4e

NOUVEAU PROGRAMME

Collection de Mathématiques

# CARGO

NOUVELLE ÉDITION

# LIVRE DU PROFESSEUR

## Partie 3

(pages 105 à 143)

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

# 12 Vecteurs

*Manuel pages 131 à 142*

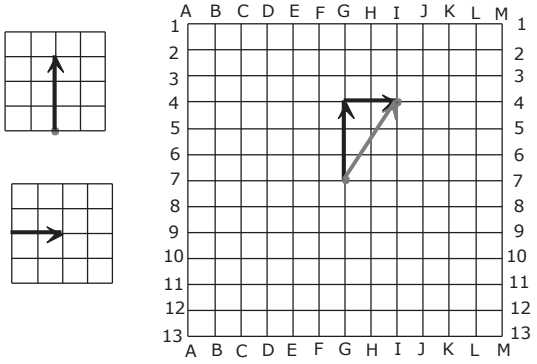
| Activités d'apprentissage | Cours<br>Méthodes et savoir-faire | Application | Bien comprendre<br>Mieux rédiger | Approfondissement |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Représentation et caractérisation d'un vecteur [1 p. 134] | 11, 12 | 33, 34, 35 | 55 |
| 2, 3 | Égalité vectorielle et parallélogramme [2 p. 134] | 13, 14, 15 | 37, 39 | 43 |
| 4 | Somme de deux vecteurs [3 p. 135] | 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27 | 36, 38 | 40, 41, 42, 44, 45, 47 |
| | **Apprendre à construire la somme de deux vecteurs [1 p 136]** | **1**, **2**, **3**, **4** | | 61, 62, 63 |
| 5 | Vecteurs opposés ; vecteur nul [4 p. 135] | 18, 19 | | 44, 48 |
| | Milieu d'un segment et vecteurs [5 p 135] | 19 | 37 | 46, 47, 48 |
| | **Apprendre à démontrer en utilisant des vecteurs [2 p 137]** | **5, 6, 7, 8, 9, 10**, 28, 29, 30, 31, 32 | | 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48 |

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

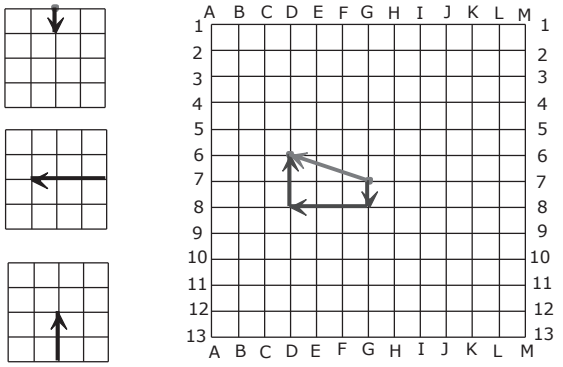
## Introduction et contrôle des pré-requis

### Le nouveau jeu de Mariam

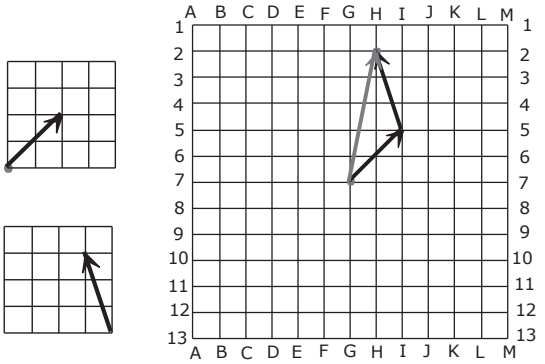
**1. a.**



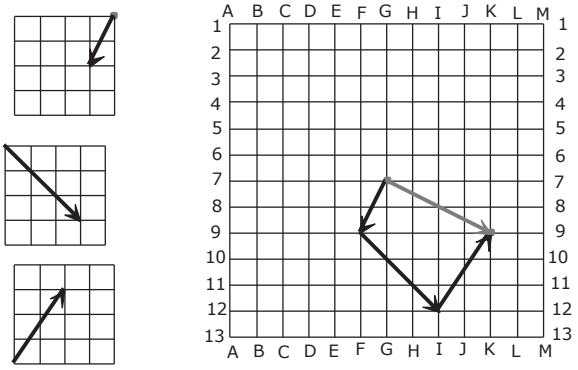
**1. b.**



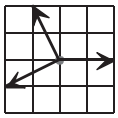
**2. a.**

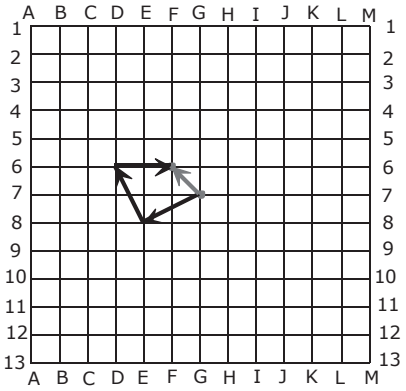


**2. b.**



**3.**



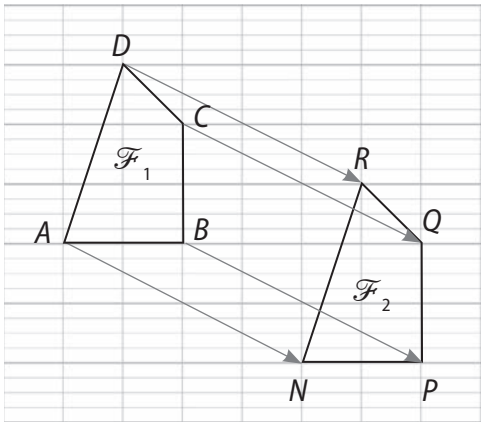



Après les déplacements successifs indiqués à gauche, la bille a disparu en (G ; 7) et réapparaîtra en (F ; 6).

# Activités d'apprentissage

## 1. Comprendre la notion de vecteur

**1.**, **2.** et **4. a.**

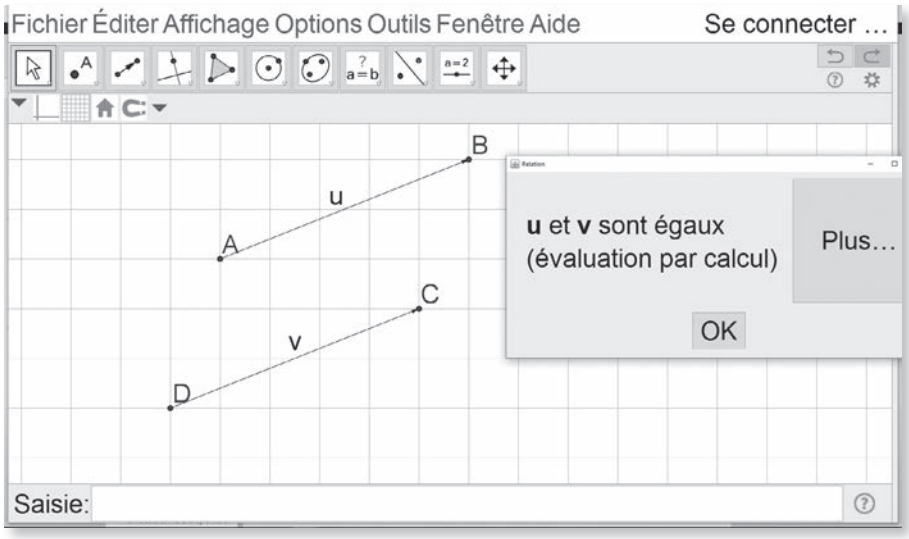



**3.** Le vecteur $\overrightarrow{AN}$ est caractérisé par :
- un point de départ, le point *A* (appelé origine) ;
- une direction, celle de la droite (*AB*) ;
- une longueur, celle du segment [*AB*] ;
- et un sens, celui qui va de *A* vers *B*.

**4. b.** Ces vecteurs n'ont pas la même origine que le vecteur $\overrightarrow{AN}$, mais ils ont des directions parallèles, la même longueur et le même sens.

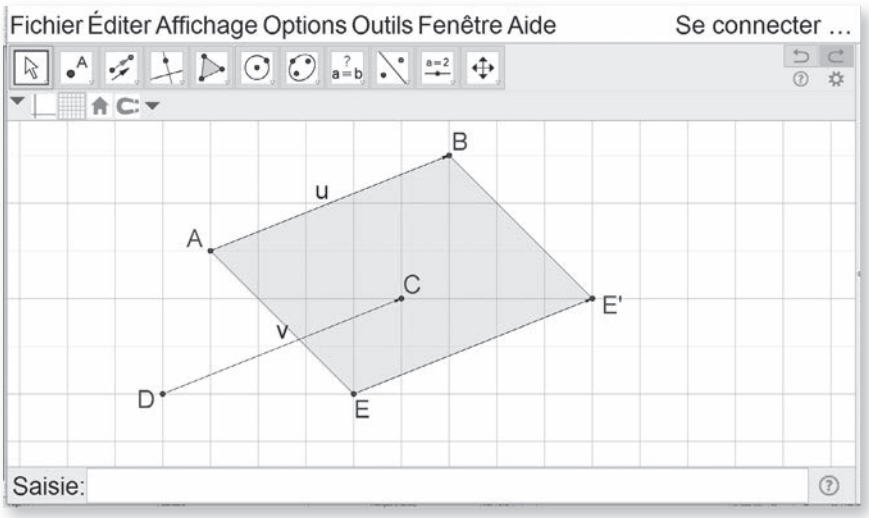
## 2 Utiliser un logiciel pour comprendre

**1.**




On conjecture que les vecteurs *AB* et *DC* sont égaux.

**2.**

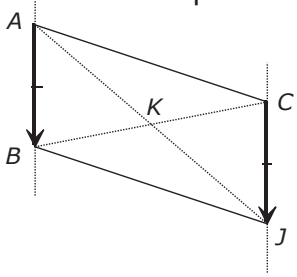



On conjecture que le quadrilatère *ABE'E* est un parallélogramme.

## 3 Vecteurs et parallélogramme

**1.** *GRIF* est un parallélogramme ; en effet ses diagonales [*GI*] et [*FR*] ont le même milieu *O*.

**2.** On en déduit que : $\overrightarrow{RI} = \overrightarrow{GF}$ ; $\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{FI}$ ; $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{IR}$ ; $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{RG}$ .



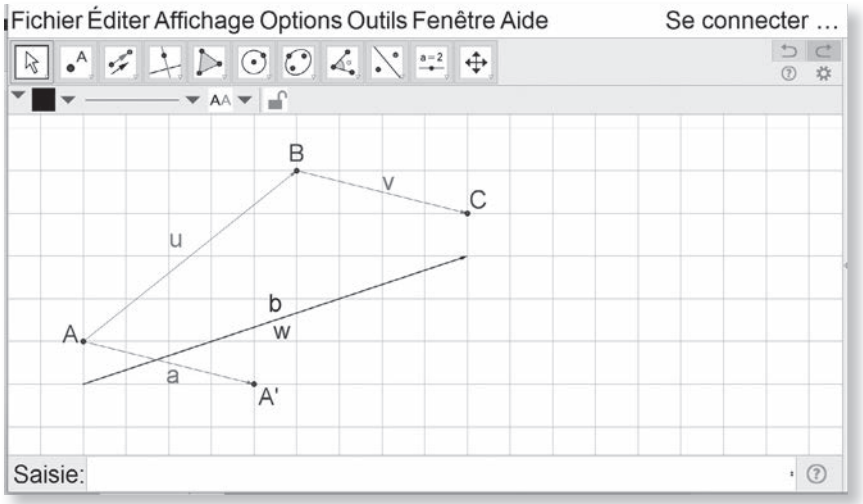

**3. a.** *A*, *B*, *C* et *J* sont quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CJ}$,

**b.** Le quadrilatère non croisé *ABJC*, qui a deux côtés [*AB*] et [*CJ*] de même longueur et de supports parallèles, est un parallélogramme.

**4.** Dans ce parallélogramme *ABJC*, les diagonales [*AJ*] et [*BC*] ont le même milieu *K*.

## 4 Somme de deux vecteurs

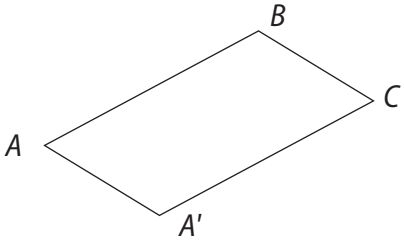
Ⓐ **1. a.**, **b.** et **2. a.**




**1. c.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

**2. b.** On remarque que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$.

Ⓑ **a.**




**b.** • $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

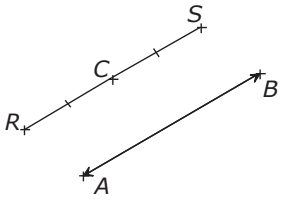
• $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ car *ABCA'* est un parallélogramme.

**c.** • Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'}$ ont pour origine le point *A*.

• $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

## 5 Vecteurs opposés, vecteur nul, milieu d'un segment

**1.**




**2. a.** Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{SR}$ ont même direction, même longueur et sont de sens contraires.

**b.** La longueur du vecteur $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR}$ est nulle ;
en effet, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{RR}$.

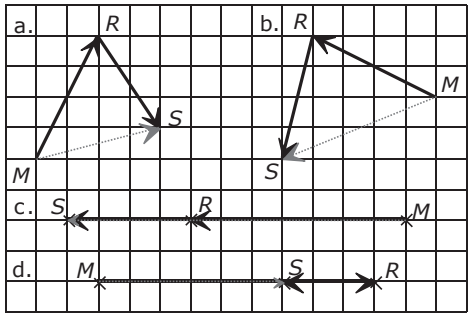
**c.** Deux vecteurs, qui ont la même direction, la même longueur mais des sens contraires, sont dits opposés ; un vecteur, dont l'origine et l'extrémité sont confondues, est appelé vecteur nul.

**3.** Le point $C$ du segment $[RS]$, tel que $\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CS}$ soit un vecteur nul, est le milieu de ce segment.

# Méthodes et savoir-faire

## 1. Apprendre à construire la somme de deux vecteurs

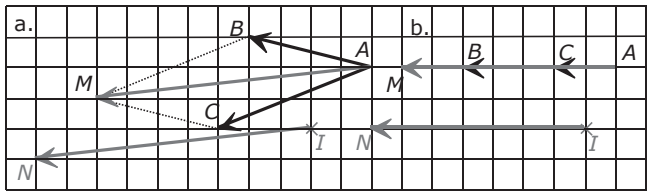
**1**




$\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS}$.

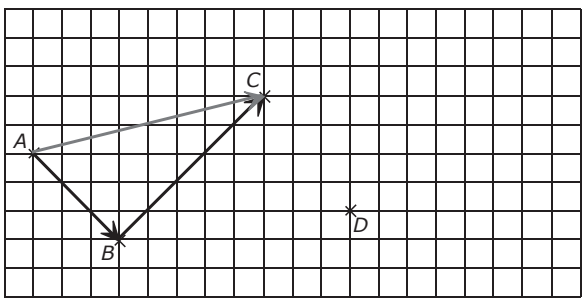
Dans chaque cas, pour construire le vecteur d'origine $M$ représentant $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS}$, on utilise la règle du « bout-à-bout ».

**2**




Dans les deux cas, $M$ et $N$ sont les points tels que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

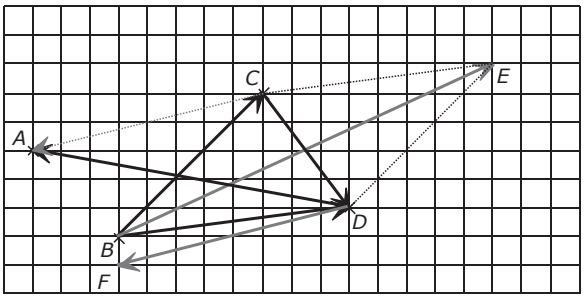
**3** **1.** et **2. a.**




$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

**2. b.** Méthode de construction la mieux adaptée : la règle du « bout-à-bout ».

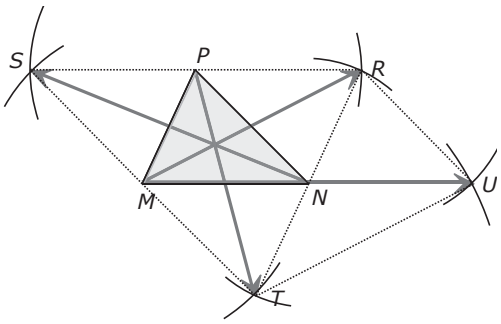
**3.**




**a.** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE}$ ; méthode de construction la mieux adaptée : la règle du parallélogramme ;

**b.** $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$ ; méthode de construction la mieux adaptée : la règle du « bout-à-bout ».

**4** Donnée initiale : un triangle MNP.



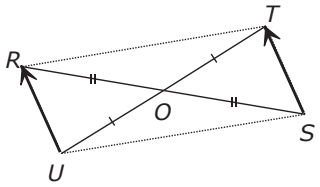

Construction, en utilisant un compas et la règle du parallélogramme, des points $R$, $S$, $T$ et $U$ tels que :

**a.** $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}$ ; **b.** $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$ ;

**c.** $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ ; **d.** $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MT}$.

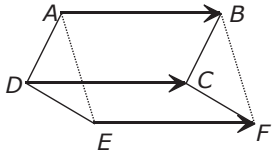
## 2. Apprendre à démontrer en utilisant des vecteurs

**5**




Si $O$ est le milieu de $[RS]$ et $[TU]$, alors $URTS$ est un parallélogramme ; donc : $\overrightarrow{UR} = \overrightarrow{ST}$.

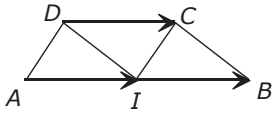
**6** **1.**




$ABCD$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ;
$DCFE$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$.

**2.** On en déduit que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ ; donc $ABFE$ est un parallélogramme.

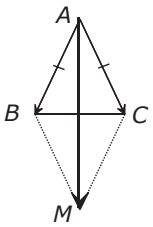
**7** **1.**




$AICD$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DC}$ ;
$DIBC$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$ ;
On en déduit que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

**2.** Finalement $I$ est le milieu de $[AB]$.

**8** **1.**

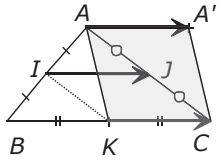



$ABC$ est un triangle isocèle en $A$.

**2.** $M$ est le point tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**3.** Par construction $ABMC$ est un parallélogramme, dont deux côtés consécutifs ont la même longueur ; donc ce quadrilatère est un losange.

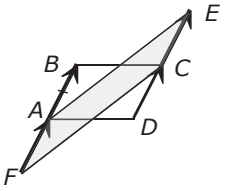
**9**




**1.** Dans le triangle $ABC$, puisque $I$ et $J$ sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$, on en déduit que $(IJ)$ // $(BC)$ (et donc $(IJ)$ // $(KC)$ et que $IJ = \frac{1}{2} BC = KC$.

Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KC}$, donc $IJCK$ est un parallélogramme.
**2. a.** $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KC}$ donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{KC}$.
**b.** D'après le **2. a.**, on en déduit que $AA'CK$ est un parallélogramme.

**10**

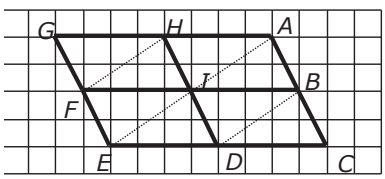



**1.** $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
**2.** $E$ est le symétrique de $D$ par rapport à $C$ ;
$F$ est le symétrique de $B$ par rapport à $A$.
**3.** $C$ est le milieu de $[DE]$, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$ ;
$A$ est le milieu de $[FB]$, donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB}$.
**4.** On en déduit que : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA}$ ;
donc le quadrilatère $CEAF$ est un parallélogramme.

# Exercices d'application

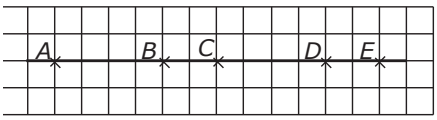
### Vecteurs égaux, vecteurs opposés

**11**



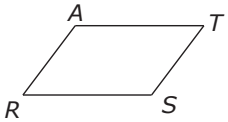

**a.** $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$ ;
**b.** $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG}$ ;
**c.** $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EG}$ ;
**d.** $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ ;
**e.** $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DB}$.

**12**



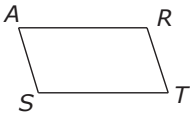

**1.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE}$ ; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.
**2.** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$.

**13** **1.**



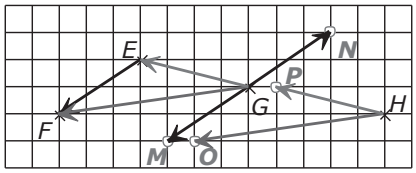
Égalités qui signifient que *RATS* est un parallélogramme : $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TA}$ ; $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RA}$ ; $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AT}$.

**2.**




Égalités qui signifient que *ARTS* est un parallélogramme : $\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{TS}$ ; $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{AS}$.

**14 1.**

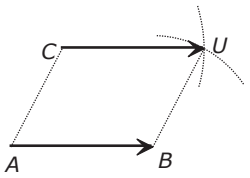



Les points *E*, *F*, *G* et *H* sont donnés.

**2. a.** *M* est tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{EF}$ ; *N* est tel que $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{FE}$.

**b.** *O* est tel que $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{GF}$ ; *P* est tel que $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{GE}$.

**15 1.a.**

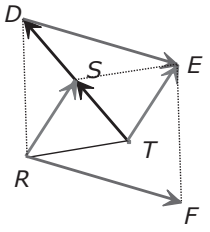



$\overrightarrow{CU} = \overrightarrow{AB}$.

**b.** *U* est le point d'intersection du cercle de centre *B*, de rayon *AC*, et du cercle de centre *C*, de rayon *AB*.

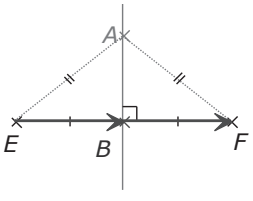
**c.** Le point *U* est le quatrième sommet du parallélogramme *ABUC*.

**2. a.**




**b.** *D*, *E et F* sont tels que : $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{TS}$ (*S* milieu de [*TD*]) ;
$\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{RS}$ (parallélogramme *SRTE*) ;
$\overrightarrow{RF} = \overrightarrow{DE}$ (parallélogramme *RFED*).

**16 1.**

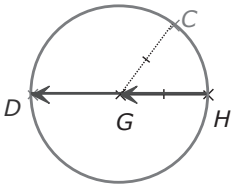



*EF* = 4 cm.

**2.** Les points *A* tels que *EA* = *AF* sont les points de la médiatrice du segment [*EF*].

**3.** Le point *B* tel que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$ est le milieu du segment [*EF*].

**17 1.**

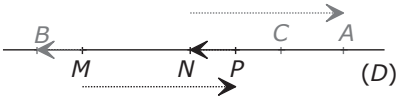



*GH* = 3 cm.

**2.** Les points *C* tels que *GC* = *GH* sont les points du cercle de centre *G* et de rayon *GH*.

**3.** Le point *D* tel que $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{HG}$ est le symétrique de *H* par rapport à *G* (*G* milieu de [*HD*]).

**18 1.** *M*, *N* et *P* sont trois points de (*D*), dans cet ordre :

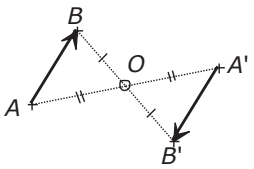



**2. a.** $A \in (D)$ et est tel que : $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$ ;

**b.** $B \in (D)$ et est tel que : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{PN}$ ;

**c.** $C \in (D)$ et est tel que : $\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$.

**19 1. a.**




**b.** *A'* et *B'* sont les symétriques respectifs de *A* et *B* par rapport à *O*.

**c.** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$ (les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont opposés).

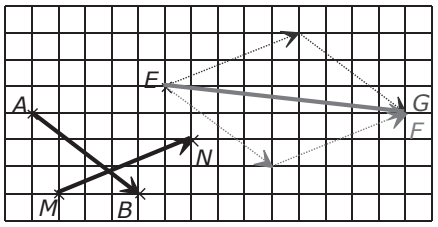
**2. a.** $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{B'O}$.

**b.** Opposés de $\overrightarrow{AO}$ : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'O}$.

**3.** Les égalités qui traduisent que *O* est le milieu d'un segment sont :
$\overrightarrow{B'O} = \overrightarrow{OB}$ (*O* est alors le milieu de [*BB'*]) ;
$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{A'O}$ (*O* est alors le milieu de [*AA'*]).

## Somme de deux vecteurs

**20 1.**




**2.** En utilisant la règle du « bout-à-bout » :

**a.** en trait gris épais, construction de *F* tel que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN}$ ;

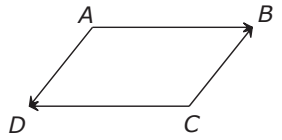
**b.** en gris fin, construction de *G* tel que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AB}$.

**c.** On remarque que *F* et *G* sont confondus.

**d.** On en déduit que, dans une somme de deux vecteurs, on peut changer l'ordre de ces vecteurs (commutativité).

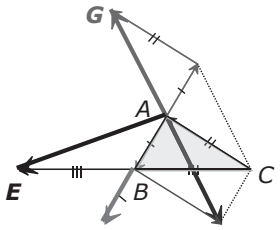
**3.** Quatre points *R*, *S*, *T* et *U* sont donnés.
$\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{RT}$ ; $\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TU}=\overrightarrow{SU}$ ;
$\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{TS}+\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{TR}$ ; $\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{UR}=\overrightarrow{UR}+\overrightarrow{RT}=\overrightarrow{UT}$ ;
$\overrightarrow{SU}+\overrightarrow{US}=\overrightarrow{SS}=\vec{0}$ ; $\overrightarrow{RU}+\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{SU}$.

**21** **1.**



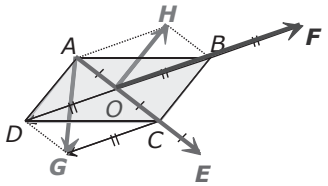

*ABCD* est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ; $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ ; $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.
**2.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ ; $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ ;
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ ;
$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ ; $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

**22** **1.**



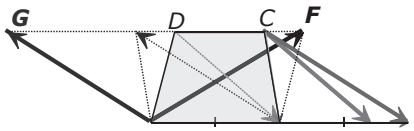

Un triangle *ABC* est donné.
**2.** *E*, *F*, *G* et *H* sont tels que :
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$ ; $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$ ; $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

**23**



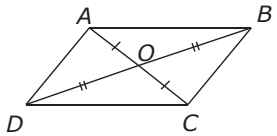

*ABCD* est un parallélogramme de centre *O*.
*E*, *F*, *G* et *H* sont tels que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OC}$ ; $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DO}$ ;
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OD}$ ; $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

**24**



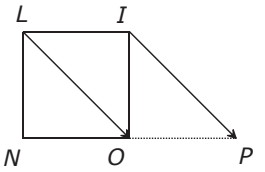

*ABCD* est un trapèze de bases [*AB*] et [*CD*].
*F*, *G*, *H* et *K* sont tels que :
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ; $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ ; $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$ ;
$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ ;

**25** **1.**



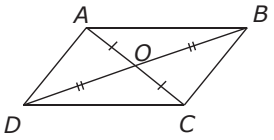

*ABCD* est un parallélogramme de centre *O*.
*ABCD* est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ; ainsi
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BO}$.
**2. a.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}$ ;
**b.** $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CD}$ ;
**c.** $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}$.

**26** **1.**




*LION* est un carré de côté 3 cm.
**2. a.** $\overrightarrow{LO}+\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{LI}$ ; **b.** $\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{NI}$ ;
**c.** $\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{LO}=\overrightarrow{NO}$ ; **d.** $\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IP}=\overrightarrow{NP}$.

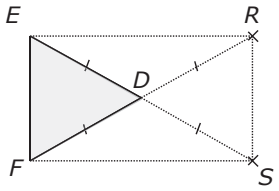
**27**




*ABCD* est un parallélogramme de centre *O*.
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$ ; $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ ;
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$ ;
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$ ;
$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$ ;
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$ ;
$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

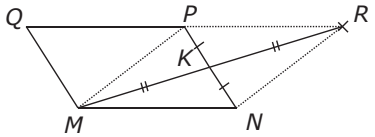
## Petits problèmes

**28** **1. a.**



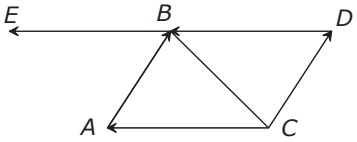

*DEF* est isocèle en *D*.
**b.** *S* et *R* sont les symétriques respectifs de *E* et *F* par rapport à *D*.
**c.** *RSFE* est un rectangle ; en effet, les diagonales de ce quadrilatère :
• se coupent en leur milieu (parallélogramme)
• ont la même longueur.
**2. a.** $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DS}$ ; $\overrightarrow{ER}=\overrightarrow{FS}$.
**b.** $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DE}$ ; $\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ER}=\overrightarrow{FR}$.

**29** **1.**



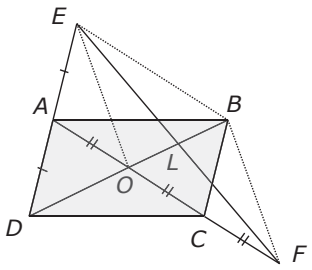
**2.** *MNPQ* est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
*K* est le milieu de [*NP*] (par construction) et de [*MR*] (puisque *R* est le symétrique de *M* par rapport à *K*) ;
donc le quadrilatère *MNRP*, dont les diagonales se coupent en leur milieu, est un parallélogramme et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PR}$.
**3.** Finalement $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PR}$ ; donc *P* est le milieu de [*QR*].

**30**




**1.** Si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, alors *ABDC* est un parallélogramme et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$.
**2.** *E* est tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$.
**3.** On a : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BE}$ ; donc *B* est le milieu de [*ED*].

**31**

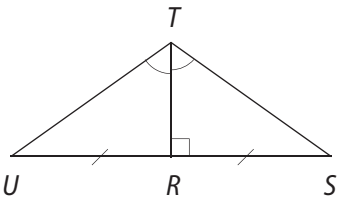



*ABCD* est un parallélogramme ;
*A* est le milieu de [*DE*] ; $F \in (AC)$ et $AO = OC = CF$.
**1. a.** *ABCD* est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ ;
comme *A* est le milieu de [*DE*], on a : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$ ;
donc : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE}$.

**b.** On en déduit que *AEBC* est un parallélogramme et $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}$.

**2.** $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont deux vecteurs qui ont mêmes direction, sens et longueur ($2 \times OC$) ; donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OF}$.
**3.** On en déduit que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OF}$ ; donc le quadrilatère *EBFO* est un parallélogramme, dont les diagonales [*EF*] et [*OB*] ont même milieu *L*.

**32 1.**




**2.** On a : $(RT) \perp (RS)$ ; $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{SR}$, donc *R* est le milieu de [*SU*].
On en déduit que :
• (*TR*) est la médiatrice de [*US*] ;
• *UTS* est un triangle isocèle en *T*, dont la droite (*TR*) est à la fois hauteur, médiane et bissectrice issues de son sommet principal *T*.
Finalement : mes $\widehat{STR}$ = mes $\widehat{RTU}$.

## Bien comprendre, mieux rédiger

### 33 Vecteur : plusieurs significations

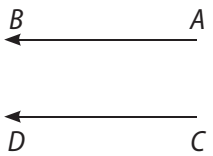
Significations du mot « vecteur » en médecine :
**1.** Certains moustiques sont vecteurs du paludisme signifie que ces moustiques transmettent le paludisme.

**2.** L'eau est le principal vecteur du choléra signifie que c'est surtout par l'eau que se transmet le choléra.

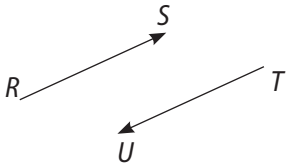
### 34 Notations et vocabulaire

**1.** *EF* désigne une longueur ;
$\overrightarrow{EF}$ désigne un vecteur ;
[*EF*] désigne un segment ;
(*EF*) désigne une droite.
**2.** $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, donc *EFGH* est un parallélogramme.
Le point *J* est sur la médiatrice de [*HG*], donc : $JH = JG$.
On sait que $(EF) // (HG)$, $EF = HG = 3$ cm, [*EF*] et [*HG*) sont de même sens, donc *EFGH* est un parallélogramme.
O est le milieu de [*HF*], donc $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OF}$.

### 35 Attention aux notations




$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ;




$\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{TU}$ ;

### 36 Retrouver les bonnes relations

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ signifie que *ABC* est un triangle rectangle ; c'est la propriété de Pythagore.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ signifie que *A*, *B* et *C* sont trois points quelconques du plan ; c'est la relation de Chasles.

$AB + BC = AC$ signifie que *A*, *B* et *C* sont obligatoirement trois points alignés dans cet ordre ; c'est l'inégalité triangulaire.

$AB + BC > AC$ signifie que *ABC* est obligatoirement un triangle non aplati ; c'est l'inégalité triangulaire.

### 37 Traduction vectorielle

| | |
|---|---|
| $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$ | $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$ |
| *ABCD* est un parallélogramme | $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ |
| *A* est le milieu de [*BD*] | $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ |

### 38 Appliquer la relation de Michel Chasles

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$ ; oui

$\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RE} = \overrightarrow{ME}$ ;

$\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UE} = ME$ ;

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

### 39 Contre-exemple

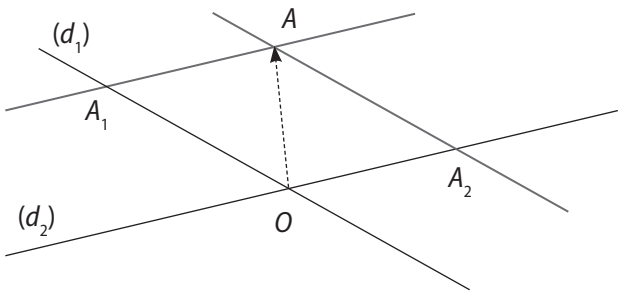
**1.** Lorsque (*RS*) // (*UT*) et *RS* = *UT*, on ne peut pas conclure que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$ ; en effet [*RS*) et [*UT*) peuvent ne pas être de même sens (et alors ces vecteurs sont opposés).

**2.** Un point *M* peut être à égale distance des points *A* et *B* sans que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ; c'est le cas pour tout point *M* de la médiatrice de [*AB*], distinct de son milieu.

## Exercices d'approfondissement

### 40 Programme de construction

**1.** et **2. a.**

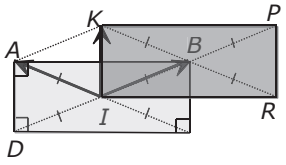



**2. b.** • Tracer la droite parallèle à $(d_1)$ passant par *A*, elle coupe $(d_2)$ en $A_2$.

• Tracer la droite parallèle à $(d_2)$ passant par *A*, elle coupe $(d_1)$ en $A_1$.

• Le quadrilatère $OA_1AA_2$ obtenu est un parallélogramme (puisque $(AA_1)$ // $(OA_2)$ et $(AA_2)$ // $(OA_1)$), donc $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA}$.

### 41 Quadrilatères particuliers




*ABCD* est un rectangle de centre *I*.

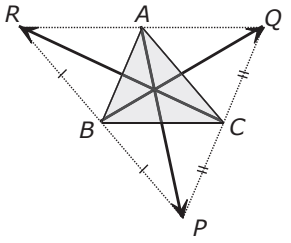
**1.** $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$, donc *AKBI* est un parallélogramme ;

[*IA*] et [*IB*] ont même longueur (demi-diagonale d'un rectangle), donc *AKBI* est un losange.

**2. a.** *P* et *R* sont les symétriques respectifs de *I* et *K* par rapport à *B*, donc *B* est le milieu de [*IP*] et de [*KR*].

**b.** *IKPR*, quadrilatère dont les diagonales ont même milieu *B* et même longueur, est un rectangle de centre *B*.

### 42 Droites concourantes




**1.** Le triangle *ABC* est donné. *P*, *Q* et *R* sont tels que :

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ ; $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ .

**2. a.** Par construction, les quadrilatères *ABPC* et *ACBR* sont des parallélogrammes.

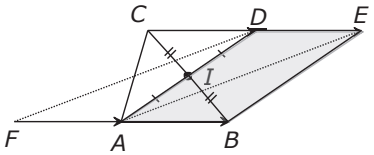
**b.** On a : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AC}$ ; donc : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{RB}$ ;

c'est-à-dire : *B* est le milieu de [*RP*].

**c.** De façon analogue, on démontre que *C* est le milieu de [*PQ*] et *A* est le milieu de [*QR*].

**d.** On en déduit que les droites (*AP*), (*BQ*) et (*CR*), médianes du triangle *RPQ*, sont concourantes.

### 43 Parallélogrammes enchevêtrés




**1. a.** Le triangle *ABC* est tel que :

*AB* = 4 cm,

*BC* = 4,6 cm,

*AC* = 3,5 cm.

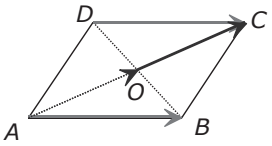
**b.** *I* est le milieu de [*BC*].

**2. a.** *D* est le symétrique de *A* par rapport à *I*, donc *I* est le milieu de [*AD*].

**b.** *ABDC*, dont les diagonales [*BC*] et [*AD*] ont même milieu, est un parallélogramme et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
**3. a.** $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BA}$.

**b.** Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ et *ABED* est un parallélogramme.
**4. a.** *F* est tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}$ .
b. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on a $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CD}$ et *AFCD* est un parallélogramme.
**5.** Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}$, on a : $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DE}$ ;
donc *AFDE* est un parallélogramme, dont le centre est le milieu de [*AD*], c'est-à-dire *I*.
**6.** *ABDC* est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ ;
*AFDE* est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AE}$ ;
*AFCD* est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DA}$ ;
*I* milieu de [*AD*] donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$.

### 44 Remplacer des vecteurs




*ABCD* est un parallélogramme de centre *O* ; donc :
• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,
• *O* milieu de [*AC*] et $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ .
$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ ;
$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB}$ ;
donc : $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ est opposé à $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$.

### 45 Somme de plusieurs vecteurs

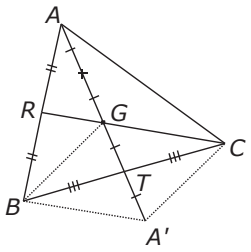
**1. a.** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ;
$\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.
**b.** On constate que les résultats sont identiques (et on peut écrire ces calculs sans parenthèses).

**2. a.** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ ;
**b.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC}$ ;
**c.** $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED}$ ;
**d.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ED}$.

**3.** $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{SA}$ est une égalité fausse ;
$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA}$ est une égalité vraie
(en effet : $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA}$) ;
$\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{EL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{EU}$ est une égalité vraie
(en effet : $\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{EL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{EL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MU}$ ) ;
$\overrightarrow{UM} + \overrightarrow{EL} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{LM}$ est une égalité fausse
(en effet : $\overrightarrow{UM} + \overrightarrow{EL} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{UM} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{UL}$).

### 46 Avec des médianes

**1.**

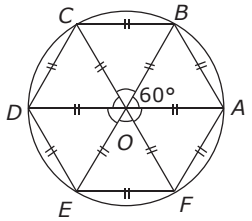



**a.** *G*, point d'intersection des médianes issues des sommets *A* et *C* de *ABC*, est le centre de gravité de ce triangle.
**b.** le point *A'* est tel que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'}$.
**c.** Par construction, *GBA'C* est un parallélogramme ;
donc *T*, milieu de sa diagonale [*BC*], est aussi milieu de sa seconde diagonale [*GA'*].

**2. a.** *G*, centre de gravité de *ABC*, est situé aux deux tiers de la médiane [*AT*] à partir de *A* ;
donc : $AG = \frac{2}{3}AT$ et $GT = \frac{1}{3}AT$ et $GA' = 2GT = AG$.
Comme $G \in [AA']$, *G* est le milieu de ce segment ;
c'est-à-dire : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'} = \vec{0}$.
**b.** On en déduit que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'} = \vec{0}$.

### 47 Avec un hexagone régulier

**1.**



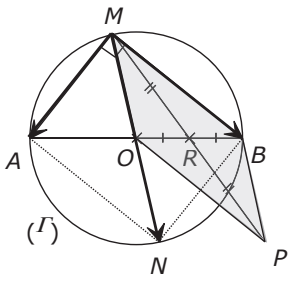

*ABCDEF* est un hexagone régulier, inscrit dans un cercle de centre *O* :
• $OA = OB = OC = OD = OE = OF$ ;
• mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{BOC}$ = … = mes $\widehat{FAO} = \frac{360}{6} = 60°$.
Donc les six triangles *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF* et *FOA* sont équilatéraux.
**a.** Le quadrilatère *ABCO*, dont les quatre côtés sont de même longueur, est un losange.
**b.** On en déduit que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.

**2. a.** De même : $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE}$ ;
**b.** Les points *B*, *O* et *E* sont alignés dans cet ordre ;
comme $OB = OE$, *O* est le milieu de [*BE*] et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

**3.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$
$= \vec{0}$.

**48 Avec un cercle**

**1.**




(Γ) est un cercle (centre : *O*, rayon : 4 cm) ;
[*AB*] est un diamètre de (Γ) ;
$M \in$ (Γ) et $AM = 5$ cm.

**2.** $M \in$ (Γ), cercle de diamètre [*AB*], donc *MAB* est un triangle rectangle en *M*.

**3. a.** *R* est le milieu de [*OB*] ; *P* est le symétrique de *M* par rapport à *R*.

**b.** Les diagonales [*MP*] et [*OB*] de *MBPO* ont le même milieu *R*, donc ce quadrilatère est un parallélogramme.

**c.** On en déduit que : $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{BP}$.

**4. a.** *N* est le point tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

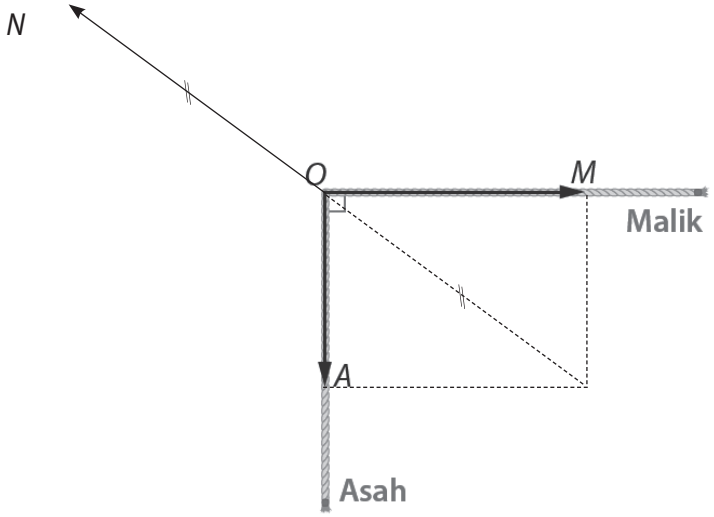
**b.** Par construction *AMBN* est un parallélogramme ; ayant un angle droit en *M*, ce parallélogramme est un rectangle.

**c.** *O*, milieu de la diagonale [*AB*] du rectangle *AMBN*, est aussi milieu de la diagonale [*MN*] ;
donc : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

## Activités d'intégration

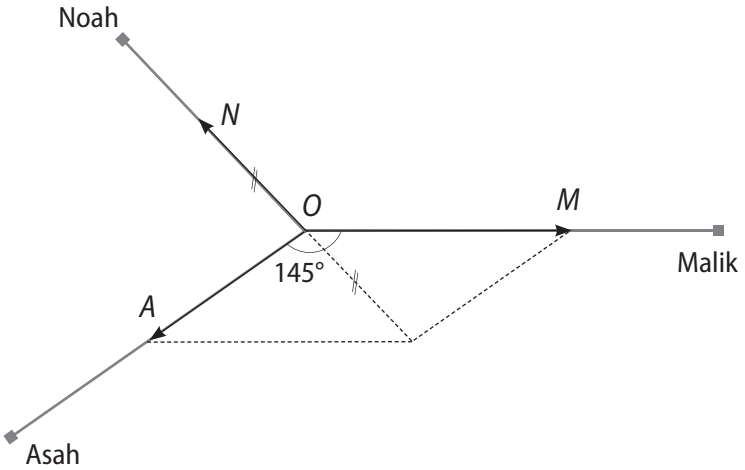
**49 Tir à la corde**

**• Première situation**




$ON \approx 4{,}3$ cm. C'est Noah qui tire le plus fort.

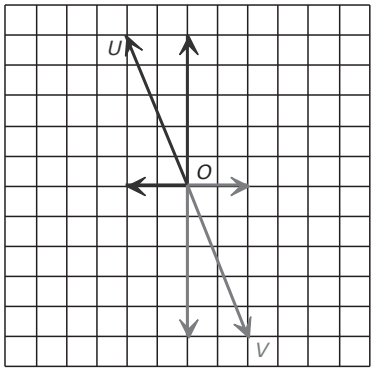
**• Deuxième situation**




$OM > OA$ et $OM > ON$. C'est Malik qui tire le plus fort.

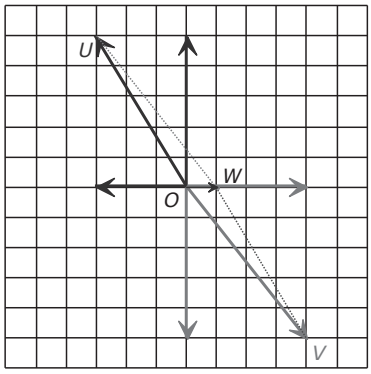
## 50 Le bateau de Paul

### Le matin




Ci-contre :
$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ ; $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = \vec{0}$ ;
donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$ et le bateau de Paul est immobile.

### Le midi




Ci-contre :
$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ ; $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OW} \neq 0$ ;
donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} \neq \vec{0}$ et le bateau de Paul n'est plus immobile.

# 13 Translation

*Manuel pages 143 à 152*

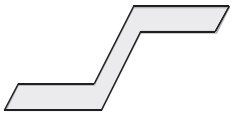
| Activités d'apprentissage | Cours<br>Méthodes et savoir-faire | Application | Bien comprendre<br>Mieux rédiger | Approfondissement |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Translation [1 p. 145] | 9, 11 | 17, 18 | 23 |
| | **Apprendre à translater une figure [1 p. 147]** | **1, 2, 3, 4** | | |
| | Image d'un point par une translation [2 p. 145] | 8, 11 | 18, 19 | 23, 24, 26 |
| 2 | Images de figures élémentaires par une translation [3 p 145] | 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16 | 19, 22 | 24, 25, 26, 27 |
| | **Apprendre à justifier par les propriétés [2 p. 148]** | **5, 6, 7,** 12, 13, 14, 15, 16 | 20 ,21 | 24, 25, 26, 27 |

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

## Introduction et contrôle des pré-requis

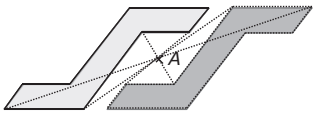
### Variété de frises

**1.**

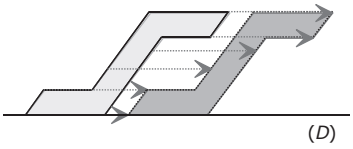


Motif de base de la frise Ⓐ.

• On ne peut pas passer d'un motif de base de la frise Ⓐ au motif suivant :
**a.** en appliquant une symétrie orthogonale d'axe vertical ;
**b.** en appliquant une symétrie orthogonale d'axe horizontal.
• On peut passer d'un motif de base de la frise Ⓐ au motif suivant :
**c.** en appliquant une symétrie de centre *A* :

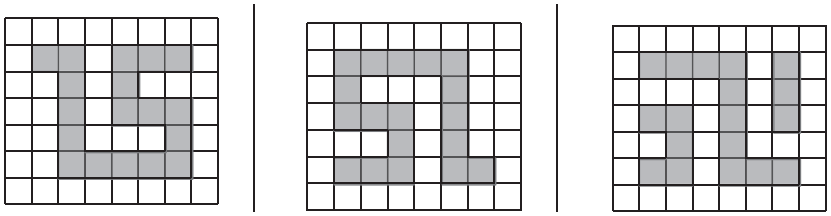



**d.** en le faisant glisser le long de la droite (D) :




**2.** Pour les frises Ⓑ et Ⓒ :
**a.** seule Ⓒ admet un (et même plusieurs) axe(s) de symétrie vertical ;
**b.** Ⓑ et Ⓒ admettent chacune un (et un seul) axe de symétrie horizontal ;
**c.** seule Ⓒ admet un (et même plusieurs) centre(s) de symétrie ;
**d.** Ⓑ et Ⓒ ont chacune la possibilité d'être prolongées par glissement le long d'une droite.

**3.** Motifs de base possibles de la frise D, à l'aide desquelles on peut prolonger indéfiniment cette frise en le faisant glisser le long d'une droite (horizontale) :



# Activités d'apprentissage

## 1. Mouvements de translation

**1.** En déplaçant le calque de la licorne bleue 1 pour qu'il vienne se superposer sur la licorne jaune 2, les points *A*, *B* et *C* se superposent respectivement aux points *D*, *E* et *F*.

On dit que : « les points *A*, *B* et *C* ont pour images respectives *D*, *E* et *F* »

ou « les points *A*, *B* et *C* se transforment en *D*, *E* et *F* ».

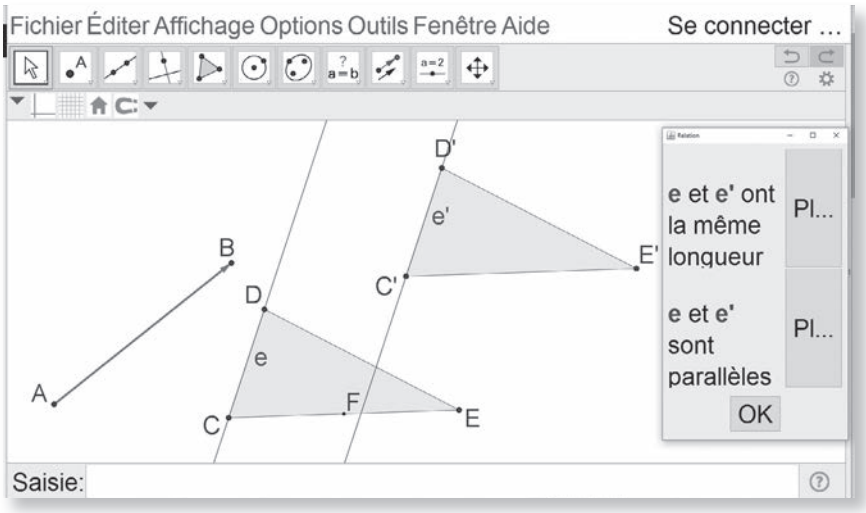
**2. b.** Le quadrilatère *ADEB* semble être un parallélogramme.

**c.** Les quadrilatères *ADFC* et *BEFC* semblent aussi être des parallélogrammes.

**3.** On peut citer les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{BE}$ ou $\overrightarrow{CF}$.

## 2. Observer des propriétés des translations

**1.**

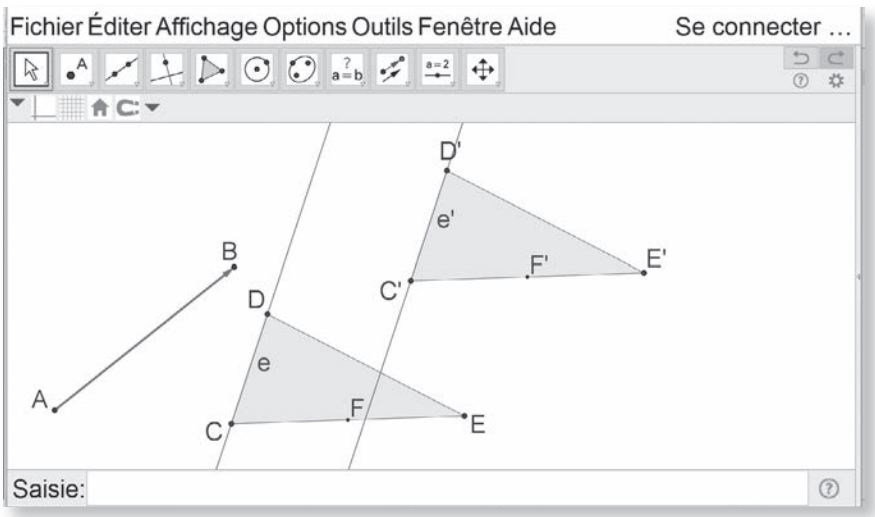



On conjecture que :

• les droites (*CD*) et (*C'D'*) sont parallèles ;

• les segments [*CD*] et [*C'D'*] sont de même longueur.

**2.**

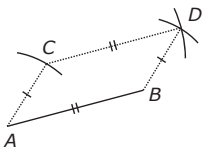



On conjecture que *F'* est le milieu de [*C'E'*].

# Méthodes et savoir-faire

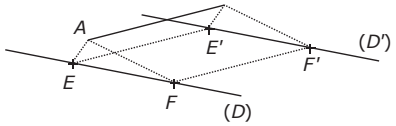
## 1. Apprendre à translater une figure

**1** **1.**



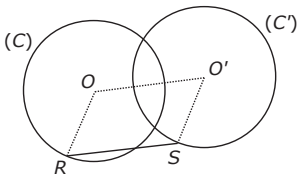

**2.** L'image du point $C$, par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, est le point $D$ tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

**2**



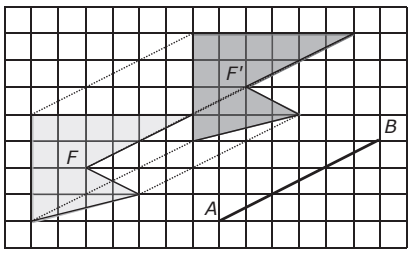

Les points $E'$ et $F'$, tels que $ABE'E$ et $ABF'F$ sont des parallélogrammes, sont les images respectives de $E$ et $F$ par la translationde vecteur $\overrightarrow{AB}$ ; l'image de $(D) = (EF)$ par cette translation est la droite $(E'F')$.

**3**




Le point $O'$, tel que $RSO'O$ est un parallélogramme, est l'image de $O$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{RS}$ ; l'image de $(C)$ par cette translation est le cercle $(C')$ de centre $O'$, passant par $S$.

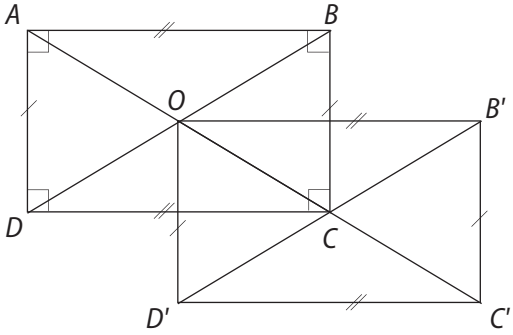
**4**




Pour chaque point de la figure $(F)$, se déplacer de 6 carreaux vers la droite puis de 3 carreaux vers le haut pour obtenir son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

## 2. Apprendre à justifier par les propriétés

**5** **a.** et **b.**




**c.** $[BD]$ a pour image $[B'D']$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ et $O$ est le milieu de $[BD]$, donc, d'après la propriété du paragraphe 3. c. du cours, l'image de $O$ (le point $C$) est le milieu de $[B'D']$.

**d.**

| Objet | $[AB]$ | $[BC]$ | $[CD]$ | $[AD]$ | $\widehat{DAB}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Image | $[OB']$ | $[B'C']$ | $[C'D']$ | $[OD']$ | $\widehat{D'OB'}$ |

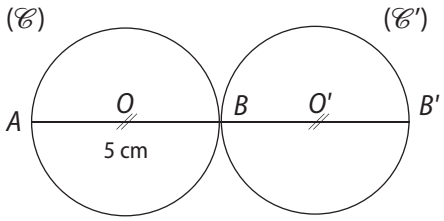
Ainsi, d'après la propriété du paragraphe **3. d.**, $AB = OB'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $AD = OD'$ or $AB = CD$ et $AD = BC$, donc $OB' = C'D'$ et $OD' = B'C'$ donc $OB'C'D'$ est un parallélogramme.

De plus, d'après la propriété du paragraphe **3. f.** :

mes $\widehat{DAB}$ = mes $\widehat{D'OB'}$ = 90°, donc $OB'C'D'$ est un rectangle.

Ainsi, Aire $(OB'C'D') = 4 \times 2{,}4 = 9{,}6$ cm$^2$.

**6** **a.** (À l'échelle 1/2)




**b.** L'image de $O$ milieu de $[AB]$ est le point $O'$ milieu de $[BB']$ ;

de plus, d'après la propriété du paragraphe **3. g.**, les cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ ont même rayon $R = \dfrac{AB}{2} = 2{,}5$ cm.

**7** • Dans le triangle $ABC$ :

mes $\widehat{BAC}$ + mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{BCA} = 180°$

mes $\widehat{BAC} + 67° + 23° = 180°$,

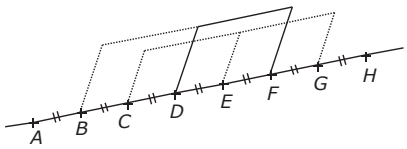
donc mes $\widehat{BAC} = 90°$.

• $A'$, $B'$, $C'$ sont les images de $A$, $B$, $C$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{FD}$, donc mes $\widehat{B'A'C'}$ = mes $\widehat{BAC} = 90°$.

# Exercices d'application

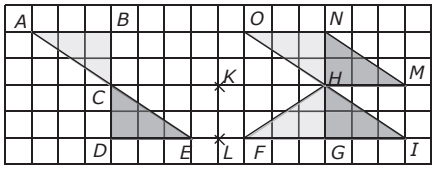
## Translation : construction

**8**




Si *D* est l'image de *F* par une translation, alors les images de *E*, *D* et *G*, par cette translation, sont : *C*, *B* et *E*.

**9**




**1. a.** La transformation par laquelle on passe de *CDE* à *ONH* est la symétrie par rapport au point *K*.

**b.** La transformation par laquelle on passe de *FGH* à *CDE* est la symétrie par rapport à la droite (*KL*).

**c.** La transformation par laquelle on passe de *CDE* à *HNM* est la translation de vecteur $\overrightarrow{DH}$.

**d.** La transformation par laquelle on passe de *ONH* à *ABC* est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

**2.** Le triangle *GHI* est l'image de :

• *ABC* par la symétrie par rapport au point *K* ;

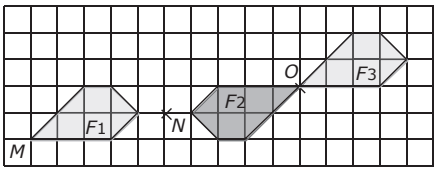
• *CDE* par la translation de vecteur $\overrightarrow{CH}$ ;

• *FGH* par la symétrie par rapport à la droite (*GH*) ;

• *HON* par la symétrie par rapport au point *H* ;

• *HMN* par la translation de vecteur $\overrightarrow{NH}$.

**10** **1.**

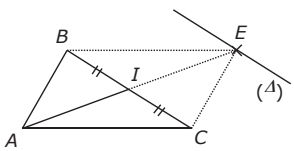



**2.** $F_2$ est l'image de $F_1$ par la symétrie de centre *N*.
Par cette symétrie, l'image du point *M* est le point *O*.

**3.** $F_3$ est l'image de $F_2$ par la symétrie de centre *O*.

**4.** On passe de $F_1$ à $F_3$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{MO}$.

**11** **1.**



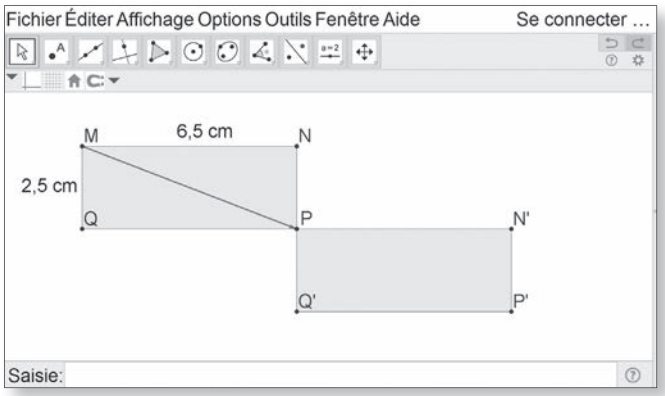

*I* est le milieu du côté [*BC*] du triangle *ABC*.

**2.** Les images de *C* (par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$), de *B* (par la translation qui de vecteur $\overrightarrow{AC}$) et de *I* (par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$) sont confondues au point *E* tel que *ABEC* soit un parallélogramme.

**3.** Les images de la droite (*BC*), par chacune des translations précédentes, sont identiques : c'est la droite (Δ), parallèle en *E* à (*BC*).

## Translation : propriétés

**12** **1.** et **2.**



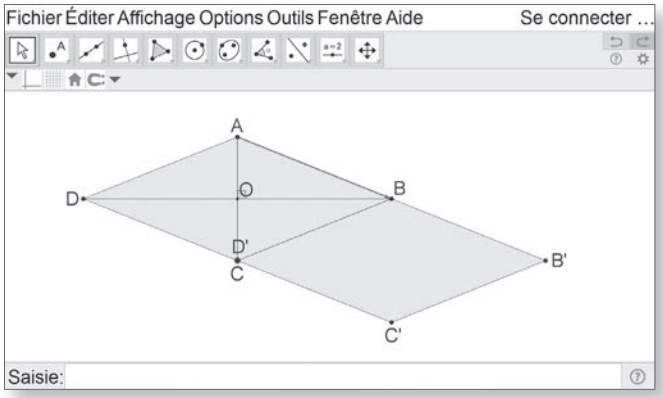

**3.** • [*PN'*] est l'image de [*MN*] par cette translation donc *PN'* = *MN* = 6,5 cm.

• [*N'P'*] est l'image de [*NP*] par cette translation donc *N'P'* = *NP* = 2,5 cm.

• On montre de même que *P'Q'* = *PQ* = 6,5 cm et *PQ'* = *MQ* = 2,5 cm.

Donc périmètre (*PN'P'Q'*) = 2 × (6,5 + 2,5) = 18 cm.

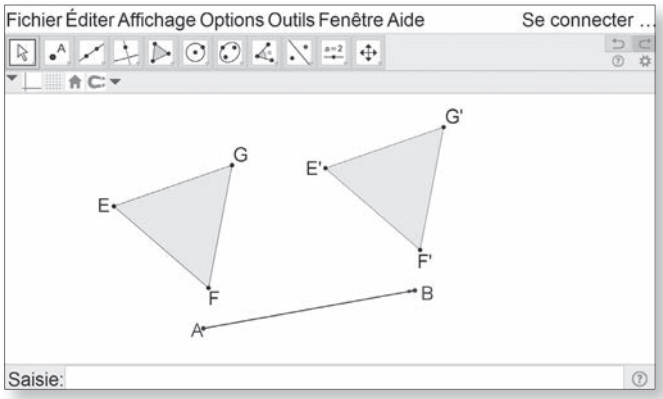
**13** **1. a.** et **b.**




**c.** [*BB'*], [*B'C'*], [*C'D'*], [*D'B*] sont les images de [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*] par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc :
*BB'* = *AB* ; *B'C'* = *BC* ; *C'D'* = *CD* ; *D'B* = *DA*.
Or, *AB* = *BC* = *CD* = *DA* car *ABCD* est un losange, donc *BB'* = *B'C'* = *C'D'* = *D'B*, donc *BB'C'D'* est un losange.

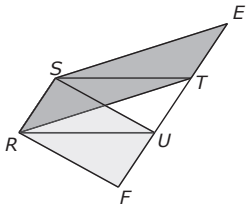
**2.** Aire (*BB'C'C*) = Aire (*ABCD*) = $\frac{2 \times 5}{2}$ = 5 cm².

**14 a.** et **b.**




**c.** [*E'F'*], [*F'G'*], [*G'E'*] sont les images de [*EF*], [*FG*], [*GE*] par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$,
donc *E'F'* = *EF*, *F'G'* = *FG*, *G'E'* = *GE*.
Or *EF* = *FG* = *GE* car le triangle *EFG* est équilatéral, donc *E'F'* = *F'G'* = *G'E'*, donc *E'F'G'* est un triangle équilatéral.

**15 1.**




*RSTU* est un parallélogramme.

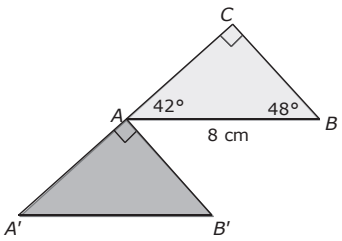
• *E* est l'image de *S* par la translation de vecteur $\overrightarrow{RT}$ ; donc *RTES* est un parallélogramme ;

• *F* est l'image de *R* par la translation de vecteur $\overrightarrow{SU}$ ; donc *SUFR* est un parallélogramme.

**2. a.** On a : (*UT*) // (*RS*), (*TE*) // (*RS*) et (*FU*) // (*RS*) ;
donc les points *F*, *U*, *T* et *E* sont alignés.

**b.** On a : *FU* = *RS* et *ET* = *SR* ; donc : *FU* = *ET*.

**16**




Le triangle *ABC* est rectangle en en *C* ; en effet :
180 – 42 – 48 = 90°.

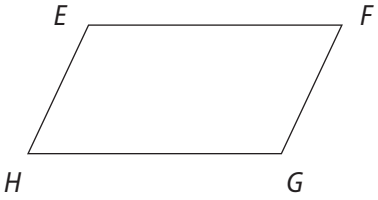
Si *A'B'A* est l'image de ce triangle par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$, *A'B'A* est un triangle rectangle en *A* (conservation des mesures d'angles dans une translation).

## Bien comprendre, mieux rédiger

**17 Phrases à trous**

**a.** Le quadrilatère *RSTU* est un rectangle.
**b.** Le quadrilatère *JKLI* est un rectangle.
**c.** Par la translation de vecteur :
• $\overrightarrow{KJ}$, le point *L* a pour image *I* ;
• $\overrightarrow{KR}$, le point *T* a pour image *I* ;
• $\overrightarrow{TO}$, le point *O* a pour image *R* ;
• $\overrightarrow{SO}$, le point *U* est l'image de *O*.

**18 Tableau à compléter**




*EFGH* est un parallélogramme.

| | Translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ | $\overrightarrow{FG}$ | $\overrightarrow{HE}$ |
|---|---|---|---|
| Point | *H* | *E* | *G* |
| Image | *G* | *H* | *F* |

**19 Compléter un tableau de correspondance**

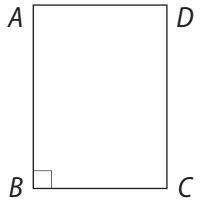
| Objet | Image |
|---|---|
| *I* | *M* |
| *K* | *P* |
| *L* | *Q* |
| (*IK*) | (*MP*) |
| $\widehat{IKJ}$ | $\widehat{MPN}$ |
| [*JL*] | [*NQ*] |

**20 Utiliser la bonne propriété**

Conclusion ① : propriété du paragraphe **3. d.**
Conclusion ② : propriété du paragraphe **3. e.**
Conclusion ③ : propriété du paragraphe **3. f.**
Conclusion ④ : propriété du paragraphe **3. a.**

**21 Rédiger une démonstration**

**1. a.**

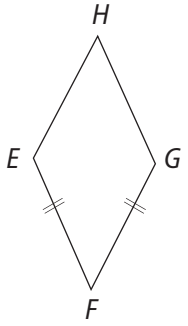


**b.** D'une part, *D* est l'image de *C* par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ ; par conséquent *ABCD* est un parallélogramme.

D'autre part, on sait que (*AB*) et (*BC*) sont perpendiculaires, d'où l'angle $\widehat{ABC}$ est droit.

Or, un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle. Donc *ABCD* est un rectangle.

**2. a.**




**b.** D'une part, *H* est l'image de *G* par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$ ; donc *EFGH* est un parallélogramme.

D'autre part, on sait que *EF* = *FG*.

Or, un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange. Donc *EFGH* est un losange.

### 22 Avoir l'œil

**1. a.** Par la translation de vecteur $\overrightarrow{HF}$, le triangle *ABH* a pour image le triangle *ODF*.

**b.** Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OG}$, le triangle *BOD* a pour image le triangle *HGF*.

**2.** L'image de *BOH* par la translation de vecteur :

• $\overrightarrow{OE}$ est le triangle *DEF* ;

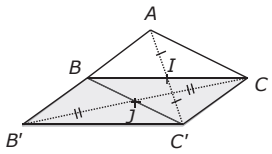
• $\overrightarrow{OD}$ est le triangle *CDO* ;

• $\overrightarrow{OF}$ est le triangle *OFG*.

## Exercices d'approfondissement

### 23 Translation et symétrie centrale

**1.**




*ABC* est tel que : *AB* = 3 cm, *AC* = 4 cm, *BC*=6 cm.

**2.** *BB'C'* est l'image de *ABC* par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**3.** La translation conserve les longueurs, donc :

*BB'* = 3 cm, *BC'* = 4 cm, *B'C'* = 6 cm.

**4.a.** *C'* est l'image de *C* par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc : *ABC'C* est un parallélogramme ;

**b.** Les segments [*BB'*] et [*CC'*] ont :

• même longueur que [*AB*],

• des supports parallèles à celui de [*AB*] ;

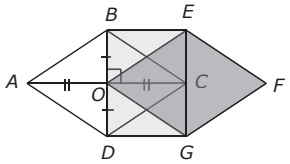
donc le quadrilatère non croisé *BB'C'C* est un parallélogramme.

**5.** Le triangle *CBC'* est l'image du triangle *ABC* par la symétrie par rapport au milieu *I* de [*BC*].

Le triangle *CBC'* est l'image du triangle *BC'B'* par la symétrie par rapport au milieu *J* de [*BC'*].

### 24 Du losange au rectangle

**1.**




*ABCD* est un losange de centre *O*.

*AC* = 6 cm et *BD* = 4 cm.

**2.** Aire de *ABCD* : $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ cm².

**3.** *E*, *F* et *G* sont les images respectives de *B*, *C* et *D* par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

**4.** Une figure et son image par une translation sont superposables ; donc :

**a.** *OEFG* est un losange ;

**b.** l'aire de *OEFG* est 12 cm².

**5.** *E* et *G* sont les images respectives de *B* et *D* par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ ; donc :

• *BE* = *DG* = *AO* = *OC* ;

• (*BE*) //( *DG*) //( *AO*) // (*OC*).

Les segments [*BE*] et [*DG*] ayant même longueur et des supports parallèles, le quadrilatère non croisé *BEGD* est un parallélogramme.

De plus (*OC*) ⊥ (*BD*) (diagonales d'un losange) ;

donc *BEGD* est un rectangle.

L'aire de ce rectangle est : $4 \times 3 = 12$ cm² ;

le rectangle *BEGD* a même aire que le losange *ABCD*.

### 25 Deux démonstrations

On note *ABCD* un parallélogramme de centre *O* et *A'B'C'D'* son image par une translation. On obtient ainsi le tableau de correspondance.

| Point | *A* | *B* | *C* | *D* | *O* |
|---|---|---|---|---|---|
| Image | *A'* | *B'* | *C'* | *D'* | *O'* |

**Première méthode**

• *ABCD* est un parallélogramme donc *O* est le milieu de ses diagonales [*AC*] et [*BD*].

• Or, d'après la propriété du paragraphe **3. e.**, $O'$ est donc le milieu des diagonales $[A'C']$ et $[B'D']$.

• Donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

**Deuxième méthode**

• $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'D')$, $(D'A')$ sont les images des droites $(AB)$, $(BC)$, $(CD)$, $(DA)$ par la translation.

• Donc, d'après la propriété du paragraphe **3. a.**, $(AB) // (A'B')$, $(B'C') // (BC)$, $(C'D') // (CD)$ et $(D'A') // (DA)$.

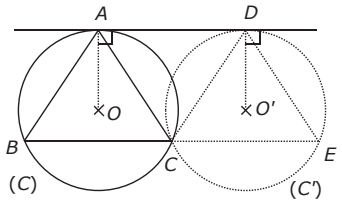
• Or, $ABCD$ est un parallélogramme, donc $(AB) // (CD)$ et $(BC) // (DA)$.

• Donc $(A'B') // (C'D')$ et $(B'C') // (D'A')$ donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Remarque : on peut également utiliser d'autres propriétés du cours (paragraphe **3. d.** ou **3. f.**) et d'autres méthodes.

## 26 Tangente commune

**1.**




Le cercle $(C)$ a pour centre $O$, pour rayon 3 cm.

$ABC$ est inscrit dans $(C)$ et isocèle en $A$ ; $AB$=5 cm.

**2. a.** $D$ et $E$ sont les images respectives de $A$ et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

**b.** Le cercle $(C')$, circonscrit à $CDE$, est l'image de $(C)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Il passe par $D$ et a pour centre le point $O'$, image de $O$ par la translation.

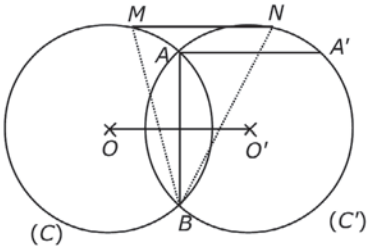
**3.** Dans le parallélogramme $BCDA$, $(AD) // (BC)$ ;

dans le triangle isocèle en $A$, $(AO) \perp (BC)$ ;

donc : $(AO) \perp (AD)$, on en déduit que $(AD)$, perpendiculaire en un point de $(C)$ à l'un de ses rayons, est tangente à ce cercle.

Dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, l'image de $A$ est $D$, celle de $(C)$ est $(C')$ et celle de $(AD)$ est elle-même ; comme toute translation conserve les mesures d'angles, la droite $(AD)$, tangente en $A$ à $(C)$, est transformée en la droite $(AD)$, tangente en D à $(C')$.

## 27 Recherche de l'orthocentre




$(C)$ et $(C')$ ont même rayon. Dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, $A'$ est l'image de $A$ et $N$ est l'image de $M$.

**1.** Les droites $(AB)$ et $(OO')$ sont perpendiculaires ; en effet, $A$ et $B$ étant équidistants de $O$ et $O'$, $(AB)$ est la médiatrice de $[OO']$.

**2. a.** $(AB) \perp (OO')$ et $(AA') // (OO')$, donc $(AB) \perp (AA')$.

**b.** $(C')$, cercle circonscrit au triangle ABA' rectangle en $A$, a l'hypoténuse $[BA']$ de ce triangle comme diamètre.

**3. a.** $BNA'$, triangle dont le cercle circonscrit a pour diamètre le côté $[BB']$, est un triangle rectangle en $N$ (point opposé à $[BB']$).

**b.** $A'$ et $N$ étant les images respectives de $A$ et $M$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, $OO'A'A$ et $OO'NM$ sont des parallélogrammes ;

$[AA']$ et $[MN]$ ayant même longueur que $[OO']$, $(AA')$ et $(MN)$ étant parallèles à $(OO')$, on peut dire que le quadrilatère non croisé $AMNA'$, avec deux côté opposés, $[AA']$ et $[MN]$, de même longueur et de supports parallèles est un parallélogramme.

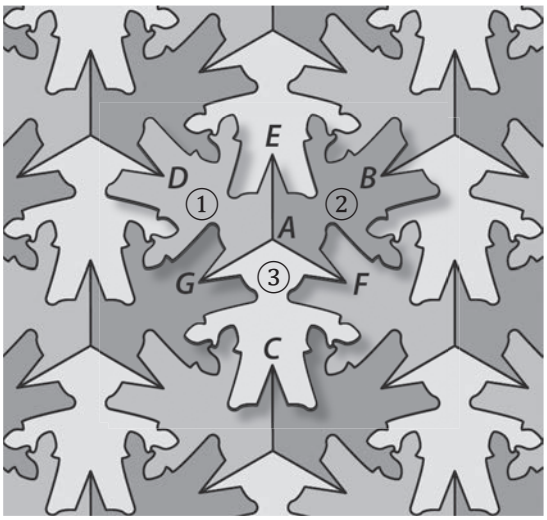
**c.** D'après **3. a.** $(BN) \perp (NA')$ ; d'après **3.b.** $(MA) // (NA')$ ; donc : $(MA) \perp (BN)$.

**4.** $(AB) \perp (OO')$ et $(MN) // (OO')$ ; donc : $(AB) \perp (MN)$.

**5.** Finalement, dans le triangle $BMN$, $(MA)$ est la hauteur issue de $M$ et $(BA)$ est la hauteur issue de $B$ ; donc $A$ est l'orthocentre du triangle $BMN$.

# Activités d'intégration

## 28 Réaliser une frise




Programme de construction :

⟶ On décalque les trois bonhommes ombrés.

⟶ On construit :

• l'image du bonhomme ① par la translation de vecteur $\overrightarrow{DF}$,

• l'image du bonhomme ② par la translation de vecteur $\overrightarrow{BG}$,

• l'image du bonhomme ③ par la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$,

• l'image du bonhomme ① par la translation de vecteur $\overrightarrow{GB}$,

• l'image du bonhomme ① par la translation de vecteur $\overrightarrow{EC}$,

• l'image du bonhomme ② par la translation de vecteur $\overrightarrow{EC}$,

• l'image du bonhomme ② par la translation de vecteur $\overrightarrow{FD}$,

• l'image du bonhomme ③ par la translation de vecteur $\overrightarrow{GB}$,

• l'image du bonhomme ③ par la translation de vecteur $\overrightarrow{FD}$.

## 29 Les petites pyramides du Louvre

• Les diagonales des losanges ont pour dimensions 3,23 m et 2,05 m.

• Les triangles ont pour base 2,05 m et pour hauteur associée 1,615 m.

Programme de construction.

⟶ On représente un losange *ABCD* et le triangle *BCE*.

⟶ On construit les images du losange *ABCD* :

• par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$,

• par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$,

• par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$,

• par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$,

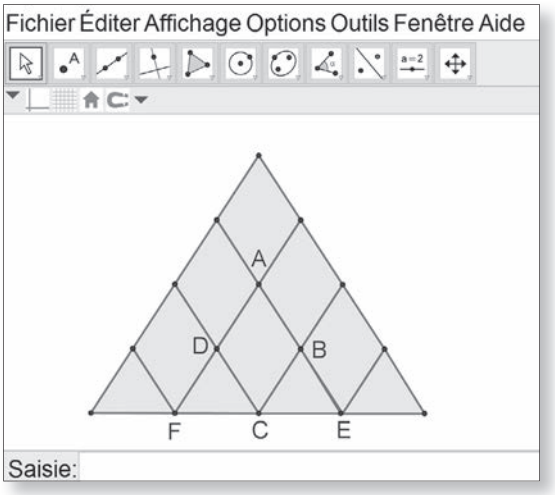
• par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

⟶ On construit les images du triangle *BCE* :

• par la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$,

• par la translation de vecteur $\overrightarrow{EC}$ : c'est le triangle *CDF*.

⟶ Enfin, on construit l'image du triangle *CDF* par la translation de vecteur $\overrightarrow{EC}$.



# 14 Repérage

*Manuel pages 153 à 160*

| Activités d'apprentissage | Cours<br>Méthodes et savoir-faire | Application | Bien comprendre<br>Mieux rédiger | Approfondissement |
|---|---|---|---|---|
| 1, 2 | Repère orthogonal, repère orthonormé [1 p. 155] | 1 | 19, 20, 22 | 29 |
| 1, 2 | Coordonnées d'un point [2 p. 155] | 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 | 19, 21, 22, 23, 24 | 25, 26, 27, 28, 29, 30 |
| | **Apprendre à lire des coordonnées et à placer des points [p. 156]** | **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7** | 19, 21, 22, 23, 24 | 25, 26, 27, 28, 29, 30 |

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

## Introduction et contrôle des pré-requis

### Le fleuve Sanaga

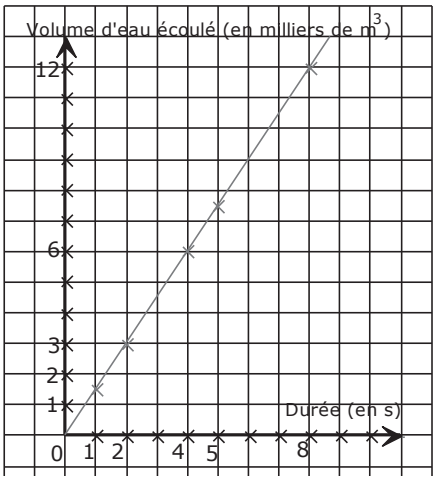
**1.** En janvier, 3 000 $m^3$ d'eau se sont écoulés en 2 s.

**a.** Débit moyen du fleuve : 1 500 $m^3/s$.

**b.** Si le volume d'eau écoulé est proportionnel à la durée de l'écoulement :

| Durée (en s) | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Volume d'eau écoulé (en milliers de $m^3$) | 1,5 | 3 | 6 | 7,5 | 12 |

**c.** Représentation graphique :



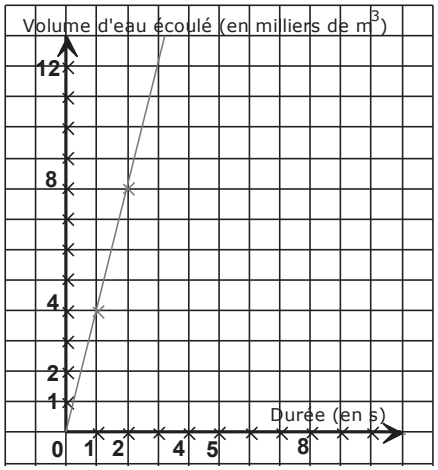

La représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère. Cela était prévisible puisqu'il s'agit d'une situation de proportionnalité.

**2.** Six mois plus tard, le débit moyen du fleuve est de 4 000 $m^3/s$.

**a.** Le volume d'eau écoulé restant proportionnel à la durée de l'écoulement :

| Durée (en s) | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Volume d'eau écoulé (en milliers de $m^3$) | 4 | 8 | 16 | 20 | 32 |

**b.** Représentation graphique :




La représentation graphique reste une droite qui passe par l'origine du repère, puisqu'il s'agit toujours d'une situation de proportionnalité.

**c.** À six mois d'intervalle, volume d'eau supplémentaire qui s'est écoulé :
au bout de 2 s : 8 000 – 3 000 = 5 000 $m^3$ ;
au bout de 8 s : 32 000 – 12 000 = 20 000 $m^3$.

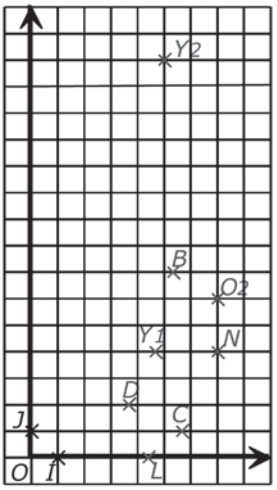
# Activités d'apprentissage

## 1. Repérage dans le plan

Tableau indiquant les températures relevées dans certaines capitales africaines (un certain jour de l'année) et leur altitude par rapport au niveau de la mer :

| | Bamako (*B*) | Cotonou (*C*) | Dakar (*D*) | Libreville (*L*) | Niamey (*N*) | Ouagadougou ($O_2$) | Yamoussoukro ($Y_1$) | Yaoundé ($Y_2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Température (en °C) | 26 | 29 | 19 | 27 | 35 | 35 | 24 | 25 |
| Altitude (en m) | 350 | 50 | 100 | 0 | 200 | 300 | 200 | 750 |

**1.** Dans le repère (*O*, *I*, *J*) ci-contre où :
1 cm sur l'axe des abscisses représente 5 °C ,
1 cm sur l'axe des ordonnées représente 50 m d'altitude,




- les coordonnées du point *N* (Niamey) sont (7 ; 4) ;
- les coordonnées du point *B* (Bamako) sont (5,2 ; 7) ;
- les coordonnées du point *C* (Cotonou) sont (5,8 ; 1) ;
- les coordonnées du point *D* (Dakar) sont (3,8 ; 2) ;
- les coordonnées du point *L* (Libreville) sont (5,4 ; 0) ;
- les coordonnées du point *O*2 (Ouagadougou) sont (7 ; 6) ;
- les coordonnées du point *Y*1 (Yamoussoukro) sont (4,8 ; 4) ;
- les coordonnées du point *Y*2 (Yaoundé) sont (5 ; 15).

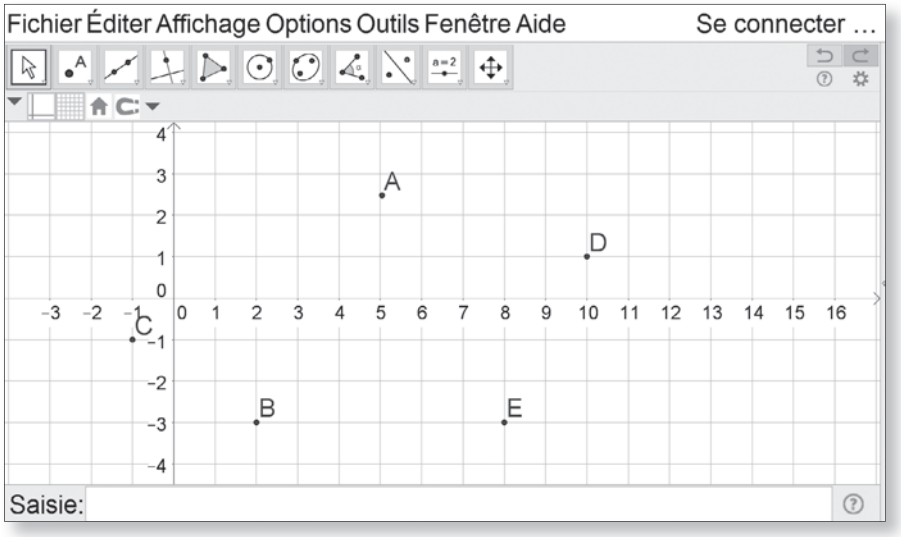
**2.** On ajoute les données de deux autres capitales :
Pretoria (*P*) : 24°C ; 1 500 m et Addis-Abeba (*A*) : 15°C ; 2 500 m.

**a.** En gardant le même repère, le point *P* et, surtout, le point *A* seront impossibles à placer sur un cahier, à cause des ordonnées trop grandes : $\frac{1\,500}{50} = 30$ et $\frac{2\,500}{50} = 50$.

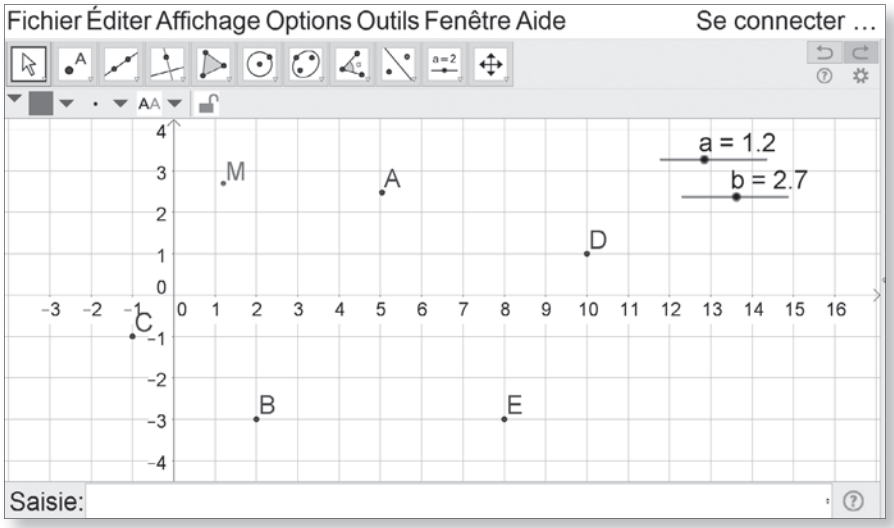
**b.** Par contre, en prenant (sur l'axe des ordonnées) 1 cm pour 200 m d'altitude, les dix capitales pourront être placées ; en effet les ordonnées des points *P* et *A* seront alors respectivement : $\frac{1\,500}{200} = 7{,}5$ et $\frac{2\,500}{200} = 12{,}5$.

## 2. Utiliser un logiciel pour comprendre

**1.**



**2.**



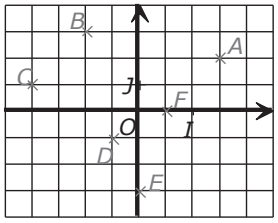

• Ces points ont tous une abscisse positive.

• Ces points ont tous une ordonnée négative.

# Méthodes et savoir-faire

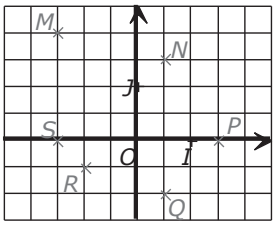
## Apprendre à lire des coordonnées et à placer des points

**1**




Dans le repère $(O, I, J)$, on lit : $A\left(\frac{3}{2} ; 2\right)$ ; $B(-1 ; -3)$ ; $C(-2 ; 1)$ ; $D\left(-\frac{1}{2} ; -1\right)$ ; $E(0 ; -3$ ; $F\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

**2**

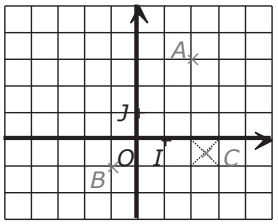



Dans le repère $(O, I, J)$, on lit : $M\left(-\frac{3}{2} ; 2\right)$ ; $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ ; $P\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$ ; $Q\left(\frac{1}{2} ; -1\right)$ ; $R\left(-1 ; -\frac{1}{2}\right)$ ; $S\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$

**3** **1.** $(O, I, J)$ est orthonormé, puisque $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.

**2.** On a placé les points :

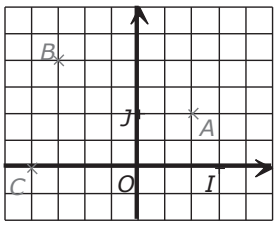
$A(2 ; 3)$ ;
$B(-1 ; -1)$ ;
$C(2{,}5 ; -0{,}5)$.




**4** **1.** $(O, I, J)$ est orthogonal, sans être orthonormé, puisque $(OI) \perp (OJ)$ et $OI \neq OJ$.

**2.** On a placé les points :

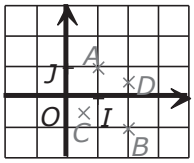
$A\left(\frac{2}{3} ; 1\right)$ ;
$B(-1 ; 2)$ ;
$C\left(-\frac{4}{3} ; 0\right)$.



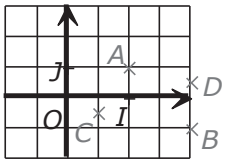

**5** On a placé, dans chacun des repères $(O, I, J)$, les points :

$A(1 ; 1)$ ; $B(2 ; -1)$ ; $C\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ ; $D(2 ; 0{,}5)$.

**a.**

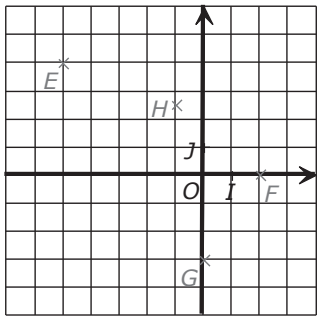



**b.**

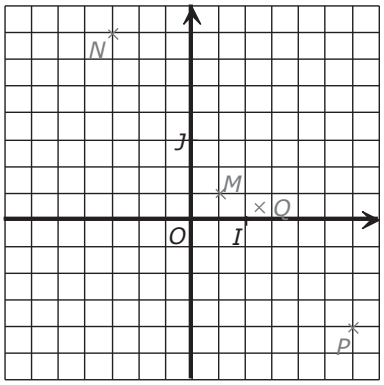



**6** Dans le repère $(O, I, J)$, on a placé les points :

$E(-5 ; 4)$ ;
$F(2 ; 0)$ ;
$G(0 ; -3)$ ;
$H(-1 ; 2{,}5)$.



**7** Dans le repère $(O, I, J)$, on a placé les points :
$M\left(0{,}5 ; \frac{1}{3}\right)$ ; $N\left(-\frac{2}{3} ; \frac{7}{3}\right)$ ; $P\left(3 ; -\frac{4}{3}\right)$ ; $Q\left(\frac{5}{4} ; \frac{1}{6}\right)$.



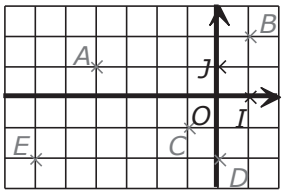

## Exercices d'application

### Repérage dans le plan

**8** Les repères ① et ⑤ sont orthogonaux ;
les repères ③ et ④ sont orthonormés ;
les repères ② et ⑥ sont ni l'un, ni l'autre.

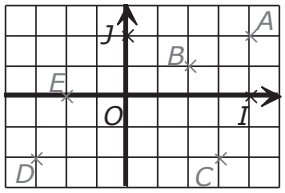
**9** Coordonnées des points $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ dans chacun des repères $(O, I, J)$ :

**a.**



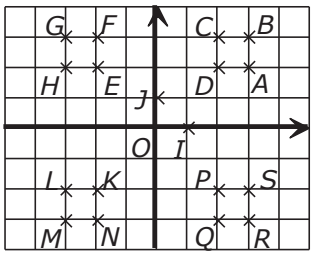

$A(-4 ; 1)$ ; $B(1 ; 2)$ ; $C(-1 ; -1)$ ; $D(0 ; -2)$ ; $E(-6 ; -2)$.

**b.**



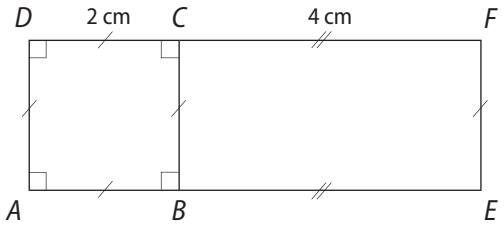

$A(1 ; 1)$ ; $B\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ ; $C\left(\frac{3}{4} ; -1\right)$ ; $D\left(-\frac{3}{4} ; -1\right)$ ; $E\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$.

**10**




Dans le repère $(O, I, J)$ :
**a.** points qui ont pour abscisse 2 : $C$, $D$, $P$ et $Q$ ;
**b.** points qui ont pour ordonnée –3 : $M$, $N$, $Q$ et $R$ ;
**c.** points qui ont une abscisse égale à leur ordonnée : $O$, $B$, $D$, $K$ et $M$.

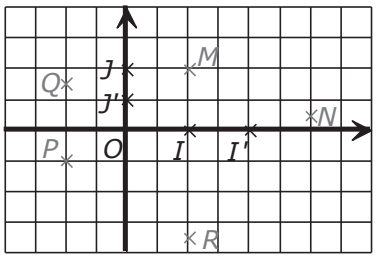
**11** **1.**




**2. a.** Dans le repère $(A, B, D)$ : $C(1 ; 1)$, $E(3 ; 0)$, $F(3 ; 1)$.

**b.** Dans le repère $(A, E, D)$ : $C\left(\frac{1}{3} ; 1\right)$, $E(1 ; 0)$, $F(1 ; 1)$.

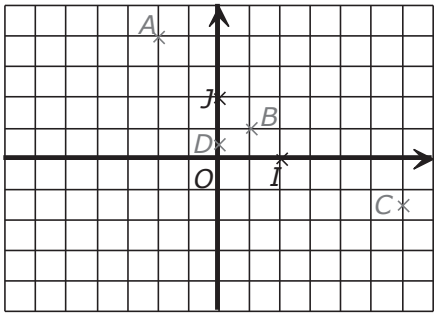
**12**




**a.** Dans le repère $(O, I, J)$ on a : $M(1 ; 1)$, $N\left(3 ; \frac{1}{4}\right)$ ;
$P\left(-1 ; -\frac{1}{2}\right)$ ; $Q\left(-1 ; \frac{3}{4}\right)$ et $R\left(1 ; -\frac{7}{4}\right)$.

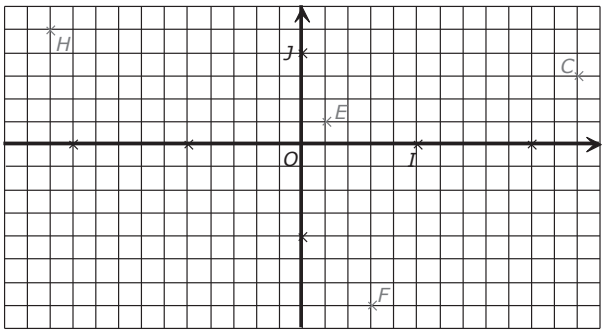
**b.** Dans le repère $(O, I', J')$ on a : $M\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$ ; $N\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ ;
$P\left(-\frac{1}{2} ; -1\right)$ ; $Q\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ et $R\left(\frac{1}{2} ; -\frac{7}{2}\right)$.

**13**




On a placé les points : $A$ $(-1 ; 2)$ ; $B$ $(0{,}5 ; 0{,}5)$ ;
$C\left(3 ; -\frac{3}{4}\right)$ ; $D\left(0 ; \frac{1}{4}\right)$.

**14**

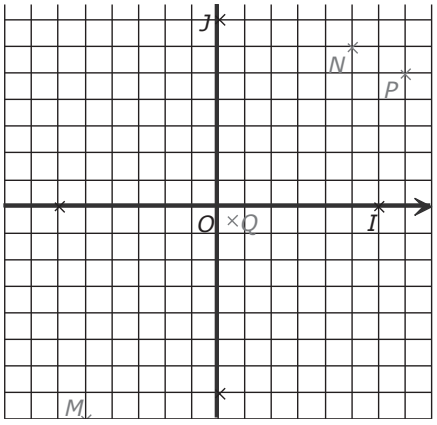



On a placé les points : $E\,(0{,}2\,;\,0{,}25)$ ; $F\left(\frac{3}{5}\,;-\frac{7}{4}\right)$ ; $C\left(2{,}4\,;\frac{3}{4}\right)$ ; $H\left(-\frac{11}{5}\,;\,1{,}25\right)$.

**15** **a.** « Les points dont l'abscisse est égale à 0 sont tous situés sur l'axe des ordonnées. »

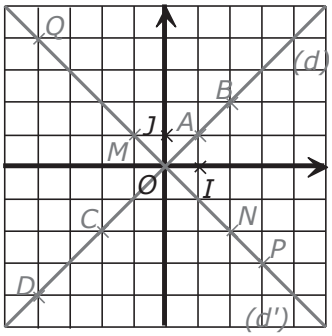
**b.** « Les points dont l'ordonnée est égale à 0 sont tous situés sur l'axe des abscisses. »

**16**




On a placé les points : $M\left(-\frac{5}{6}\,;-\frac{8}{7}\right)$ ; $N\left(\frac{5}{6}\,;\frac{6}{7}\right)$ ; $P\left(\frac{7}{6}\,;\frac{5}{7}\right)$ ; $Q\left(\frac{1}{12}\,;-\frac{1}{14}\right)$.

**17**



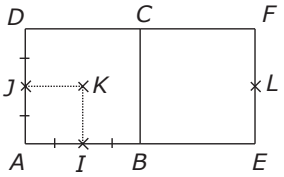

**1. a.** $A(1\,;\,1)$, $B(2\,;\,2)$, $C(-2\,;-2)$ et $D(-4\,;-4)$.

**b.** Conjecture : les coordonnées (abscisse et ordonnée) des points situés sur (*d*) sont égales.

**2. a.** $M(-1\,;\,1)$, $N(2\,;-2)$, $P(3\,;-3)$ et $Q(-4\,;\,4)$.

**b.** Conjecture : les coordonnées (abscisse et ordonnée) des points situés sur (*d'*) sont opposées.

**18**




Dans la figure ci-dessus, *ABCD* est un carré, *AEFD* est un rectangle.

**1.** Coordonnées de chaque point dans le repère $(A, B, D)$ ; $A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$, $C(1\,;\,1)$, $D(0\,;\,1)$, $E(2\,;\,0)$, $F(0\,;\,2)$.

**2.** Dans ce repère on a placé les points :

$I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ ; $J\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ ; $K\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ ; $L\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$.

## Bien comprendre, mieux rédiger

### 19 Maîtriser le vocabulaire

• Le point *O* et appelé origine du repère $(O, I, J)$.

• Le repère $(O, I, J)$ est orthogonal car $(OI) \perp (OJ)$.

• La droite $(OI)$ est appelée axe des abscisses et la droite $(OJ)$ axe des ordonnées.

• $-1$ est l'abscisse de *A*, 3 est son ordonnée, le couple $(-1\,;\,3)$ constitue les coordonnées de *A*.

### 20 Distinguer les différents repères

• Repères orthonormés :

$(O, I', J')$, $(I', I, M)$, $(M, K', L')$, …

• Repères orthogonaux non orthonormés :

$(O, I, J')$, $(O, I', J)$, $(J', K', J)$, …

### 21 Une astuce pour retenir

Les points $A(1\,;-3)$, $B(0\,;-1)$ et $C(2\,;\,2)$ sont à représenter dans un repère orthonormé $(O, I, J)$.

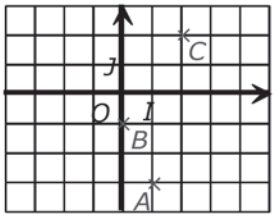
**1.** Voici les trois erreurs de Bineta :

• le repère $(O, I, J)$ n'est pas orthonormé ;

• elle a placé *A* en $\left(-\frac{3}{2}\,;\,1\right)$ ;

• elle a placé *B* en $\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

**2.** Ci-contre une solution correcte :



### 22 Savoir choisir un repère

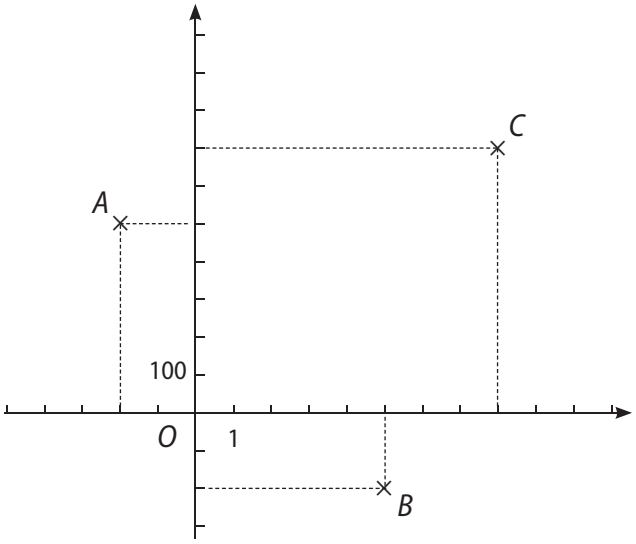
**1.** Marius ne pourra pas placer les points, il n'aura pas assez de place.

**2.** Dans le repère orthogonal $(O, I, J)$,

• 1 cm représentera 1 unité en abscisses ;

• 1 cm représentera 100 unités en ordonnées.

**3.** (Échelle 1/2)



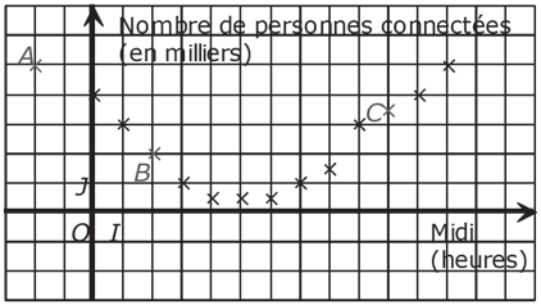

### 23 Il faut préciser

**1.** On ne peut pas lire les coordonnées de $A$, il faut préciser dans quel repère on travaille.

**2.** • Dans le repère $(O, I, J)$ : $A\left(\frac{5}{2} ; 2\right)$.

• Dans le repère $(O', I', J')$ : $A(2 ; 2)$.

### 24 Interpréter des données




**1. a.** Une unité en abscisse représente une heure, en ordonnée mille personnes connectées à Internet.

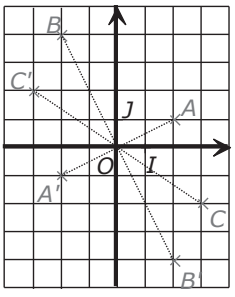
**b.** L'interprétation donnée au point $B$ est que 2 000 personnes sont connectées à Internet à 2 heures, au point $C$ est que 3 500 personnes sont connectées à Internet à 9 heures.

L'interprétation du point $A(-2 ; 5)$ est que 5 000 personnes sont connectées à Internet à 22 heures.

## Exercices d'approfondissement

### 25 Symétrie centrale et repère du plan

**1. a.** Dans le repère orthogonal $(O, I, J)$ ci-contre, on a placé : $A(2 ; 1)$, $B(-2 ; 4)$ et $C(3 ; -2)$.



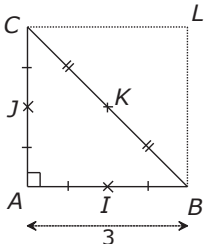

**b.** Si $A'$, $B'$ et $C'$ sont les images de $A$, $B$ et $C$ par la symétrie de centre $O$, alors on a : $A'(-2 ; -1)$, $B'(2 ; -4)$ et $C'(-3 ; 2)$.

**2.** On considère un point $M$ de coordonnées $(a ; b)$ dans $(O, I, J)$.

Le point $M'$, image du point $M$ par la symétrie de centre $O$ a pour coordonnées $(-a ; -b)$.

### 26 Différents repères

**1. a.**




Le triangle $ABC$ est rectangle et isocèle en $A$.

$I$ milieu de $[AB]$, $J$ milieu de $[AC]$, $K$ milieu de $[BC]$.

**b.** $AIKJ$ est un carré. En effet :

• dans le triangle $ABC$, $IK = \frac{AC}{2} = AJ = 1{,}5$ cm,

$JK = \frac{AB}{2} = AI = 1{,}5$ cm, donc $AIKJ$ est un losange ;

• de plus ce losange a un angle droit en $A$.

**2. a.** $(AI) \perp (AJ)$ et $AI = AJ$ donc le repère $(A, I, J)$ est orthonormé.

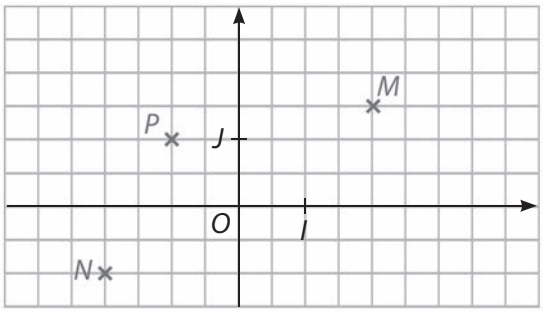
**b.** Coordonnées de chacun des points de la figure dans ce repère $(A, I, J)$ : $A(0 ; 0)$ ; $B(1 ; 0)$ ; $C(0 ; 1)$ ; $I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ ; $J\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ ; $K\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

**c.** Si $L$ est le point de coordonnées $(2 ; 2)$, alors $ABLC$ est aussi un carré.

En effet, c'est un losange ($AB = BL = LC = CA = 3$ cm), qui a un angle droit (en $A$)

**3.** Coordonnées de chacun des points de la figure dans ce repère $(I, B, K)$ : $I(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$ , $K(0 ; 1)$ , $A(-1 ; 0)$ , $C(-1 ; 2)$ , $J(-1 ; 1)$, $L(1 ; 2)$.

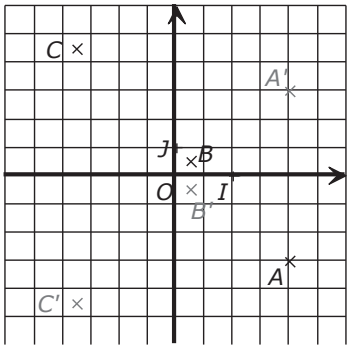
## 27 Retrouver un repère




Ainsi, dans ce repère $(O, I, J)$, $P(-1 ; 1)$.

## 28 Symétries orthogonales et repères

**1.**



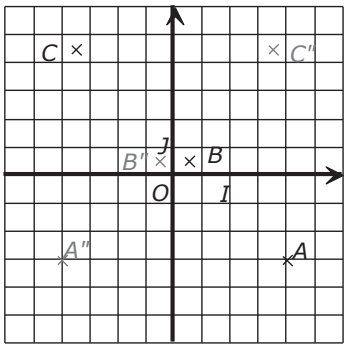

**a.** Dans le repère orthogonal $(O, I, J)$ ci-dessus, on a placé : $A(2 ; -3)$, $B\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{7}{4} ; \frac{9}{2}\right)$.

**b.** Si $A'$, $B'$ et $C'$ sont les images de $A$, $B$ et $C$ par la symétrie orthogonale d'axe $(OI)$, alors on a :

$A'(2 ; 3)$, $B'\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{2}\right)$ et $C'\left(-\frac{7}{4} ; -\frac{9}{2}\right)$.

**2.** On considère un point $M$ de coordonnées $(a ; b)$ dans $(O, I, J)$. Le point $M'$, image du point $M$ par la symétrie orthogonale d'axe $(OI)$ a pour coordonnées $(a ; -b)$.

**3.**

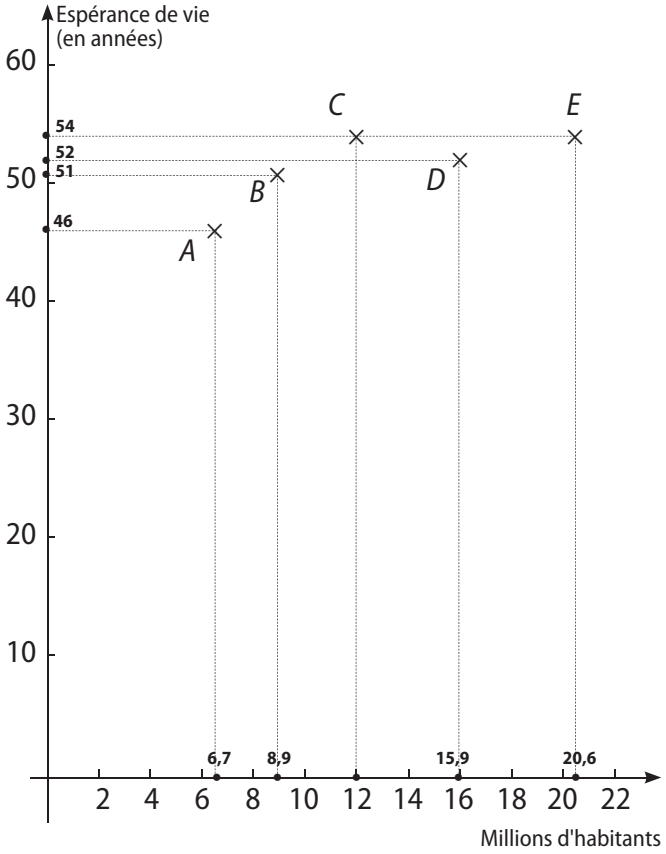



Si $A''$, $B''$ et $C''$ sont les images de $A$, $B$ et $C$ par la symétrie orthogonale d'axe $(OJ)$, alors on a :

$A''(-2 ; -3)$ ; $B''\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ et $C''\left(\frac{7}{4} ; \frac{9}{2}\right)$.

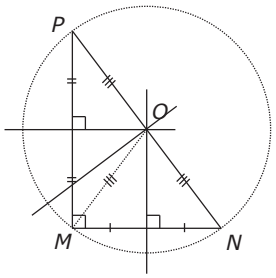
On considère un point $M$ de coordonnées $(a ; b)$ dans $(O, I, J)$. Le point $M'$, image du point $M$ par la symétrie orthogonale d'axe $(OJ)$ a pour coordonnées $(-a ; b)$.

## 29 Représenter des données statistiques




## 30 Centre du cercle circonscrit

**1. a.**




$MNP$ est un triangle rectangle en $P$ tel que : $MN = 6$ cm et $MP = 8$ cm.

**b.** Les médiatrices de ce triangle concourent au point $O$, centre de son cercle circonscrit et milieu de son hypoténuse $[NP]$.

**c.** D'après la propriété de Pythagore :

$NP = \sqrt{MN^2 + MP^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm.

$OM = 5$ cm.

**2.** Dans le repère (M, N, P), on a :

$M(0 ; 0)$ ; $N(1 ; 0)$ ; $P(0 ; 1)$ ; $O\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

**2.** Les points du cercle $(C)$, dont l'abscisse est nulle, sont :

$A(0 ; 2{,}5)$ et $B(0 ; -2{,}5)$.

**3.** Le quadrilatère $ADBE$, dont les sommets sont les points d'intersection de cercle $(C)$ et des axes du repère, est un carré.

# Activités d'intégration

## 31 Savoir s'orienter

• Déplacement du refuge 1 au point $A$ :

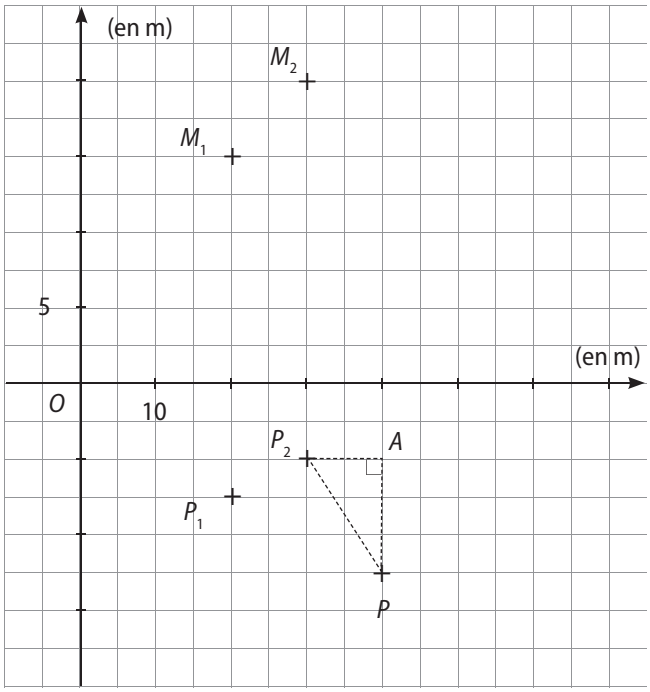
⟶ se déplacer de 5 km vers l'Est, ⟶ se déplacer de 4 km vers le Sud.

• Déplacement du point $A$ au refuge 2 :

⟶ se déplacer de 2 km vers l'Est, ⟶ se déplacer de 7 km vers le Nord.

## 32 Proies et prédateurs

On schématise la situation dans le repère ci-contre.




• La mouette $M_1$ est située à 22,5 m du poisson $P_1$, elle se déplace à 20 m/s, elle mettra donc :

$t_1 = \dfrac{22,5}{20} = 1,125$ s à attrapper sa proie.

• La mouette $M_2$ est située à 25 m du poisson $P_2$, elle se déplace à 20 m/s, elle mettra donc :

$t_2 = 1,25$ s à attrapper sa proie.

• Dans le triangle $APP_2$ rectangle en $A$, d'après la propriété de Pythagore, $PP_2^{\,2} = PA^2 + AP_2^{\,2}$

or $P_2A = 10$ m et $PA = 7,5$ m.

Donc $PP_2 = \sqrt{10^2 + 7,5^2} = 12,5$ m.

Or le pingouin se déplace à 6 m/s, il mettra donc :

$t_3 = \dfrac{12,5}{6} \approx 2,08$ s à attraper sa proie.

Conclusion : la mouette $M_1$ attrapera sa proie en premier (et le pingouin n'aura pas le poisson $P_2$).

# 15 Pyramide et cône de révolution

*Manuel pages 161 à 174*

| Activités d'apprentissage | Cours<br>Méthodes et savoir-faire | Application | Bien comprendre<br>Mieux rédiger | Approfondissement |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Plan mathématique [1 p 165] | 19, 22 | 37 | |
| 2 | Positions relatives de deux droites de l'espace [2 p 165] | 19, 20, 21 | 37, 38 | 42 |
| 3 | Droites parallèles et droites perpendiculaires : propriétés [3 p 165] | 19, 20, 21, 22 | 37, 38 | |
| 4 | Positions relatives de deux plans [4 p 165] | 19 | | 42 |
| | Positions relatives d'une droite et d'un plan [5 p 166] | 19, 20, 22 | | 44 |
| 5, 6, 7 | Pyramide [6 p. 166] | 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 36 | 39, 40, 41 | 43, 46, 48 |
| | **Apprendre à décrire et à tracer une pyramide régulière [1 p. 168]** | **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11** | | |
| 5, 6 | Cône de révolution [7 p. 166] | 23, 25, 27, 32, 34, 35 | 40, 41 | 45, 47 |
| | **Apprendre à calculer une longueur, une aire, un volume [2 p. 169]** | **12, 13, 14, 15, 16, 17, 18** | 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41 | 45, 46, 47, 48 |

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

## Introduction et contrôle des pré-requis

**Recherche médicale**

**1. a.** $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 0{,}82 \times 10 \approx 20{,}1$ cm$^3$.

**b.** Une demi-éprouvette peut donc contenir environ 10,05 cm$^3$.

**2. a.** 1 L = 1 dm$^3$ = 1 000 cm$^3$ et $\frac{1\,000}{10{,}05} \approx 99{,}5$ ; la chercheuse aura besoin de 99 éprouvettes (à demi-remplies).

**b.** $1\,000 - 99 \times 10{,}05 = 5{,}05$ ; il lui restera environ 5,05 cm$^3$ de liquide.

**3.** Le liquide jeté va remplir un parallélépipède rectangle à base carrée de côté 20 cm et de hauteur $h$ à déterminer. On cherche $h$ tel que $20 \times 20 \times h = 1\,000$ ; c'est-à-dire $h = 2{,}5$ cm. Le bac sera rempli jusqu'à une hauteur de 2,5 cm.

## Activités d'apprentissage

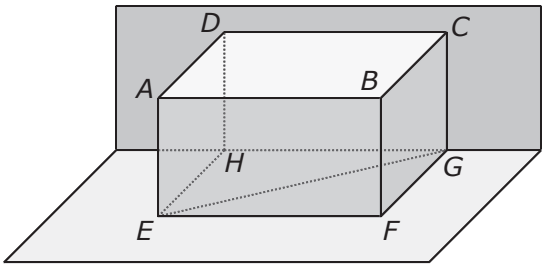
### 1. Reconnaître un plan mathématique et le désigner

**1. a.** Le point *E* appartient à 3 faces du parallélépipède rectangle.
Il appartient à plusieurs plans mathématiques.

**b.** Les points *E* et *F* appartiennent ensemble à 2 faces.
Ils appartiennent ensemble à plusieurs plans mathématiques.

**c.** Les points *A*, *E* et *F* appartiennent ensemble à 1 face.
Ils appartiennent ensemble à un seul plan mathématique.

**d.** Les points *A*, *E* et *G* appartiennent ensemble à un même plan mathématique. *C* est un autre point qui appartient à ce plan.




**e.** Les points *A*, *E*, *F* et *C* n'appartiennent pas à un même plan mathématique. En effet le point *C*, qui appartient au plan contenant *A*, *E* et *G*, n'appartient pas au plan contenant *A*, *E* et *F*.

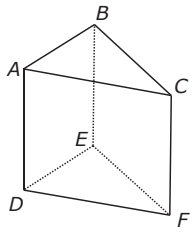
**2.** Pour désigner un plan mathématique :

• 3 points non alignés sont nécessaires, car moins de 3 points appartiennent ensemble à plusieurs plans (voir **1. a.** et **1. b.**) ;

• 3 points non alignés sont suffisants, car ils appartiennent ensemble à un seul plan (voir **1. c.** et **1. d.**).

Le plan (*EFG*) est aussi noté : (*EFH*), (*EGH*), (*FGH*).

## 2. Positions relatives de deux droites dans l'espace




**1.** Dans le prisme droit représenté ci-contre :

**a.** il est impossible de trouver deux arêtes sécantes et non coplanaires ;

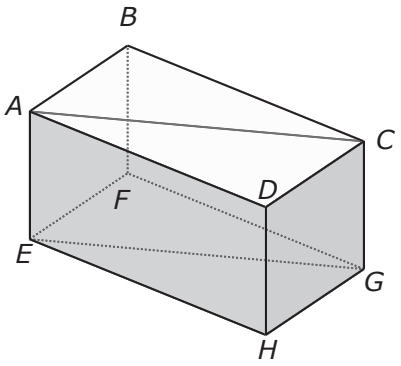
**b.** il est impossible de trouver deux arêtes dont les droites supports sont parallèles et non coplanaires ;

**c** il est possible de trouver deux arêtes non coplanaires ;

par exemple [AB] et [CF] ; leurs droites supports, (AB) et (CF), sont ni parallèles, ni sécantes.

**2.** Dans l'espace, deux droites n'ayant aucun point commun ne sont pas toujours parallèles.

## 3. Parallèles et perpendiculaires dans l'espace




**1. a.** Dans le prisme droit *ACDEGH*, à bases triangulaires *ACD* et *EGH*, les faces latérales *AEHD*, *CGHD* et *AEGC* sont rectangulaires et les droites supports des arêtes latérales sont parallèles entre elles deux à deux ;

donc : (*AE*) // (*DH*), (*CG*) // (*DH*) et (*AE*) // (*CG*).

**b.** Propriété (utilisée dans le plan dès la classe de sixième) :

Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors ces deux droites sont parallèles.

**2.** Dans le parallélépipède rectangle *ABCDEFGH* :

**a.** la face *ABCD* est un rectangle donc : (*BC*) ⊥ (*AB*) et (*AD*) ⊥ (*AB*) ;

**b.** les faces *ABFE* et *BCGF* sont des rectangles donc : (*EF*) ⊥ (*BF*) et (*GF*) ⊥ (*BF*).

**c.** On ne peut rien dire de deux droites perpendiculaires à une même troisième* ;

ainsi : en a, (*BC*) ⊥ (*AB*) et (*AD*) ⊥ (*AB*) avec (*BC*) // (*AD*) ; en b, (*EF*) ⊥ (*BF*) et (*GF*) ⊥ (*BF*) avec (*EF*) ⊥ (*GF*).

* Différence totale avec ce qui se passe dans le plan, où deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

## 4. Positions relatives de droites et de plans

**1.** Les droites (*GA*), (*GB*), (*GC*) et (*GD*) ont le seul point *G* en commun avec le plan (*HEF*).

**2. a.** La face latérale *ADHE* est un rectangle donc (*AD*) // (*EH*) ; si la droite (*AD*) était sécante à la face *EFGH* du prisme, alors ce serait en un point commun aux droites (*AD*) et (*EH*) et ces droites ne seraient plus parallèles.

Cela est donc impossible et la droite (*AD*) n'est pas sécante à la face *EFGH*.

**b.** On peut dire que la droite (*AD*) et le plan (*EFG*) sont parallèles.

**3. a.** Les faces latérales *ADHE* et *ABFE* sont des rectangles donc (*AE*) ⊥ (*EH*) et (*AE*) ⊥ (*EF*).

**b.** Les droites sécantes (*EH*) et (*EF*) sont contenues dans le plan (*EFH*).

**c.** La droite (*AE*) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (*EFH*) ; la droite (*AE*) est donc perpendiculaire au plan (*EFH*).

La droite (*GE*) est contenue dans le plan (*EFH*). Or, ce plan est perpendiculaire à la droite (*AE*), donc la droite (*GE*) est perpendiculaire à la droite (*AE*).

**4. a.** Le plan (*DAE*), qui contient la droite (*AE*) perpendiculaire au plan (*EHG*), est perpendiculaire à ce plan.

**b.** Les plans (*ABF*), (*BCG*) et (*CDH*) sont perpendiculaires au plan (*EHG*).

**c.** Les plans (*ABC*) et (*EFG*) sont parallèles, ainsi que les plans (*ABF*) et (*DCG*).

## 5. Découper pour observer et décrire

**1.** Réalisation, à partir des patrons 1 et 2, d'une pyramide et d'un cône de révolution.

**2. a.** La base de la pyramide (colorée en rouge) est un carré.

**b.** La base du cône de révolution (colorée en rouge) est un disque.

**3. a.** La pyramide a 4 faces latérales et 4 arêtes latérales.

**b.** La hauteur est d'environ 5,3 cm.

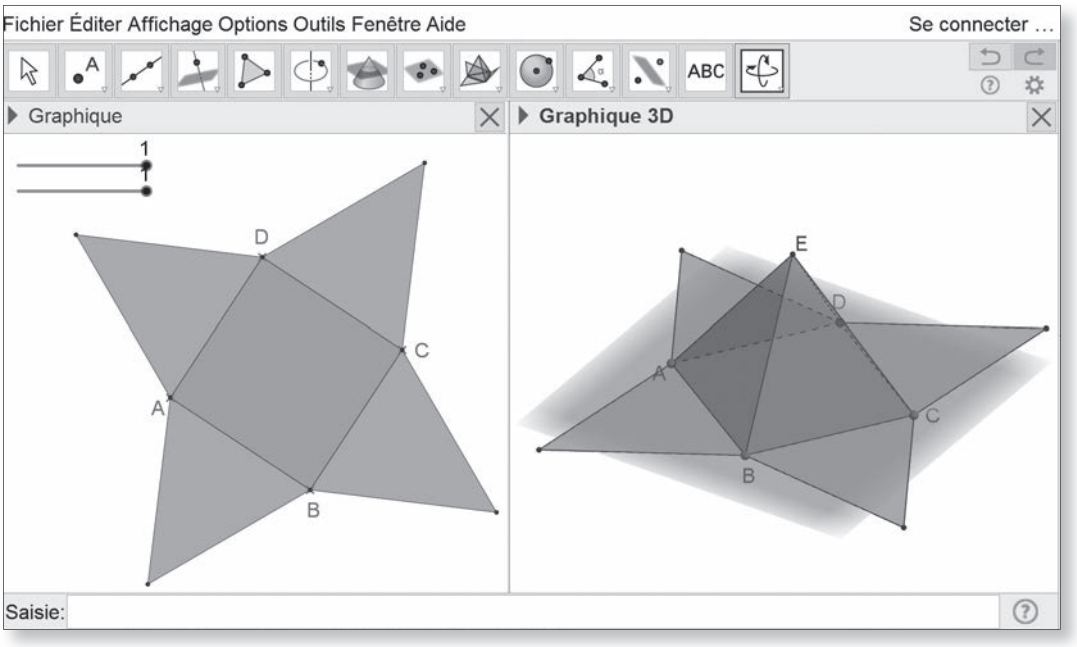
**c.** $OA = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm.

Dans le triangle *AOB* rectangle en *O*, d'après la propriété de Pythagore : $AB^2 = OA^2 + OB^2$ donc $OB^2 = 6^2 - 2{,}8^2 = 28{,}16$.

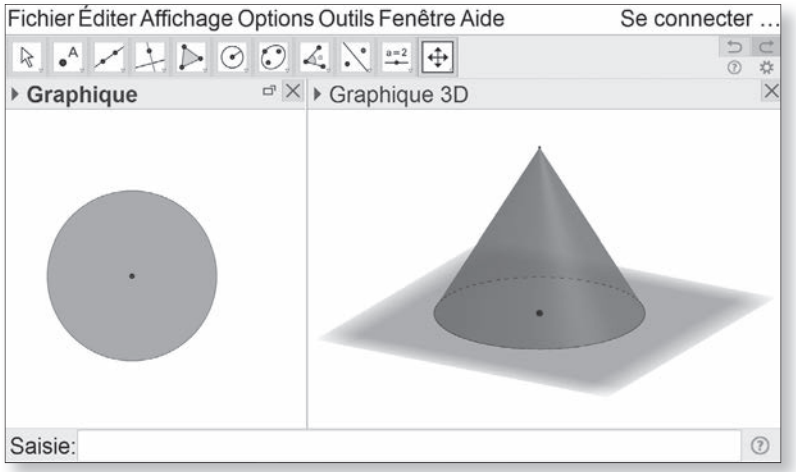
Ainsi, $OB = \sqrt{28{,}16} \approx 5{,}3$ cm.

## 6. Observer avec un logiciel

**1.**

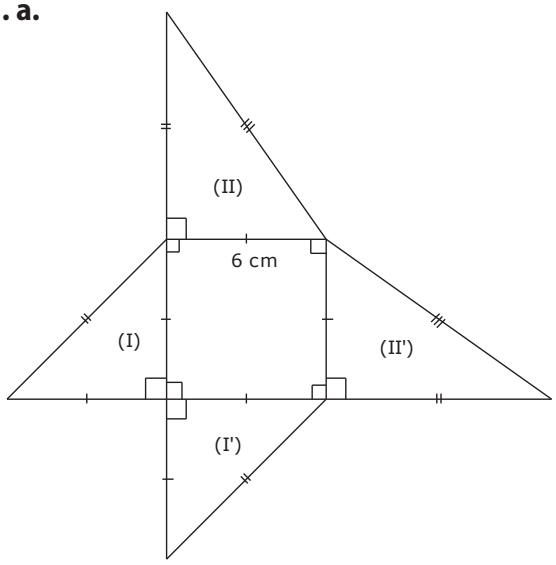



**2.**




## 7. Aire et volume d'une pyramide

**1. a.**




**b.** Les 4 faces latérales sont des triangles rectangles :

• deux [(I) et (I')] ont des côtés de l'angle droit de 6 cm, une hypoténuse de $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ cm ;

• deux [(II) et (II')] ont un côté de l'angle droit de 6 cm, l'autre côté de l'angle droit de $6\sqrt{2}$ cm.

Donc l'aire latérale de cette pyramide est :

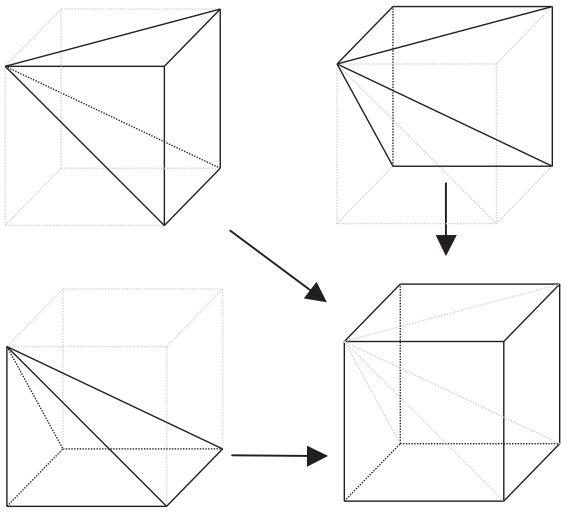
$\mathscr{A} = 2 \times \dfrac{6 \times 6}{2} + 2 \times \dfrac{6 \times 6\sqrt{2}}{2}$ 2) $\approx 86{,}9$ cm$^2$.

c. L'aire de la base est : $\mathscr{B} = 6 \times 6 = 36$ cm$^2$ ;

donc l'aire totale de cette pyramide est :

$\mathscr{A} + \mathscr{B} = 36(1 + \sqrt{2}) + 36 = 36(2 + \sqrt{2}) \approx 122{,}9$ cm$^2$.

**2. a.** Reconstitution d'un cube à l'aide de trois pyramides identiques (utilisation du patron **1. a.**), en les disposant de la façon suivante :



**b.** Les trois pyramides (identiques) ont ensemble le même volume que le cube de côté 6 cm, c'est-à-dire : $6^3 = 216$ cm$^3$ ;
donc le volume d'une pyramide est :

$\mathscr{V} = \dfrac{216}{3} = 72$ cm$^3$.

**c.** À l'aide de la formule $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$, on retrouve :
$\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times 6^2 \times 6 = 72$ cm$^3$.

# Méthodes et savoir-faire

## 1. Apprendre à décrire et à tracer une pyramide régulière

**1** Sommet : *I* ;
base : *JKLMN* ;
faces latérales : *IJK*, *IKL*, *ILM*, *IMN* et *INJ* ;
arêtes latérales : [*IJ*], [*IK*], [*IL*], [*IM*] et [*IN*].

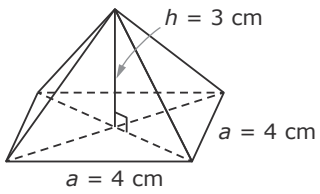
**2** Sommet : *F* ;
base : *EGHIJK* ;
faces latérales : *EGE*, *FGH*, *FHI*, *FIJ*, *FJK* et *FKE* ;
arêtes latérales : [*FE*], [*FG*], [*FH*], [*FI*], [*FJ*] et [*FK*].

**3** Sommet : *S* ;
base : le disque de centre *U* et de rayon *UT* ;
axe de révolution : (*SU*) ;
trois génératrices : (*ST*), (*SU*) et (*SW*).

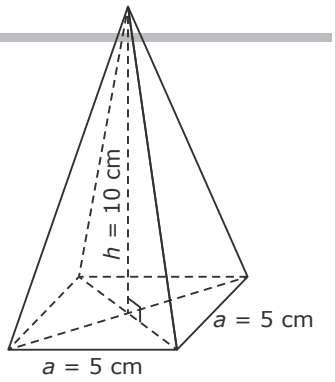
**4** Sommet : *D* ;
base : le disque de centre *B* et de rayon *BA* ;
axe de révolution : (*DB*) ;
trois génératrices : (*DA*), (*DC*) et (*DE*).

**5** **1.** Vrai **2.** Faux (voir exercice **4**).

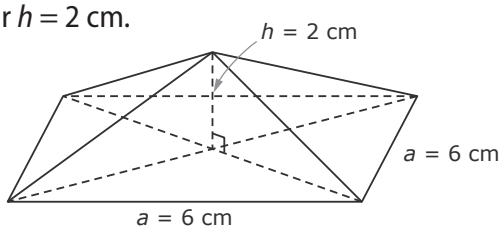
**6** Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté $a = 4$ cm, et de hauteur $h = 3$ cm.



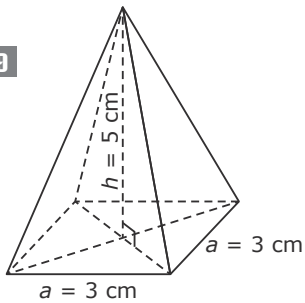

**7** Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté $a = 5$ cm, et de hauteur $h = 10$ cm.




**8** Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté $a = 6$ cm, et de hauteur $h = 2$ cm.

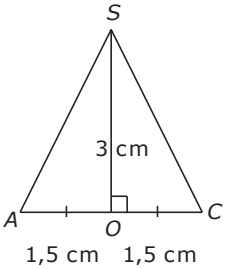



**9**

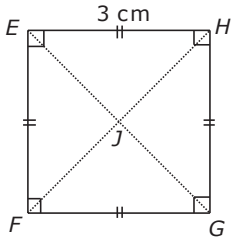



Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté $a = 3$ cm, et de hauteur $h = 5$ cm.

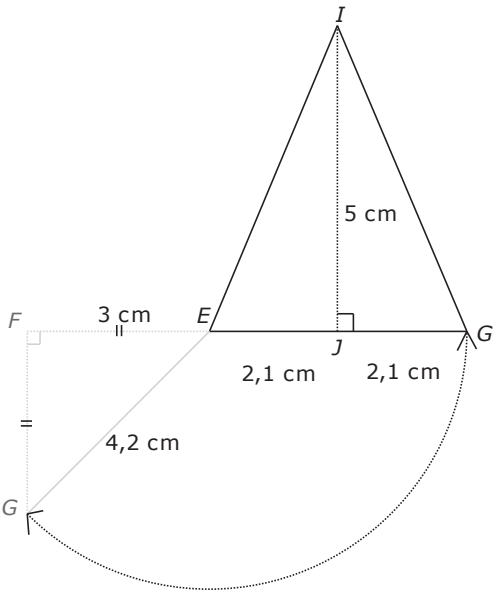
**10** *SAC* est un triangle isocèle en *S*.



**11** **1.** La base *EFGH* est un carré de côté 3 cm.

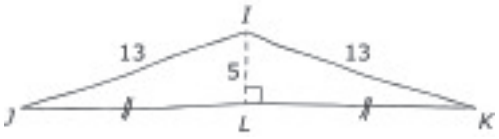



**2.** La section de la pyramide par le plan (*IEG*) est le triangle *IEG* isocèle en I, dont la hauteur est $IJ = 5$ cm et la base [*EG*] est telle que (d'après la propriété de Pythagore dans le triangle *EFG* rectangle et isocèle en *F*) :
$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ ;
$EG = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$ cm.



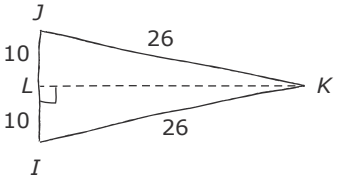

## 2. Apprendre à calculer une longueur, une aire, un volume

**12** **1.** Représentation à main levée :



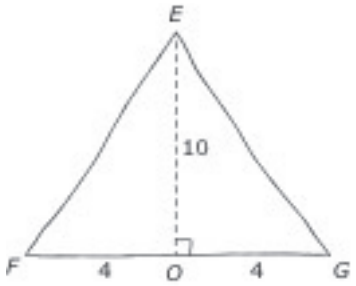

**2. a.** Dans le triangle *ILK* rectangle en *L*, d'après la propriété de Pythagore, on a : $IK^2 = IL^2 + LK^2$ ;
donc : $LK^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ et $LK = 12$ cm.
**b.** Volume du cône :
$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 5 \approx 754$ cm$^3$.

**13** **1.** Représentation à main levée :



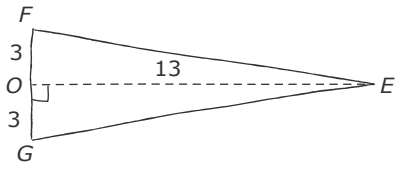

**2. a.** Dans le triangle *ILK* rectangle en *L*, d'après la propriété de Pythagore, on a : $IK^2 = IL^2 + LK^2$ ;
donc : $LK^2 = 26^2 - 10^2 = 576$ et $LK = 24$ cm.
**b.** Volume du cône :
$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times 24 \approx 2\,512$ cm$^3$.

**14** **1.** • Dans le triangle *OGH* isocèle et rectangle en *O*, d'après la propriété de Pythagore, on a :
$GH^2 = GO^2 + OH^2 = 4^2 + 4^2 = 32$ et $GH = 4\sqrt{2}$ cm.
• Aire de la base : $\mathscr{B} = GH^2 = 32$ cm$^2$.
**2. a.** Représentation à main levée :



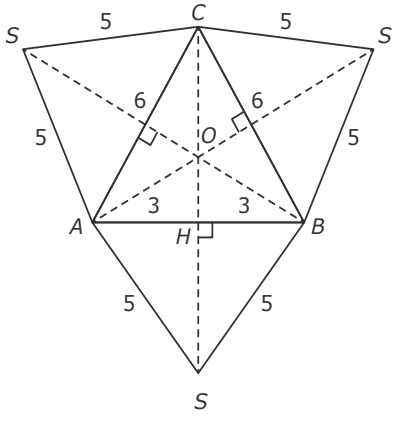

**b.** Volume de la pyramide :
$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times EO = \frac{1}{3} \times 32 \times 10 = \frac{320}{3}$ cm$^3$.

**15** **1.** • Dans le triangle *OGH* isocèle et rectangle en *O*, d'après la propriété de Pythagore, on a :
$GH^2 = GO^2 + OH^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ et $GH = 3\sqrt{2}$ cm.
• Aire de la base : $\mathscr{B} = GH^2 = 18$ cm$^2$.
**2. a.** Représentation à main levée :




**b.** Volume de la pyramide :
$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times EO = \frac{1}{3} \times 18 \times 13 = 78$ cm$^3$.

**16** **1.** Patron de la pyramide :




**2.** • Dans le triangle *ASH* rectangle en *H*, d'après la

propriété de Pythagore, on a : $AS^2 = AH^2 + HS^2$ ;
donc : $HS^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ et $HS = 4$ cm,
aire$(ABS) = \dfrac{6 \times 4}{2} = 12$ cm$^2$,
aire latérale $= 3 \times$ aire$(ABS) = 3 \times 12 = 36$ cm$^2$.

• Dans le triangle $ACH$ rectangle en $H$, d'après la propriété de Pythagore, on a : $AC^2 = AH^2 + HC^2$ ;
donc : $HC^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ et HC $= 3\sqrt{3}$ cm,
aire$(ABC) = \dfrac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm$^2$.

• Aire totale de la pyramide : $(36 + 9\sqrt{3})$cm$^2$.

**17** **1.** Dans le triangle $AOS$ rectangle en $O$,
$\tan \widehat{ASO} = \dfrac{OA}{OS}$ ; donc :

$$OS = \frac{OA}{\tan \widehat{ASO}} = \frac{5}{\tan 60°} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}8 \text{ cm}.$$

**2.** Volume du cône :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times OS \approx \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 5^2 \times 2{,}8 \approx 73 \text{ cm}^3.$$

**18** Tableau concernant un cône de révolution :

| Rayon $r$ | Arête $a$ | Hauteur $h$ | Aire base $\mathscr{B}$ | Aire latérale $\mathscr{A}$ | Volume $\mathscr{V}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 3 | $16\pi$ | $20\,\pi$ | $16\pi$ |
| 5 | 13 | 12 | $25\pi$ | $65\pi$ | $100\pi$ |

En effet : • périmètre de la base : $\mathscr{P} = 2\pi r$ ,

• aire de la base : $\mathscr{B} = \pi r^2$ ,

• aire latérale : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}\mathscr{P}a = \pi r a$ ;

• volume : $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$.

# Exercices d'application

## Droites et plans dans l'espace

**19** **1.** Arêtes dont les droites supports sont

**a.** perpendiculaires à $(BF)$ : $[EF]$, $[AB]$, $[GF]$ et $[CB]$ ;

**b.** parallèles à $(AD)$ : $[AD]$, $[BC]$, $[FG]$ et $[EH]$ ;

**c.** perpendiculaires à $(DCG)$ : $[AD]$, $[BC]$, $[FG]$ et $[EH]$.

**2. a.** Faces parallèles deux à deux : $ABCD$ et $EFGH$, $ABFE$ et $DCGH$, $ADHE$ et BCGF.

**b.** Faces perpendiculaires à la face $AEHD$ : $ABFE$, $EFGH$, $HGCD$ et $DCBA$.

**20** **1.** Droite coplanaire à la droite $(GH)$ : $(GC)$ ou $(HD)$ [droites sécantes avec $(GH)$] ; $(BA)$, $(CD)$ ou $(FE)$ [droites parallèles à $(GH)$].

**2.** Droite coplanaire à la droite $(AE)$ sans être support d'une arête : $(EB)$, $(AF)$, $(ED)$ ou $(AH)$.

**3.** La droite (FG) n'est pas coplanaire à $(CD)$.

**4.** Droites contenues dans le plan $(ABC)$ : $(AB)$, $(BC)$, $(CD)$, $(DA)$, $(AC)$ et $(BD)$.

**21** **1. a.** Couples de droites parallèles : $(AB)$ // $(DE)$, $(BC)$ // $(EF)$, $(CA)$ // $(FD)$, $(AD)$ // $(CF)$, $(CF)$ // $(BE)$, (BE) // (AD).

**b.** Droites perpendiculaires à $(CF)$ : $(CA)$, $(CB)$, $(FD)$ et $(FE)$.

**2.** Droites sécantes à la droite $(BC)$ sans lui être perpendiculaire : $(AB)$, $(AC)$, $(CE)$ et $(BF)$.

**3.** Arêtes dont les droites supports ne sont ni sécantes, ni parallèles à$(AB)$ : $[CF]$, $[DF]$ et $[FE]$.

**22** Chaque face d'un cube est un carré.

**1. a.** On a : $(AE)$ / /$(BF)$ et $(BF)$ // $(CG)$ ;
donc les droites $(AE)$ et $(CG)$ sont parallèles.

**b.** On en déduit que ces droites sont coplanaires.

**c.** $(ACE)$ est le plan qui les contient.

**2. a.** Le quadrilatère non croisé $AEGC$, qui a deux côtés $[AE]$ et $[CG]$ parallèles et de même longueur, est un parallélogramme.

**b.** La droite $(AE)$, qui est perpendiculaire aux droites $(AB)$ et $(AD)$ sécantes dans le plan $(ABC)$, est perpendiculaire à ce plan ; on en déduit que $(AE)$ est perpendiculaire à $(AC)$, droite du plan $(ABC)$.

**c.** $AEGC$, parallélogramme dont un angle est droit, est un rectangle.

## Description et construction de solides

**23** ① Pavé droit ou parallélépipède rectangle :
8 sommets : $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ et $H$ ;
6 faces : $ABCD$, $EFGH$, $ABFE$, $BCGF$, $ADHE$ et DCGH ;
12 arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$.

② Pyramide à base triangulaire de sommet $S$ :
base : $IJK$ ; hauteur : $[SH]$ ;
3 faces latérales : $SIJ$, $SJK$ et $SKI$ ;
3 arêtes latérales : $[SI]$, $[SJ]$ et $[SK]$.

③ Cylindre de révolution :
axe : $(MN)$ ; hauteur : $[MN]$ ;
bases : disques de centres $M$ et $N$, de rayon $NP$.

④ Pyramide à base carrée de sommet *S* :
base : *ABCD* ; hauteur : [*SF*] ;
4 faces latérales : *SAB*, *SBC*, *SCD* et *SDA* ;
4 arêtes latérales : [*SA*], [*SB*], [*SC*] et [*SD*].

⑤ Cône de révolution :
sommet : *O* ; hauteur : [*OS*] ; génératrice : (*OR*) ;
base : disque de centre *S*, de rayon *SR*.

⑥ Prisme droit à base triangulaire :
bases : *IJK* et *LMN* ;
3 faces latérales : *IJML*, *JKNM* et *KILN* ;
3 arêtes latérales : [*JM*], [*IL*] et [*KN*].

**24** Cette pyramide a pour base le carré *EFGH*, pour hauteur [*EA*] (ou [*FB*] ou [*GC*] ou [*HD*]), pour faces latérales les triangles *OEF*, *OFG*, *OGH* et *OHE* tous isocèles en *O*.

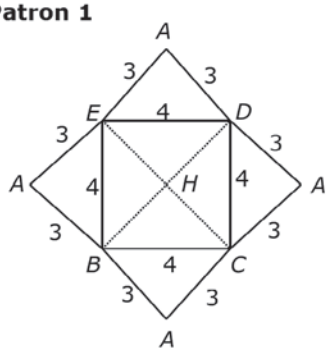
**25** Axes de révolution : (*OS*) et (*O'S'*).
Hauteurs : [*OS*] et [*O'S'*].
Bases : disque de centre *O* et de rayon *OS'* et disque de centre *O'* et de rayon *O'S*.
Génératrices : dans les deux cas, la droite (*SS'*).

**26** **1.** Dans le triangle *OAS* rectangle en *O*, d'après la propriété de Pythagore :
$AS^2 = AO^2 + OS^2$ donc $OS^2 = 5{,}5 - 3{,}3^2$ d'où $OS = 4{,}4$ cm.
**2.** Dans le triangle *MQN* rectangle en *M*, d'après la propriété de Pythagore :
$QN^2 = QM^2 + MN^2$ donc $QM^2 = 14^2 - 8{,}4^2$
d'où $QM = 11{,}2$ dm.

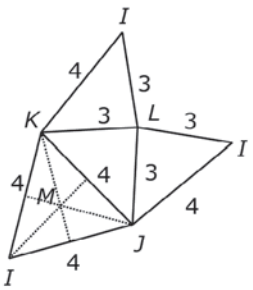
**27** Dans le triangle *OAS* rectangle en *O*, d'après la propriété de Pythagore :
$AS^2 = AO^2 + OS^2$ donc $OS^2 = 8{,}5^2 - 6{,}8^2$ d'où $OS = 5{,}1$ cm.

**28** **1.** et **2.**

**Patron 1**




**Patron 2**

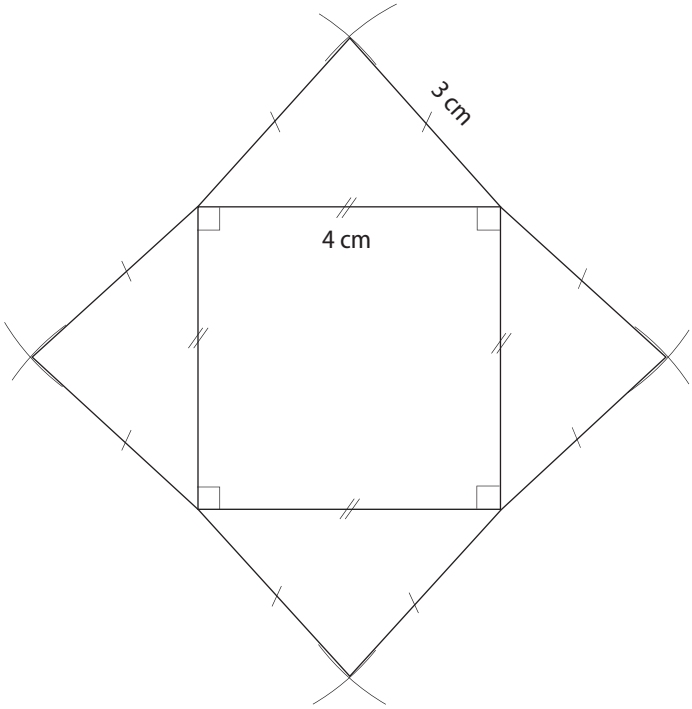



**3.**

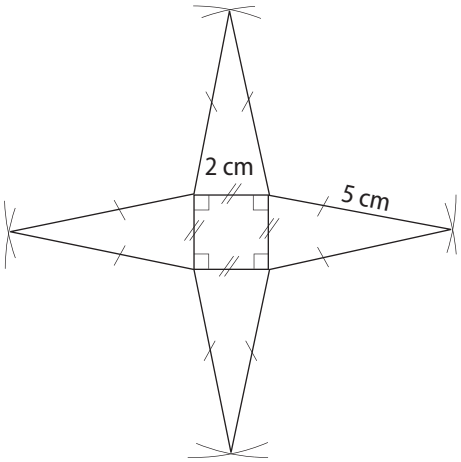
| | Patron 1 | Patron 2 |
|---|---|---|
| Nom de la base | *BCDE* | *IJK* |
| Nom de la hauteur | [*AH*] | [*LM*] |
| Nom d'une face latérale | *ABE* | *JKL* |
| Aire latérale | 4 × aire(*ABE*) | 3 × aire(*JKL*) |

**b.** Aire $= 4 \times \pi \times 5^2 \approx 314$ cm$^2$.

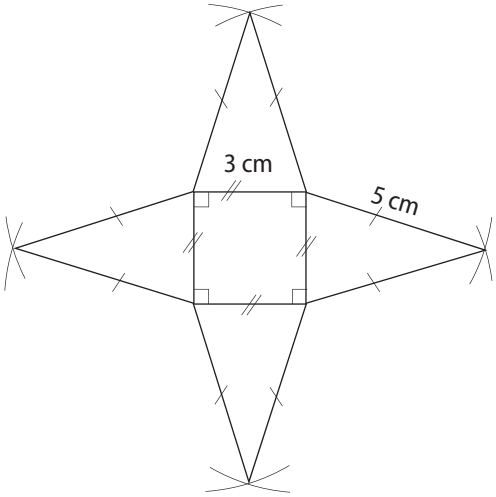
**29** **1.**




**2.** (Échelle 1/2)




**30** Patron de cette pyramide à l'échelle 1/2 :



## Calculs d'aires et de volumes

**31** **1.** • Pyramide *SABCD*, à base carrée *ABCD* :
aire de la base : $\mathscr{B}(ABCD) = 5^2 = 25$ cm².
• Pyramide *IJKL*, à base triangulaire *JKL* :
aire de la base : $\mathscr{B}(JKL) = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$ cm².
**2.** • Pyramide à base carrée *SABCD* :
volume : $\mathscr{V}(SABCD) = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times SH = \frac{1}{3} \times 25 \times 4{,}5 = 37{,}5$ cm³.
• Pyramide à base triangulaire *IJKL* :
volume : $\mathscr{V}(IJKL) = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times IM = \frac{1}{3} \times 5 \times 3 = 5$ cm³.

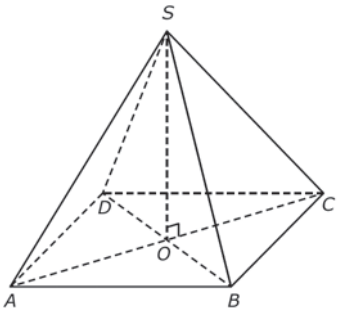
**32** **1.** • Aire de la base de l'arbuste :
$\mathscr{B} = \pi r^2 = \pi \times 0{,}5^2 \approx 0{,}8$ m².
• Aire de la base du coquillage :
$\mathscr{B} = \pi r^2 = \pi \times 1^2 \approx 3{,}1$ cm².
**2.** • Volume de l'arbuste : $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h \approx \frac{1}{3} \times 0{,}8 \times 2 \approx 0{,}5$ m³.
• Volume du coquillage : $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h \approx \frac{1}{3} \times 3{,}1 \times 5 \approx 5{,}2$ cm³.

**33** Pyramide à base triangulaire
**1.** Aire de la base : $\mathscr{B}(ABC) = \frac{3{,}6 \times 1{,}1}{2} = 1{,}98$ cm² ;
**2.** Volume de la pyramide :
$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h \approx \frac{1}{3} \times 1{,}98 \times 10 \approx 6{,}6$ cm³.

**34** Cône de révolution de rayon 5 cm et de hauteur 9 cm :
**1.** Aire de la base : $\mathscr{B} = \pi r^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi$ cm² ;
**2.** Volume : $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h = \frac{1}{3} \times 25\pi \times 9 = 75\pi \approx 236$ cm³.

**35** Découpage, dans un premier cube de 10 cm de côté, d'une pyramide et, dans un second cube de 10 cm de côté, d'un cône de révolution.
**1.** Aire de la base :
• de la pyramide : $\mathscr{B}(EFGH) = 100$ cm² ;
• du cône : $\mathscr{B} = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 79$ cm².
**2.** Volume de bois restant :
• après la découpe de la pyramide :
$\mathscr{V} = \mathscr{V}_{\text{cube}} - \mathscr{V}_{\text{pyramide}} = 1\,000 - \frac{1}{3} \times 100 \times 10$
$\mathscr{V} = \frac{2}{3} \times 100 \times 10 \approx 666$ cm³ ;
• après la découpe du cône :
$\mathscr{V} = \mathscr{V}_{\text{cube}} - \mathscr{V}_{\text{cône}} \approx 1\,000 - \frac{1}{3} \times 79 \times 10$
$\mathscr{V} \approx 1\,000 - 263 \approx 737$ cm³.
**3.** Masse du cube :
• évidé de la pyramide : $0{,}666 \times 700 \approx 466$ g ;
• évidé du cône : $0{,}737 \times 700 \approx 516$ g.

**36** **1.** Représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière *SABCD* à base carrée *ABCD* :




**2.**

| Pyramide *SABCD* | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|
| *AB* | 4 cm | 5 m | 9 dm |
| Hauteur *OS* | 6 cm | 3 m | 6 dm |
| Aire de la base | 16 cm² | 25 m² | 81 dm² |
| Volume | 32 cm³ | 25 m³ | 162 dm³ |

## Bien comprendre, mieux rédiger

**37** **Les bons mots**

**1.** Les droites (*QP*) et (*TM*) sont sécantes en *A* ; elles sont donc **coplanaires**.

**2.** Les droites (*RS*) et (*QM*) ne sont pas **contenues** dans un même **plan**. On dit qu'elles sont **non coplanaires**. Elles sont ni **sécantes**, ni **parallèles**.

**3.** Les droites (*QM*) et (*SO*) sont **parallèles** car elles sont toutes deux **parallèles** à (*RN*). Les droites (*QM*) et (*SO*) sont donc **contenues** dans le plan (*SOM*). On dit qu'elles sont **coplanaires**.

**38** **Plusieurs réponses justes**

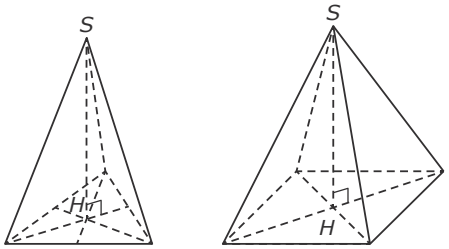
| | | |
|---|---|---|
| (*MN*) et (*MP*) sont sécantes perpendiculaires coplanaires | (*OS*) et (*MQ*) sont parallèles coplanaires | (*MT*) et (*PQ*) sont sécantes perpendiculaires coplanaires |
| (*MT*) et (*NS*) sont parallèles coplanaires | (*TS*) et (*RN*) sont non coplanaires | (*QR*) et (*RO*) sont sécantes perpendiculaires coplanaires |

### 39 Représenter correctement

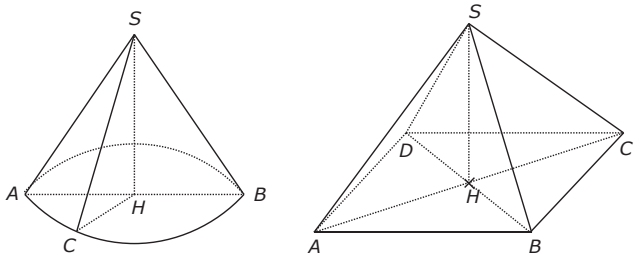
**1.** Figure 1 :
• les côtés du triangle équilatéral de base sont représentés avec la même longueur ;
• le point *H* n'est pas situé au centre du triangle de base.

Figure 2 :
• les côtés du carré de base sont représentés avec la même longueur ;
• le point *H* n'est pas situé au centre du carré de base.

**2.**




### 40 Observer et décrire




Cône de révolution — Pyramide régulière à base carrée

**1. a.** Hauteur du cône : [*SH*] ;
hauteur de la pyramide : [*SH*].

**b.** Ces hauteurs passent par le centre *H* du cône et de la pyramide, puisqu'il s'agit d'un cône de révolution et d'une pyramide régulière.

**2.** Le point *H* n'appartient pas au plan (*SAC*) dans le cas du cône ; par contre, le point *H* appartient au plan (*SAC*) dans le cas de la pyramide.

**3.** Pour le cône de révolution :

**a.** trois génératrices : (*SA*), (*SB*) et (*SC*).

**b.** quatre triangles rectangles :
*SAH* rectangle en *H* ; *SBH* rectangle en *H* ;
*SCH* rectangle en *H* ; *ABC* rectangle en *C*.

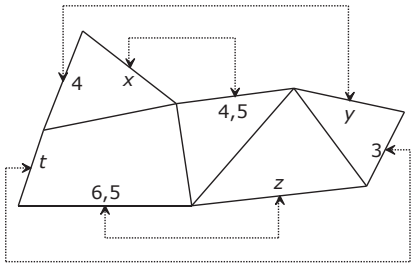
**4.** Pour la pyramide régulière :

**a.** quatre faces latérales : *SAB*, *SBC*, *SCD* et *SDA*.

**b.** six triangles rectangles :
*SAH* rectangle en *H* ; *SBH* rectangle en *H* ;
*SCH* rectangle en *H* ; *SDH* rectangle en *H* ;
*ABH* rectangle en *H* ; *ABC* rectangle en *B*.

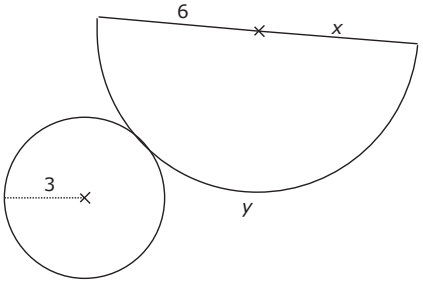
### 41 Repérer les côtés correspondants

**1.** Patron d'une pyramide, dont la base est un quadrilatère :




Les doubles-flèches en pointillés relient les arêtes qui vont coïncider lors de la reconstitution de la pyramide ;
d'où : $x = 4{,}5$ cm ; $y = 4$ cm ; $z = 6{,}5$ cm ; $t = 3$ cm.

**2.** Patron d'un cône de révolution :




On a : $x = 6$ cm ; $y = 2\pi \times 3 = 6\pi$ cm.
(À noter que le secteur circulaire, correspondant à la partie latérale du cône, est un demi-cercle de rayon 6 cm.)

## Exercices d'approfondissement

### 42 Voir dans l'espace

*ABCDEFGH* est un prisme droit, de bases les trapèzes *ABCD* et *EFGH*.

**1.** Le plan (*RST*) est perpendiculaire en R à la droite (*AE*). Dans le prisme droit *ABCDEFGH*, les plans (*ABC*) et (*FGH*) sont aussi perpendiculaires à la droite (*AE*).
Donc le plan (*RST*) est parallèle aux plans (*ABC*) et (*FGH*).

**2.** Triangles rectangles en *R* :
• *ARS*, *ARU* et *ART* ; • *ERS*, *ERU* et *ERT*.
[Les droites (*AR*) et (*ER*), perpendiculaires à (*RST*), sont perpendiculaires à toutes les droites de ces plans passant par *R*.]

**3.** Les droites (*DC*) et (*RS*) sont coplanaires ; en effet :
• (*DC*) // (*AB*) {[*AB*] et [*CD*] bases du trapèze *ABCD*} ;
• (*RS*) // (*AB*) {(dans le plan (*ABE*), ces deux droites sont perpendiculaires à la droite (*AR*)} ;
• (*DC*) et (*RS*), parallèles à la même droite, sont parallèles entre elles, c'est-à-dire coplanaires.

## 43 Reconnaître un patron

**1.** Solide 1 : pavé droit.
Solide 2 : pyramide à base carrée.
Solide 3 : cube.

**2.** Solide 1 : patron B.
Solide 2 : patron A.
Solide 3 : patron C.

## 44 En relation avec Pythagore

**1.** $M$ est le milieu de $[AB]$, donc :

$AM = MB = BF = BC = 3$ cm.

Donc les triangles $DAM$, $MBF$ et $CBF$, rectangles et isocèles respectivement en $A$, $B$ et $C$, ont leurs côtés de l'angle droit de même longueur ; leurs hypoténuses respectives ont aussi même longueur, c'est-à-dire : $DM = MF = CF$.

**2. a.** La droite $(DH)$ est perpendiculaire en $D$ aux droites $(DA)$ et $(DC)$, sécantes dans le plan $(ADC)$ ; donc $(DH)$ est perpendiculaire à $(ADC)$.

**b.** On déduit que $(DH)$ est perpendiculaire à toute droite du plan $(ADC)$, en particulier la droite $(DM)$ ;

donc $DHM$ est un triangle rectangle en $D$.

**3.** D'après la propriété de Pythagore ou sa réciproque :

**a.** $DM^2 = DA^2 + AM^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ ;
$MF^2 = MB^2 + BF^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ ;
$MH^2 = DM^2 + DH^2 = 18 + 3^2 = 27$ ;
$HF^2 = HG^2 + GF^2 = 6^2 + 3^2 = 45$.

Donc : $MH^2 + MF^2 = HF^2$ $(27 + 18 = 45)$ et $HMF$ est un triangle rectangle en $M$.

**b.** $DM^2 = MC^2 = 18$ ; $DC^2 = 36$ ; donc $DMC$ est un triangle rectangle et isocèle en $M$.

## 45 Fabrication de savons

**1.** Le solide obtenu est un cône de révolution ;

• base : le disque de centre $O$, de rayon $OA = 5$ cm ;

• d'axe : la droite $(OS)$ ;

• de génératrice : la droite $(SA)$.

**2. a.** Dans le triangle $OAS$ rectangle en $O$, d'après la propriété de Pythagore on a : $AS^2 = AO^2 + OS^2$ ;

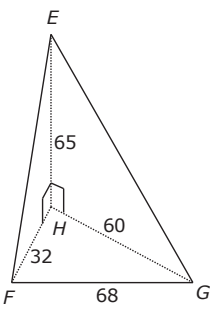
donc : $OS^2 = AS^2 - AO^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ et $OS = 12$ cm.

**b.** $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times OS = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12 \approx 314$ cm$^3$.

**3.** $\frac{4}{\mathscr{V}} = \frac{4}{0{,}314} \approx 12{,}7$ ;

on peut donc fabriquer 12 savons de cette forme.

## 46 Les trois triangles rectangles




**1. a.** Dans le triangle $FGH$ :

$FG^2 = 68^2 = 4\,624$,

$FH^2 + HG^2 = 32^2 + 60^2 = 4\,624$,

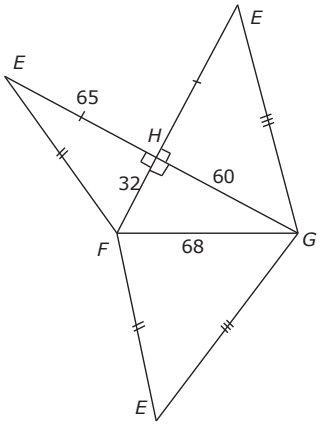
donc $FG^2 = FH^2 + HG^2$ et,
d'après la réciproque
de la propriété de Pythagore,
le triangle $FGH$ est rectangle en $H$.

**b.** $\mathscr{V}(EFGH) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(FGH) \times EH$

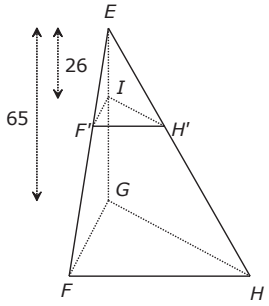
$\mathscr{V}(EFGH) = \frac{1}{3} \times \frac{FH \times HG}{2} \times EH$

$\mathscr{V}(EFGH) = \frac{1}{3} \times \frac{32 \times 60}{2} \times 65 = 20\,800$ mm$^3$.

**c.** Patron de la pyramide $EFGH$ :




**b.** Ci-dessous la section de cette pyramide, par un plan passant par $I$ et parallèle à la base $FGH$.

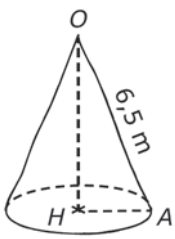



On obtient la pyramide $EF'IH'$, réduction de $EFGH$ et de volume :

$\left(\frac{26}{65}\right)^3 \times \mathscr{V}(EFGH) = 0{,}4^3 \times 20\,800 = 1\,331{,}2$ mm$^3$.

## 47 Volume d'un cône de révolution

**1.** • On schématise la situation à main levée, où $OH$ est la hauteur du cône.




• L'aire de la base est $\mathscr{B} \approx 19{,}625$ m$^2$.

Or $\mathscr{B} = \pi \times HA^2 \approx 3{,}14 \times HA^2$ ;

donc $HA^2 = \frac{19{,}625}{3{,}14} \approx 6{,}25$.

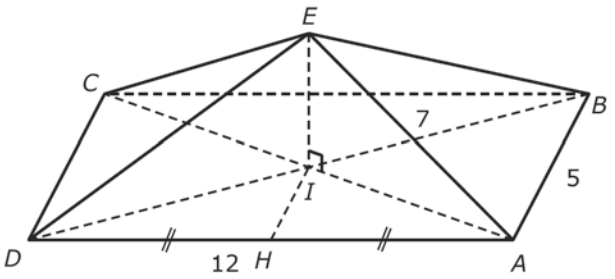
• Dans le triangle $OAH$ rectangle en $H$, d'après la propriété de Pythagore on a : $OA^2 = OH^2 + HA^2$ ;

donc : $OH^2 = OA^2 - HA^2 \approx 6{,}5^2 - 6{,}25 \approx 36$ et $AH \approx 6$ m.

$\mathscr{V} \approx \frac{1}{3} \times 19{,}625 \times 6 \approx 39{,}25$ m$^3$.

### 48 Volume d'une pyramide

**1.** On schématise la situation :




On note *H* le milieu de [*AD*]. Puisque le triangle *AID* est isocèle en *I*, le triangle *AIH* est rectangle en *H*.

D'après la propriété de Pythagore on a :
$AI^2 = AH^2 + HI^2 = 6^2 + 2{,}5^2 = 42{,}25$ ;
donc : $AI = 6{,}5$ cm.

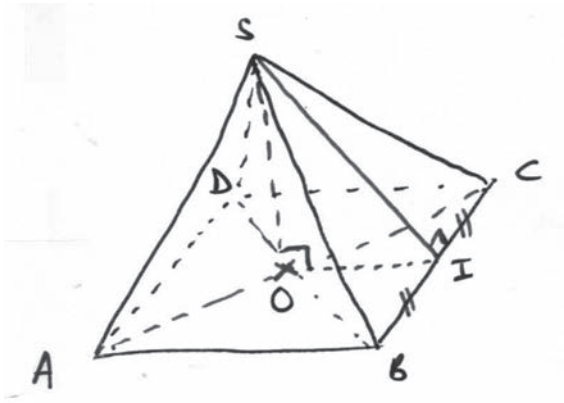
**2.** Dans le triangle *AIE* rectangle en *I*, d'après la propriété de Pythagore on a : $AE^2 = AI^2 + IE^2$ ;
donc : $IE^2 = AE^2 - AI^2 = 7^2 - 6{,}5^2 = 7^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$
et $IE = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

**3.** $\mathscr{V}(ABCDE) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABCD) \times IE$
$\mathscr{V}(ABCDE) = \frac{1}{3} \times 5 \times 12 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 51{,}9 \text{ cm}^3$.

## Activités d'intégration

### 48 Une merveille

Schéma à main levée de la pyramide :




• Dans le triangle *SOI* rectangle en *O*, d'après la propriété de Pythagore :
$SI^2 = SO^2 + OI^2$, donc $a^2 = 280^2 + \left(\frac{440}{2}\right)^2$
d'où $a^2 = 126\,800$ donc $a \approx 356$ coudées royales.

• La demi-largeur est $\frac{440}{2} = 220$ coudées royales.

• Le demi-périmètre de base est :
$4 \times \frac{440}{2} = 880$ coudées royales.

Ainsi, $\frac{\text{apothème}}{\text{demi-largeur}} \approx 356/220 \approx 1{,}618 \approx \Phi$ ;

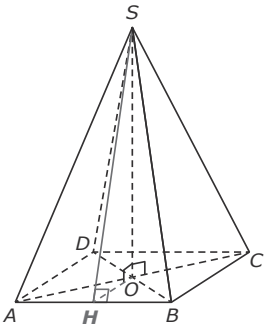
et $\frac{\text{demi-périmètre de base}}{\text{hauteur}} = \frac{880}{280} \approx 3{,}142 \approx \pi$.

### 49 L'étoile

• Volume du cube : $\mathscr{V}_C = 10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$ ;
volume de chacune des pyramides :
$\mathscr{V}_P = \frac{1}{3} \times 10^2 \times 12 = 400 \text{ cm}^3$.

• Volume de l'étoile : $\mathscr{V} = \mathscr{V}_C + 6 \times \mathscr{V}_P = 3\,400 \text{ cm}^3$ ;
donc la masse de l'étoile est : $0{,}8 \times \mathscr{V} = 2\,720$ g.

• Ci-dessous une représentation en perspective cavalière de l'une des pyramides.




• Dans le triangle *SOH* rectangle en *O*, d'après la propriété de Pythagore on a : $SH^2 = SO^2 + OH^2$
$SH^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ ; $SH = 13$ cm.

• $\text{Aire}(SAB) = \frac{AB \times SH}{2} = \frac{10 \times 13}{2} = 65 \text{ cm}^2$.

• Aire apparente de l'étoile :

$\mathscr{A} = 6 \times 4 \times \text{aire}(SAB) = 1\,560 \text{ cm}^2$.

• Pour peindre son étoile, Ali va utiliser :
$\frac{10}{10\,000} \times 1\,560 = 1{,}560$ cL de cette peinture.