5e

NOUVEAU PROGRAMME

Collection de Mathématiques

CARGO

NOUVELLE ÉDITION

LIVRE DU PROFESSEUR

Partie 2

(pages 47 à 84)

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

7 Distances et cercles

Manuel pages 75 à 86

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Cercle ; son intérieur et son extérieur [1 p. 78]	10, 11, 12, 13	30, 31	35, 42, 43, 44, 45, 46
2	Inégalité triangulaire [2 p. 78]	14, 15, 16, 17, 18	33	36, 37, 38
	Apprendre à utiliser l'inégalité triangulaire [1 p. 80]	**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, 19, 20		
3, 4, 5	Axes de symétrie d'un segment [3 p. 79]			
	Équidistance et médiatrice [4 p. 79]	21, 22, 26	32	39, 40, 41, 42, 43, 44, 46
	Apprendre à utiliser les propriétés de la médiatrice [2 p. 81]	**6**, **7**, **8**, **9**, 23, 24, 25, 27, 28, 29	34	

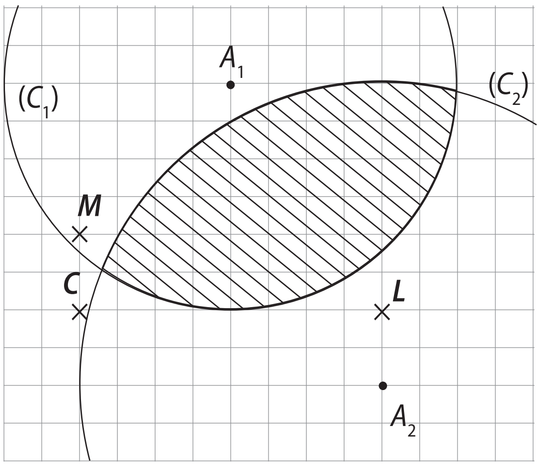
*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Introduction et contrôle des pré-requis

Les antennes relais

1. Devant être à moins de 300 m pour capter le signal de l'antenne relais A_1:
– Marie peut capter ce signal ;
– Laélie ne peut pas capter ce signal.

2. a.



b. La limite, à l'intérieur de laquelle on capte le signal de l'antenne A_1, est le cercle (C_1) de centre A_1 et de rayon 300 m (6 carreaux sur le dessin).

c. C étant à l'extérieur du cercle (C_1), Che ne peut capter le signal de l'antenne relais A_1.

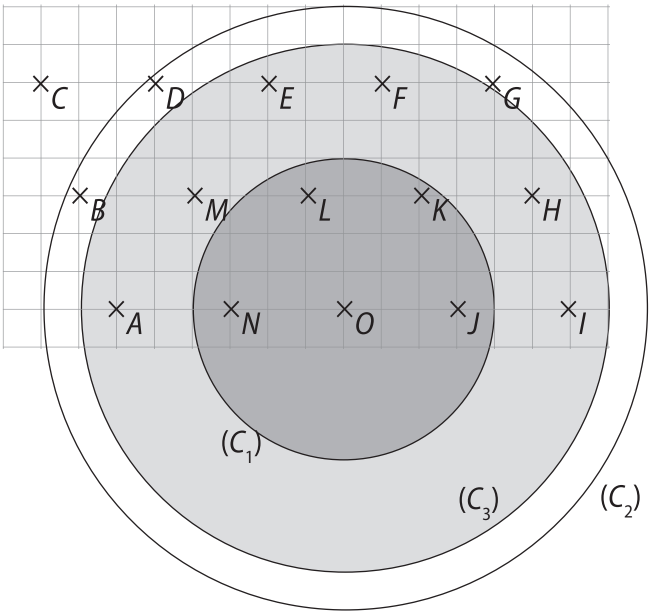
L'antenne A_2 émet son signal jusqu'à 400 m ; donc la limite, à l'intérieur de laquelle on capte le signal de cet te antenne, est le cercle (C_2) de centre A_2 et de rayon 400 m (8 carreaux sur le dessin) ; seule Laélie peut capter ce signal.

Pour capter le signal de chacune des deux antennes, Bernard doit être situé dans la zone hachurée.

Activités d'apprentissage

1 Distances et cercles

1.



2. a. $EO \approx 3{,}2$ cm.

b. Cette distance est comprise entre 2 cm et 4 cm.

3. et **4.** C'est en traçant, avec le compas, les cercles (C_1) et (C_2), de même centre O et de rayons respectifs 2 cm et 4 cm, que l'on peut compléter le tableau suivant :

	inférieure à 2 cm	entre 2 cm et 4 cm	supérieure à 4 cm
Points dont la distance au point *O* est :	*O, N, L, K, J*	*A, B, D, E, F, G, H, I, M*	*C*

5. C'est en traçant, avec le compas, le cercle (C_3), de centre *O* et de rayon 3,5 cm, que l'on détermine les points situés à plus de 3,5 cm de *O* : *B*, *C*, *D* et *G*.

2 Des longueurs prises au hasard

1. Seul le tirage de Adze (6, 4 et 5) permet de construire un triangle ; le tirage de Fua conduit à trois points alignés et celui de Noah à une construction impossible.

2. a. Exemples de tirages ne permet tant pas de construire des triangles :

1, 3 et 5 ; 1, 2 et 4 ; 1, 1 et 3 ; 2, 5 et 2… *il y en a d'autres.*

b. Raison pour laquelle il n'est pas possible de construire des triangles avec ces triplets de nombres :

$5 > 1 + 3$; $4 > 1 + 2$; $3 > 1 + 1$; $5 > 2 + 2$;

dans chaque cas : *le plus grand des trois nombres est supérieur à la somme des deux autres* ; or : *le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite*.

3. a. Tirages permettant de construire des triangles :

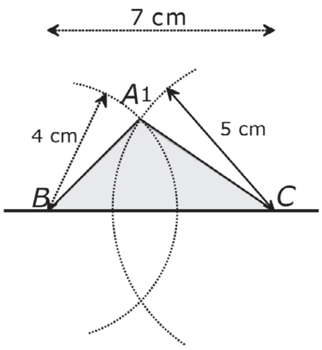
1, 3 et 3 ; 2, 3 et 4 ; 2, 2 et 3 ; 4, 5et 2 … *il y en a d'autres*.

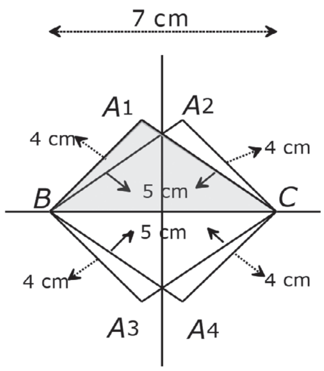
b. Condition pour laquelle trois longueurs peuvent correspondre aux longueurs des côtés d'un triangle :

la plus grande des trois longueurs est inférieure à la somme des deux autres ;

et : *le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite*.

3 Triangles symétriques





Construction, avec la règle graduée et le compas :

• d'un triangle A_1BC des quatre triangles A_1BC, A_2BC, A_3BC et A_4BC.

1. Ci-contre :

[*BC*] est un segment de 7 cm de long ;

A_1BC, A_2BC, A_3BC et A_4BC sont les quatre triangles dont les côtés (autres que [*BC*]) mesurent 4 cm et 5 cm.

2. La figure obtenue admet deux axes de symétrie :

la droite (*BC*) ;

la médiatrice de[*BC*].

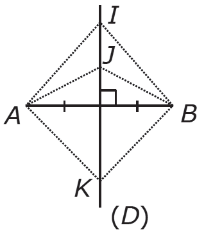
4 Médiatrice et équidistance

1. a. Ce n'est pas en 1, où (*D*) n'est pas perpendiculaire au support du segment [*EF*], ni en 3, où (*D*) ne passe pas par le milieu du segment [*EF]*, que la droite (*D*) est un axe de symétrie du segment [*EF*].

C'est donc en 2, où (*D*) passe par le milieu du segment [*EF*] et est perpendiculaire à son support, que la droite (*D*) est un axe de symétrie du segment [*EF*].

b. Cet axe de symétrie est appelé la *médiatrice* du segment.

2.



a. (*D*) est la médiatrice de[*AB*].

b. *I*, *J* et *K* sont trois points de (*D*).

c. d. On constate que : $IA = IB$, $JA = JB$ et $KA = KA$.

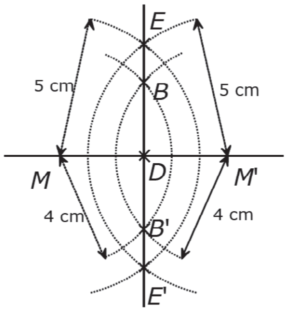
Dans la symétrie par rapport à la droite (*D*) :

le point *B* est le symétrique du point *A* et le point *I* est le symétrique du point *I* ; par conséquent, les segments [*AI*] et [*BI*] sont symétriques ; or, deux segments symétriques par rapport à une droite ont la même longueur ; donc, les segments [*AI*] et [*BI*] ont la même longueur.

5 Équidistance

1. Si 2 400 m séparent les deux mairies, sur un dessin (où 1 cm représente 400 m) les points *M* et *M'* les représentant seront tels que $MM' = \frac{2\,400}{400} = 6$ cm.

2.



$MM' = 6$ cm.

a. La construction de l'école est possible en *E* ou en *E'*, les deux points situés sur le dessin à 5 cm de *M* et *M'*. (Ces 5 cm représentent en réalité $5 \times 400 = 2\,000$ m.)

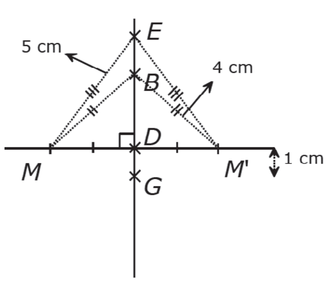
b. La construction de la bibliothèque est possible en *B* ou en *B'*, les deux points situés sur le dessin à 4 cm de *M* et *M'*. (Ces 4 cm représentent en réalité $4 \times 400 = 1\,600$ m.) Le dispensaire, situé à 1 200 m de chaque mairie, ne peut être construit qu'au milieu *D* du segment[*MM'*].

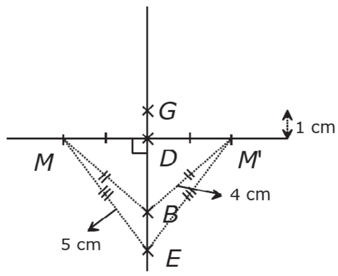
3. Tous les points construits en **2.** appartiennent à la médiatrice du segment [*MM'*].

4. Située à égale distance des deux mairies, la gare routière ne pourra être construite que sur cette médiatrice de[*MM'*].

5. Sachant que l'emplacement de la gare ne sera pas du même côté que l'école et la bibliothèque par rapport à la droite (*MM'*), à 400 m du dispensaire, sa construction n'est possible qu'en *G*, point situé sur le dessin à 1 cm de *D*.

Deux dessins sont alors possibles :





Méthodes et savoir-faire

1. Apprendre à utiliser l'inégalité triangulaire

1 **1. a.** Il est possible de tracer un triangle dont les côtés mesurent 5,9 cm ; 6,5 cm et 2,3 cm car $5{,}9 + 2{,}3 > 6{,}5$;

b. Il est impossible de tracer un triangle dont les côtés mesurent 0,3 dm ; 0,6 dm et 0,25 dm car $0{,}3 + 0{,}25 < 0{,}6$.

c. Il est possible de tracer un triangle dont les côtés mesurent 47 mm ; 73 mm et 35 mm car $47 + 35 > 72$.

2 *BOA* est le seul triangle possible car $9 + 6 > 12$;

les autres sont impossibles :

ANE car $37 + 52 < 92$;

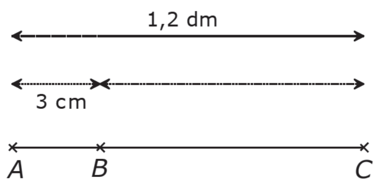
OIE car $3{,}6 + 3{,}5 < 7{,}2$;

RAT car $5{,}6 + 8{,}1 < 13{,}8$.

3 **a.** $I \notin [AB]$ car $7 + 14 > 20$;
b. $I \in [AB]$ car $45 + 33 = 78$;
c. $I \notin [AB]$ car $6,7 + 4,8 > 10,5$;
d. $I \in [AB]$ car $5,6 + 1,5 = 7,1$.

4 Les points A, B et L sont alignés car $1,4 + 2,7 = 4,1$.
Les points C, D et I ne sont pas alignés car $42 + 21 > 53$.
Les points H, N et G sont alignés car $4,4 + 19,4 = 23,8$.
Les points F, O et E ne sont pas alignés car $146 + 132 > 274$.

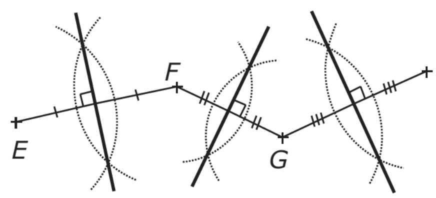
5



$CB = CA - AB$
$CB = 12 - 3 = 9$ cm.

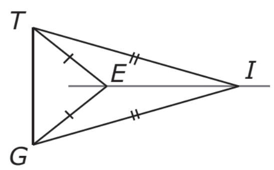
2. Apprendre à utiliser les propriétés des médiatrices

6



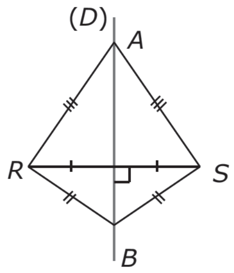
Pour chaque segment, trace deux cercles sécants, de même rayon et centrés aux extrémités de ce segment ; la droite, passant par les deux points d'intersection de ces cercles, est la médiatrice de ce segment.

7



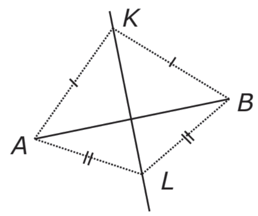
1. Les points I et E, équidistants des extrémités du segment$[TG]$, appartiennent à la médiatrice de ce segment.
2. La droite (IE), médiatrice du segment $[TG]$, est perpendiculaire à la droite (TG).

8

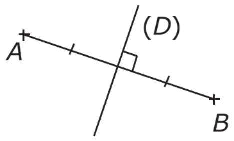


1. (D) est la médiatrice du segment $[RS]$.
2. Si $A \in (D)$ et $B \in (D)$, alors les points A et B sont équidistants de R et S ; donc les triangles ARS et BRS sont isocèles, respectivement en A et B.

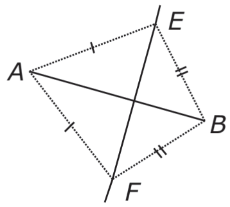
9 **1.**



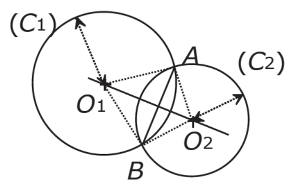
K et L sont équidistants de A et B, donc (KL) est la médiatrice de $[AB]$.
2.



La droite (D) passe par le milieu de $[AB]$ et est perpendiculaire à son support, donc (D) est la médiatrice de $[AB]$.
3.



La droite (EF) n'est pas la médiatrice de $[AB]$.
4.

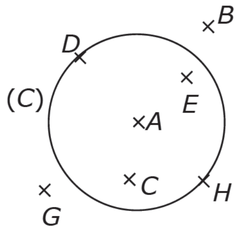


O_1 et O_2 sont équidistants A et B, donc (O_1O_2) est la médiatrice de $[AB]$.

Exercices d'application

Régionnement du plan par un cercle

10 ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre *A* et de rayon 1,8 cm.

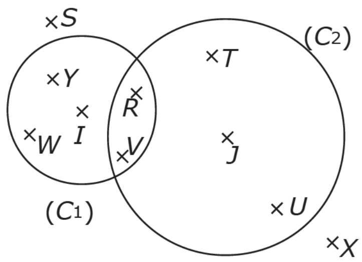


1. Points situés à exactement 1,8 cm de *A* : *D* et *H*.

2. Points situés à moins de 1,8 cm de *A* : *C* et *E*.

3. Points situés à plus de 1,8 cm de *A* : *G* et *B*.

11 ($\mathscr{C}_1$) est un cercle de centre *I* et de rayon 1,3 cm.
($\mathscr{C}_2$) est un cercle de centre *J* et de rayon 2 cm.



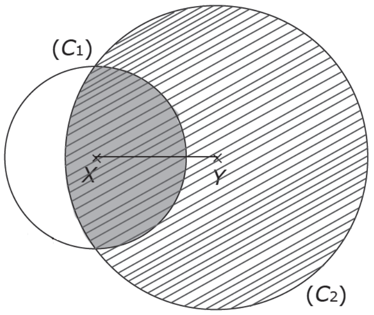
1. Points situés à la fois à moins de 1,3 cm de *I* et à moins de 2 cm de *J* : *R* et *V*.

2. Points situés à la fois à moins de 1,3 cm de *I* et à plus de 2 cm de *J* : *I*, *W* et *Y*.

3. Points situés à la fois à plus de 1,3 cm de *I* et à moins de 2 cm de *J* : *J*, *T* et *U*.

4. Points situés à la fois à plus de 1,5 cm de *I* et à plus de 2 cm de *J* : *S* et *X*.

12 **1.** *XY* = 4 cm,
($\mathscr{C}_1$) est le cercle de centre *X* et de rayon 3 cm, ($\mathscr{C}_2$) est le cercle de centre *Y* et de rayon 5 cm.



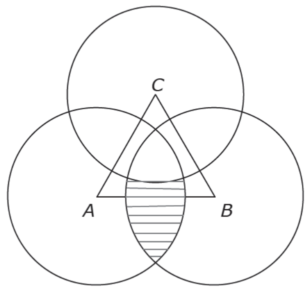
2. a. En gris foncé la partie du plan contenant les points situés à la fois :

• à moins de 3 cm de *X*,

• à moins de 5 cm de *Y*.

b. En hachuré la partie du plan contenant les points situés à la fois à plus de 3 cm de *X* et à moins de 5 cm de *Y*.

13 **1.** *ABC* est un triangle équilatéral de côté 4 cm ; les 3 cercles ont pour centres les sommets de ce triangle et pour rayon 3 cm.



2. En hachuré la partie du plan contenant les points situés à la fois :

• à moins de 3 cm de *A* et de *B*,

• à plus de 3 cm de *C*.

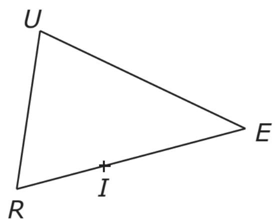
Inégalité triangulaire

14 **a.** $RU < RE + EU$;

b. $RI + IE = RE$;

c. $ER + RU > EU$;

d. $RE < RU + UE$.



15 Si deux côtés d'un triangle mesurent respectivement 12 cm et 8 cm, alors le troisième côté :

a. ne peut pas mesurer 3 cm car 8 + 3 < 12 ;

b. peut mesurer 5 cm car 8 + 5 > 12 ;

c. peut mesurer 8 cm car 8 + 8 > 12 ;

d. peut mesurer 12 cm car 8 + 12 > 12.

16 Si un triangle *EFG* est tel que *EF* = 6,8 cm et *EG* = 4,7 cm
alors la longueur *FG* :

• peut être égale à 2,3 cm car 4,7 + 2,3 > 6,8 ;

• peut être égale à 8,4 cm car 4,7 + 6,8 > 8,4 ;

• ne peut pas être égale à 2 cm car 4,7 + 2 < 6,8 ;

• peut être égale à 10 cm car 4,7 + 6,8 > 10 ;

• peut être égale à 6,5 cm car 6,5 + 4,7 > 6,8 ;

• ne peut pas être égale à 11,8 cm car 6,8 + 4,7 < 11,8.

17 Si le côté [*ST*] d'un triangle, isocèle en *R*, mesure 7 cm :

• il est possible que *SR* = 3,51 cm car 3,51 + 3,51 > 7 ;

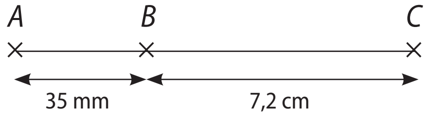
• il n'est pas possible que *SR* = 3,4 cm car 3,4 + 3,4 < 7 ;

• il est possible que *SR* = 1 m car 100 + 100 > 7.

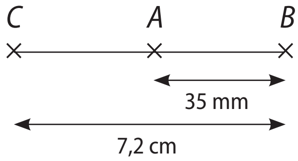
18 Si un triangle isocèle a un côté de longueur 12,5 cm et un autre de longueur 6,2 cm, alors :
- le 3^e côté ne mesure pas 6,2 cm car $6{,}2 + 6{,}2 < 12{,}5$;
- le 3^e côté mesure 12,5 cm car $12{,}5 + 6{,}2 > 12{,}5$.

19 **1.** $5{,}2 + 4{,}6 + 7{,}1 = 16{,}9$;
donc les points *A*, *B*, *C* et *D* sont alignés.
2. $3{,}2 + 3{,}7 = 6{,}9$ et $3{,}7 + 4{,}6 = 8{,}3$;
donc les points *E*, *F*, *G* et *H* ne sont pas alignés, alors que les points *E*, *F* et *G* le sont.

20 Si *A*, *B* et *C* sont alignés, $AB = 35$ mm et $BC = 7{,}2$ cm, alors deux cas de figures peuvent se présenter :
- ou bien *B* est entre *A* et *C* et $AC = 3{,}5 + 7{,}2 = 10{,}7$ cm ;

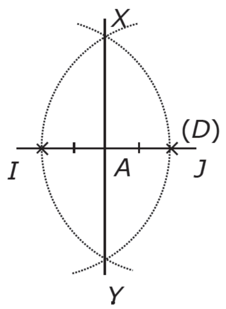


ou bien *A* est entre *B* et *C* et $AC = 7{,}2-3{,}5 = 3{,}7$ cm.

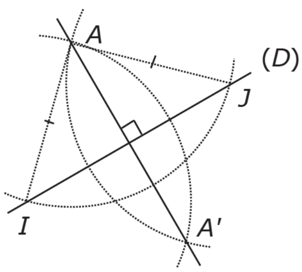


Problèmes de construction

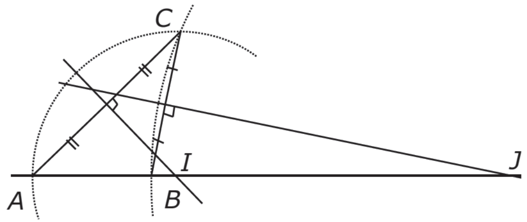
21 **1.** $A \in (D)$.
2. *I* et *J* sont deux points de la droite (*D*), tels que *A* soit le milieu de [*IJ*].
3. Le cercle de centre *I*, passant par *J*, et le cercle de centre *J*, passant par *I*, sont sécants en deux points *X* et *Y*, équidistants de *I* et *J*.
On en déduit que la droite (*XY*) est la médiatrice de [*IJ*]. Comme cette médiatrice passe par *A*, (*XY*) est la perpendiculaire à la droite (*D*) passant par *A*.
Commentaire : pour cette construction, n'ont été utilisés que le compas et la règle non graduée.



22 **1.** $A \notin (D)$.
2. Un cercle centré en *A* coupe (*D*) en deux points *I* et *J*, équidistants de *A*.
3. Les cercles centrés en *I* et *J*, passant par *A*, ont même rayon (puisque $IA = JA$) et sont sécants en un second point *A'*, tel que $IA' = JA'$.
La droite (*D*), qui passe par les points *I* et *J* équidistants de *A* et *A'*, est la médiatrice de [*AA'*].
(*AA'*) est donc la perpendiculaire à (*D*) passant par *A*.
Commentaires : pour cette construction n'ont été utilisés que le compas et la règle non graduée.

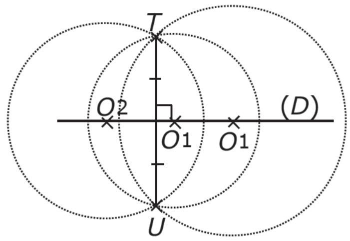


23 **1.** *ABC* est un triangle tel que :
$AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm et $CA = 7$ cm.



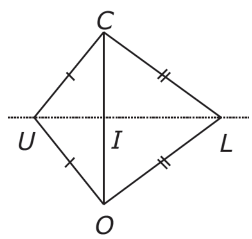
2. a. Le point *I* sur (*BA*), centre d'un cercle passant par *A* et *C*, est le point d'intersection avec (*BA*) de la médiatrice du segment [*AC*].
b. Le point *J* sur (*BA*), centre d'un cercle passant par *B* et *C*, est le point d'intersection avec (*BA*) de la médiatrice du segment [*BC*].

24 Les trois points, O_1, O_2 et O_3, centres de cercles passant par *T* et *U* doivent être équidistants de *T* et *U*, c'est-à-dire appartenir à la médiatrice (*D*) de [*TU*].



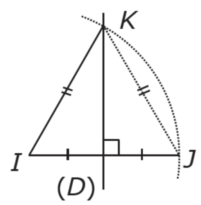
Justifier, démontrer

25 **1.**



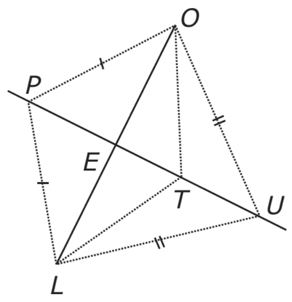
2. a. Les points *U* et *L* sont équidistants de *C* et *O*, puisque les triangles *COU* et *COL* sont isocèles respectivement en *U* et *L*.
b. On en déduit que la droite (*UL*) est la médiatrice du segment [*CO*].
c. Cette droite coupe [*CO*] en son milieu *I*.

26 **1.**



2. *K* appartient à la médiatrice du segment [*IJ*], de longueur 5 cm, et $IK = 5$ cm.
On en déduit que $KI = KJ = IJ = 5$ cm, c'est-à-dire que le triangle *IJK* est équilatéral.

27



1. *T* est-il équidistant de *O* et *L* ?

Schéma de démonstration :

P et *U* sont équidistants de *O* et *L*.

↓

Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

↓

P et *U* sont sur la médiatrice de [*OL*].

↓

(*PU*) est la médiatrice de [*OL*]. | *T* est un point de (*PU*).

↓

Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

↓

T est équidistant de *O* et *L*.

2. *E* est-il le milieu de [*OL*] ?

Schéma de démonstration :

(*PU*) est la médiatrice de [*OL*]. | *E* est le point d'intersection de [*OL*] et(*PU*).

↓

Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

↓

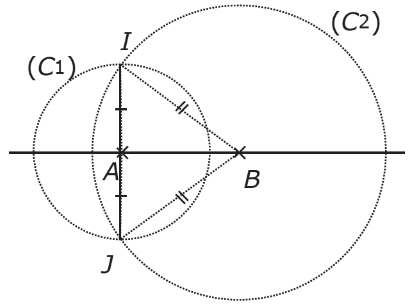
E est le point de [*OL*] équidistant de *O* et *L*.

↓

E est le milieu de [*OL*].

3. Quatre cercles, passant par *O* et *L*, peuvent être tracés avec les points de la figure ; ils ont pour centres *P*, *E*, *T* et *U*.

28 **1.**

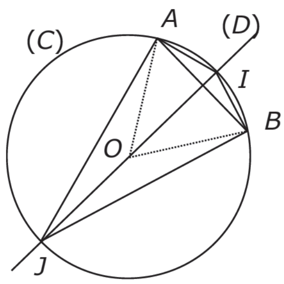


2. *AI* = *AJ* = 3 cm, donc *A* appartient à la médiatrice du segment [*IJ*] ;

BI = *BJ* = 5 cm, donc *B* appartient à la médiatrice du segment [*IJ*].

On en déduit que la droite (*AB*) est la médiatrice de [*IJ*].

29

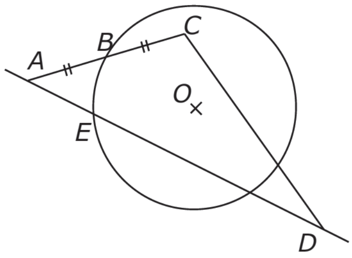


1. *OA* = *OB* = rayon du cercle ($\mathscr{C}$), donc le point *O*, équidistant de *A* et *B*, appartient à la médiatrice (*D*) de la corde [*AB*].

2. *I* et *J*, points d'intersection de (*D*) et ($\mathscr{C}$), sont équidistants de *A* et *B* ; donc les triangles *AIB* et *AJB* sont isocèles respectivement en *I* et *J*.

Bien comprendre, mieux rédiger

30 *O* est le centre du cercle ; $B \in [AC]$ et $E \in [AD]$.



• Le point *C* est à l'intérieur du cercle et à l'extérieur du segment [*AB*].

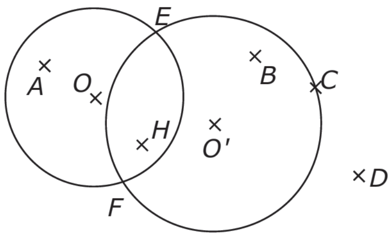
• Le point *D* est à l'extérieur du segment [*BC*] et à l'extérieur du cercle.

• Le point *B* est équidistant de *A* et de *C*.

• Le point *O* est à l'extérieur des segments [*BC*] et [*ED*] et à l'intérieur du cercle. Il est aussi équidistant de *B* et de *E*.

• Le point A est à l'extérieur du segment [*ED*].

31



• *A* est un point du disque de centre *O*.

• *C* est un point du cercle et du disque de centre *O'*.

• *H* est un point de l'intersection du disque de centre *O* et du disque de centre *O'*.

• *E* et *F* sont les seuls points d'intersection du cercle de centre *O* et du cercle de centre *O'*.

• *B* est un point du disque de centre *O'* car il est à l'intérieur du cercle de même centre.

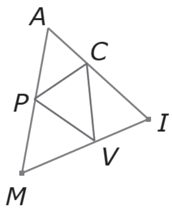
32 **1.** Dans la figure de l'exercice **31** :

a. La droite (*EF*) n'est pas la médiatrice du segment [*OO'*] ; en effet ni *E* ni *F* ne sont équidistants de *O* et de *O'*.

b. La droite (*OO'*) est la médiatrice du segment [*EF*] ; en effet *O* et *O'* sont équidistants de *E* et de *F*.

2. Pour que la droite (*EF*) soit la médiatrice du segment [*OO'*] et la droite (*OO'*) soit la médiatrice du segment [*EF*], il faut que les deux cercles aient le même rayon.

33 **1.**



2. a. $PC < PA + AC$; $CV < CI + IV$; $PV < PM + MV$;

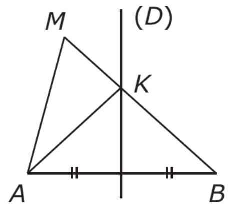
D'où $PC + CV + PV < PA + AC + CI + IV + PM + MV$

b. $PC + CV + PV < PA + PM + AC + CI + IV + MV$

$PC + CV + PV < AM + AI + IM$.

c. Il s'agissait de démontrer que le périmètre du triangle *PCV* est inférieur au périmètre du triangle *AMI*.

34



1. D'après l'inégalité triangulaire, dans le triangle *MKB*, $MK + KA > MA$.

Les points *M*, *K* et *B* sont alignés dans cet ordre, donc $MK + KB = MB$.

(*D*) est la médiatrice de [*AB*] et $K \in (D)$, donc $KA = KB$.

En remplaçant *KA* par *KB*, je constate que :

$MK + KB > MA$ et $MK + KB = MB$; donc $MA < MB$.

2. La médiatrice (*D*) d'un segment [*AB*] détermine deux demi-plans. Si un point *M* appartient au demi-plan contenant *A*, alors $MA <$ MB. Si *M* appartient au demi-plan contenant *B*, alors $MB < MA$.

Exercices d'approfondissement

35 **Décrire des zones**

1. La zone composée des points situés à la fois à moins de 1,5 cm de *A*, à plus de 1,2 cm de *D* et à moins de 1,2 cm de *B* a pour couleur : vert.

2. La zone rouge est composée des points situés à la fois à moins de 1,5 cm de *A* et à moins de 1,2 cm de *D* ;

La zone jaune est composée des points situés à la fois à plus de 1,5 cm de *A*, à moins de 1,2 cm de *D*, à moins de 1,2 cm de *B* et à plus de 1,9 cm de C ;

La zone bleue est composée des points situés à la fois à plus de 1,2 cm de *D*, à plus de 1,2 cm de *B* et à moins de 1,9 cm de *C*.

36 **Possible ou impossible ?**

a. Construire un triangle *ABC* isocèle en *A* tel que $AB =$ 7,4 cm et $BC =$ 15,2 cm est impossible ;

en effet : $AC = AB =$ 7,4 cm, mais $7{,}4 + 7{,}4 < 15{,}2$.

b. Construire un triangle *DEF* de périmètre 27,8 cm et tel que *DE* = 6,2 cm et *EF* = 7,6 cm est impossible ; en effet : *DF* = 27,8 – 6,2 – 7,6 = 14 cm,
mais 6,2 + 7,6 < 14.

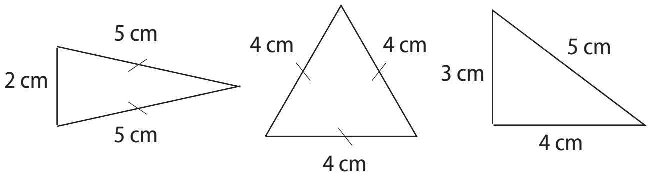
c. Construire un triangle *GHI* isocèle en *H*, de périmètre 11,5 cm et tel que *GI* = 5,8 cm est impossible ; en effet : *HG* + *HI* = 11,5-5,8 = 5,7, mais 5,7 < 5,8.

d. Construire un losange *JKLM* de périmètre 32 cm et tel que la diagonale *KM* = 17 cm est impossible ; en effet : *LK* = *LM* = 32÷4 = 8 cm, mais 8 + 8 < 17.

37 Triangles de même périmètre

S'il n'y a que trois triangles dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers de centimètres et dont le périmètre est égal à 12, alors les dimensions respectives (en cm) de ces triangles sont :

2, 5, 5 — 4, 4, 4 — 3, 4, 5



38 Repérer avant d'essayer de construire

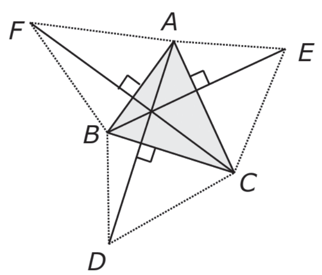
a. 1,3 dm = 13 cm ; 70 mm = 7 cm ;
13 < 8 + 7 donc on peut construire un triangle dont les côtés mesurent : 8 cm ; 1,3 dm et 70 mm.

b. 72 mm = 7,2 cm ; 108 mm = 10,8 cm ;
10,8 < 7,2 + 4,5 donc on peut construire un triangle dont les côtés mesurent : 72 mm ; 4,5 cm et 108 mm.

c. 2,7 dm = 27 cm ; 153 mm = 15,3 cm ;
27 > 15,3 + 10,7 donc on ne peut pas construire un triangle dont les côtés mesurent : 2,7 dm ; 153 mm et 10,7 cm.

d. 0,042 km = 42 m ; 7 513 mm = 7,513 m ;
42 < 7,513 + 34,5 donc on peut construire un triangle dont les côtés mesurent : 0,042 km ; 7 513 mm et 34,5 m.

39 Au compas seul



Commentaire : pour ces constructions n'ont été utilisés que le compas (et la règle non graduée).

a. (*BC*) est la médiatrice de [*AD*] si :

• *D* est le symétrique de *A* par rapport à (*BC*)

ou

• *D* est le 2^e point d'intersection des cercles de centres *B* et *C*, passant par *A*.

b. (*CA*) est la médiatrice de [*BE*] si :

• *E* est le symétrique de *B* par rapport à (*CA*)

ou

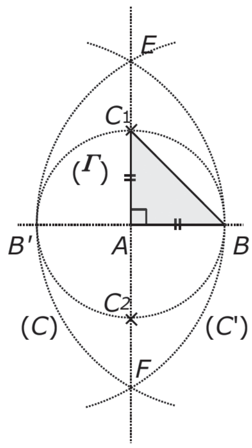
• *E* est le 2^e point d'intersection des cercles de centres *A* et *C*, passant par *B*.

c. (*AB*) est la médiatrice de [*CF*] si • *F* est le symétrique de *C* par rapport à (*AB*)

ou

• *F* est le 2^e point d'intersection des cercles de centres *A* et *B*, passant par *C*.

40 Sans équerre



Données initiales : *A* et *B*.

Construction, uniquement avec le compas et la règle non graduée, d'un point *C* tel que *ABC* soit un triangle rectangle et isocèle en *A* :

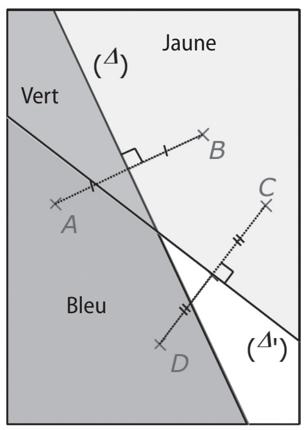
• trace le cercle (Γ), de centre *A* et passant par *B*, qui recoupe (*AB*) en *B'* ;

• trace les cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$), centrés respectivement en *B* et *B'*, passant respectivement par *B'* et *B* ; ils se coupent en *E* et *F* ;

• la droite (*EF*), médiatrice de [*BB'*], coupe le cercle (Γ) en deux points C_1 et C_2 tels que ABC_1 et ABC_2 sont chacun un triangle rectangle et isocèle en *A*.

41 Au plus près

1.



a. *A*, *B*, *C* et *D* sont 4 points non alignés.

b. (Δ) et (Δ') sont les médiatrices respectives de [*AB*] et [*CD*].

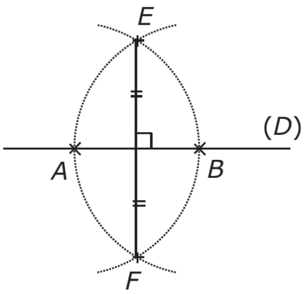
2. a. La partie du plan contenant les points plus près de *A* que de *B* est coloriée en bleue ou vert.

b. La partie du plan contenant les points plus près de *C* que de *D* est coloriée en jaune ou vert.

c. La partie du plan contenant les points à la fois plus près de *A* que de *B* et plus près de *C* que de *D* est coloriée en vert.

42 Toujours au compas

1. Une droite (*D*) et deux points *A* et *B* lui appartenant.

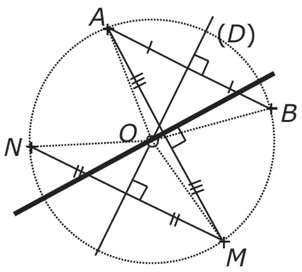


2. Construction, avec le compas, de deux points *E* et *F* de façon que la droite (*D*) soit la médiatrice du segment [*EF*] :

• trace les cercles de centres *A* et *B*, passant respectivement par *B* et *A* ;

• ils se coupent en deux points *E* et *F* (qui conviennent).

43 Démonstration à plusieurs pas



1. La droite (*D*) étant médiatrice des segments [*AB*] et [*MN*], on a :

(*D*) ⊥ (*AB*) et (*D*) ⊥ (*MN*) ;

donc (*AB*)//(*MN*).

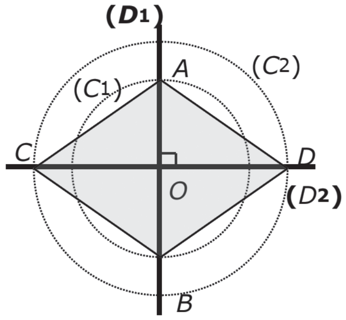
2. a. *O* étant le point d'intersection de la médiatrice de [*AM*] et de (*D*), c'est-à-dire le point d'intersection des médiatrices de [*AM*], [*AB*] et [*MN*], on a :

OA = *OM*, *OA* = *OB* et *OM* = *ON*.

b. Finalement : *OA* = *OB* = *OM* = *ON*.

c. Le cercle de centre *O*, passant par *A*, est circonscrit au quadrilatère *ABMN*.

44 Diagonales et médiatrices



1. a. Les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires et sécantes en *O*.

b. Deux cercles ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$), de centre *O*, coupent respectivement (D_1), en *A* et *B*, et (D_2), en *C* et *D*.

2. a. [AB] est un diamètre de ($\mathscr{C}_1$), donc *OA* = *OB* ;

la droite (*CD*), perpendiculaire à (*AB*) et passant par le milieu de [*AB*], est la médiatrice de [*AB*] ;

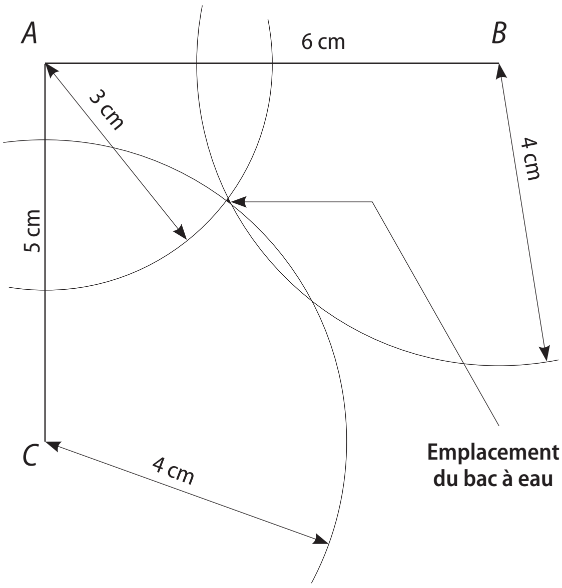
donc : *AC* = *BC* et *AD* = *BD*.

b. De la même façon, la droite (*AB*) est la médiatrice de [*CD*] ; donc : *AC* = *AD*.

c. Finalement le quadrilatère *ABCD*, dont les 4 côtés ont la même longueur, est un losange.

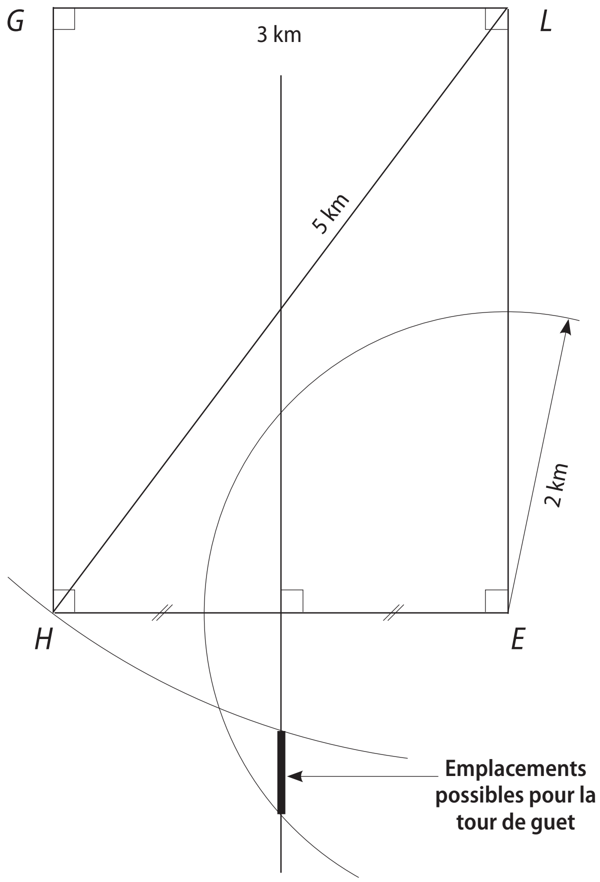
Activités d'intégration

45 Choisir le bon emplacement



1 cm représente 1 m.

46 La tour du parc



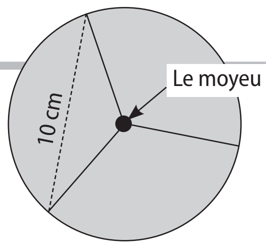
8 Triangles : droites remarquables et cercle circonscrit

Manuel pages 87 à 98

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit [1p.90]	17, 18, 21, 24, 25, 31 à 36	44, 45, 47	50, 53
2	Hauteurs d'un triangle [2 p.90]	19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30	46, 49	52, 56
	Médianes d'un triangle [3 p.90]	22		55
3	Bissectrices d'un triangle [4 p.90]	23		59
4, 5	Triangle rectangle et cercle circonscrit [5 p.91]	37, 38, 39, 40, 41, 42, 43	48	54,57
	Droites remarquables et triangle isocèle [6 p.91]	28, 36		51, 54
	Droites remarquables et triangle équilatéral [7 p.91]	34, 35		
	Apprendre à utiliser des droites remarquables [1 p.92]	**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**		
	Apprendre à utiliser les cercles circonscrits [2 p.93]	**8**, **9**, **10**, **11**, **12**, **13**, **14**, **15**, **16**, 35, 43	45, 46, 47	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Introduction et contrôle des pré-requis



Le vent transformé en électricité

Construction d'un triangle équilatéral et de son cercle circonscrit.

Activités d'apprentissage

1. Concours des médiatrices et cercle circonscrit

Partie A

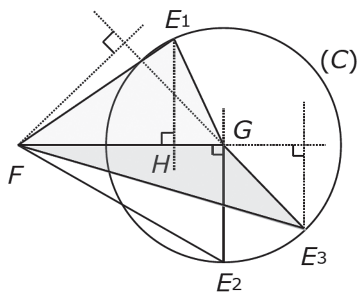
Découverte justifiée de la construction, avec les médiatrices de 2 côtés, du centre du cercle circonscrit à un triangle puis de ce cercle. *Cette activité nécessite beaucoup de soin*.

Partie B

Comment retrouver le centre d'un (arc de) cercle.

2. Des hauteurs et des triangles

1.



2. Il s'agit de placer un point E_1 sur le cercle (C), de façon que la hauteur du triangle E_1FG, issue de E_1, soit intérieure (pour partie) à ce triangle ; le triangle colorié en grisé clair convient (l'angle G est alors aigu).

3. Il s'agit de placer un point E_2 sur le cercle (C), de façon que la hauteur du triangle E_2FG, issue de E_2, soit confondue avec un côté de ce triangle ; si l'on veut [E_2G] comme côté confondu avec la hauteur, le triangle E_2FG doit être rectangle en G.

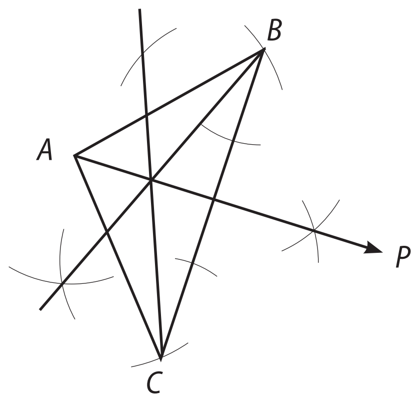
4. Il s'agit de placer un point E sur le cercle (C), de façon que la hauteur du triangle E_3FG, issue de E_3, soit entièrement extérieure à ce triangle ; le triangle grisé plus foncé convient (l'angle G est alors obtus).

Dans cette situation, la hauteur issue de F ne traverse pas non plus ce triangle.

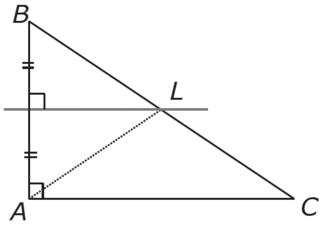
3. Construction de la bissectrice d'un angle

1. mes $\widehat{BAP}$ = mes $\widehat{PAC}$ donc [AP) est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. et **3.**



4. Nouvelle propriété du triangle rectangle



ABC est un triangle rectangle en *A*.
La médiatrice de[*AB*] coupe [*BC*] en *L*.

1. *L* appartient à la médiatrice de [*AB*] donc *L* est équidistant de *A* et *B*, c'est-à-dire que le triangle *LAB* est isocèle en *L*.
On en déduit que mes $\widehat{LAB}$ = mes $\widehat{LBA}$ (1).

2. a. mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{BCA}$ = 180 – mes $\widehat{BAC}$ = 180 – 90 = 90°.

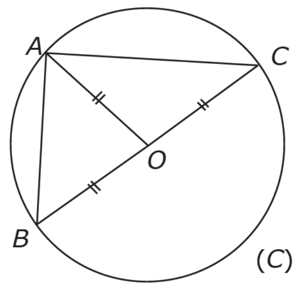
b. mes $\widehat{BAL}$ + mes $\widehat{LAC}$ = mes $\widehat{BAC}$ = 90°.

3. a. Donc mes $\widehat{LAC}$ = 90 – mes $\widehat{BAL}$ et mes $\widehat{LCA}$ = mes $\widehat{BCA}$ = 90 – mes $\widehat{ABC}$; or, d'après (1),
<u>mes $\widehat{BAL}$</u> = mes $\widehat{LAB}$ = mes $\widehat{LBA}$ = <u>mes $\widehat{ABC}$</u> ;
on en déduit que : mes $\widehat{LAC}$ = mes $\widehat{LCA}$ et le triangle *LAC* est isocèle en *L*.

b. *LAB* isocèle en *L*, donc : *LA* = *LB* ; *LAC* isocèle en *L*, donc : *LA* = *LC* ; finalement : *LA* = *LB* = *LC*.

On en déduit que le centre du cercle circonscrit au triangle *ABC*, rectangle en *A*, est le point *L*.
L est le milieu du côté[*BC*].

5. Reconnaître un triangle rectangle



(*C*) est un cercle de centre *O*.
[*BC*] est un diamètre de (*C*).
A ∈ (*C*).

1. *OA* = *OB* donc *OAB* est un triangle isocèle en *O* et mes $\widehat{OBA}$ = mes $\widehat{OAB}$.
De même : mes $\widehat{OAC}$ = mes $\widehat{OCA}$.

2. mes $\widehat{OBA}$ + mes $\widehat{OAB}$ + mes $\widehat{OAC}$ + mes $\widehat{OCA}$ = 180° (somme des angles d'un triangle).

3. a. On en déduit que : mes $\widehat{BAC}$ = mes $\widehat{OBA}$ + mes $\widehat{OAC}$ = $\dfrac{180}{2}$ = 90°.

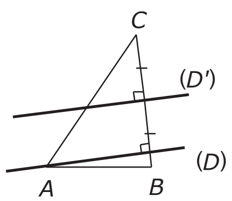
b. Le triangle *ABC* est rectangle en *A*.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à utiliser les droites remarquables

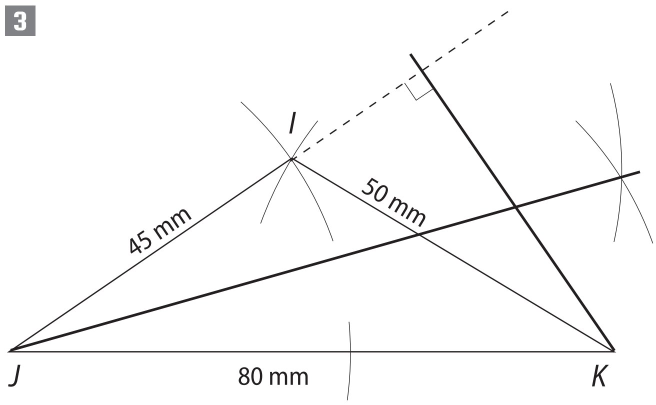
1 (*OU*) est la hauteur issue de *O*.
(*KH*) est la médiatrice de [*JL*].
(*VN*) est la médiatrice de [*BC*].
(*EY*) est la hauteur issue de *E*.
(*ZR*) est la médiatrice de [*EA*].
(*IJ*) est la médiatrice issue de *I*.
(*KM*) est la médiatrice issue de *M*.

2

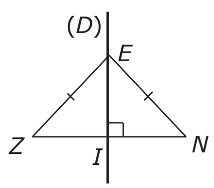


Dans le triangle *ABC*, où *AB* = 4 cm, *BC* = 5 cm et *CA* = 6 cm :
• (*D*) est la hauteur issue de *A* ;
• (*D*′) est la médiatrice du côté [*BC*].

3



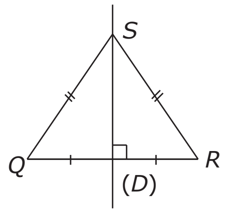
4



ZEN est un triangle isocèle en *E*, tel que :
ZE = *NE* = 42 mm et *ZN* = 58 mm.
La droite (*D*), perpendiculaire à (*ZN*) passant par *E*, est à la fois • la hauteur issue de *E*, • la médiatrice du côté [*ZN*].

On en déduit que (*D*) coupe le segment [*ZN*] en son milieu *I*.

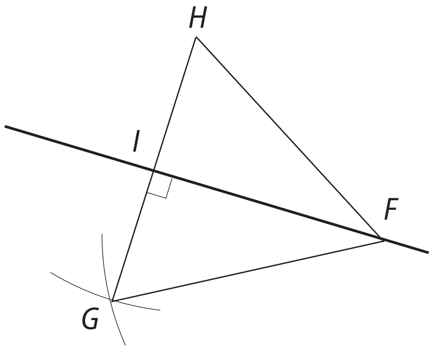
5



QSR étant un triangle isocèle en *S*, la médiatrice (*D*) de [*QR*] passe par *S* et est perpendiculaire à [*QR*].

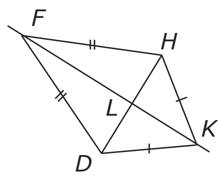
Donc (*D*) est la hauteur issue de *S* dans le triangle *QSR*.

6 **1.**



2. (*FI*) est un axe de symétrique du triangle *FGH*, donc (*FI*) est également la médiatrice de [*GH*], donc *I* est le milieu de [*GH*].

7

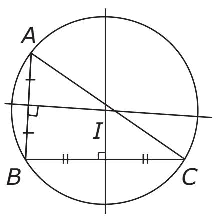


1. *F* et *K* étant deux points équidistants des extrémités du segment [*HD*], (*FK*) est la médiatrice de [*HD*].

2. Dans les triangles *FHD* et *KHD*, isocèles en *F* et *K*, la médiatrice du côté commun [*HD*] est en même temps hauteur issue de *F* (dans *FHD*) et de *K* (dans *KHD*).

2. Apprendre à utiliser les cercles circonscrits

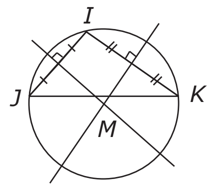
8



Ci-contre, un triangle *ABC* tel que : *AB* = 4 cm, *BC* = 6 cm et *CA* = 7cm.
Le cercle circonscrit à *ABC* :
• a pour centre le point d'intersection *I* des médiatrices de 2côtés,
• passe par l'un de ses sommets.

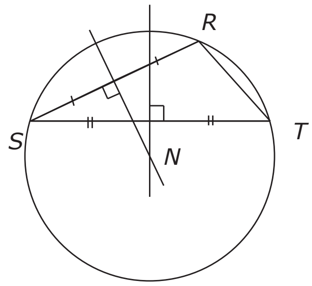
Commentaire : le centre du cercle circonscrit est à l'intérieur du triangle.

9 **a.**



Ci-dessus un triangle *IJK* tel que :
IJ = 35 mm, *JK* = 56 mm et *KI* = 42 cm.
Le cercle circonscrit à *IJK :*
• est centré en *M*, point d'intersection des médiatrices de 2côtés,
• passe par l'un de ses sommets.

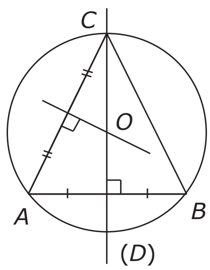
b.



Ci-dessus un triangle *RST* tel que :
RS = 7 cm, *ST* = 9 cm et *TR* = 4 cm.
Le cercle circonscrit à *RST :*
• est centré en *N*, point d'intersection des médiatrices de 2 côtés,
• passe par l'un de ses sommets.

Commentaire : dans les deux cas, le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle.

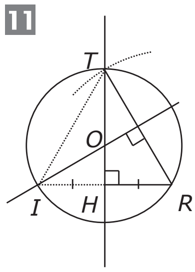
10



1. Le segment [*AB*] étant tracé, pour obtenir un triangle *ABC*, isocèle en *C*, il faut placer *C* sur la médiatrice (*D*) de [*AB*].

2. Le cercle circonscrit à*ABC* :
• a pour centre le point d'intersection *O* de (*D*) et de l'une des deux autres médiatrices de *ABC*,
• passe par l'un de ses sommets.

11



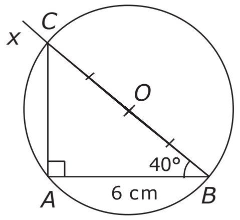
1. Ci-contre un triangle *TRH* rectangle en *H*, tel que : *RT* = 5 cm et *RH* = 2,5 cm (*).

(*) *Programme de construction* d'un tel triangle :
• trace un segment [*RH*] de longueur 2,5 cm;
• *T* est l'un des points d'intersection de la perpendiculaire en *H* à (*RH*) avec le cercle de centre *R* et de rayon 5 cm.

2. Si *I* est le symétrique de *R* par rapport à (*TH*), alors *TRI* est un triangle équilatéral ; en effet :
• *TI* = *TR* = 5 cm [ces deux segments sont symétriques par rapport à (*TH*)] ;
• *RI* = 2 × *RH* = 5 cm.

3. Le cercle circonscrit à *TRI* :
• a pour centre le point d'intersection *O* de (*TH*) et de la hauteur issue de *I*,
• passe par l'un de ses sommets.

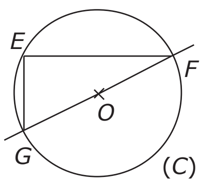
12



(*) *Programme de construction* d'un tel triangle :
• trace un segment [*AB*] de longueur 6 cm;
• *C* est le point d'intersection de la perpendiculaire en *A* à (*AB*) avec une demi-droite [*Bx*) telle que mes $\widehat{ABx}$ = 40°.

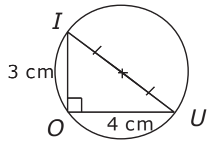
Ci-dessus un triangle *ABC* tel que : *AB* = 6 cm, mes $\widehat{A}$ = 90°et mes $\widehat{B}$ = 40°(*). Le cercle circonscrit à *ABC* est le cercle de diamètre [*BC*].

13



1. [*FG*] est un diamètre de (*C*).
2. On en déduit que le triangle *EFG*, dont le sommet appartient au cercle de diamètre [*FG*], est rectangle en *E*.

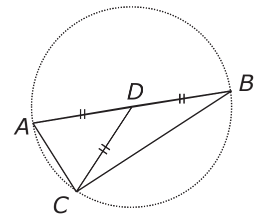
14



(*) La construction d'un tel triangle est immédiate.

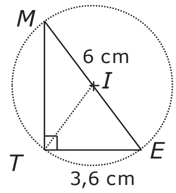
1. Ci-contre un triangle *OUI* rectangle en *O*, tel que :
OU = 4 cm et *OI* = 3 cm (*).
2. Le centre du cercle circonscrit au triangle *OUI*, rectangle en *O*, est le milieu de son hypoténuse [*UI*].

15



Dans la figure ci-dessus, on a :
• *AB* = 54 m, • *CD* = 27 m, • *D* milieu de[*AB*].
Le cercle de diamètre [*AB*] passe par *C*, donc le triangle *ABC* est rectangle en *C*.

16



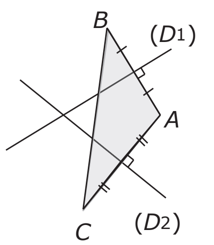
1. Ci-dessus, *MET* est un triangle rectangle en *T*, tel que : *ET* = 3,6 cm et *ME* = 6 cm (*).
2. Le cercle circonscrit à ce triangle a pour diamètre son hypoténuse [*ME*]. Donc le milieu *I* de [*ME*] est centre de ce cercle et *IE* = *IM* = *IT* = 3cm.

(*) *Programme de construction* d'un tel triangle :
• trace un segment [*ET*] de longueur 3,6 cm;
M est l'un des points d'intersection de la perpendiculaire en *T* à (*ET*) avec le cercle de centre *E* et de rayon 6 cm.

Exercices d'application

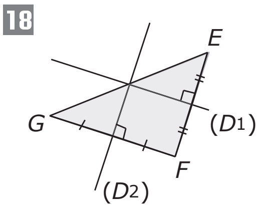
Problèmes de construction

17



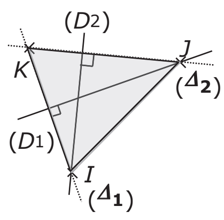
Données : *A*, (D_1) et (D_2).
•(D_1) est la médiatrice de [*AB*], si *B* est le symétrique de *A* par rapport à(D_1).
•(D_2) est la médiatrice de[*AC*], si *C* est le symétrique de *A* par rapport à (D_2).

18



Données : *G*, (D_1) et (D_2).
• (D_2) est la médiatrice de [*FG*], si *F* est le symétrique de *G* par rapport à(D_2).
• (D_1) est la médiatrice de [*EF*] si *E* est le symétrique de *F* par rapport à (D_2).

19

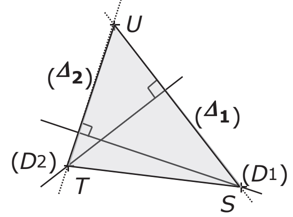


Données : *I*, *J*, (D_1) et (D_2).

• (D_1) est la hauteur issue de J d'un triangle IJK si K appartient à la droite (Δ_1) passant par I et perpendiculaire à (D_1) ;

• (D_2) est la hauteur issue de I d'un triangle IJK, si K appartient à la droite (Δ_2) passant par J et perpendiculaire à (D_2).

20 *Données* : U, (D_1) et (D_2).

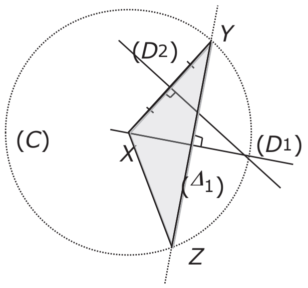


(D_1) est la hauteur issue de S et (D_2) est la hauteur issue de T d'un triangle STU, si :

• S appartient à la droite (D_1) et à la droite (Δ_1) passant par U et perpendiculaire à (D_2) ;

• T appartient à la droite (D_2) et à la droite (Δ_2) passant par U et perpendiculaire à (D_1).

21 *Données* : X, (D_1) et (D_2).



(D_1) est la hauteur issue de X et (D_2) est la médiatrice de $[XY]$ d'un triangle XYZ isocèle en X, si :

• Y est le symétrique de X par rapport à (D_2);

• Z appartient au cercle (C), centré en X et passant par Y, et à la droite (Δ_1) passant par Y et perpendiculaire à(D_1).

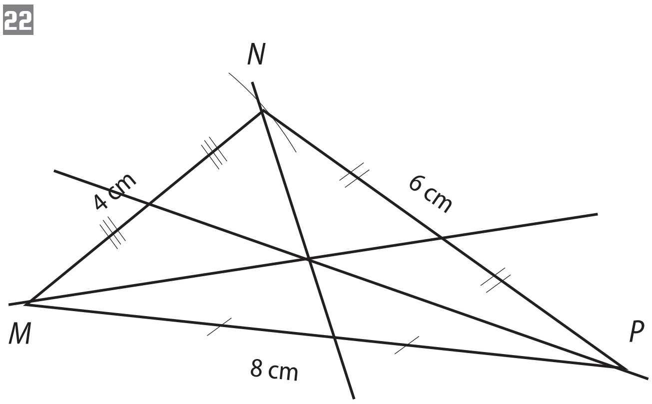
Commentaire : pour les problèmes de construction (exercices 17 à 21) :

• faire au préalable à main levée une figure respectant les consignes;

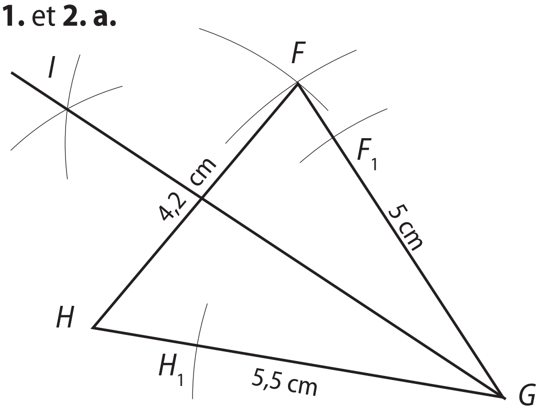
• observer ensuite les propriétés de cette figure.

Droites remarquables

22



23 **1.** et **2. a.**



b. ① Choisir un écartement de compas.

② À partir de G, marquer un point H_1 sur $[GH)$ et un point F_1 sur $[GF)$.

③ Choisir un écartement de compas.

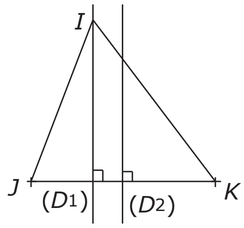
④ À partir de H_1, tracer un arc de cercle et, à partir de F_1, tracer un arc de cercle avec le même écartement du compas. Ces arcs de cercles se coupent en I.

⑤ [GI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{FGH}$.

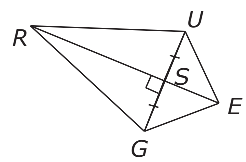
24 La droite (D_1), hauteur issue de I dans le triangle IJK, est perpendiculaire à la droite (JK).

La droite (D_2), médiatrice de $[JK]$, est perpendiculaire à la droite(JK).

On en déduit que(D_1) // (D_2).



25 **1. a.** Triangles pour lesquels une hauteur est tracée :



RUS, *RSG*, *RUG* (hauteur [*RS*]),

EUS, *ESG*, *EUG* (hauteur [*ES*]),

URE (a pour hauteur [*US*]),

GRE (a pour hauteur [*GS*]).

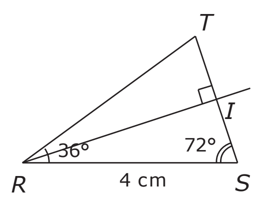
b. Triangles pour lesquels une médiatrice est tracée :

RUG, qui a pour médiatrice (*RS*),

EUG, qui a pour médiatrice (*ES*).

2. *RUG* et *EUG*, triangles pour lesquels une hauteur est en même temps médiatrice, sont les seuls triangles isocèles.

26 **1.**

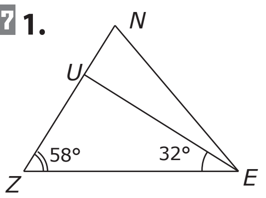


2. a. *RST* est un triangle isocèle en R ; en effet :

mes $\widehat{RTS} = 180 - 72 - 36 = 72°$.

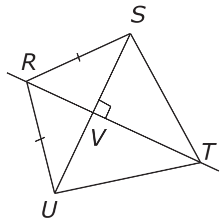
b. Pour ce triangle, la hauteur issue de R est en même temps médiatrice du côté $[ST]$; donc elle coupe $[ST]$ en son milieu I.

27 **1.**



2. Dans le triangle *ZEU*, mes $\widehat{U} = 180 - 58 - 32 = 90°$. Donc (*EU*) ⊥ (*ZN*) et (*EU*) est une hauteur de *ZEN*.

28 **1.** La droite (*RT*), perpendiculaire au segment [*SU*], passe par le point *R*, équidistant des extrémités de ce segment (*RS* = *RU*). Donc (*RT*) est la médiatrice de [*SU*] et coupe ce segment en son milieu *V*.



2. *T*, point de la médiatrice de [*SU*], est à son tour équidistant de *S* et *U* ; on en déduit que le triangle *STU* est isocèle en*T*.

Aire d'un triangle

29 Aire (*ABC*) $= \dfrac{6 \times 4}{2} = 12$ cm^2.

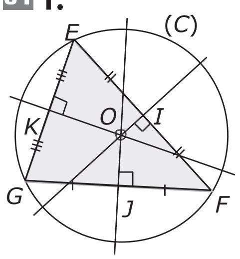
Aire (*DEF*) $= \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$ cm^2.

30 $IK = 71 - (23 + 17) = 31$ mm.

Aire (*IJK*) $= \dfrac{31 \times 13}{2} = 201{,}5$ mm^2.

Cercles circonscrits

31 **1.**



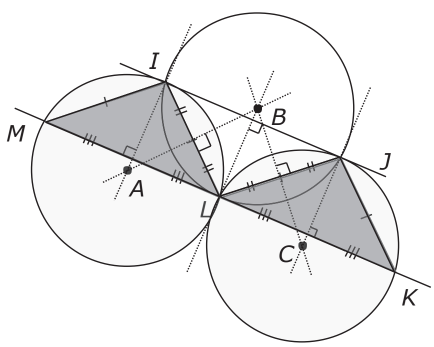
Dans la figure ci-contre :

• les points *E*, *F* et *G* sont sur le cercle (*C*), de centre *O*;

• *I*, *J* et *K* sont les milieux respectifs de [*EF*], [*FG*] et [*GE*].

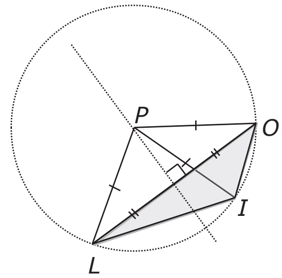
2. Les médiatrices du triangle *EFG* sont les droites (*OI*), (*OJ*) et (*OK*) … *que l'on trace à la règle uniquement*.

32 **1.**



2. Les cercles circonscrits aux triangles *ILM*, *IJL* et *JKL* (isocèles en *I*, *L* et *J*) ont pour centres *A*, *B* et *C*, points d'intersection pour chaque triangle de deux médiatrices [sur la figure, l'une des médiatrices est la perpendiculaire en *I*, *L* et *J* à (*MK*)].

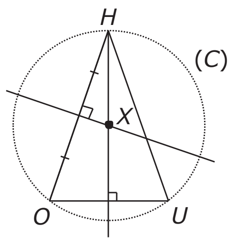
33



1. Comme *PL* = *PI* = *PO*, le cercle circonscrit à *LOI* a pour centre *P*.

2. Ce centre est le point d'intersection des médiatrices de *LOI*, en particulier *P* est sur la médiatrice de [*OL*].

34 **1.**

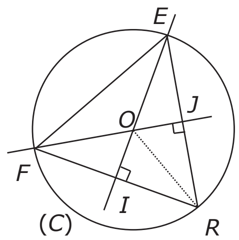


2. Dans le triangle *HOU*, isocèle en *H*, la hauteur issue de *H* est en même temps médiatrice du côté [*OU*].

On en déduit que *X*, point d'intersection de deux médiatrices de *HOU*, est le centre de son cercle circonscrit.

Donc le cercle de centre *X*, passant par *U*, passe par *H* et *O*.

35



1. *O* est le centre du cercle cir conscrit au triangle *FER*, donc : *OF* = *OE* = *OR*.

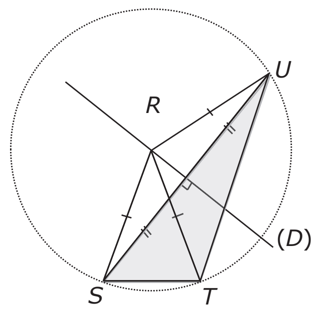
La droite (*EI*), perpendiculaire à (*FR*), passe par le point *O* équidistant des extrémités de [*FR*] ; donc (*EI*) est la médiatrice de [*FR*].

De même (*FJ*) est la médiatrice de [*ER*].

2. On en déduit que *EF* = *ER* et *FE* = *FR* ;

donc *EF* = *FR* = *RE* et *FER* est un triangle équilatéral.

36 **1.**



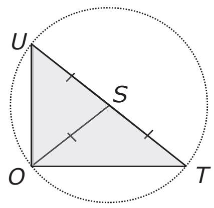
2. *RST* est un triangle isocèle en *R*, donc : *RS* = *RT*;

U est le symétrique de *S* par rapport à (*D*) et *R* ∈ (*D*), donc : *RS* = *RU*.

Finalement : *RS* = *RT* = *RU* et *R* est le centre du cercle circonscrit au triangle *STU*.

Triangles rectangles et cercles

37 **1.**

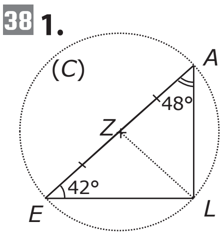


2. a. Le triangle *SOU* est isocèle en *S*, donc : *SU* = *SO*.

T est le symétrique de *U* par rapport à *S*, donc *S* est le milieu de [*UT*]. Finalement *SU* = *SO* = *ST* et *S* est le centre du cercle circonscrit au triangle *TOU*.

b. Les points *U*, *S* et *T* étant alignés, [*UT*] est un diamètre du cercle circons crit à *TOU* ; on en déduit que ce triangle est rectangle en *O*.

38 **1.**

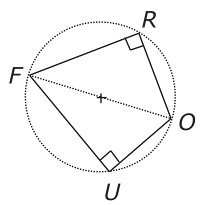


LEA est un triangle tel que : mes $\widehat{E} = 42°$ et mes $\widehat{A} = 48°$; mes $\widehat{L} = 180 - 42 - 48 = 90°$ donc *LEA* est rectangle en L.

2. a. *Z* est le milieu de [*AE*] ; (*C*) est le cercle de centre *Z*, passant par *L*.

b. Le cercle circonscrit au triangle *LEA*, rectangle en *L*, est le cercle de diamètre [*AE*] ; centré au milieu *Z* de [*AE*] et passant par *L*, ce cercle n'est autre que (*C*), qui finalement passe aussi par les points *E* et *A*.

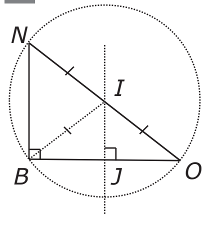
39



Les triangles *RFO* et *UFO*, rectangles en *R* et *U*, ont le même cercle circonscrit : celui de diamètre [*FO*].

Pour tracer un cercle passant par les quatre sommets du quadrilatère *ROUE*, il suffit donc de construire son centre : le milieu de [*FO*].

40



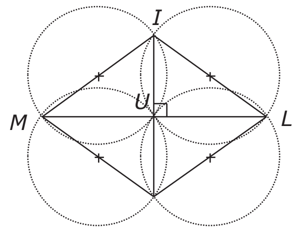
1. *BON*, triangle rectangle en *B*, a pour cercle circonscrit le cercle de diamètre [*ON*] ; donc *I*, milieu de [*ON*], est le centre de ce cercle.

2. a. I*O* = *IB* ; donc *BOI* est un triangle isocèle en *I*.

b. Voir figure.

c. La perpendiculaire à (*BO*) passant par *I*, point équidistant des extrémités du segment [*BO*], est la médiatrice de ce segment ; elle le coupe en son milieu *J*.

41 **1.**

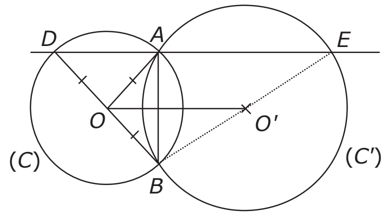


2. *MILO* est un losange de centre *U*. Les cercles de diamètres [*MI*], [*IL*], [*LO*] et [*OM*] sont sécants en *U*.

Justification :

Les diagonales [*IO*] et [*LM*] du losange *MILO* sont perpendiculaires et sécantes en leur milieu *U*, donc les cercles circonscrits à chacun des 4 triangles *UMI*, *UIL*, *ULO* et *UOM*, rectangles en *U*, sont les cercles déjà tracés, qui passent donc par *U*.

42 **1.**



Sur la figure ci-dessus :

• les cercles (*C*) et(*C'*), de centres respectifs *O* et *O'*, sont sécants en *A* et *B* ;

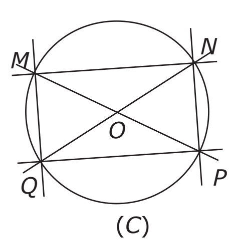
• *D* est le symétrique de *B* par rapport à *O* ;

• (*DA*) coupe (*C'*) en *E*.

2. a. Le cercle (*C*), circonscrit au triangle *BAD*, a pour diamètre [*BD*] ; donc *BAD* est rectangle en *A*.

b. On en déduit que les droites (*DA*) et (*AB*) sont perpendiculaires en *A* et que le triangle *BAE* est lui-même rectangle en *A* ; le cercle (*C'*), qui lui est circonscrit, a pour diamètre [*BE*] ; donc *O'* est le milieu de [*BE*].

43



O est le centre du cercle (*C*).

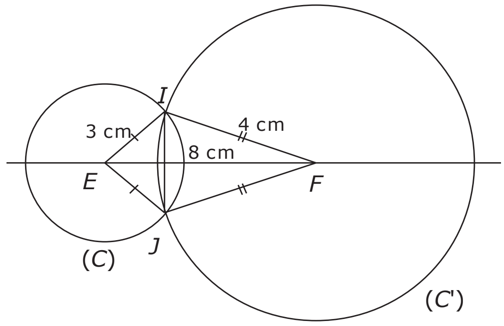
1. En prenant 3 points parmi *M*, *N*, *P* et *Q*, on obtient toujours un triangle dont (*C*) est le cercle circonscrit et un côté est diamètre de ce cercle ; donc ils sont tous rectangles : *MNP*, *NPQ*, *PQM* et *QMN* (rectangles respectivement en *N*, *P*, *Q* et *M*).

2. *MNPQ* est alors un rectangle (de centre *O*) et il y a deux couples de droites parallèles : (*MN*) // (*PQ*) et (*NP*) // (*QM*).

Bien comprendre, mieux rédiger

44 Rédiger une démonstration

1.



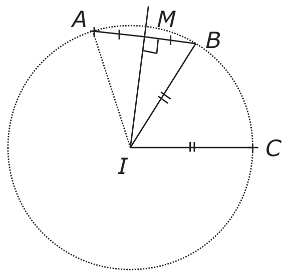
2. • $EI = EJ$, car I et J sont sur le cercle (C) de centre E.

• $FI = FJ$, car I et J sont sur le cercle (C') de centre F.

• Les deux points E et F sont donc équidistants des points I et J. Par conséquent, la droite (EF) est la médiatrice du segment [IJ].

45 Justifier en deux étapes

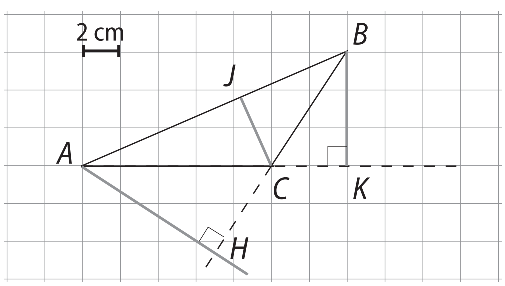
Sur la figure codée ci-après :
• le point M est le milieu du segment [AB];
• la droite (IM) est perpendiculaire à la droite (AB) ;
• la droite (IM) est donc aussi la médiatrice du segment [AB] ;
• on en déduit que le point I est équidistant des points A et B.



2. I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
En effet : $IA = IB$ (d'après **1.**) et $IB = IC$ (d'après le codage de la figure) ; donc : $IA = IB = IC$.

46 Utiliser la bonne formule

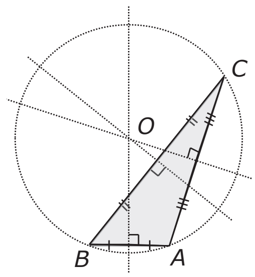
1.



2. a. Aire (ABC) = ($BC \times AH$) : 2 = ($AC \times BK$) : 2
= ($AB \times CJ$) : 2.

b. Aire (ABC) = ($AC \times BK$) : 2
= (10×6) : 2 = 30 cm^2.

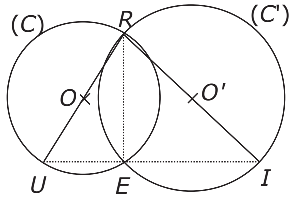
47 Trouver un contre-exemple



Le centre du cercle circonscrit à un triangle n'est pas toujours à l'intérieur du triangle ou au milieu d'un côté. C'est le cas ci-contre, pour un triangle ABC, où A est un angle obtus et le centre O de son cercle circonscrit est à l'extérieur.

48 Retrouver un énoncé

1.



• [RU] est un diamètre du cercle (C) et $E \in$ (C), donc le triangle RUE est rectangle en E, d'où mes $\widehat{REU} = 90°$.

• [RU] est un diamètre du cercle (C) et $E \in$ (C), donc le triangle REI est rectangle en E, d'où mes $\widehat{REI} = 90°$;

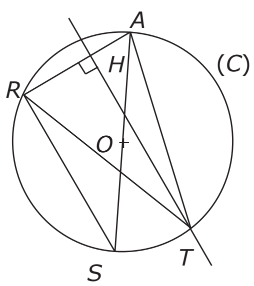
• mes $\widehat{UEI}$ = mes $\widehat{REU}$ + mes $\widehat{REI} = 90 + 90 = 180°$;

• donc UEI est un angle plat, et les points U, E et I sont alignés dans cet ordre.

2. a. *Enoncé du problème* :
(C) et (C') sont deux cercles, de centres respectifs O et O', sécants en E et R.
U est le point de (C) diamétralement opposé au point R ;
I est le point de (C') diamétralement opposé au point R.

b. *Question du problème* :
Démontre que les points U, E et I sont alignés dans cet ordre.

49 Justifier par l'énoncé ou par propriété



1. Dans la figure ci-dessus :
• R, A et T sont trois points d'un cercle (C) de centre O ;
• H est le pied de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par T ;
• S est le point de (C) diamétralement opposé à A.

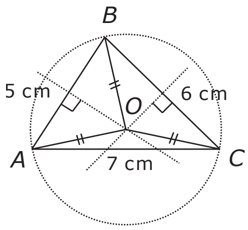
2. a. (TH) $\perp$ (RA) est l'affirmation justifiée par l'énoncé ci- dessus.

b. $(SR) \perp (RA)$ est une affirmation justifiée par la propriété : « si *R* est un point du cercle de diamètre [*SA*], alors *RSA* est un triangle rectangle en *A* ».

3. $(SR) \,//\, (TH)$ est une affirmation justifiée par la propriété : « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors ces deux droites sont parallèles entre elles ».

Exercices d'approfondissement

50 Équidistance

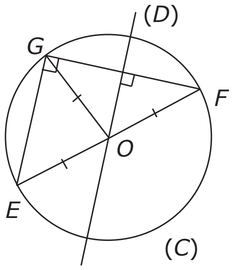


1. Ci-contre un triangle *ABC* tel que :
$AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm et $CA = 7$ cm.

2. Le point *O*, équidistant de *A*, *B* et *C*, est le centre du cercle circonscrit à *ABC* ;
O est donc le point d'intersection de ses médiatrices, que l'on construit avec une règle et un compas.

51 Triangle et axe de symétrie

1.



Ci-dessus :
- [*EF*] diamètre de(*C*),
- $G \in (C)$,
- $(D) \,//\, (EG)$ et $O \in (D)$.

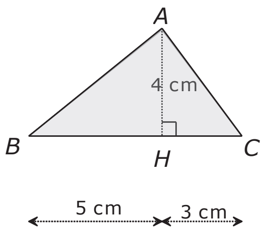
2. *EGF* est un triangle rectangle en *G* ; en effet le sommet *G* de ce triangle appartient au cercle de diamètre[*EF*].

3. a. $(EG) \perp (FG)$ et $(D) \,//\, (EG)$ donc : $(D) \perp (FG)$.

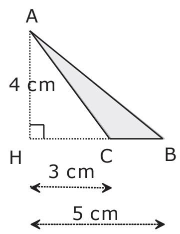
b. (*D*), droite perpendiculaire à (*FG*), passe par le point *O* équidistant de *F* et *G* ; donc (*D*) est la médiatrice du segment [*FG*]. En d'autres termes, (*D*) est axe de symétrie du triangle *GOF*.

52 Triangles de même hauteur

1.



2. a.



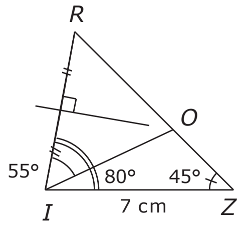
Ci-dessus deux triangles *ABC* tels que :
- (*AH*) est la hauteur issue de *A* ;
- $AH = 4$ cm, $CH = 3$ cm et $BH = 5$ cm. En 1, *H* est entre les points *B* et *C*.

En **1.**, *H* est entre les points *B* et *C*.

En **2. a.**, les points *B* et *C* sont d'un même côté de *H*.

b. Aire$ABC_1 = (5 + 3) \times 4 : 2 = 16$ cm^2.
Aire$ABC_2 = (5 - 3) \times 4 : 2 = 4$ cm^2.

53 Médiatrice particulière

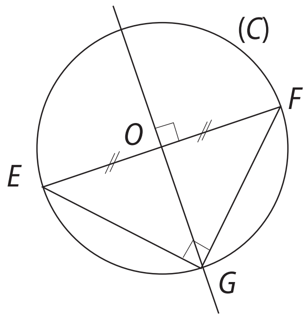


1. • *RIZ* est un triangle tel que :
$IZ = 7$ cm, mes $\widehat{I} = 80°$ et mes $\widehat{Z} = 45°$.
• $O \in [RZ]$ et mes $\widehat{RIO} = 55°$.

2. Dans le triangle *RIZ* : mes $\widehat{R} = 180 - 80 - 45 = 55°$.
Donc le triangle *RIO* est isocèle en *O* et la médiatrice de [*RI*] passe par *O*.

54 Un triangle particulier

1. a. et **b.**

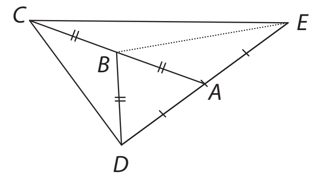


c. Puisque [*EF*] est un diamètre de (*C*) et que $G \in (C)$, on en déduit que le triangle *EFG* est rectangle en *G*.
De plus, comme $EG = FG$, ce triangle est également isocèle en G.

2. On note *O* le centre du cercle (*C*).
(*GO*) est la médiatrice de [*EF*], donc, comme le triangle *EFG* est isocèle en *G*, c'est aussi la hauteur issue de *G*.
Ainsi, Aire $(EFG) = \dfrac{EF \times GO}{2} = \dfrac{5 \times 2{,}5}{2} = 6{,}25$ cm^2.

55 Que de médianes !

1.



2. Triangles pour lesquels une médiane est tracée : *DCA*, médiane (*DB*) issue de *D*, et *CDE*, médiane (*CA*) issue de *C*.

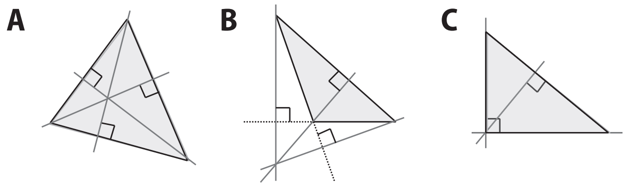
3. On peut encore tracer la médiane (*EB*), issue de *E*, du triangle *CEA*.

56 Points d'un cercle

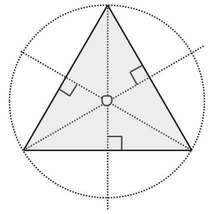
On ne peut pas tracer un triangle avec une seule hauteur en dehors du triangle. En effet :

• ou bien aucune des hauteurs n'est en dehors du triangle, comme en **A** (où les 3 angles du triangle sont aigus) et comme en **C** (où le triangle est rectangle);

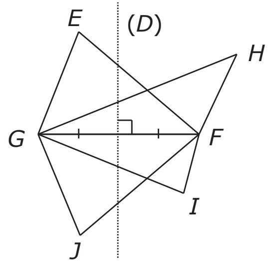
• ou bien deux des hauteurs sont en dehors du triangle, comme en **B** (où un angle du triangle est obtus).



2. Les hauteurs d'un triangle peuvent se croiser au centre de son cercle circonscrit.

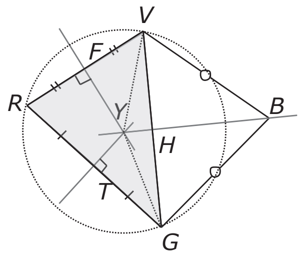


57 Alignement



Les centres des cercles circonscrits aux triangles *EFG*, *FGH*, *GFI* et *JFG* sont alignés sur la médiatrice (*D*) du côté [*GF*], commun à ces quatre triangles.

58 Du centre au milieu

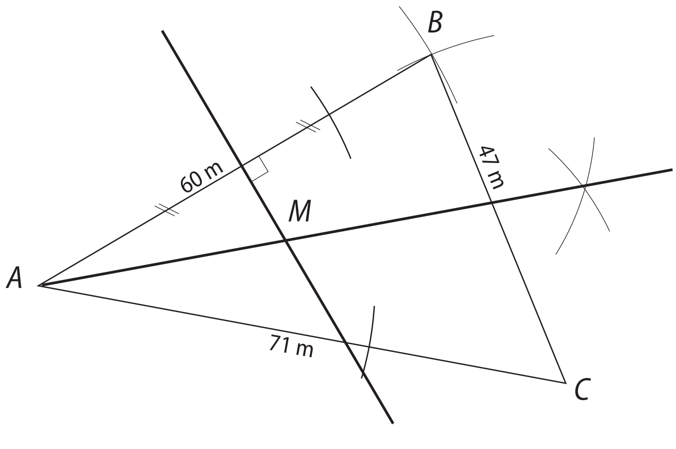


1. *Y* est le centre du cercle circonscrit au triangle *GRV*. En effet *Y* est le point d'intersection des médiatrices des côtés [*GR*] et [*RV*] de ce triangle.

2. *Y* (comme centre du cer cle circonscrit à *GRV*) et *B* (selon le codage) sont équidistants de *V* et *G* ; donc la droite (*BY*), qui est la médiatrice de [*VG*], coupe ce segment en son milieu *H*.

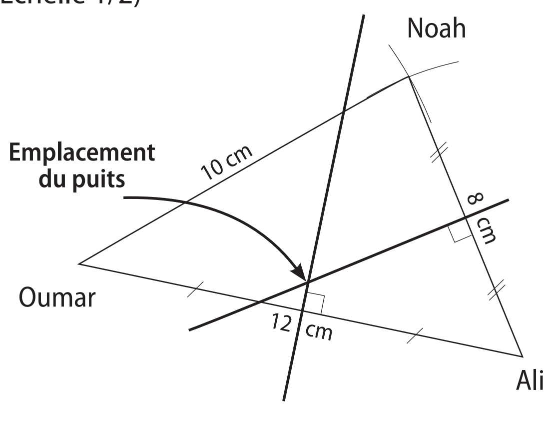
Activités d'intégration

59 Le crop circle



60 L'emplacement du puits

(Échelle 1/2)



9 Parallélogrammes

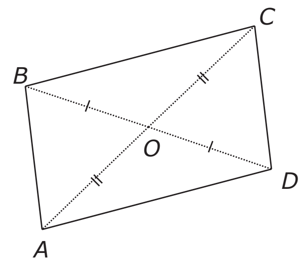
Manuel pages 99 à 110

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Rappels sur le parallélogramme [1 p.102]	21, 22, 40, 41	41, 44, 45	
2	Aire d'un parallélogramme[2 p.102]	39, 40	42, 43, 45	53, 55
1, 3	Reconnaître un parallélogramme par ses diagonales [3 p.102]	21, 22, 25, 27, 30, 31, 33, 35	46	54
3, 4	Reconnaître un parallélogramme par ses côtés [4 p.103]	22, 26, 29, 32 33, 34, 36, 37		
	Reconnaître un parallélogramme par ses angles [5 p.103]	23, 28,, 30, 36, 38		49, 52,
	Récapitulatif [6 p.103]			
	Apprendre à construire un parallélogramme [1 p.104]	**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **10**, **11**, 25	43,	48, 56
	Apprendre à reconnaître un parallélogramme [2 p.105]	**12**, **13**, **14**, **15**, **16**, **17**, **18**, **19**, **20**	44, 45	49, 50, 51

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités d'apprentissage

1. Centre de symétrie d'unparallélogramme



1. Le centre O d'un parallélogramme $ABCD$ est le point d'intersection de ses diagonales, qui se coupent en leur milieu (*résultat établi en 6^e^*).

2. a. Puisque O est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$, C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O.

b. On en déduit que les symétriques respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ par rapport à O sont les segments $[CD]$ et $[CB]$.

c. Le point O est donc un centre de symétrie pour le parallélogramme $ABCD$.

2. Aire d'un parallélogramme

1. a. Aire $(ABEF) = AF \times AB = 4 \times 9 = 36$ cm^2.

b. Aire $(ABCD) =$ Aire $(ABEF) = 36$ cm^2.

2. Aire $= b \times h$.

3. Quadrilatère ayant un centre de symétrie

1. Sur les quatre quadrilatères proposés, trois ont des diagonales qui se coupent en leur milieu et trois (les mêmes) ont un centre de symétrie : *EFGH*, *ABCD* et*IJKL*.

2. a. Tableau de correspondance pour la symétrie de centre O et le quadrilatère $ABCD$

A	B	(AB)	(CD)
C	D	(CD)	(AB)

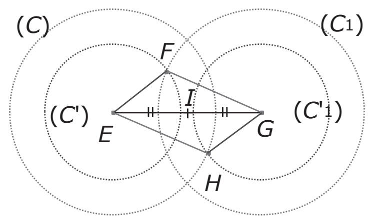
b. On en déduit que : $(AB) // (CD)$; de même : $(AD) // (BC)$.

c. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

3. *Si un quadrilatère a ses <u>diagonales</u> qui se coupent en leur <u>milieu</u>, alors c'est un <u>parallélogramme</u>.*

Si un quadrilatère non croisé possède un <u>centre</u> de <u>symétrie</u>, alors c'est un <u>parallélogramme</u>.

4. Quadrilatères et côtés opposés (1)



Sur la figure ci-contre, les cercles gris clair ont le même rayon, ainsi que les cercles gris plus foncé.

1. Les côtés opposés (de même valeur de gris) du quadrilatère *EFGH* sont de même longueur.

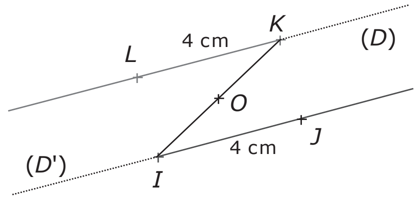
2. Le symétrique de *E* par rapport à *I* est *G*, de (C') est (C'_1), de (C_1) est (C), de *F* est *H*.

3. a. Finalement *I* est centre de symétrie pour le quadrilatère *EFGH*.

b. Donc le quadrilatère *EFGH* est un parallélogramme (*d'après l'activité précédente*).

5. Quadrilatères et côtés opposés (2)

1. a., **b.** et **2. a.**



c. *IJKL* semble être un parallélogramme.

2. b. Si *O* est le milieu de [*IK*], alors le symétrique de *I* par rapport à *O* est *K*.

Le symétrique de la demi-droite [*IJ*) par rapport à *O* est la demi-droite [*KL*) ; comme *IJ* = *KL* = 4 cm, le symétrique de *J* par rapport à *O* est *L*.

On en déduit que *O* est centre de symétrie du quadrilatère non croisé *IJKL*, c'est-à-dire que *IJKL* est un parallélogramme (*d'après le résultat énoncé en 2.3*).

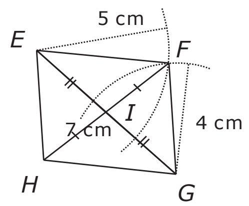
3. *Si un quadrilatère non croisé possède deux côtés opposés <u>de même longueur</u> et <u>de supports parallèles</u>, alors c'est un <u>parallélogramme</u>.*

Méthodes et savoir-faire

1. Apprendre à construire un parallélogramme

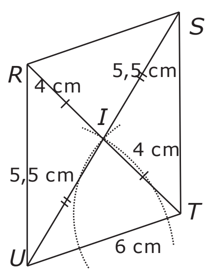
1 Construis un triangle *EFG* tel que : *EG* = 7 cm, *EF* = 5 cm et *GF* = 4 cm.

Le sommet *H* du parallélogramme *EFGH* est le symétrique du point *F* par rapport au milieu *I* du segment [*EG*].



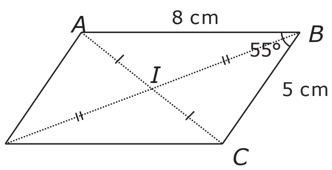
2 Construis un triangle *UTI* tel que : *UT* = 6 cm, *UI* = 5,5 cm et *TI* = 4 cm.

Les sommets *R* et *S* du parallélogramme *RSTU* sont les symétriques respectifs des points *T* et *U* par rapport à *I*.



3 Construis un triangle *ABC* tel que :

AB = 8 cm, *BC* = 5 cm et mes $\widehat{B}$ = 55°.

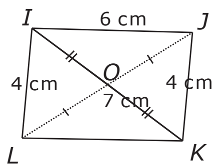


Le sommet *D* du parallélogramme *ABCD* est le symétrique du point *B* par rapport au milieu *I* du segment [*AC*].

4 Construis un triangle *IJK* tel que :

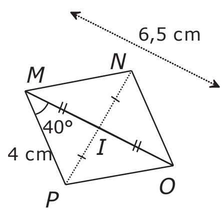
IK = 7 cm, *IJ* = 6 cm et *JK* = 4 cm.

Le sommet *L* du parallélogramme *IJKL* est le symétrique du point *J* par rapport au milieu *O* du segment [*IK*].



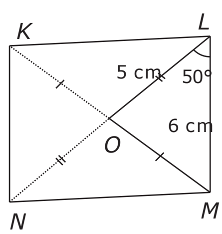
5 Construis un triangle *MPO* tel que : *MP* = 4 cm, *MO* = 6,5 cm et mes $\widehat{M}$ = 40°.

Le sommet *N* du parallélogramme *MNOP* est le symétrique du point *P* par rapport au milieu *I* du segment [*MO*].



6 Construis un triangle *LMO* tel que : *LM* = 6 cm, *LO* = 5 cm et mes $\widehat{L}$ = 50°.

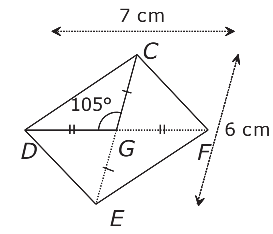
Les sommets *N* et *K* du parallélogramme *LMNK* sont les symétriques respectifs des points *L* et *M* par rapport à *O*.



Recommandation pour les exercices 7 à 11 (comme pour tout exercice de construction ; dans les exercices précédents, la figure est donnée dans l'énoncé) : faire au préalable une figure à main levée.

7 Construis un triangle *DGC* tel que : *GD* = 3,5 cm, *GC* = 3 cm et mes $\widehat{G}$ = 105°.

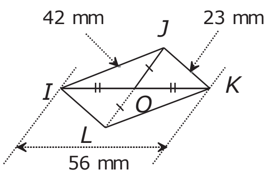
Les sommets *E* et *F* du parallélogramme *CDEF* sont les symétriques respectifs des points *C* et *D* par rapport à *G*.



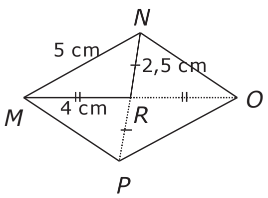
8 Construis un triangle *IJK* tel que : *IJ* = 42 mm, *JK* = 23 mm et *IK* = 56 mm ;

place le milieu *O* de [*IK*].

Le sommet *L* du parallélogramme *IJKL* est le symétrique du point *J* par rapport à *O*.



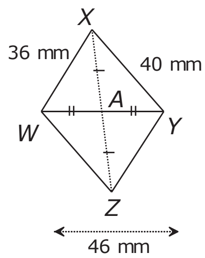
9 Construis un triangle *MNR* tel que : *MN* = 5 cm, *MR* = 4 cm et *NR* = 2,5 cm.



Les sommets *O* et *P* du parallélogramme *MNOP*, de centre *R*, sont les symétriques respectifs des points *M* et *N* par rapport à *R*.

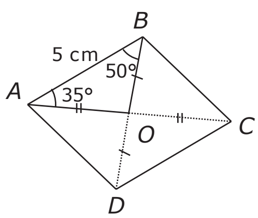
10 Construis un triangle *WXY* tel que : *WX* = 36 mm, *WY* = 46 mm et *XY* = 40mm ;
place le milieu *A* de [*WY*].

Le sommet *Z* du parallélogramme *WXYZ* est le symétrique du point *X* par rapport à *A*.



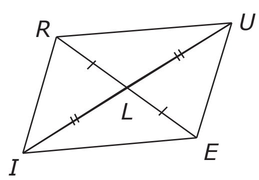
11 Construis un triangle *AOB* tel que : *AB* = 5 cm, mes $\widehat{A}$ = 35° et mes $\widehat{B}$ = 50°.

Les sommets *C* et *D* du parallélogramme *ABCD*, de centre *O*, sont les symétriques respectifs des points *A* et *B* par rapport à *O*.



2. Apprendre à reconnaître les parallélogrammes

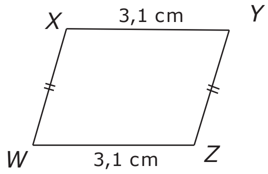
12 Les diagonales du quadrilatère *RUEI* se coupent en leur milieu.



Donc *RUEI* est un parallélogramme.

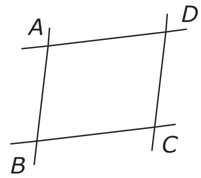
13 Les côtés opposés du quadrilatère non croisé *XYZW* ont la même longueur.

Donc *XYZW* est un parallélogramme.



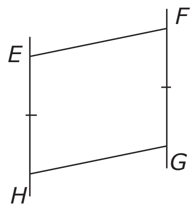
14 Les supports des côtés opposés du quadrilatère *ABCD* sont parallèles.

Donc *ABCD* est un parallélogramme.



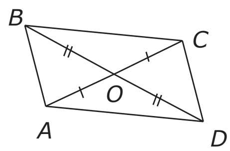
15 Les côtés opposés [*EH*] et [*FG*] du quadrilatère non croisé *EFGH* sont de même longueur et de supports parallèles.

Donc *EFGH* est un parallélogramme.



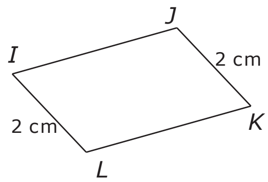
16 Les diagonales du quadrilatère *ABCD* se coupent en leur milieu *O*.

Donc *ABCD* est un parallélogramme.



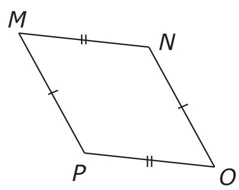
17 Les côtés opposés [*IL*] et [*JK*] du quadrilatère non croisé *IJKL* sont de même longueur et de supports parallèles.

Donc *IJKL* est un parallélogramme.

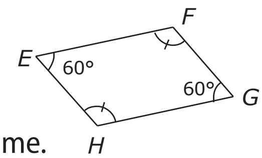


18 Les côtés opposés du quadrilatère non croisé *MNOP* sont de même longueur.

Donc *MNOP* est un parallélogramme.

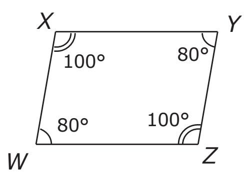


19 Les angles opposés du quadrilatère non croisé *EFGH* sont de même mesure.



Donc *EFGH* est un parallélogramme.

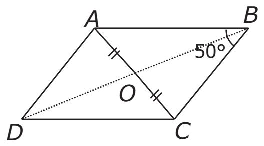
20 Les angles opposés du quadrilatère non croisé *WXYZ* sont de même mesure. Donc *WXYZ* est un parallélogramme.



Exercices d'application

Utiliser les propriétés

21 Dans le parallélogramme *ABCD* de centre *O* :



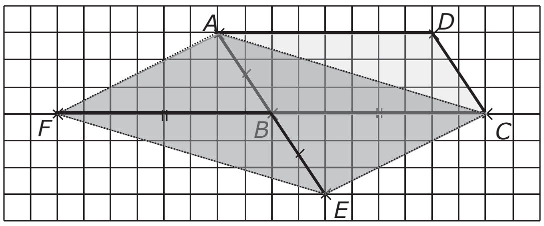
a. longueurs égales :
$AB = DC$, $AD = BC$ (côtés opposés), $OA = OC$;

b. *O* est le milieu de la diagonale [*BD*] ;

c. mes $\widehat{ADC}$ = mes $\widehat{ABC} = 50°$ (angles opposés) ;

mes $\widehat{BAD}$ = mes $\widehat{BCD} = 180 - 50 = 130°$ (angles consécutifs).

22 **1.**

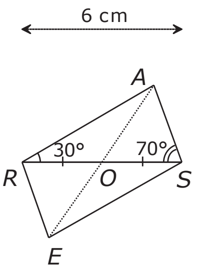


2. a. Pour que *ABCD* soit un parallélogramme, le sommet *D* doit être le point d'intersection de la droite passant par *C*, parallèle à (*BA*), et de la droite passant par *A*, parallèle à (*BC*) ;

b. pour que *ACEF* soit un parallélogramme de centre *B*, les sommets *E* et *F* doivent être les symétriques respectifs de *A* et *C*, par rapport à *B*.

Commentaire : utiliser les noeuds du quadrillage pour effectuer ces constructions.

23 **1.** *RAS* est un triangle tel que :



• $RS = 6$ cm,

• mes $\widehat{ASR} = 70°$ et mes $\widehat{ARS} = 30°$.

2. a. Le point *E*, tel que *RASE* soit un parallélogramme, est le symétrique de *A* par rapport au milieu *O* de [*RS*].

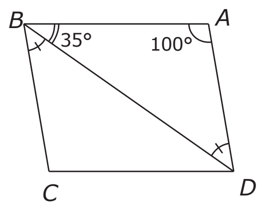
b. mes $\widehat{RAS} = 180 - 30 - 70 = 80°$;

mes $\widehat{ARE}$ = mes $\widehat{ASE} = 180 - 80 = 100°$.

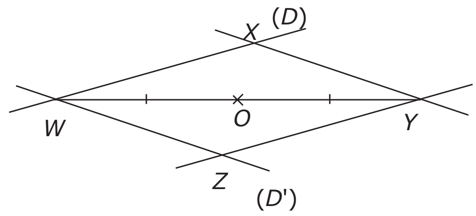
24 *ABCD* est un parallélo gramme.

mes $\widehat{ABC} = 180 - 100 = 80°$.

mes $\widehat{DBC} = 80 - 35 = 45°$.



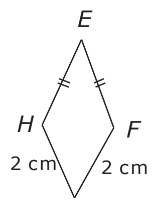
25

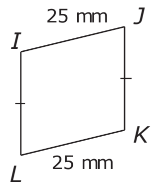


Pour construire le parallélogramme *WXYZ* de centre *O*, tel que $X \in (D)$ et $Y \in (D')$:
• *Y* est le symétrique de *W* par rapport à *O* ;
• *X* est le point d'intersection de (*D*) avec la droite passant par *Y* et parallèle à (*D'*) ;
• *Z* est le point d'intersection de (*D'*) avec la droite passant par *Y* et parallèle à (*D*).

Reconnaître un parallélogramme

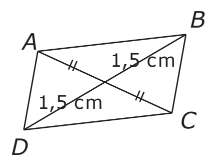
26 *EFGH* n'est pas un parallélogramme ; en effet ses côtés opposés ne sont pas nécessairement de même longueur.

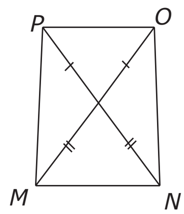




IJKL est un parallélogramme, puisque ce quadrilatère, non croisé, a ses côtés opposés de même longueur.

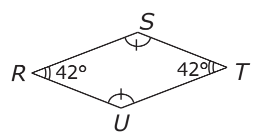
27 *ABCD* est un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en leur milieu.

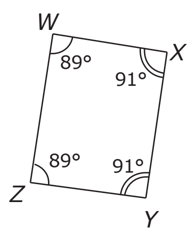




MNOP n'est pas un parallélogramme ; en effet ses diagonales ne se coupent pas nécessairement en leur milieu.

28 *RSTU* est un parallélogramme, puisque ce quadrilatère, non croisé, a ses angles opposés de même mesure.





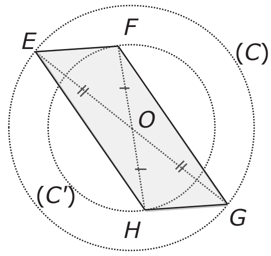
WXYZ n'est pas un parallélogramme ; en effet ses angles opposés n'ont pas la même mesure.

29 **1.** Les diagonales de *EFGH* se coupent en leur milieu *O*.

En effet :

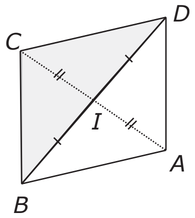
• [*EG*] est un diamètre du cercle (*C*), de centre *O*.

• [*FH*] est un diamètre du cercle (*C'*), de centre *O*.



2. On en déduit que *EFGH* est un parallélogramme (de centre *O*).

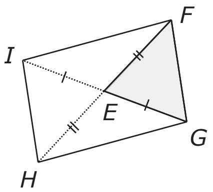
30 **1.**



2. Si *I* est le milieu de [*BD*] et *A* est le symétrique de *C* par rapport à *I*, alors les diagonales [*BD*] et [*CA*] du quadrilatère *ABCD* ont le même milieu *I*.

Donc *ABCD* est un parallélogramme.

31 **1.**

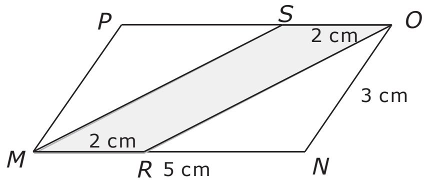


2. Si *H* et *I* sont les symétriques respectifs de *F* et *G* par rapport à E, alors les diagonales [*FH*] et [*GI*] du quadrilatère *FGHI* ont le même milieu *E*.

Donc *FGHI* est un parallélogramme.

Petits problèmes

32 **1.**



2. *MROS* est un parallélogramme. En effet :

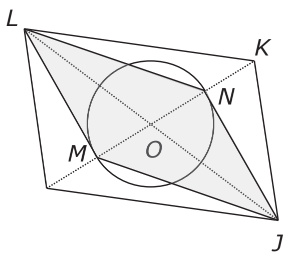
• *MNOP* est un parallélogramme, donc (*MN*) // (*PO*) ;

• par construction, *MR* = *OS* = 2 cm et *MROS* est un quadrilatère non croisé ;

• finalement les côtés [*MR*] et [*SO*], du quadrilatère non croisé *MROS*, sont de même longueur et de supports parallèles ;

• on en déduit que *MROS* est un parallélogramme.

33 **1.**



2. *JMLN* est un parallélogramme. En effet :

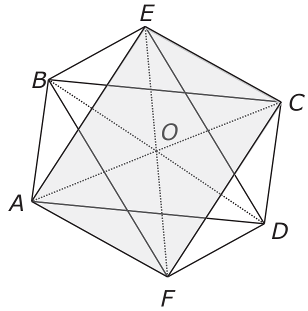
• *IJKL* est un parallélogramme de centre *O*, donc *O* est le milieu de la diagonale [*JL*] ;

• par construction, [*MN*] est un diamètre du cercle (*C*), de centre *O* ; donc *O* est le milieu de [*MN*] ;

• finalement les diagonales [*JL*] et [*MN*] du quadrilatère *JMLN* se coupent en leur milieu ;

• on en déduit que *JMLN* est un parallélogramme.

34



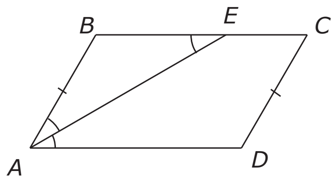
1. *ABCD* est un parallélogramme donc les diagonales [*AC*] et [*BD*] ont le même milieu *O*.

BEDF est un parallélogramme donc les diagonales [*BD*] et [*EF*] ont le même milieu *O*.

Finalement [*AC*] et [*EF*] ont le même milieu.

2. On en déduit que *AECF* est un parallélogramme (de centre *O*).

35 **1.**



2. a. *ABCD* est un parallélogramme, donc (*AB*) // (*CD*) ;

la droite (sécante) (*AE*) détermine avec ces deux droites (parallèles) deux angles alternes-internes de même mesure : mes $\widehat{DAE}$ = mes $\widehat{AEB}$.

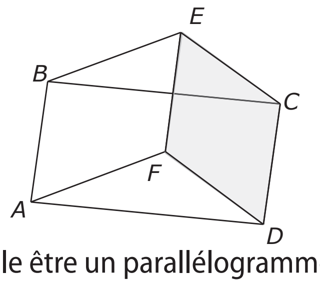
b. Comme [*AE*] est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ du parallélogramme *ABCD*, on a : mes $\widehat{BAE}$ = mes $\widehat{DAE}$;

on en déduit que : mes $\widehat{BAE}$ = mes $\widehat{AEB}$,

c'est-à-dire que le triangle *ABE* est isocèle en *B*.

c. *BAE* isocèle en *B*, donc : *AB* = *BE* ; *ABCD* est un parallélogramme, donc : *AB* = *DC* ; on en déduit que : *BE* = *DC*.

36 **1. a.**



b. *EFDC* semble être un parallélogramme.

2. a. • Dans le parallélogramme *ABCD*, *AB* = *DC* (longueur de côtés opposés) ;

• dans le parallélogramme *ABEF*, *AB* = *FE* (longueur de côtés opposés ;

donc : *DC* = *FE*.

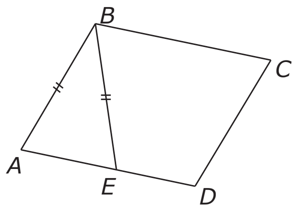
b. • Dans le parallélogramme *ABCD*, (*AB*) // (DC) (supports de côtés opposés) ;

• dans le parallélogramme *ABEF*, (*AB*) // (*FE*) (supports de côtés opposés ;

donc : (*DC*) // (*FE*).

c. Finalement le quadrilatère non croisé *EFDC* a deux côtés opposés de même longueur et de supports parallèles ; c'est un parallélogramme.

37



ABCD est un parallélogramme.

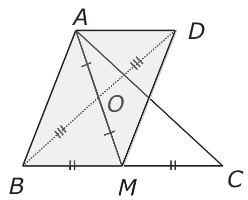
1. Le triangle *BAE* est isocèle en *B*, donc :

mes $\widehat{BAE}$ = mes $\widehat{BEA}$.

2. Dans *ABCD*, les angles opposés $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BCD}$ ont la même mesure.

On en déduit que les angles $\widehat{BEA}$ et $\widehat{BCD}$ ont la même mesure.

38 **1.**



2. a. *ADMB* est un parallélogramme.

En effet, par construction, le milieu *O* de [*AM*] est aussi milieu de [*BD*] ; donc *ADMB* a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

b. *MC* = *MB* (*M* milieu de [*BC*]) ;

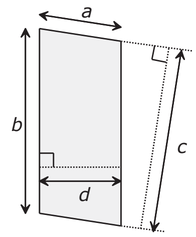
AD = *BM* (longueur de 2 côtés opposés d'un parallélogramme) ;

donc : *AD* = *MC*.

Aires et périmètres

39 **1.** Les formules qui permettent de calculer l'aire du parallélogramme grisé ci-contre sont :

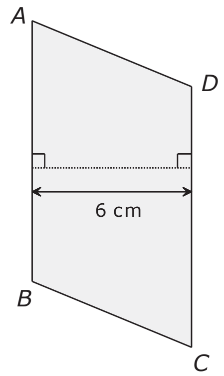
bd et *ac*.



2.

A	*B*	*C*	*D*	Aire	Périmètre
8 cm	12 cm	6 cm	4 cm	48 cm²	40 cm
40 cm	32 cm	20 cm	25 cm	800 cm²	144 cm

40 **1.**



2. Si le parallélogramme *ABCD* a pour aire 58,8 cm², alors : $AB = \dfrac{58{,}8}{6} = 9{,}8$ cm.

3. Si le parallélogramme *ABCD* a pour périmètre 32,6 cm, alors :

$AB + BC = \dfrac{32{,}6}{2} = 16{,}3$ cm, et $BC = 16{,}3 - 9{,}8 = 6{,}5$ cm.

Bien comprendre, mieux rédiger

41 **Quadrilatère croisé ou non**

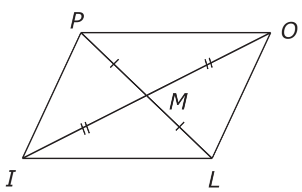
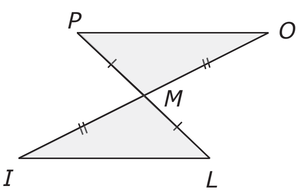


Figure de référence

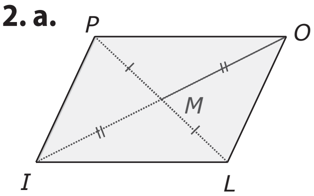
1. a.



b. *POIL* est un quadrilatère croisé car ses côtés [*OI*] et [*PL*] se croisent.

c. *M* est centre de symétrie pour ce quadrilatère.

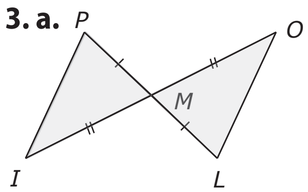
2. a.



b. *POLI* est un quadrilatère non croisé car ses côtés ne se croisent pas.

c. *POLI* est un parallélogramme, puisqu'il est non croisé et possède un centre de symétrie.

3. a.



b. *PLOI* est un quadrilatère croisé car ses côtés [*OI*] et [PL] se croisent.

c. *M* est centre de symétrie pour ce quadrilatère.

42 Bien observer

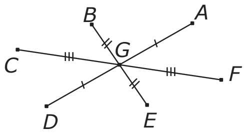
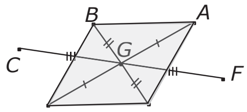
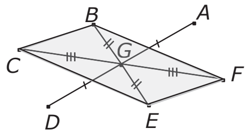


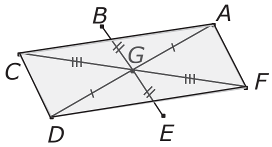
Figure de référence



Parallélogramme *ABDF*



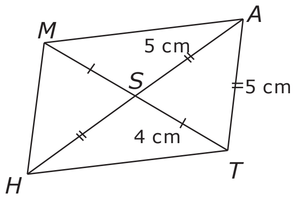
Parallélogramme *BCEF*



Parallélogramme *CDFA*

43 Programme de construction

1.

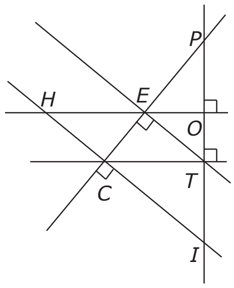


2. Programme de construction :

- Construis un segment [*MT*] mesurant 5 cm.
- Place le milieu *S* du segment [*MT*].
- Construis un point *A* situé à 5 cm de S et à 5 cm de *T*.
- Construis le point *H* symétrique du point *A* par rapport au point *S*.
- Trace le quadrilatère *MATH*.

44 Retrouver la bonne démarche

1.



2. a. *DBCE* est un parallélogramme.

En effet (raisonnement 2) : (*DE*) // (*BC*) et (*DB*) // (*EC*).

b. Le raisonnement 1 ne convient pas, car on ne sait pas que *M* est le milieu de [*EB*].

45 Justifier une réponse

1. Les deux remarques du professeur sont justifiées.

2. a. (*ET*) // (*HC*) car ces deux droites sont perpendiculaires à la droite (*CE*).

b. (*HE*) // (*CT*) car ces deux droites sont perpendiculaires à la droite (*PI*).

On en déduit qu'avec ses côtés opposés parallèles, *HETC* est un parallélogramme.

c. [*CE*] et [*HT*], diagonales du parallélogramme *HETC*, ont le même milieu.

46 Organiser un raisonnement

On sait que *ABCD* est un parallélogramme.

(Si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur, alors c'est un parallélogramme.)

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longueur

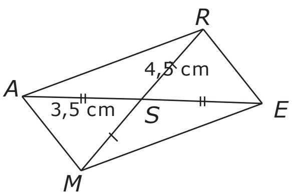
Donc, $AB = CD$ et $AD = BC$.

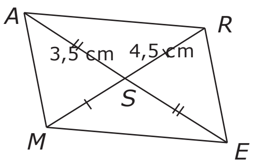
(erreur dans le choix et l'énoncé de la propriété !)

Exercices d'approfondissement

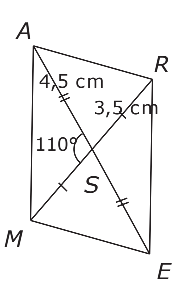
48 Comparer des constructions

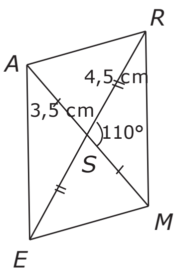
1. Voici deux parallélogrammes *MARE*, non superposables, tels que $MR = 7$ cm et $AE = 9$ cm :





2. Tous les parallélogrammes *MARE* tels que :
$MR = 7$ cm, $AE = 9$ cm et mes $\widehat{MSA} = 110°$,
sont superposables… à un retournement près :





49 Données suffisantes ou insuffisantes

ABCD est un parallélogramme ; en effet :
- avec 2 angles correspondants de même mesure, on a (*AB*) // (*DC*) ;
- de plus $AB = DC$ et *ABCD* n'est pas croisé.

EFGH n'est pas nécessairement un parallélogramme : avec deux angles correspondants de même mesure, (*EF*) // (*HG*) ; mais rien ne prouve que : (*EH*) // (*FG*) (*EFGH* peut être un trapèze isocèle de bases [*EF*] et [*HG*]).

50 Découpe d'une planche

C'est la propriété : « si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés de la même longueur et de supports parallèles, alors c'est un parallélogramme » qui prouve que le morceau central *ABA'B'* est un parallélogramme.

51 De propriétés en propriétés

. *MNOP* n'est pas nécessairement un parallélogramme :

I est le milieu de [*MO*], sans être celui de [*PN*] (les points *P*, *N* et *I* peuvent ne pas être alignés).

RSTU est un parallélogramme ; en effet :

• avec 2 angles correspondants de même mesure, (*RS*) // (*UT*) ;

• de même (*RU*) // (*ST*).

Commentaire pour les exercices 49 et 50 : les « contre-exemples de parallélogramme » sont difficiles à réaliser !

52 Avec une bissectrice

1. *ABCD* est un parallélogramme

2. b. (*CE*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$, qui mesure 120° ; donc : mes $\widehat{ECB}$ = mes $\widehat{ECD}$ = 60° ;
or mes $\widehat{CBE}$ = 180 – 120 = 60° ; on en déduit que *BCE* est un triangle équilatéral, de périmètre :
$3 \times BC = 3 \times 5 = 15$ cm.

53 Calculer des mesures

1. Aire du chemin : $12 \times 116 = 1\,392$ m.

2. Longueur du chemin : $1\,392 \div 8 = 174$ m.

Périmètre du chemin : $2 \times (12 + 174) = 372$ m.

54 Des parallélogrammes tout autour

1. *IJKL* est un parallélogramme (de centre *A*) donc :
IJ = *LK* et (*IJ*) // (*LK*).

2. Si *M* est le symétrique de *I* par rapport à *J*, alors :

$IM = 2 \times IJ$ et (*IM*) = (*IJ*).

Si *O* est le symétrique de *K* par rapport à *L*, alors :
$OK = 2 \times LK$ et (*OK*) = (*LK*).

Finalement, dans le quadrilatère non croisé *IMKO*, on a : *IM* = *OK* et (*IM*) // (*OK*) ; donc *MKO* est un parallélogramme.

3. De la même façon, on démontre que :
si *N* est le symétrique de *J* par rapport à *K*,
si *P* est le symétrique de *L* par rapport *I*,
alors : *LPJN* est un parallélogramme.

4. Dans le parallélogramme *IMKO*, les diagonales [*IK*] et [*MO*] se coupent en leur milieu : *A*.

Dans le parallélogramme *LPJN*, les diagonales [*LJ*] et [*PN*] se coupent en leur milieu : *A*.

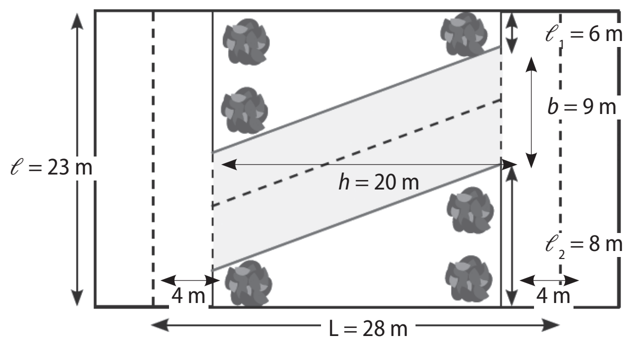
Finalement les diagonales [*MO*] et [*PN*] du quadrilatère *MNOP* se coupent en leur milieu *A*.

On en déduit que *MNOP* est un parallélogramme (de centre *A*).

Activités d'intégration

55 Travaux publics

La ruelle a la forme d'un parallélogramme de base *b* et de hauteur *h*.



$h = 28 - 2 \times 4 = 20$ m.
$b = 23 - 6 - 8 = 9$ m.
L'aire de la ruelle est donc : $\mathscr{A} = 20 \times 9 = 180$ m^2.

La facture sera donc de :
$F = 180 \times 9\,500 = 1\,710\,000$ F CFA.

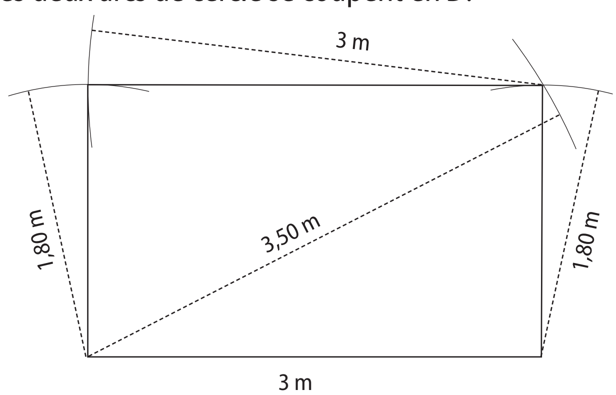
56 Le parterre de fleurs

La planche sert de règle et la corde sert de compas.

• Tracer le segment [*AB*] de longueur 3 m.

• Pointer le compas en *B* avec un écartement de 1,80 m et pointer le compas en *A* avec un écartement de 3,50 m. Les deux arcs de cercle se coupent en *C*.

• Pointer le compas en *C* avec un écartement de 3 m et pointer le compas en *A* avec un écartement de 1,80 m. Les deux arcs de cercle se coupent en *D*.



10 Polygones

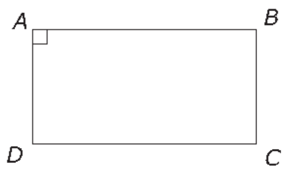
Manuel pages 111 à 122

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2, 3	Rectangle, losange, carré [1 p. 114]	9 à 30	42	
4, 5	Trapèze [2 p. 115]	31, 32, 33, 34, 35	44, 45	48, 49, 50, 51, 55
6, 7	Pentagone, hexagone et octogone réguliers [3 p. 115]	36, 37, 38, 39, 40	43, 47	52, 53, 54, 56
	Apprendre à construire un trapèze [2 p. 115]	**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**	45, 46,	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités d'apprentissage

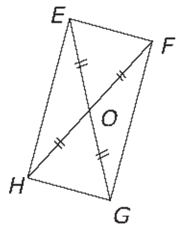
1. Rectangles et parallélogrammes



1. a. Sur la figure ci-contre, l'angle $\widehat{A}$ du parallélogramme *ABCD* est droit.

b. $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$, angles opposés de ce parallélogramme, ont même mesure ; donc $\widehat{C}$ est droit ;
$\widehat{A}$ et $\widehat{B}$, angles consécutifs de ce parallélogramme, sont supplémentaires ; donc $\widehat{B}$ est droit.

c. En fait un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

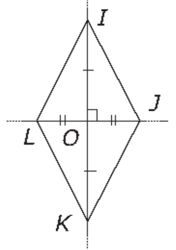


2. a. Sur la figure ci-contre, les diagonales [*EG*] et [*FH*] du parallélogramme *EFGH*, qui se coupent en leur milieu *O*, ont la même longueur.

b. Les points *E*, *F*, et *G* appartiennent au cercle de diamètre [*EG*], donc Fˆ est droit.

c. En fait (et d'après l'activité précédente) un parallélogramme qui a ses diagonales de la même longueur est un rectangle.

2. Losanges et diagonales



1. a. La droite (*IK*) est la médiatrice du segment [*JL*] ; en effet, (*IJ*) est perpendiculaire à [*JL*] en son milieu *O*.

b. On en déduit que *IJ* = *IL* et *KJ* = *KL*.

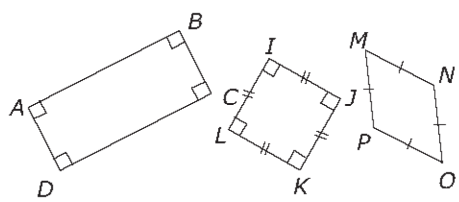
2.a. La droite (*JL*) est la médiatrice du segment [*IK*] ; en effet, (*JL*) est perpendiculaire à [*IK*] en son milieu *O*. On en déduit que *IJ* = *KJ*.

b. On en déduit que : *IJ* = *JK* = *KL* = *LI*.

c. Le quadrilatère IJKL est un losange.

3. *Si un quadrilatère a ses diagonales de <u>même milieu</u> et si leurs droites supports sont <u>perpendiculaires</u>, alors c'est un <u>losange</u>.*

3. Carrés



1. a. Oscar, qui voit deux rectangles, pense à *ABCD* et *IJKL*, en observant sur chacun d'eux le codage des quatre angles droits.

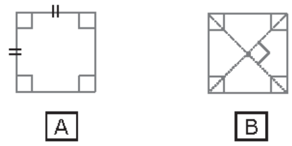
b. Léa, qui voit deux losanges, pense à *IJKL* et *MNOP*, en observant sur chacun d'eux le codage des quatre longueurs égales.

c. *IJKL* a été sélectionné deux fois.

d. À la fois rectangle et losange, *IJKL* est un carré.

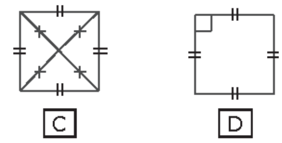
2. a. Les figures rouges, avec 4 angles droits, sont des rectangles.

b. Ce sont aussi des losanges :
• A, parallélogramme avec 2 côtés consécutifs de même longueur ;
• B, parallélogramme dont le support de chaque diagonale (perpendiculaire à l'autre diagonale en son milieu) est la médiatrice de l'autre diagonale, c'est-à-dire parallélogramme dont les côtés sont de même longueur.



c. Chacun d'eux est donc un carré.

3. Les figures bleues, avec 4 côtés de même longueur, sont des losanges.
Ce sont aussi des rectangles :
• C, parallélogramme avec des diagonales de même longueur ;
• D, parallélogramme avec un angle droit.
Chacun d'eux est donc un carré.



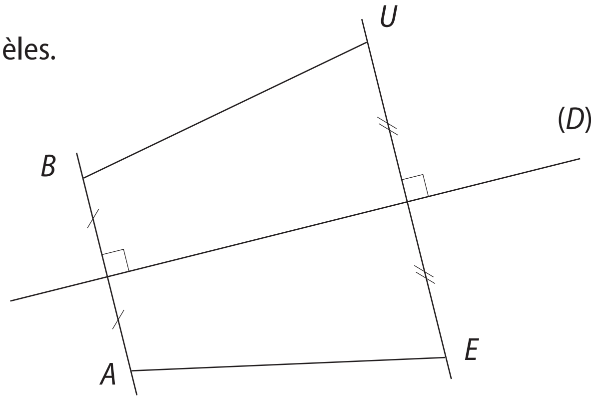
4. Trapèzes

1. Les trapèzes sont des quadrilatères qui ont deux côtés parallèles.

2. Les trapèzes rectangles (5, 6, 7 et 8) ont deux angles droits ; les trapèzes isocèles (1, 2, 3 et 4) ont les deux côtés non parallèles de même longueur.

3. *BUEA* (figure ci-contre) est un trapèze isocèle.

4. Dans le quadrilatère *BUEA*, les diagonales sont de même longueur et les angles à la base sont de même mesure.



5. Aire d'un trapèze

1. a. *ABCD* est un trapèze puisque les côtés [*AB*] et [*CD*] sont parallèles.

b. Le symétrique de *ABCD* par rapport à *O* est *NCBM*.

c. L'aire du trapèze *ABCD* est donc la moitié de l'aire du parallélogramme *AMND*.

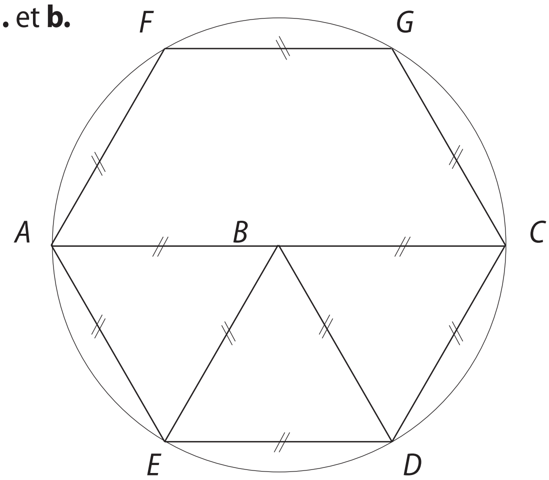
2. a. L'aire du parallélogramme *AMND* est : $AM \times h = (AB + BM) \times h = (DC + AB) \times$ h.

b. L'aire du trapèze est aussi : $\frac{1}{2}$ (grande base + petite base) × hauteur.

6. Triangle équilatéral et hexagone

1. Les points *A*, *B* et *C* sont alignés, puisque :
$\widehat{ABC} = 60 + 60 + 60 = 180°$.

2. a. et **b.**



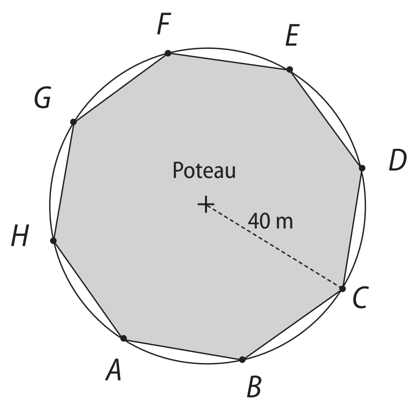
3. a. *A*, *E*, *D*, *C*, *G* et *F* appartiennent au cercle de centre *B* et de rayon $r = BA = BE = BD = BC = BG = BF$.

b. De plus $AE = ED = DC = CG = GF = FA = r$.

4. On en déduit la construction (connue) avec le compas et la règle de l'hexagone régulier.

7. Jeu à huit

1. et **2. a.**



b. Les côtés de ce polygone sont tous de même longueur.

c. Un octogone régulier est un polygone non croisé possédant 8 sommets et 8 côtés de même longueur.

Méthodes et savoir-faire

Apprendre à construire un trapèze

1 Une figure possible … et immédiate !

2 Programme de construction :

– trace un segment [*ST*], de longueur 7 cm ;

– trace, à 4 cm de ce segment, une droite (*D*) qui lui est parallèle ;

– *U* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *S* et de rayon 9 cm ;

– *R* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *T* et de rayon 5 cm.

3 Programme de construction :

– trace un segment [*ST*], de longueur 6 cm ;

– trace, à 3,5 cm de ce segment, une droite (*D*) qui lui est parallèle ;

– *U* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *T* et de rayon 5 cm ;

– *R* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *U* et de rayon 4 cm.

4 Une figure possible … et immédiate !

5 Programme de construction :

– trace un segment [*OP*], de longueur 5 cm ;

– trace, à 3 cm de ce segment, une droite (*D*) qui lui est parallèle ;

– M est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *O* et de rayon 7 cm ;

– N est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *P* et de rayon 7 cm.

6 Programme de construction :

– trace un segment [*AD*], de longueur 6 cm ;

– trace un angle $\widehat{DAx} = 54°$, puis place sur son côté [*Ax*) le point *B* tel que $AB = 4$ cm ;

– trace la droite (Δ) passant par *B* et parallèle à [*AD*] ;

– *C* est l'un des deux points d'intersection de (Δ) avec le cercle de centre *D* et de rayon 4 cm.

7 Programme de construction :

– trace un segment [*YZ*], de longueur 6 cm ;

– trace les cercles (C_1) et (C_2), de centres *Y* et *Z*, de rayons respectifs 3 cm et 2 cm ;

– toute droite (*D*) [ou (*D*′)], parallèle à [*YZ*] et sécante avec les deux cercles, coupe (C_1) en X [ou *X*′] et (C_2) en *W* [ou *W*′].

8 Programme de construction :

– trace le triangle *ABC*, aux dimensions indiquées ;

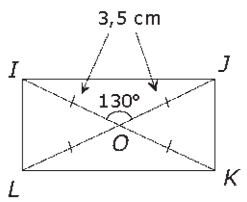
– sur la droite, passant par *C*, parallèle à [*AB*] et du même côté que *A* par rapport à (*BD*), place le point *D* tel que $CD = 3$ cm.

Exercices d'application

Tracés de quadrilatères particuliers

9 Trace un triangle *OIJ* tel que : mes $\widehat{IOJ} = 130°$, $OI = OJ = 3{,}5$ cm.

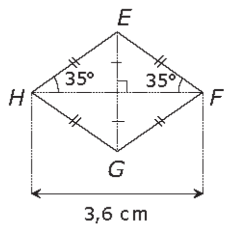
Construis les points *K* et *L*, symétriques respectifs de *I* et *J*, par rapport à *O*.



Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, *IJKL* est un rectangle.

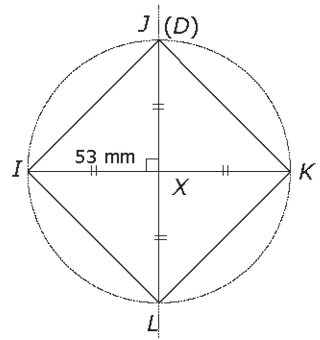
10 Trace un triangle *EHF* tel que : $HF = 3{,}6$ cm, mes $\widehat{EHF}$ = mes $\widehat{EFH} = 35°$.

Construis le point *G*, symétrique de *E* par rapport à (*HF*).



Quadrilatère dont les côtés ont la même longueur, *EFGH* est un losange.

11 **1.** *I* et *X* sont deux points tels que $IX = 53$ mm.

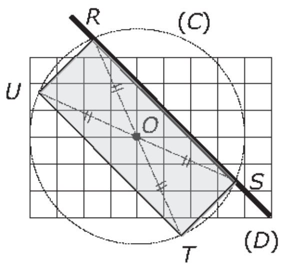


2. Construis le point *K*, symétrique de *I* par rapport à *X*.

Sur la médiatrice (*D*) de [*IK*], place les points *J* et L tels que $XI = XL = 53$ mm.

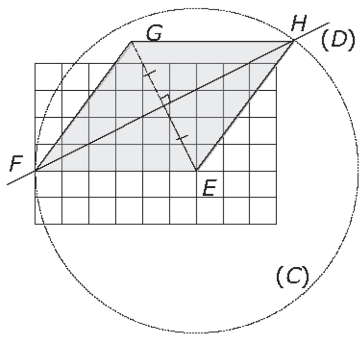
Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu *X*, ont la même longueur et sont perpendiculaires, *IJKL* est un carré de centre *X*.

12 Trace le cercle (C), de centre O et de rayon 2 cm.



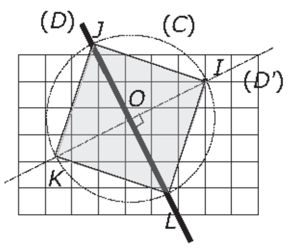
Si :
• (C) coupe (D) en R et S,
• T et U sont les symétriques respectifs de R et S par rapport à O,
alors $RSTU$ est un rectangle de centre O, tel que R et S sont sur (D) et $OR = 2$ cm.

13 Trace le cercle (C), de centre E et de rayon 3 cm.



Si :
• (C) coupe (D) en F et H,
• G est le symétrique de E par rapport à (D),
alors $EFGH$ est un losange tel que F et H sont sur (D) et $EF = 3$ cm.

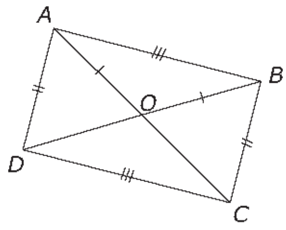
14 Trace la droite (D') passant par I et perpendiculaire en O à (D).
Trace le cercle (C), de centre O et passant par I.



Si :
• (C) recoupe (D') en K,
• (C) coupe (D) en J et L,
alors $IJKL$ est un carré tel que J et L sont sur (D).

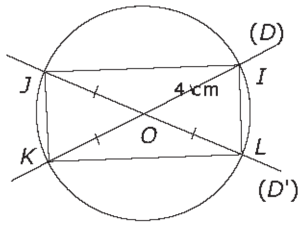
Reconnaître un rectangle

15 **1.** $ABCD$ est un quadrilatère non croisé, dont les côtés opposés ont la même longueur, donc $ABCD$ est un parallélogramme.



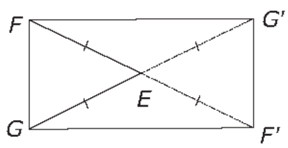
2. Parallélogramme avec deux « demi-diagonales » de même longueur ($OA = OB$) c'est-à-dire deux diagonales de même longueur, $ABCD$ est aussi un rectangle.

16 **1.**



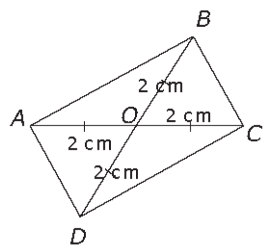
2. a. Les diagonales du quadrilatère $IJKL$ se coupent en leur milieu et ont la même longueur.
b. On en déduit que $IJKL$ est un rectangle.

17 **1.**

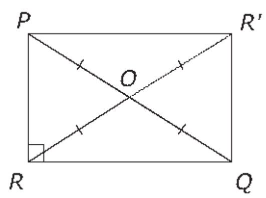


2. EFG est un triangle isocèle en E donc $EF = EG$; F' et G' symétriques respectifs de F et G par rapport à E donc $EG' = EG$ et $EF' = EF$; finalement : $EF = EG = EF' = EG'$.
Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, $FGF'G'$ est un rectangle.

18 **1.** Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu et ont la même longueur.
2. On en déduit que $ABCD$ est un rectangle.



19 **1.**



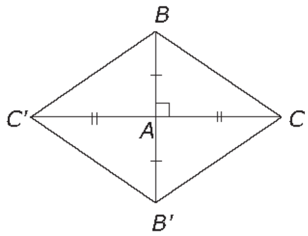
2. a. PQR est un triangle rectangle en R, donc le milieu O du côté [PQ] est centre du cercle circonscrit à ce triangle : $OP = OQ = OR$;

R′ est le symétrique de *R* par rapport à *O*, donc : $OR = OR'$;
finalement : $OP = OQ = OR = OR'$.

b. Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, *PRQR′* est un rectangle.

Reconnaître un losange

20 **1.**



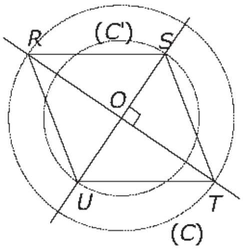
2. a. Les diagonales du quadrilatère *BCB′C′* ont :

• même milieu *A* (puisque *B′* et *C′* sont les symétriques respectifs de *B* et *C* par rapport à *A*) ;

• des supports perpendiculaires (puisque *ABC* est un triangle rectangle en *A*).

b. On en déduit que *BCB′C′* est un losange.

21 **1.**



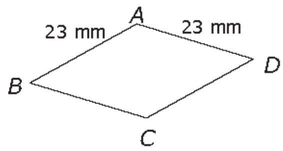
Les diagonales du quadrilatère *RSTU* ont :

• même milieu *O* (puisque [*RT*] et [*SU*] sont diamètres respectifs de (*C*) et (*C′*), cercles de centre *O*) ;

• des supports perpendiculaires (par construction).

2. On en déduit que *RSTU* est un losange.

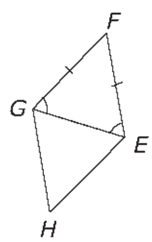
22 *ABCD* est un parallélogramme tel que :
$AB = AD = 23$ mm.



Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur donc :
$DC = AB$ et $BC = AD$.

Finalement $AB = BC = CD = DA$ et *ABCD* est un losange.

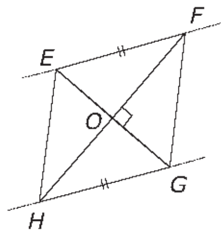
23 **1.** *EFGH* est un parallélogramme tel que : mes $\widehat{GEF}$ = mes $\widehat{EGF}$.



2. a. Avec deux angles de même mesure, le triangle *EFG* est isocèle en *F*.

b. On en déduit que *EFGH*, parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont la même longueur (*FG*=*FE*), est un losange.

24



(*EF*)//(*HG*)

1. *EFGH* est un quadrilatère non croisé, dont les deux côtés opposés [*EF*] et [*HG*] ont :

• la même longueur,

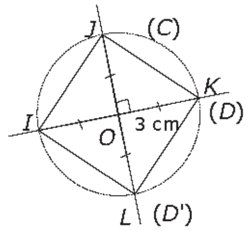
• des supports parallèles ;

donc *EFGH* est un parallélogramme.

2. Les diagonales de ce parallélogramme ont des supports perpendiculaires ; donc *EFGH* est un losange.

Reconnaître un carré

25 **1.**



2. a. Les diagonales de *IJKL* :

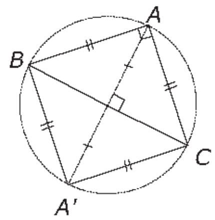
• ont le même milieu *O*,

• sont de même longueur,

• ont des supports perpendiculaires.

b. On en déduit que *IJKL* est un rectangle et un losange, c'est-à-dire un carré de centre O.

26 **1.**

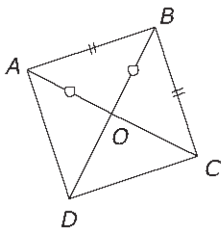


2. Le triangle *ABC* est rectangle et isocèle en *A*.

A′ est le symétrique de *A* par rapport à (*BC*).

ABA′C, qui a 4 côtés de même longueur, est un losange ; ce losange, qui a un angle droit, est un carré.

27



ABCD est un parallélogramme de centre *O*.

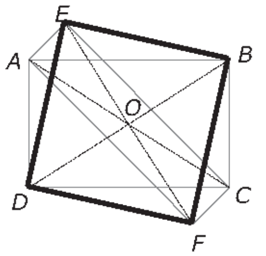
Ce parallélogramme, qui a des « demi-diagonales » (donc des diagonales) de même longueur, est un rectangle.

Ce parallélogramme, qui a deux côtés consécutifs de même longueur, est un losange.

Finalement *ABCD* est un carré.

Figures complexes

28 *ABCD* et *AECF* sont des rectangles.



1. a. Les diagonales du rectangle *ABCD* ont même longueur : $AC = BD$; les diagonales du rectangle *AECF* ont même longueur : $AC = EF$.

b. On en déduit que : $BD = EF$.

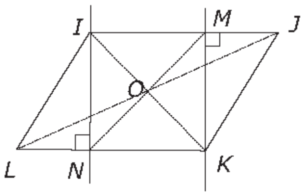
2. Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu ; donc :
- *O* est le milieu de [*AC*] et [*BD*],
- *O* est le milieu de [AC] et [EF] ;

finalement [*BD*] et [*EF*] ont le même milieu *O*.

3. *BEDF* est un quadrilatère dont les diagonales ont :
- le même milieu *O*,
- la même longueur ;

on en déduit que *BEDF* est un rectangle.

29 *IJKL* est un parallélogramme de centre *O*.



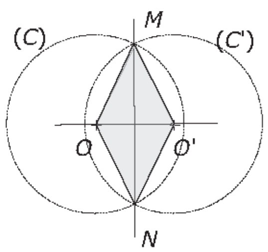
2. a. *IJKL* est un parallélogramme, donc : (*IM*)//(*NK*)
(*KM*) ⊥ (*IM*) et (*IN*) ⊥ (*KN*),
donc: (*KM*)//(*IN*).

On en déduit que *IMKN* est un parallélogramme.

Avec un angle droit, *IMKN* est un rectangle.

b. *O*, centre du parallélogramme *IJKL*, est le milieu de [*IK*] ; dans le rectangle *IMKN*, les diagonales [*IK*] et [*MN*] ont le même milieu ; donc *O* est le milieu de [*MN*].

30 **1.**



Les cercles (*C*) et (*C*′) de centre *O* et *O*′ ont le même rayon.

2. a. *OMO′N* est un losange ; en effet ses côtés sont de même longueur (le rayon commun aux deux cercles).

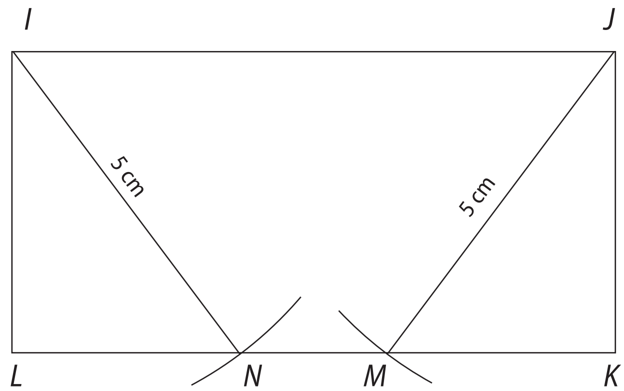
b. (*OM*) et (*O′N*), supports de deux côtés opposés du losange *OMO′N*, sont deux droites parallèles ;

de même (*ON*) et (*O′M*) sont deux droites parallèles.

c. (*OO*′) et (*MN*), supports des diagonales du losange *OMO′N*, sont deux droites perpendiculaires.

Trapèze

31 **1.**



2. *IJMN* est un trapèze isocèle.

Justification :

[*IJ*]//[*MN*], (*IN*) et (*JM*) non parallèles et $IN = JM = 5$ cm.

32 *ABCD* n'est pas un trapèze rectangle.

Justification :

mes $\widehat{D} = 360 - 119 - 62 - 90 = 89°$.

33 **1.** La sécante (*NO*) détermine, avec les droites parallèles (*MN*) et (*PO*), deux angles $\widehat{N}$ et $\widehat{O}$ alternes-internes de même mesure ; donc les angles $\widehat{MNO}$ et $\widehat{PON}$ sont supplémentaires.

De même : les angles $\widehat{PMN}$ et $\widehat{MPO}$ sont supplémentaires.

2. On en déduit que la somme des mesures des quatre angles du trapèze est égale à 360°.

34 Aire du trapèze *TROU* : $\dfrac{(6+3)\times 3}{2} = 13{,}5\ \text{cm}^2$.

Aire du trapèze *CHAT* : $\dfrac{(1{,}8+6{,}2)\times 2{,}4}{2} = 9{,}6\ \text{cm}^2$.

35 Aire du premier trapèze :

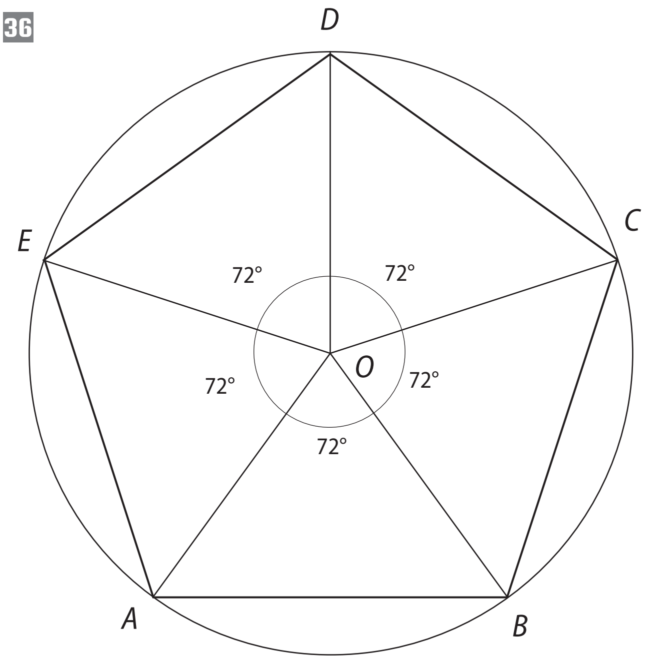
$\dfrac{(6{,}3+3{,}8)\times 1{,}9}{2} = 9{,}6\ \text{cm}^2$.

Aire du second trapèze :

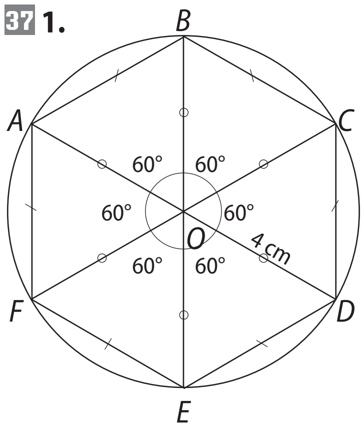
$\dfrac{(11+5)\times 1{,}25}{2} = 10\ \text{cm}^2$.

Pentagone, hexagone

36



37 **1.**



2. a. $AB = 4$ cm.

b. Le périmètre de *ABCDEF* est égal à $4 \times 6 = 24$ cm.

3. Les six axes de symétrie sont :

• d'une part (*AD*), (*BE*) et (*CF*),

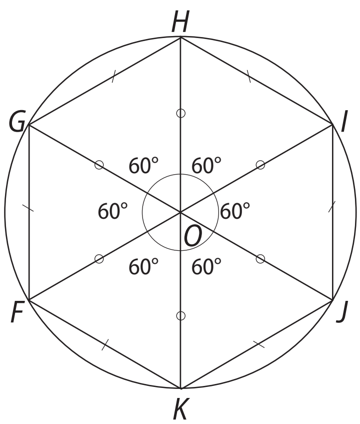
• d'autre part les médiatrices des couples de côtés parallèles ([*AB*] et [*DE*], [*BC*] et [*EF*], [*CD*] et [*FA*]).

4. a. mes $\widehat{ABO} = 60°$.

Justification : *ABO* est un triangle équilatéral.

b. La somme des mesures des angles d'un hexagone régulier est : $12 \times 60 = 720°$.

38 **1.**



2. a. *FGHO*, quadrilatère dont les côtés ont la même longueur, est un losange.

b. (*FH*) est un axe de symétrie pour ce losange.

c. Les triangles *FGH* et *FHO*, symétriques par rapport à (*FH*), ont la même aire.

3. Aire(*FGHIJK*) $= 6 \times$ aire(*FHO*),

aire(*FHJ*) $= 3 \times$ aire(*FHO*), donc : $\dfrac{\text{aire}(FGHIJK)}{\text{aire}(FHJ)} = 2.$

39 **1.** Les axes de symétrie sont les droites (*AE*), (*BF*), (*CG*) et (*DH*). Le centre de symétrie est le point *O*.

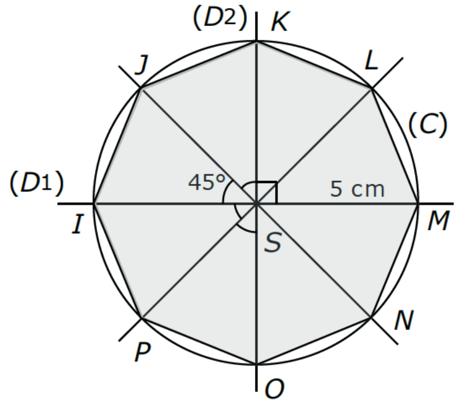
2. Puisque *ABCDEFGH* est un octogone régulier :

• mes $\widehat{COD} = 45°$;

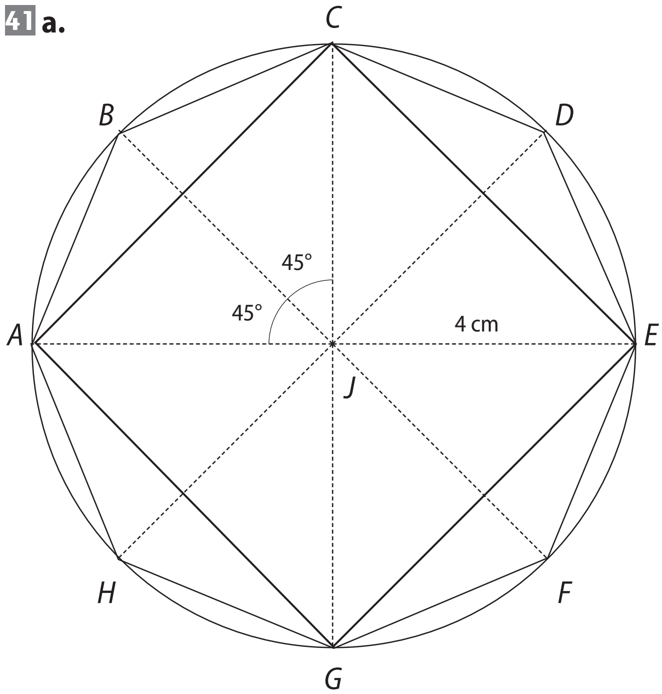
• mes $\widehat{FOD} =$ mes $\widehat{FOE} +$ mes $\widehat{EOD} = 90°$;

•mes $\widehat{GOB} = 3 \times 45° = 135°$.

40 En suivant les consignes de l'exercice, on obtient un octogone régulier *IJKLMNOP*.



41 **a.**



b. • Puisque *ABCDEFGH* est un octogone régulier, mes $\widehat{AJC} =$ mes $\widehat{AJB} +$ mes $\widehat{BJC} = 45 + 45 = 90°$.

• De plus, [*AE*] et [*GC*] sont des diamètres du cercle, donc $AE = GC$.

• Ainsi, dans le quadrilatère *ACEG*, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, donc *ACEG* est un carré.

Bien comprendre, mieux rédiger

42 Sur la figure :

1. *CDEF* est un losange (côtés de même longueur), *DEGH* est un rectangle (diagonales de même longueur et sécantes en leurs milieux), *ABCD* est un carré (diagonales de même longueur, perpendiculaires et sécantes en leurs milieux).

2. *AGEB* et *EFCI* sont des trapèzes rectangles.

3. *EHAD*, *EHAB* et *GABD* sont des trapèzes n'ayant aucune autre particularité.

43

Nom	Nombre de sommets	Mesure d'un angle au centre
Pentagone régulier	5	72°
Carré	4	90°
Hexagone régulier	6	60°
Triangle équilatéral	3	120°
Octogone régulier	8	45°

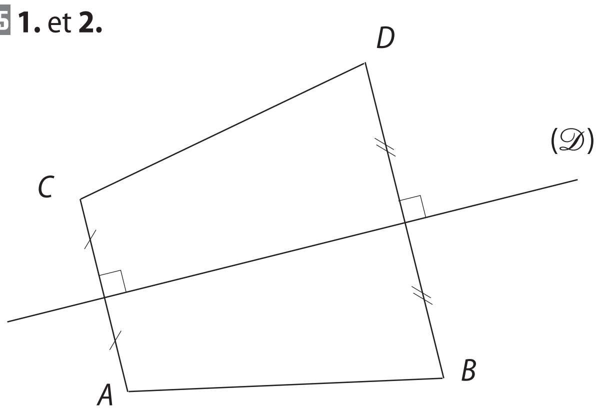
44 $EB = 4 - 3 = 1$ cm ;

• aire du trapèze *EBCD* $= \dfrac{4+1}{2} \times 3{,}5 = 8{,}75$ cm² ;

• aire du trapèze *EFCD* $= 8{,}75 + \dfrac{4+3{,}5}{2} = 15{,}75$ cm² ;

• aire du trapèze *AFCD* $= \dfrac{3+4+1+4}{2} \times 3{,}5 = 21$ cm².

45 **1.** et **2.**



3. *ABDC* est un trapèze isocèle.

En effet :

• les côtés [*AC*] et [*BD*], perpendiculaires à (𝒟), sont parallèles entre eux ;

• les côtés [*AB*] et [*CD*], symétriques par rapport à (𝒟), sont de même longueur.

46 **Étape 1 :**

OA = *OB* car *A* et *B* appartiennent au cercle (𝒞), de centre *O*.

IA = *IB* car *I* est le milieu de [*AB*].

La droite (*OI*) est donc la médiatrice de la corde [*AB*].

On en déduit que (*OI*) ⊥ (*AB*).

Étape 2 :

(*IC*) n'étant pas parallèle à (*OD*), pour conclure que *OICD* est un trapèze, il faut prouver que (*OI*) // (*DC*).

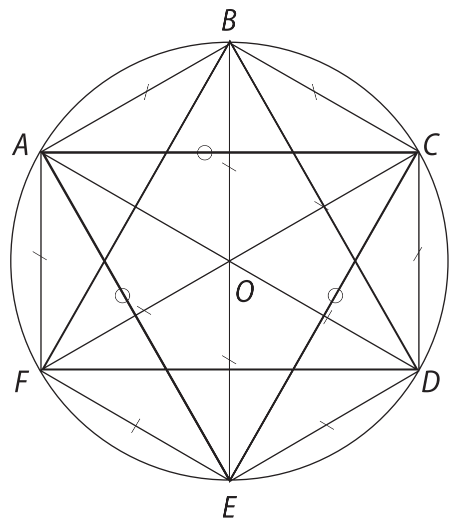
C appartient au cercle (𝒞'), de diamètre [*BD*], donc le triangle *BCD* est rectangle en C.

Finalement (*OI*) ⊥ (*AB*) et (*DC*) ⊥ (*AB*) donc (*OI*) // (*DC*).

Étape 3 :

OICD a deux côtés, [*OI*] et [*DC*], parallèles entre eux et perpendiculaires au côté [*IC*] ; donc *OICD* est un trapèze rectangle.

47 **1.**



ABCDEF estun hexagone régulier inscritdans un cercle de centre *O*.

ACE et *BDF* sont deux triangles équilatéraux.

2. Une fois construit l'hexagone*ABCDEF*, dans un cercle de centre O :

• la figure *A* s'achève en utilisant une règle non graduée ;

• la figure *B* s'achève en utilisant un compas et en effaçant les traits de construction.

Exercices d'approfondissement

48 Retrouver une formule

1. Aire($ABCD$) $= \text{aire}(ABC) + \text{aire}(ADC)$

$= \dfrac{AB \times h}{2} + \dfrac{CD \times h}{2} = \dfrac{(AB + CD) \times h}{2}$.

2. Si $AB = 3$ m $= 30$ dm, $CD = 50$ dm et $h = 21$ cm $=$ 2,1 dm, alors l'aire($ABCD$) $= \dfrac{(50 + 30) \times 2{,}1}{2} = 84$ dm^2.

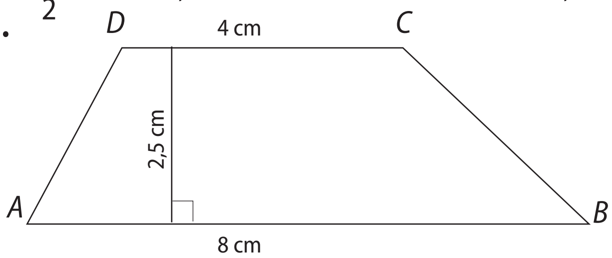
49 Trouver une dimension

$ABCD$ est un trapèze d'aire 15 cm^2 ; sa grande base [AB] mesure 8 cm et sa petite base [CD] mesure 4 cm.

1. Soit h la hauteur de ce trapèze ; on a :

$\dfrac{(8 + 4) \times h}{2} = 15$; c'est-à-dire : $6 \times h = 15$ et $h = 2{,}5$ cm.

2.



50 Placer un point

Aire($EFGH$) $= \dfrac{(7 + 3) \times 4}{2} = 20$ cm^2 ;

donc aire(FAG) $= \dfrac{1}{4}$ aire($EFGH$) $= 5$ cm^2.

Comme aire(FAG)$= \dfrac{4 \times AG}{2}$, on en déduit que :
$AG = 2{,}5$ cm.

51 La banderole

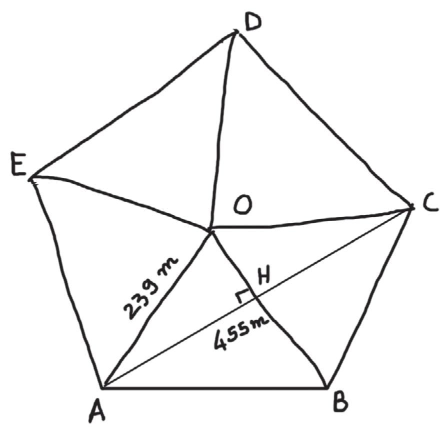
1. Avec seulement deux côtés parallèles, chaque quadrilatère coloré est un trapèze.

2. Il n'y a pas de quadrilatère pour lequel Safi a utilisé davantage de peinture que pour les autres ; en effet, avec des bases et une hauteur identiques dans chaque trapèze, l'aire de chacun d'eux est la même.

3. Aire d'un trapèze : $\dfrac{(12 + 20) \times 15}{2} = 240$ cm^2.

52 Le pentagone

1.



2. Aire (AOC) $= \dfrac{AC \times OH}{2}$ et Aire (ABC) $= \dfrac{AC \times BH}{2}$.

Donc Aire ($OABC$) $=$ Aire (AOC) $+$ Aire (ABC)

$= \dfrac{455 \times OH}{2} + \dfrac{455 \times BH}{2}$

$= 227{,}5 \times OH + 227{,}5 \times BH$

$= 227{,}5 \times OB$

$= 227{,}5 \times 239$

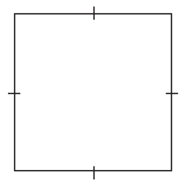
$= 54\,372{,}5$ m^2.

Ainsi, Aire (AOB) $= \dfrac{\text{Aire } (OABC)}{2} = 27\,186{,}25$ m^2.

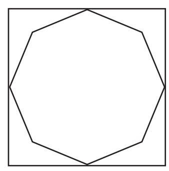
D'où Aire ($ABCDE$) $= 5 \times$ Aire (AOB) $= 135\,931{,}25$ m^2.

53 Du carré à l'octogone

1.

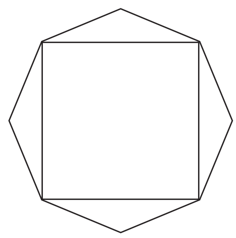


2. a.



Octogone régulier ayant, parmi ses sommets, les milieux des côtés du carré.

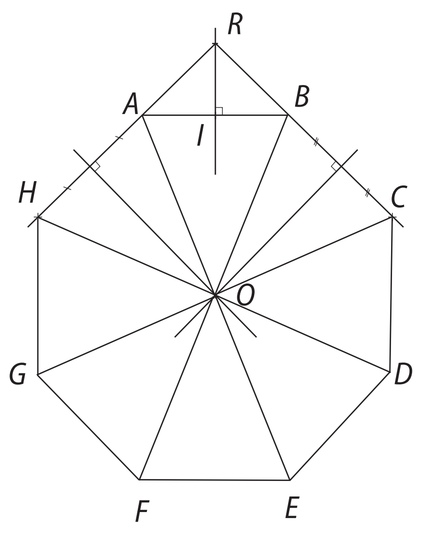
b.



Octogone régulier ayant, parmi ses sommets, les sommets du carré.

54 Octogone de côté donné

1. et **2. a.**



b. $ABCDEFGH$ est un octogone régulier, dont la longueur des côtés est 5 cm.

Justification :

• le triangle *RAB*, dont le sommet *R* appartient à la médiatrice de [*AB*] et au cercle de diamètre [*AB*], est rectangle et isocèle en *R* ;

• en suivant toutes les consignes de la construction :

– la droite (*RI*) est axe de symétrie de toute la figure (triangle *RAB* et octogone *ABCDEFGH*) ;

– le point *O* appartient à la droite (*RI*) et est centre de symétrie de l'octogone *ABCDEFGH* ;

– les sommets de cet octogone appartiennent au cercle de centre *O*, passant par *A* et *B* ;

• l'octogone sera régulier si, de plus, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOG} = \widehat{GOH} = \widehat{HOA} = 45°$:

– *J* et *K* étant les milieux de [*AH*] et [*BC*], le quadrilatère *JRKO* (avec 3 angles droits et 2 côtés consécutifs de même longueur) est un carré ;

– l'angle droit $\widehat{JOK}$ est partagé en 4 angles égaux à 22,5° ;

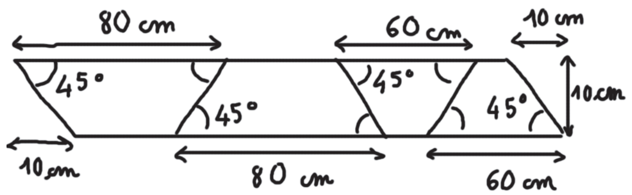
on en déduit que : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{HOA} = 45°$, puis, par symétrie de centre *O*, $\widehat{EOF} = \widehat{FOG} = \widehat{DOE} = 45°$,

enfin $\widehat{COD} = \widehat{GOH} = \dfrac{360 - 6 \times 45}{2} = 45°$.

Activités d'intégration

55 Encadrer un tableau

On réalise un schéma à main levée avec les quatre trapèzes qui vont permettre de constituer le cadre.



• La planchette de bois doit mesurer au minimum :

80 + (80 – 2 × 10) + 60 + (60 – 10) = 250 cm.

• L'aire à peindre est :

$\mathcal{A} = 2 \times \dfrac{(80 + 60) \times 10}{2} + 2 \times \dfrac{(60 + 40) \times 10}{2}$

$\mathcal{A} = 1\,400 + 1\,000$

$\mathcal{A} = 2\,400$ cm^2.

• $\dfrac{2\,400}{1\,000} = 2{,}4$.

Kanga doit donc acheter trois tubes de peinture.

56 Les belles assiettes

Schéma aux dimensions réelles à contrôler par l'enseignant.

• Calcul de l'aire en jaune :

[*RO*] est un diamètre du cercle circonscrit à l'hexagone régulier *MNOPQR*, de centre *K* et de rayon *KM* = *MN* (car le triangle *MKN* est équilatéral).

$\mathcal{A}_J = 2 \times$ Aire du trapèze *RONM*

$\mathcal{A}_J = 2 \times \dfrac{(RO + MN) \times KJ}{2}$

$\mathcal{A}_J = 2 \times \dfrac{(9 + 4{,}5) \times 2{,}6}{2}$

$\mathcal{A}_J = 35{,}1$ cm^2.

• Calcul de l'aire en vert :

$\mathcal{A}_V = 6 \times$ Aire du trapèze *ABNM*

$\mathcal{A}_V = 6 \times \dfrac{(AB + MN) \times IJ}{2}$

$\mathcal{A}_V = 6 \times \dfrac{(6 + 4{,}5) \times 1{,}3}{2}$

$\mathcal{A}_V = 40{,}95$ cm^2.

• L'artisan aura donc besoin de davantage de peinture verte car $\mathcal{A}_V > \mathcal{A}_J$.