \times FD = AC \times ED \Leftrightarrow AB \times FD - AC \times ED = 0$.
En élevant au carré, on obtient :
$AB^2 \times FD^2 + AC^2 \times ED^2 - 2\,AB \times FD \times AC \times ED = 0$
$\Leftrightarrow AB^2 \times FD^2 + AC^2 \times ED^2 = 2AB \times FD \times AC \times ED$.

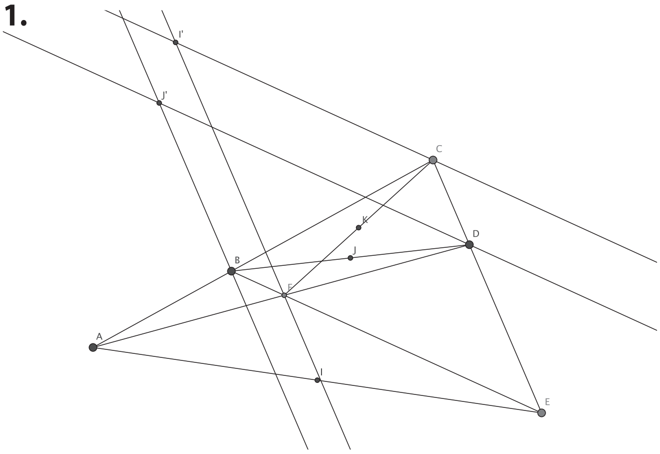
d. $BC^2 = AB^2 + AC^2$; $EF^2 = ED^2 + FD^2$.

e. $BC^2 \times EF^2 = AB^2 \times ED^2 + AB^2 \times FD^2 + AC^2 \times ED^2 + AC^2 \times FD^2$
$\Leftrightarrow BC^2 \times EF^2 = AB^2 \times ED^2 + 2\,AB \times FD \times AC \times ED + AC^2 \times FD^2$
$\Leftrightarrow BC^2 \times EF^2 = (AB \times ED + AC \times FD)^2$.
Ainsi $BC \times EF = AB \times ED + AC \times FD$.

f. Les côtés « homologues » sont les côtés qui sont images l'un de l'autre par la similitude qui échange les deux triangles.

79 Droite de Newton

1.



2. a. L'image de (BJ') par h est la droite parallèle à(BJ') passant par C, donc (CD).
L'image de (CD) par h' est la droite parallèle à (CD) passant par F, donc (FI'). Ainsi $h' \circ h(BJ') = (FI')$.

b. L'image de (DJ') par h' est la droite parallèle à (DJ') passant par F, donc (EB).
L'image de (EB) par h est la droite parallèle à (EB) passant par C, donc (CI'). Ainsi $h \circ h'(DJ') = (CI')$.

c. Les deux homothéties ayant le même centre, elles-sont commutatives.
Le point J' est l'intersection des droites (BJ') et (DJ'), il a donc pour image par $h' \circ h$ le point intersection des droites (FI') et (CI') c'est à dire le point I'.

d. $h' \circ h(J') = I'$ donc A, I' et J' sont alignés .

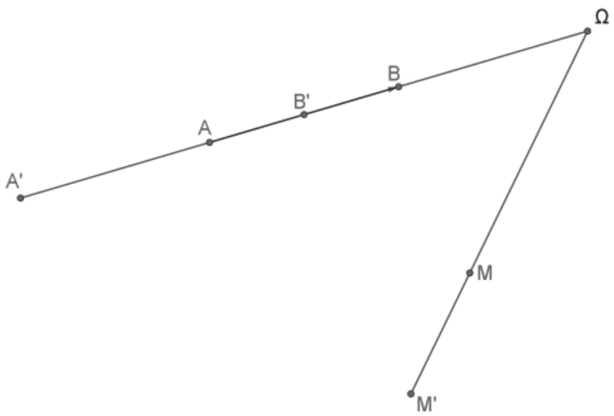
3. a. $BEDJ'$ est un parallélogramme donc J est le milieu des diagonales. Ainsi $E \in (J'J)$.
De même $E \in (KI')$. De plus, $E \in (AI)$.
Ainsi les droites (AI), ($J'J$) et (KI') sont concourantes.

b. Les points I, J et K sont les images respectives des points A, I' et J' par l'homothétie de centre E et de rapport 2.

c. L'image par une homothétie d'une droite est une droite parallèle : A, I' et J' sont alignés donc leurs images I, J et K sont alignées.

80 Reconnaître des transformations

1. a. et **b.**

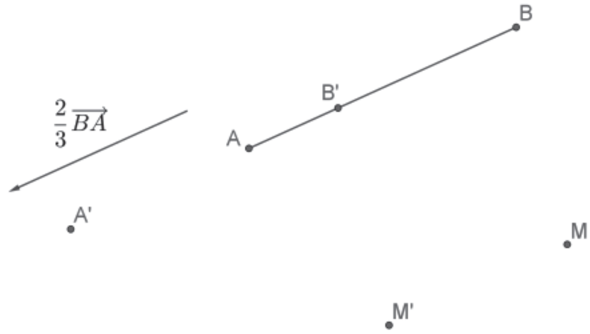


c. $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} - 2\overrightarrow{\Omega B} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = 2\overrightarrow{AB}$.
donc le point Ω existe et est unique.

d. $\overrightarrow{M'A} - 2\overrightarrow{M'B} + 3\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} - 2\overrightarrow{\Omega B} + 3\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A} - \overrightarrow{\Omega B} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$ (car $\Omega A - 2\overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}$).

e. f est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$.

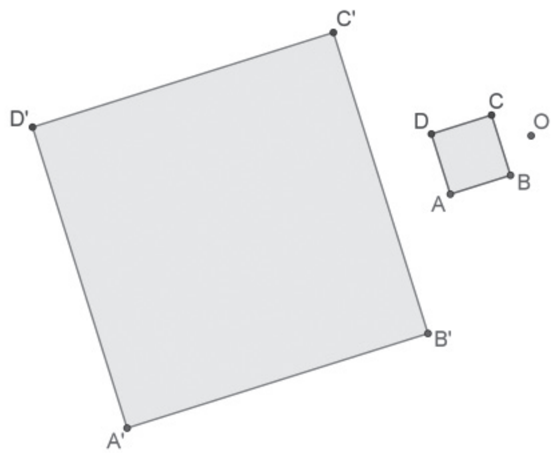
2. a. et **b.**



c. $2\overrightarrow{M'A} - 2\overrightarrow{M'B} + 3\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$
$\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

d. g est la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

3. a. et **b.**



c. $h(O) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
Donc le point O existe et est unique**.**

d. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{MO}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 5\overrightarrow{OM}$.
h est donc l'homothétie de centre O et de rapport 5.

81 Démonstration d'un théorème

1. a. Les points O, C et A sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel k non nul tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$.

b. $A' = C$ d'après l'égalité ci-dessus.

c. L'image par h de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par C, donc (CD). Ainsi $B' \in (CD)$.
De plus $B' \in (OB)$ puisqu'un point, son image et le centre d'une homothétie sont alignés. Ainsi B' est le point d'intersection de (CD) et (OB), donc $B' = D$.

d. Une homothétie conserve les milieux, donc $h(I) = J$ et les points O, I et J sont alignés.

2. a. h' désigne l'homothétie de centre O' qui transforme A en D.
En procédant comme à la question **1**, on a $h'(B) = C$, $h(I') = J'$ et les points O', I et J sont alignés.

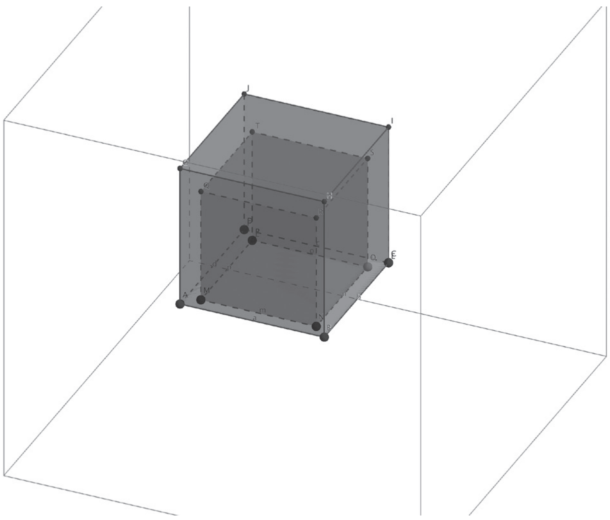
b. Ce théorème est démontré aux questions **1. d** et **2. a**.

5 Droites et plans de l'espace

Manuel pages 73 à 88

Activités d'introduction

1 Représentation en perspective cavalière (Rappel)

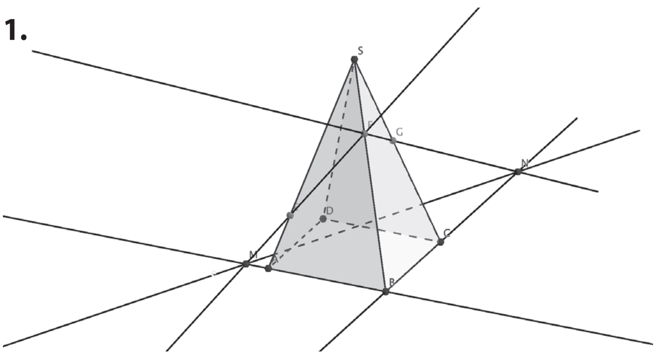


2 Théorème du toit

1. a. Les droites sont parallèles, elles sont donc coplanaires. Ainsi il existe un plan (P_3) les contenant.
b. Les droites semblent parallèles.
2. a. $A \in (P_3)$ car $A \in (d_1)$ et $(d_1) \subset (P_3)$.
$A \in (P_2)$ car $A \in (\Delta)$et $(\Delta) \subset (P_2)$.
b. Les plans (P_2) et (P_3) se coupent suivant une droite qui ne peut être que (d_2). Ainsi $A \in (d_2)$.
c. Le point A appartient aux deux droites (d_1) et (d_2) qui sont parallèles. C'est impossible.
d. L'hypothèse de départ est fausse. Ainsi les droites (d_1)et (Δ)sont parallèles.

3 Intersection d'une pyramide par un plan

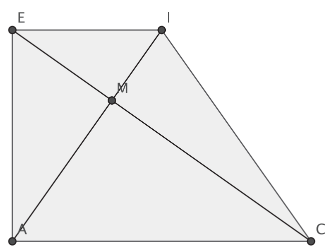
1.



2. a. $M \in (AB)$ donc $M \in (ABC)$.
$N \in (BC)$ Donc $N \in (ABC)$.
Ainsi $(MN) \subset (ABC)$.
On démontre de même que $(MN) \subset (EFG)$.
Ainsi la droite (MN) est l'intersection lorsqu'elle existe, des deux plans (EFG) et (ABC).
b. Il faut que $(EF)//(AB)$ et$(FG)//(BC)$.

4 Dans un cube

1. a. Les faces *AEFB* et *AEHD* sont des carrés donc :
$(AE) \perp (EH)$ et $(AE) \perp (EF)$.
b. La droite (AE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (EFG), elle est donc orthogonale au plan.
c. On en déduit que (AE) est orthogonale à toute droite du plan (EFG) et en particulier à (EI). Ainsi le triangle *AEI* est rectangle en *E*.
2. a. Le plan (AEI) contient la droite (AE) qui est orthogonale au plan (EFG). Ainsi les deux plans sont perpendiculaires.
b. $(HF) \perp (EG)$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
$(HF) \perp (AE)$ car (AE) est orthogonale au plan (EFG).
Ainsi la droite (HF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AEI), elle est donc orthogonale au plan.
c. On en déduit que (HF) est orthogonale à toute droite du plan (AEI) et en particulier à(AI).
3. a. (EI) // (AC) donc les points A, C, E et I sont coplanaires. Les droites (AI) et (EC) ne sont pas parallèles sinon I serait confondu avec G. Elles sont donc sécantes.
b. Dans le repère $(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$,
$\overrightarrow{AI}(\frac{\sqrt{2}}{3} ; 1)$ et $\overrightarrow{EC}(\sqrt{2} ; -1)$.
$\frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{2} + 1 \times (-1) = 0$.
Ainsi les droites (AI) et (EC) sont perpendiculaires.



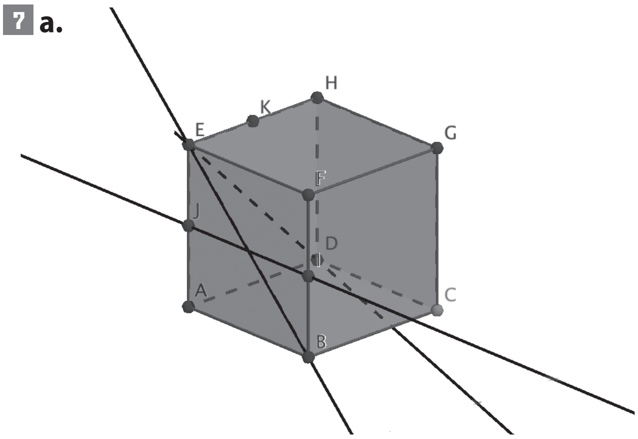
Savoir-faire

3 • (*AB*) // (*HG*) ; • (*HD*) // (*FB*) ;
• (*CA*) et (*GB*) non coplanaires ;
• (*AG*) et (*HD*) non coplanaires.

4 La droite (*SO*) est orthogonale au plan de base donc à toute droite du plan de base.

Ainsi (*SO*) ⊥ (*AC*).

7 **a.**



b. (*IJ*) //(*AB*). Or (*AB*) ⊥ (*AD*) et (*AB*) ⊥ (*AE*).

Donc (*IJ*) ⊥ (*AD*) et (*IJ*) ⊥ (*AE*). Ainsi la droite (*IJ*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*ADE*) ; elle est donc orthogonale à ce plan.

c. (*BE*) ⊥ (*AF*) car ce sont les diagonales du carré *ABFE*. (*BE*) ⊥ (*AD*) car la droite (*AD*) est orthogonale au plan (*ABF*).

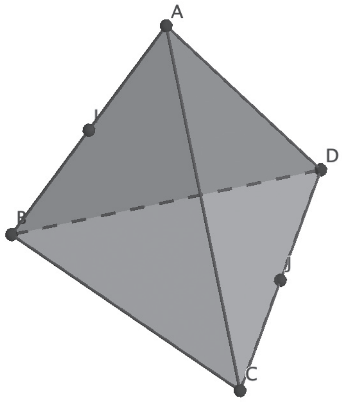
Ainsi la droite (*BE*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*ADG*) ; elle est donc orthogonale à ce plan.

d. (*DE*) ⊥ (*AH*) car ce sont les diagonales du carré *ADHE*. Donc (*DE*) ⊥ (*JK*) car (*JK*) //(AH).

De plus (*IJ*) ⊥ (*DE*) car (*IJ*) ⊥ (*ADE*).

Ainsi la droite (*DE*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*IJK*) ; elle est donc orthogonale à ce plan.

8 **a.**



b. Le triangle *ABC* est équilatéral donc la droite (*CI*) est à la fois médiane et hauteur. Ainsi (*CI*) ⊥ (*AB*).

c. Le triangle *D* est équilatéral donc la droite (*DI*) est à la fois médiane et hauteur. Ainsi (*DI*) ⊥ (*AB*).

d. La droite (*AB*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*ICD*) ; elle est donc orthogonale à ce plan.

Comme le plan (*ICD*) coupe [*AB*] en son milieu *I*, on en déduit que (*ICD*) est le plan médiateur de [*AB*].

11 **a.** (*EA*) ⊥ (*AB*) et(*EA*) ⊥ (*AD*) , donc (*EA*) ⊥ (*ABD*).

Or (*ABD*) = (*AB*C), ainsi (*EA*) ⊥ (*ABC*). Le plan (*EAC*) contient une droite orthogonale au plan (*ABC*). Le plan (*EAC*) est donc perpendiculaire au plan (*AB*C).

b. (*BF*) ⊥ (*EFG*) donc (*BF*) ⊥ (*EG*). De plus (*HF*) ⊥ (*EG*). Le plan (*EGC*) contient une droite orthogonale au plan (*BFH*). Le plan (*EGC*) est donc perpendiculaire au plan (*BFH*).

c. (*AE*) ⊥ (*EHF*) donc (*AE*) ⊥ (*HF*). De plus (*HF*) ⊥ (*EG*). Le plan (*AHF*) contient une droite orthogonale au plan (*ACE*). Le plan (*AHF*) est donc perpendiculaire au plan (*ACE*).

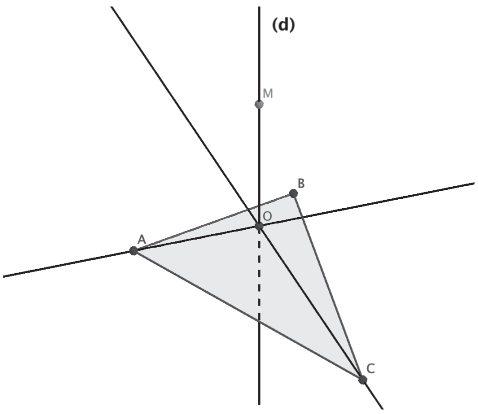
Exercices d'entraînement

Droites et plans orthogonaux

12 **a.** (BC), (AD), (FG), (EH), (AE), (HD), (FB) et (GC).

b. (ADE) et (BFC). **c.** (BC) et (AE).

13 **a.**



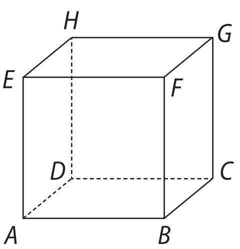
b. • $(d) \perp (ABC)$ donc (d) est orthogonale à toute droite du plan (ABC) donc en particulier à (BC).

• $(AB) \perp (OC)$ car (OC) est une hauteur du triangle ABC.

$(AB) \perp (MO)$ Car (MO) est orthogonale au plan (ABC).

Ainsi la droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (MOC). Elle est orthogonale à ce plan. Or $(MC) \subset (MOC)$. On en déduit que $(AB) \perp (MC)$.

14 **a.**



b. • $(AB)//(HG)$;
• $(AE) \perp (BC)$;
• $(AG) \perp (HF)$;
• (HF) et (BG) non coplanaires.

c. • $(AB)//(EFG)$;
• $(AE) \perp (EFG)$;
• $(HF) \perp (AGC)$;
• (CE) et (FGH) sécants.

15 **a.** $(BC)//(EF)$ et $(AB) \perp (BC)$ donc $(AB) \perp (EF)$.

b. $(EB) \perp (BC)$ et $(EB) \perp (BA)$ donc $(EB) \perp (ABC)$.
Or $(FC)//(EB)$. Ainsi $(FC) \perp (ABC)$.

16 **a.** • $(MI) \perp (EF)$ car $(MI) = (MK)$, $(EF) = (FK)$ et $FKMP$ est un carré.

• $(AE)//(MI)$ car $(AE)//(FB)//(KI)$ et $(MI) = (KI)$.

• (FC) et (MI) ne sont pas coplanaires car elles appartiennent à des faces opposées du cube $BIJCFKLG$.

b. •$(MI) \subset (ABF)$ car $(AE)//(MI)$ et $I \in (AB)$.

• $(MI) \perp (ABC)$ car $(MI) \perp (IJ)$ et $(MI) \perp (IB)$.

• $(MI) \perp (EFG)$ car $(MI) \perp (ABC)$ et $(ABC)//(EFG)$.

17 **a.** Le triangle ABC est isocèle de sommet C. Ainsi la médiane (CI) est aussi hauteur issue de C.

Donc $(CI) \perp (AB)$.

De même dans le triangle D : $(DI) \perp (AB)$.
Ainsi la droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ICD) ; elle est donc orthogonale au plan.

b. La droite (AB) est orthogonale à toute droite du plan (ICD) donc en particulier à la droite (CD).

18 **a.** $(IJ)//(AD)$ et $(AC) \perp (AD)$ donc $(IJ) \perp (AC)$.

b. $(BE) \perp (ABC)$ car la droite (BE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) : (AB) et (BC).

c. $(IJ)//(AD)//(BE)$ et $(BE) \perp (ABC)$ donc $(IJ) \perp (ABC)$.

d. La droite (IJ) est orthogonale à toute droite du plan (ABC) donc en particulier à la droite (IB).

19 **a.** $(CG)//(HD)$ et $(HD) \perp (EH)$ donc $(CG) \perp (EH)$.

$(AB) \perp (AD)$ et $(AB) \perp (AE)$ donc $(AB) \perp (ADE)$.

Or $(EH) \subset (ADE)$. Ainsi $(EH) \perp (AB)$.

b. (EF) et (HD) ne sont pas coplanaires car elles appartiennent aux deux bases du prisme et elles ne sont pas parallèles.

c. $(HD) \perp (DA)$ et $(HD) \perp (DC)$ car les faces latérales du prisme sont des rectangles.

Ainsi la droite (HD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC). Elle est orthogonale à ce plan.

20 **a.** Le triangle AFC est équilatéral car ses côtés sont les diagonales de faces du cube. Donc la médiane (CI) est aussi la hauteur issue de C. Ainsi $(CI) \perp (AF)$.

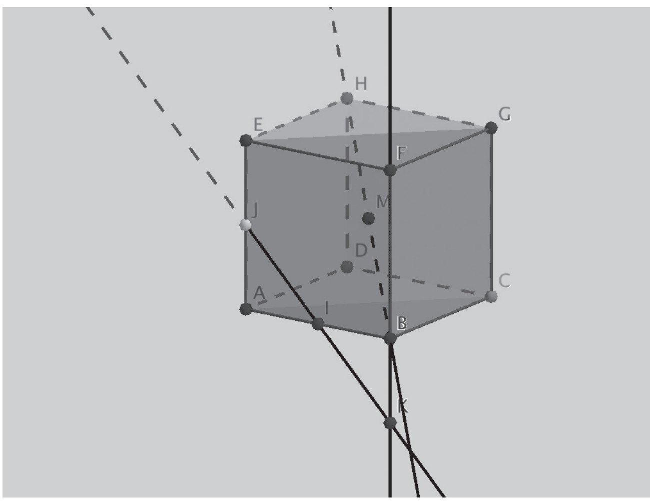
De plus $(AF)//(DG)$. On en déduit que $(CI) \perp (DG)$.

b. Le théorème des milieux appliqué au triangle AFC donne $(IJ)//(AC)$.

$(AC) \perp (BD)$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.

Ainsi $(IJ) \perp (BD)$.

21 **1.**



2. a. $(HE) \perp (EA)$ et $(HE) \perp (EF)$ donc $(HE) \perp (AFE)$.
Or $(EB) \subset (AFE)$. Ainsi $(HE) \perp (EB)$.

b. Les droites (GE) et (EB) ne sont pas perpendiculaires.

c. $(HE) \perp (FA)$ car $(HE) \perp (AFE)$.

d. La droite (EG) est incluse dans la face opposée à la face (ABC). Les deux faces étant parallèles, $(EG) // (ABC)$.

e. $(AC) \perp (DB)$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
$(AE) \perp (DB)$ car $(AE) \perp (ADB)$. Ainsi $(DB) \perp (ACE)$.
Or $(EAG) = (ACE)$. Il en résulte $(DB) \perp (EAG)$.

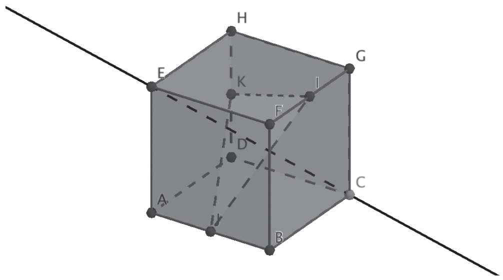
f. Les points H et B sont de part et d'autre du plan médiateur (EGC). Ainsi la droite (HB) coupe le plan (EGC).

3. a. $(IJ)//(EB)//(HC)$ et $(HC) \subset (BCH)$ donc $(IJ) //(BCH)$.

b. Les quatre points I, J, B et F sont coplanaires et les droites (IJ) et (BF) ne sont pas parallèles sinon J appartiendrait à l'arête (AE), donc elles sont sécantes.

c. $(BF) \subset (DBF)$ donc la droite (IJ) est sécante au plan (DBF).

22 a.



b. Les triangles IGC et IFE sont isométriques.

Donc $IC = IE$. Ainsi le point I appartient au plan médiateur de$[CE]$.

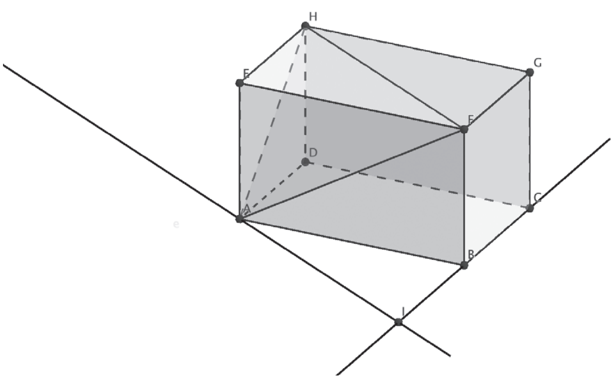
De même pour les points J et K.

Le plan IJK est donc le plan médiateur de $[CE]$. Ainsi la droite (CE) est orthogonale au plan (IJK).

c. La droite (IB) est orthogonale au plan (BCD) donc à toute droite de ce plan. Ainsi $(IB) \perp (BC)$. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle IBC permet de calculer JK en fonction du côté du carré.

On calcule de même les longueurs IJ et IK pour conclure que le triangle IJK est équilatéral.

23 a. c.



b. Les deux plans ont un point commun A, ils ne sont-donc pas parallèles.

d. Le point cherché est le point d'intersection I de la droite (BC) et de la parallèle à la droite (HF) passant par A.

Plans perpendiculaires

24 a. • (BCF), (ABF), (ADH) et (DCH).
• (HDF), (ABC) et (EHF).
• (AFG), (ABF) et (DCH).

b. Si $(HBC) \perp (ABC)$, (HBC) serait confondu avec (FBC) qui est perpendiculaire à (ABC) et qui le coupe suivant la droite (BC). Ce qui est faux car le point F n'appartient pas au plan (HBC).

25 1. a. Les triangles ADC et BCD sont équilatéraux. Les médianes sont donc également hauteurs.
Ainsi $(AJ) \perp (CD)$ et $(BJ) \perp (CD)$.

b. Le plan (CDA) contient la droite (CD) qui est orthogonale au plan (ABJ). Ces deux plans sont donc perpendiculaires.

2. Les faces perpendiculaires au plan (CDI) sont (ABC) et (ABD).

3. a. Le plan (CDI) contient la droite (CD) qui est orthogonale au plan (ABJ). Ces deux plans sont donc perpendiculaires.

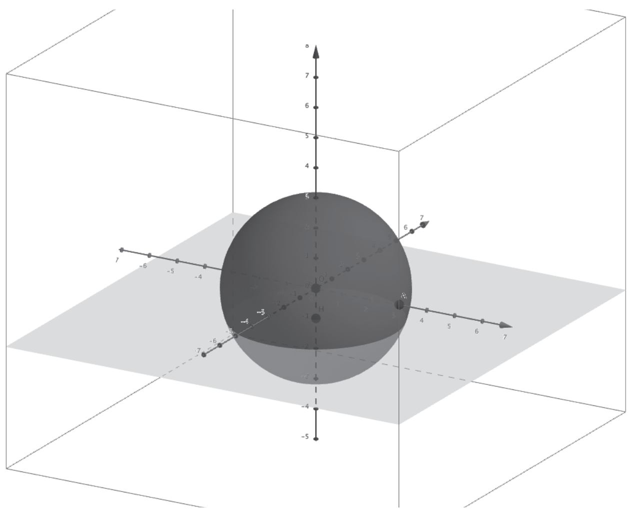
b. $(ABJ) \cap (CDI) = (IJ)$.

26 1. Le plan (MAB) contient la droite (MB) qui est orthogonale au plan (ABC). Ainsi les plans (ABC)et (MAB) sont perpendiculaires.

2. a. $(AC) \perp (AB)$ car le triangle ABC est rectangle en A.
$(AC) \perp (MB)$ car la droite (MB) est orthogonale au plan (ABC) qui contient la droite (AC).

b. Le plan (MAC) contient la droite (AC) qui est orthogonale au plan (MAB). Ainsi les plans (MAC) et (MAB) sont perpendiculaires.

27 a.

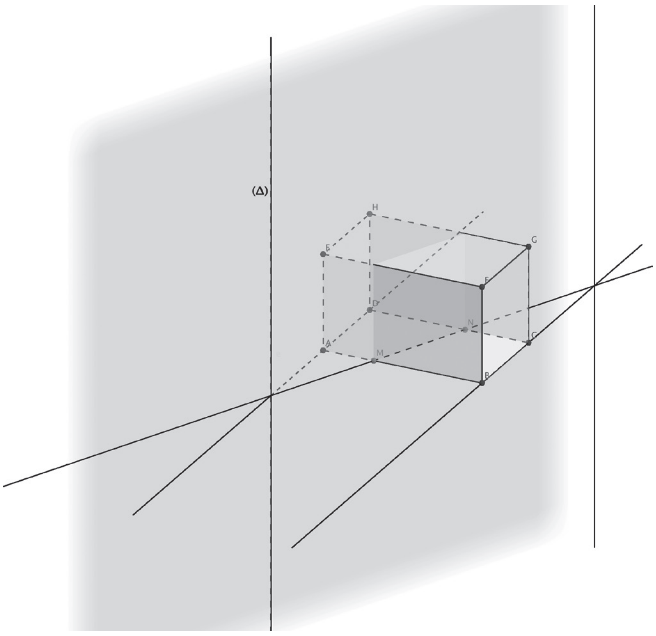


b. Le triangle *MOH est* rectangle en *H*.
Ainsi $HM^2 + HO^2 = OM^2$.
$M \in (S) \Leftrightarrow OM = r$.
Donc $HM^2 + d^2 = r^2 \Leftrightarrow HM = \sqrt{r^2 - d^2}$.

28 **1. a.** Les plans (*ABC*) et (*BEH*) sont sécants suivant la droite (*BC*).

b. Le plan (*AEG*) contient la droite (*AE*) qui est orthogonale au plan (*ABC*). Ainsi les plans (*ABC*) et (*AEG*) sont perpendiculaires.

2. a.

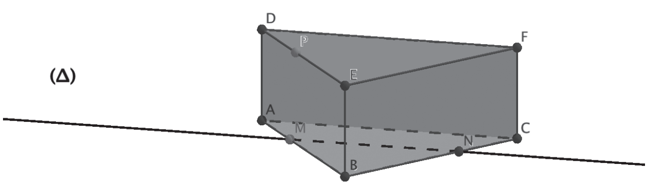


b. Les droites (*AD*) et (*MN*) sont sécantes. Or la première appartient au plan (*AEH*) et la deuxième au plan (*P*). Ces deux plans sont donc sécants.

c. Les droites (*BC*) et (*MN*) sont sécantes. Or lapremière appartient au plan (*BCG*) et la deuxième au plan (*P*). Ces deux plans sont donc sécants.

d. (*AEH)//*(*BCG*). Les droites d'intersection avec un troisième plan (*P*) sont donc parallèles.

29 **1.**



2. a. Les deux plans ont un point commun *M* et ne sont pas confondus, ils sont donc sécants.

b. La droite (*MN*) est parallèle à la droite (*DF*) et donc à la droite (*AC*). Le théorème de Thalès appliqué au triangle *ABC* donne $BN = \frac{2}{3}BC$.

3. b. (*MP*) //(*AD*) et donc $(MP) \perp (ABC)$.

Le plan (*MNP*) contient la droite (*MP*) qui est orthogonale au plan (*ABC*). Ces deux plans sont donc perpendiculaires.

30 **1.** $(AIJ) \cap (BCD) = (IJ)$.

2. a. $N \in (AJ) \Rightarrow N \in (AIJ)$ et $M \in (AI) \Rightarrow M \in (AIJ)$ donc *M*, *N* , *I* et *J* sont coplanaires.

b. $P \in (AIJ) \cap (BCD)$ et $(AIJ) \cap (BCD) = (IJ)$ donc $P \in (IJ)$.

31 **a.** Par construction $(IK) \subset (BCD)$. De plus $K \in (AJ)$ et $(AJ) \subset (AIJ)$. Donc $K \in (AIJ)$.
Finalement $(IK) = (AIJ) \cap (BCD)$.

b. Le point *A* est commun aux deux plans.
$M \in (IK) \Rightarrow M \in (AIJ)$ et $M \in (BD) \Rightarrow M \in (ABD)$.
Donc $(AM) = (AIJ) \cap (ABD)$.

32 • $(ABF) \perp (AEH)$; • (*EFG*) et (*ABC*) sécants ;
• $(EGC) \perp (BHD)$.

33 **a.** *AM*, *HF* et *AH* sont des diagonales de carrés isométriques. Donc elles sont de même longueur. Ainsi le triangle *AFH* est équilatéral.

b. $AC = AF$ donc *A* appartient au plan médiateur de [*CF*].

De même $GC = GF$ donc *G* appartient au plan médiateur de [*CF*].

On démontre de même que *A* et *G* appartiennent au plan médiateur de [*CH*].

c. La droite (*CF*) est orthogonale au plan (*AGF*) donc $(CF) \perp (AG)$. De même, $(CH) \perp (AG)$. Ainsi la droite (*AG*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*CFH*). Elle est donc orthogonale à ce plan.

34 **a.** La droite (*SO*) est orthogonale au plan (*ABC*) donc à toute droite de ce plan et en particulier (*CB*).

b. $(CB) \perp (SO)$ et $(CB) \perp (OI)$ donc $(CB) \perp (SOI)$. Le plan (*SOI*) contient la droite (*SO*) qui est perpendiculaire au plan (*ABC*). Donc $(SOI) \perp (ABC)$.

c. $(P) \perp (ABC)$.

35 **a.** Le point *B* est commun aux plans (*BAI*) et (*BCD*).
Comme ils ont un point commun et qu'ils ne sont pas confondus, on en déduit qu'ils sont sécants.

b. (*AI*) et (*CD*) sont coplanaires et sécantes.

c. Le point d'intersection *J* de ces deux droites appartient aux deux plans dans lesquels elles sont incluses.

d. $(BAI) \cap (BCD) = (BJ)$.

36 **a.** $(FCI) \perp (ABC)$; **b.** (*FCI*) et (*H*) sont sécants ;
c. $(AGL) \perp (DCI)$.

Se tester

37 **1.** Vrai ; **2.** Faux ; **3.** Vrai ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai ; **6.** Faux ; **7.** Vrai.

38 **1.** Vrai. (*SH)* ⊥ (*AB*C) donc la droite (SH) est ortho-

gonale à toute droite du plan (*AB*C) donc en particulier à la droite (*HA*).

2. Faux. (*SH)* ⊥ (*AB*C) donc (*SH)* ⊥ (*BC*).

3. Vrai. Le plan (*SHA*) contient la droite (*SH*) orthogonale au plan (*AB*C).

4. Faux. Les droites (*AD*) et (*BC*) sont sécantes.

39 **1. a.** ; **2. c.** ; **3. b.** ; **4. b.** ; **5. c.**

40 **1. c.** Car les points *O* et *A* sont communs aux deux plans.

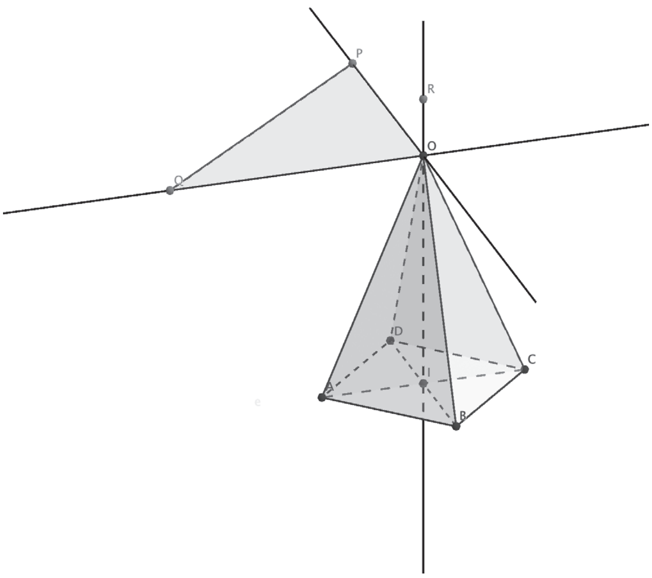
2. a. Car le plan (*SOA*) contient la droite (*SO*) orthogonale au plan (*AB*C).

3. a. Car le plan (*SBD*) contient la droite (*BD*) orthogonale aux deux droites (*AC*) et (*SO*) du plan (*SAC*).

4. c. (*SO*) ⊥ (*AB*C) donc la droite (*SO*) est orthogonale à toute droite du plan (*AB*C) donc en particulier à la droite (*CD*).

Exercices d'approfondissement

41 **a.**



b. (*OP*) ⊥ (*AOC)* et (*OI)* ⊂ (*AOC)*. Donc (*OP*) ⊥ (*OI)*. On démontre de même que (*OQ*) ⊥ (*OI)*.

c. La droite (*OI*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*OPQ*), elle est donc orthogonale à ce plan.

d. Or la droite (*OR*) est orthogonale au plan (*OPQ*). Les droites (*OI*) et (*OR*) ayant un point commun, elles sont confondues. Ainsi les points *O*, *I* et *R* sontalignés.

42 **a.** Le point *O* est équidistant des points *I* et *J*, donc il appartient au plan (P_1) médiateur de [*IJ*]. De même *O* appartient à (P_2).

b. *M* ∈ (P_1) donc *M* est équidistant de *I* et *J*.

Ainsi *MI* = *MJ*.

M ∈ (*P*2) donc *M* est équidistant de *J* et *K*.

Ainsi *MJ* = *MK*.

c. (Δ) ⊂ (P_1) ⇒ (Δ) ⊥ (*IJ*) et (Δ) ⊂ (P_2) ⇒ (Δ) ⊥ (*JK*).

Ainsi la droite (Δ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*IJK*). Donc (Δ) ⊥ (*IJK)*.

43 **a.** La droite (*SH*) est orthogonale au plan (*AB*C). Donc tout plan qui la contient est perpendiculaire au plan (*AB*C).

b. Les trois plans contiennent la droite (*SH*), donc ils sont perpendiculaires au plan (*ABC*).

c. La droite (*SA*) est perpendiculaire aux deux droites (*SB*)et (*SC*) du plan (*SBC*). Elle est donc orthogonale à ce plan.

d. (*SA*) ⊥ (*AB*C) ⇒ (*SA*) ⊥ (*BC*)

et (*SH)* ⊥ (*AB*C) ⇒ (*SH)* ⊥ (*BC*).

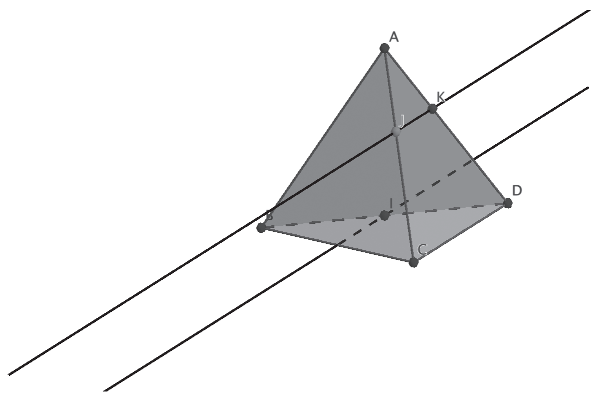
Ainsi la droite (*BC*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*SAH*). Donc (*BC)* ⊥ (*SAH)*.

e. (*BC*) ⊥ (*SAH*) ⇒ (*BC*) ⊥ (*AH*). Donc la droite(*AH*) est la hauteur issue de *A* du triangle *ABC*.

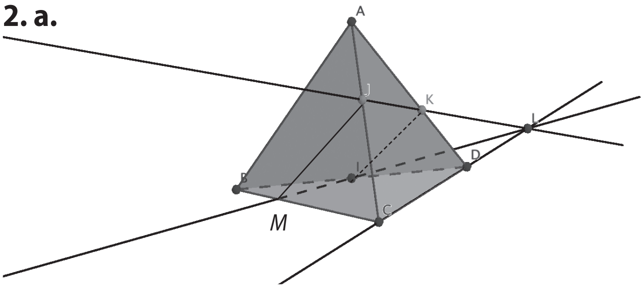
On démontre de même que (*BH*) et (*CH*) sont des hauteurs.

44 **1. a.** C'est le théorème du toit qui permet de dire que l'intersection des plans (*IJK*) et (*BCD*) est la parallèle à (*CD*) passant par *J*.

b.



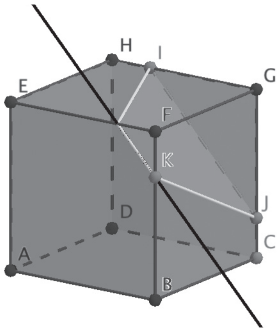
2. a.



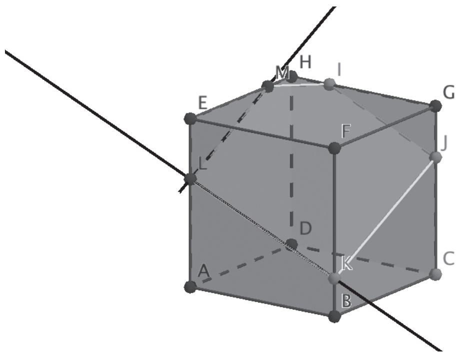
b. $(IJK) \cap (ABC) = (JM)$.

3. La section du tétraèdre est le quadrilatère *MIJK*.

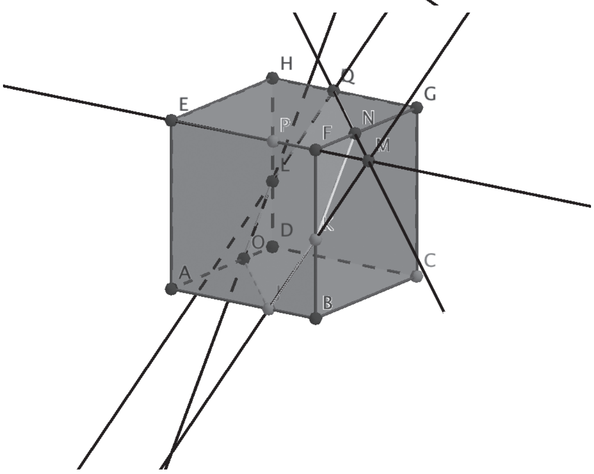
45 a.



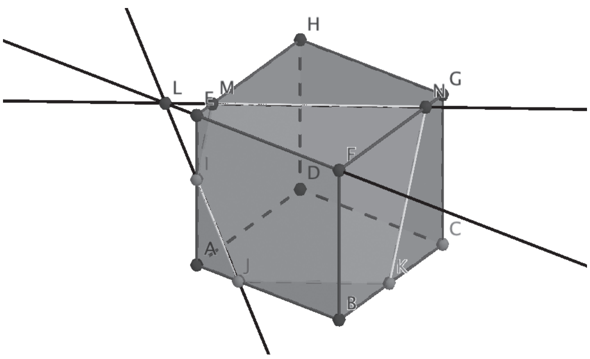
b.



c.



d.

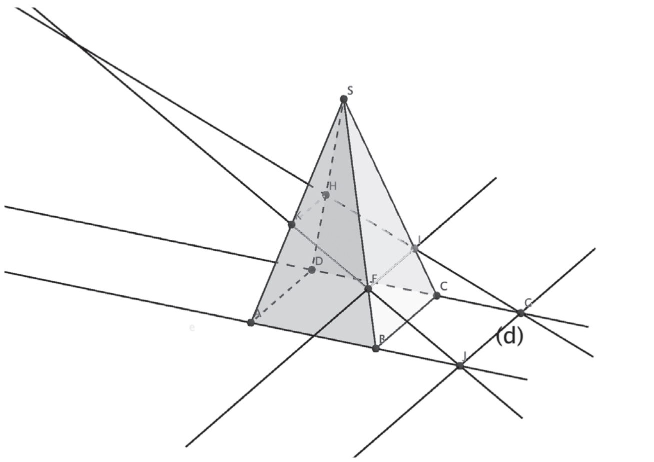


46 a. Les droites (*AD*) et (*BC*) sont des génératrices du cylindre. Elles sont donc parallèles.

b. On note x la longueur *OC*. Le théorème de Thalès donne l'égalité : $\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OC} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{x+10}{x} \Leftrightarrow x = 90$.

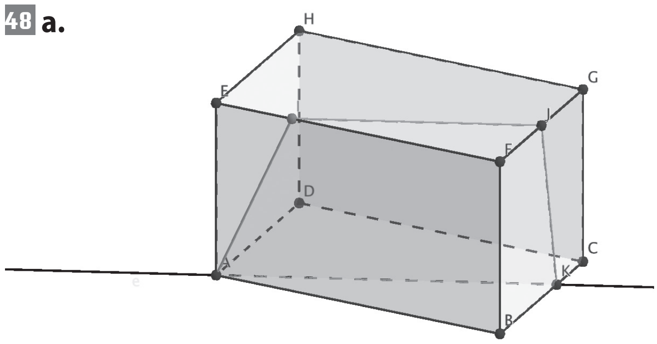
$\tan(\alpha) = \frac{BC}{OC} = 0{,}1$. Ainsi $\alpha \approx 6°$.

47 a. c.



b. D'après le théorème du toit, l'intersection cherchée est la parallèle à (*d*) passant par le point *I*.

48 a.



b. L'intersection est la parallèle à (*IJ*) passant par *A*.

c. La trace de la section sur le plan (*AIJ*) est contenue dans la parallèle précédente.

d. La section est un trapèze.

49 a. $(CD) \perp (AB)$ et $(CD) \perp (BH)$ donc $(CD) \perp (ABH)$.

Ainsi le plan (*BCD*) contient une droite orthogonale à deux droites sécantes du plan (*ABH*). Donc $(BCD) \perp (ABH)$.

De même pour le plan (*ADH*).

b. $(BD) \perp (AH)$ et $(BD) \perp (CH)$. Donc $(BCD) \perp (ACH)$. Ainsi $(AC) \perp (BD)$.

50 a. Si $(d) // (P)$, alors $(P) \perp (BCD)$ et donc $(AD) // (BCD)$, ce qui est faux.

b. $O \in (P) \Rightarrow OA = OD$.

De plus, tout point de (*d*) est équidistant de *B*, *C* et *D* grâce au théorème de Pythagore.

Ainsi *O* est équidistant de *A*, *B*, *C* et *D*.

51 **a.** *ASCT* est un losange donc ses diagonales sont perpendiculaires. Ainsi $(SO) \perp (AC)$.
SBD est un triangle isocèle en *S*. Ainsi $(SO) \perp (BD)$.
La droite (*SO*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*P*). Elle est donc orthogonale à ce plan.

b. *ABCD* est un parallélogramme car *O* est le milieu de ses diagonales.

52 **1. a.** Dans le triangle *FCH*, *M* est le milieu de [*FH*] et *J* le milieu de [*FC*]. Le théorème de Thalès permet de dire que $(JM) // (CH)$.

b. Démonstration analogue au **1. a.** dans le triangle *ACH*.

c. Par transitivité, $(JM) // (NL)$.

2. $(JM)//(NL) \Rightarrow (JM)//(NKL)$.
On peut démontrer de manière analogue que :
$(IJ) // (LK) \Rightarrow (IJ) // (NKL)$. Ainsi le plan (*IJM*) contient deux droites sécantes parallèles au plan (*NKL*). Donc $(IJM) // (NKL)$.

3. Le plan (*MNK*) contient la droite (*MN*) qui est perpendiculaire aux droites (*IK*) et (*LJ*) du plan (*IJK*).
Ainsi $(IJK) \perp (MNK)$.

53 **a.** $(JK)//(AM) \Rightarrow (JK)//(P) \Rightarrow (JK) \perp (d')$.
Or $(IK) // (d')$. Donc $(JK) \perp (IK)$, le triangle *IJK* est rectangle en *K*.

b. Le lieu est le plan médiateur du segment[*AB*].

54 **1. a.** La droite (*DH*) est orthogonale aux deux droites (*HE*) et (*HG*) sécantes du plan (*HGE*). Elle est donc orthogonale à ce plan.

b. $(HI) \subset (HGE)$ donc $(HI) \perp (HD)$.

c. *HII'D* est un rectangle car ses côtés opposés sont de même longueur et ses angles sont droits car *ABCDEFGH* est un cube.

d. $(II') // (HD)$ et $(HD) \subset (AHE)$. Donc $(II') // (AHE)$.

2. a. Le théorème de Thalès dans le triangle *EGH* donne $JM = \frac{1}{2}HG$. De même, dans le triangle *ADB*, on a $J'M' = \frac{1}{2}AB$. Or $AB = HG$. On en déduit que $JM = J'M'$.

b. *JMM'J'* est un parallélogramme car il a deux côtés *JM*et *J'M'* parallèles et de même longueur. De plus, $(JM) // (HG)$ et la droite (*HG*) est orthogonale au plan (*AHE*). On en déduit que la droite (*JM*) est orthogonale au plan (*AHE*), donc à la droite (*MM'*). Le quadrilatère *JMM'J'* est un parallélogramme qui a un angle droit. C'est donc un rectangle.

c. Les côtés opposés d'un rectangle sont parallèles. Donc $(JJ') // (MM')$. Comme $(MM') \subset (AHE)$, on en déduit que $(JJ') // (AHE)$.

3. Il suffit de projeter orthogonalement *K* et *K'* respectivement sur [*FG*] et[*BC*].

4. a. Le théorème des milieux appliqué au triangle *AED* assure que $\overrightarrow{PM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$. De même, dans le triangle *EHD*, on a $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HD}$. Ainsi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'}$.

b. La projection orthogonale conserve lesmilieux.

c. En utilisant une méthode analogue , on peut démontrer que *R*, *S* et *T* se projettent orthogonalement en *P*. Ainsi *P*, *Q*, *R*, *S* et *T* sontalignés.

5. Les points *I* et I' sont les points d'intersection des diagonales des faces supérieure et inférieure du cube. Ils appartiennent donc aux deux surfaces.
L'intersection contient d'autres points car par exemple la droite (*KK'*) a ses points *K* et *K'* de part et d'autre de la deuxième surface réglée.

55 **1^er^ cas : (*d*) et (*d'*) sont coplanaires**

1. a. Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

b. Si on trace deux droites perpendiculaires à (*d*) et à (*d'*), la figure obtenue en joignant les points d'intersection est un quadrilatère qui a quatre angles droits. C'est donc un rectangle et donc ses côtés opposés sont de même longueur.

2. a. Si deux droites sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre (car (*d*) et (*d'*) sont coplanaires).

b. Il n'y a donc pas de perpendiculaire commune aux deux droites.

3. a. Si $(d') // (d'')$, comme $(d) \perp (d'')$ on en déduirait que $(d) \perp (d')$ ce qui contredit l'énoncé.

b. Si l'angle $\widehat{ACB}$ est droit alors $(d)//(d')$ ce qui contredit l'énoncé.

c. Il n'y a donc pas de perpendiculaire commune aux deux droites.

2^e^ cas : (*d*) et (*d'*) ne sont pas coplanaires

a. Le plan (*P*) est celui contenant (*d*) et la parallèle à (*d'*) passant par un point quelconque de (*d*).
Le plan (*P'*) est celui contenant (*d'*) et une perpendiculaire à (*P*).

b. Si $(d)//(P')$ alors (*d*) est parallèle à la droite d'intersection des deux plans et donc à (*d'*). Contradiction.

c. (*d''*) est orthogonale à (*P*) donc à toute droite de (*P*), donc en particulier à (*d*).
Comme $(d')//(P)$, on en déduit que $(d'') \perp (d')$.

d. La droite orthogonale à un plan en un point est unique. Ainsi (*d''*) est unique.

Cas général :

Lorsque deux droites ne sont pas coplanaires, elles ont une perpendiculaire commune unique. Lorsqu'elles sont coplanaires, elles en ont une infinité si elles sont parallèles et aucune sinon.