4e

NOUVEAU PROGRAMME

Collection de Mathématiques

CARGO

NOUVELLE ÉDITION

LIVRE DU PROFESSEUR

Partie 2

(pages 54 à 104)

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

6 Proportionnalité

Manuel pages 67 à 78

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Reconnaître une situation de proportionnalité [1 p 70]	6, 8, 10	31	33
	Reconnaître un tableau de proportionnalité [2 p 70]	7, 9, 14	31	
2	Quotients égaux et égalité des produits en croix [3 p 70]	11 à 18, 24, 25, 26, 27, 28	29	33
	Compléter un tableau de proportionnalité [4 p 70 et 71]	9, 12, 15, 19, 27	29, 30, 31	38
	Apprendre à compléter des tableaux de proportionnalité [1 p 72]	**1**, **2**, **3**		
3	Proportionnalité et représentation graphique [5 p 71]		32	35, 37
	Apprendre à construire et exploiter un graphique [2 p 73]	**4**, **5**		
3, 4	Vitesse moyenne [6 p 71]	19, 20, 21, 22, 23		36

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir–faire.

Introduction et contrôle des pré-requis

La liste des ingédients

1. Pour un banquet de 35 (= 10 + 25) personnes, prévoir :
- 4,2 (= 1,2 + 3) kg de boeuf ;
- 7 (= 2 + 5) bottes d'épinards ;
- 28 (= 8 + 20) c.a.s. d'huile de palme ;
- 3,5 (= 1 + 2,5) kg de tomates ;
- 210 (= 60 + 150) g de pâte de cacahuète.

Pour un banquet de 80 (= 8 × 10) personnes, prévoir :
- 9,6 (= 8 × 1,2) kg de boeuf ;
- 16 (= 8 × 2) bottes d'épinards ;
- 64 (= 8 × 8) c.a.s. d'huile de palme ;
- 8 (= 8 × 1) kg de tomates ;
- 480 (= 8 × 60) g de pâte de cacahuète.

2. Pour un banquet de 58 (= 2 × 25 + 80 ÷ 10) personnes, prévoir :
- 6,96 (= 2 × 3 + 9,6 ÷ 10) kg de boeuf ;
- 11,6 (= 2 × 5 + 16 ÷ 10) bottes d'épinards ;
- 46,4 (= 2 × 20 + 64 ÷ 10) c.a.s. d'huile de palme ;
- 5,8 (= 2 × 2,5 + 8 ÷ 10) kg de tomates ;
- 348 (= 2 × 150 + 480 ÷ 10) g de pâte de cacahuète.

Activités d'apprentissage

1 Une histoire d'ombre

Prénom	Kouma	Atem	Safi	Djal	Soen	Arbre
Taille (en m)	1,32	1,5	1,62	1,8	1,41	4,2
Longueur de l'ombre (en m)	2,2	2,5	2,7	3	2,35	7

1. $\frac{2,2}{1,32} = \frac{2,5}{1,5} = \frac{2,7}{1,62} = \frac{3}{1,8} = \frac{5}{3}$; donc la longueur des ombres est proportionnelle aux tailles des personnes.

$\frac{5}{3}$ est le coefficient de proportionnalité permettant de passer des tailles des personnes à la longueur des ombres.

2. $\frac{1,32}{2,2} = \frac{1,5}{2,5} = \frac{1,62}{2,7} = \frac{1,8}{3} = \frac{3}{5}$ donc les tailles des personnes sont proportionnelles à la longueur des ombres.

$\frac{3}{5}$ est le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la longueur des ombres aux tailles des personnes.

3. Les deux coefficients de proportionnalité sont inverses.

4. a. Si Soen mesure 1,41 m, alors la longueur de son ombre est de : $1,41 \times \frac{5}{3} = 2,35$ m.

b. Si l'ombre d'un arbre mesure 7 m, alors la hauteur de cet arbre est de : $7 \times \frac{3}{5} = 4,2$ m.

2 Quotients égaux et produits en croix

Partie A : Une situation de la vie quotidienne

1. a. Salaire horaire de Francis : $450 \div 3 = 150$ F CFA; salaire horaire d'André : $750 \div 5 = 150$ F CFA.
Ils ont le même salaire horaire.

b. $\frac{450}{3} = \frac{75}{5}$.

2. a. En travaillant 5 jours, Francis a reçu : $450 \times 5 = 2\,250$ F CFA.
b. En travaillant 3 jours, André a reçu : $750 \times 3 = 2\,250$ F CFA.
c. On en déduit que : $450 \times 5 = 750 \times 3$.
d. On constate que les produits du numérateur d'une fraction par le dénominateur de l'autre sont égaux.

Partie B : Démonstration

1. On obtient une fraction égale à une fraction donnée en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un même nombre relatif non nul ; donc : $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ et $\frac{c}{d} = \frac{b \times c}{b \times d}$.

2. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}$.

3. Or deux fractions égales, qui ont le même dénominateur, ont le même numérateur : $a \times d = b \times c$.

4. Ce que l'on vient de démontrer est appelée « l'égalité des produits en croix » car : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

3 La proportionnalité en graphique

1. a. Les points sont sur une ligne passant par l'origine du repère sur les graphiques ② et ③.
b. Les points appartiennent à une droite sur les graphiques ① et ③.
2. Le tableau $\boxed{A}$ correspond au graphique ② ;
le tableau $\boxed{B}$ correspond au graphique ③ ;
le tableau $\boxed{C}$ correspond au graphique ①.
C'est le tableau $\boxed{B}$ qui traduit une situation de proportionnalité, dont l'un des coefficients de proportionnalité est égal à 2 ;
en effet : $0 \times 2 = 0$, $5 \times 2 = 10$, $10 \times 2 = 20$ et $15 \times 2 = 30$.
3. Pour qu'on reconnaisse dans un graphique une situation de proportionnalité, deux conditions doivent y être remplies :
• les points du graphique doivent appartenir à une droite ;
• cette droite doit passer par l'origine du repère.

4 Le coureur cycliste

1. a. Au bout d'une heure et demi, Joseph s'est arrêté.
b. Il avait alors parcouru 60 km.
c. Vitesse moyenne sur cette distance : $\frac{60}{1,5} = 40$ km/h.

2. a. À la 3e heure après son départ, Joseph est reparti.

b. Vitesse moyenne pour parcourir 60 km, entre la 3e et la 5e heure : $\frac{60}{2} = 30$ km/h.

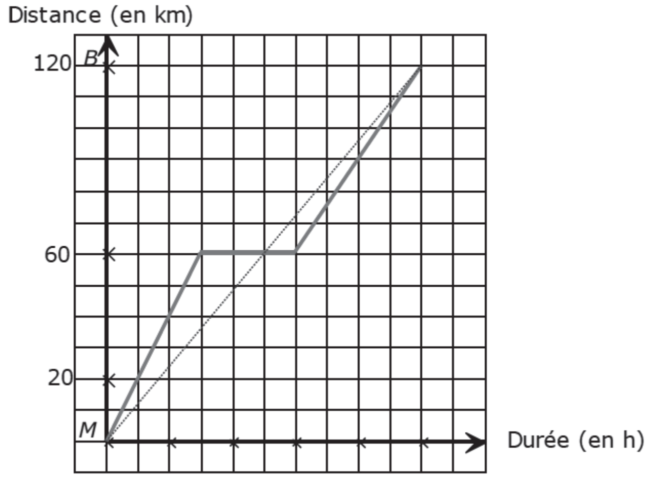
3. a. Distance entre Mbanga et Bafang : 120 km.

b. Temps de parcours mis par Joseph pour aller de Mbanga à Bafang : 5 h.

c. Vitesse moyenne sur la totalité du parcours :

$\frac{120}{5} = 24$ km/h.

4. D'après la question précédente comme d'après le graphique gris clair, sans s'arrêter et à la vitesse moyenne de 24 km/h, Joseph serait arrivé à la même heure.



5. Si $v = \frac{d}{t}$ alors $\frac{v}{1} = \frac{d}{t}$ donc (d'après les produits en croix) : $1 \times d = v \times t$ c'est-à-dire $d = v \times t$ puis $t = \frac{d}{v}$.

Méthodes et savoir-faire

1. Apprendre à compléter des tableaux de proportionnalité

1

Masse de papaye (en kg)	3	4,8	5,6	8,6
Masse de sucre (en kg)	2,25	3,6	4,2	6,45

2 **1.**

Masse (en kg)	0,3	0,4	0,8	2,1
Prix (en F CFA)	600	800	1 600	4 200

2. Prix d'un kilogramme : $600 \div 0{,}3 = 2\,000$ F CFA.

(2 000 est le coefficient de proportionnalité, qui permet de passer de la masse au prix.)

3 Tali

Volume (en cm³)	16	30
Masse (en g)	14,4	27

Azobé

Volume (en cm³)	25	7,5
Masse (en g)	27	8,1

Ayous

Volume (en cm³)	35	125
Masse (en g)	14	50

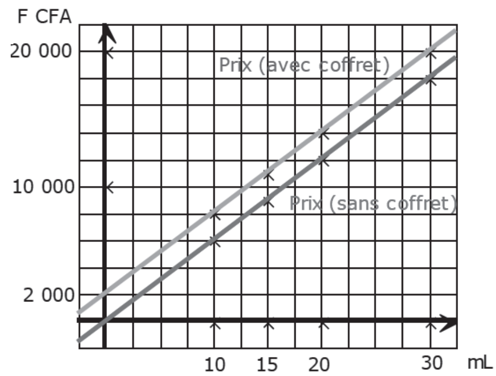
Sapelli

Volume (en cm³)	70	48
Masse (en g)	45,5	31,2

2. Apprendre à construire et exploiter un graphique

4 **1.** Ci-dessous :

- en gris clair le graphique représentant le prix d'un parfum avec coffret ;
- en gris foncé le graphique représentant le prix d'un parfum sans coffret.



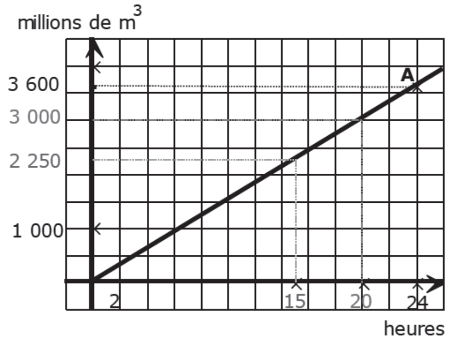
2. Le prix sans coffret (dont la représentation est une droite qui passe par l'origine du repère) est proportionnel à la contenance.

Le prix avec coffret, obtenu en ajoutant 2 000 F CFA (coût du coffret) au prix sans coffret, n'est plus proportionnel à la contenance.

5 **1.** Volume d'eau charriée par le fleuve Congo en une journée : $150 \times 24 = 3\,600$ millions de m³.

2. Ci-après :

- le point *A* correspond au volume (3 600 millions de m³) d'eau charriée en une journée.



• la droite, qui joint le point A à l'origine du repère, représente le débit moyen et montre qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité.

3. Déterminations graphiques :

• volume d'eau charriée en 20 heures :

3 000 millions de m^3 ;

• temps d'écoulement de 2 250 millions de m^3 :

15 heures.

Exercices d'application

Reconnaître et utiliser la proportionnalité

6 **a.** La longueur d'un rouleau de tissu n'est pas proportionnelle au nombre de tours enroulés de ce tissu.

En effet, en tenant compte de l'épaisseur du tissu déjà enroulé, il faut plus de tissu pour faire un tour à la fin de l'enroulement qu'au début.

b. Le nombre de cuillers remplies de café à ras bord doit être (pour obtenir la même qualité) proportionnel au nombre de tasses à servir.

7

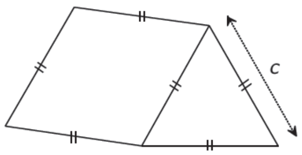
Grandeur A	0,4	2,4	5,2
Grandeur B	2,8	16,8	36,4

Coefficient de proportionnalité qui permet de passer :

a. de A à B : $\dfrac{2,8}{0,4} = \dfrac{16,8}{2,4} = \dfrac{36,4}{5,2} = 7$;

b. de B à A : $\dfrac{0,4}{2,8} = \dfrac{2,4}{16,8} = \dfrac{5,2}{36,4} = \dfrac{1}{7}$.

8



1. a. Le périmètre du losange ($4c$) est proportionnel à c ;

b. le périmètre du triangle ($3c$) est proportionnel à c ;

c. le périmètre de la figure ($5c$) est proportionnel à c.

2. Coefficient de proportionnalité qui permet de passer…

a. du périmètre du losange à celui du triangle : $\dfrac{3}{4}$;

b. du périmètre du losange à celui de toute la figure : $\dfrac{5}{4}$.

9

Grandeur A	2	3	6	9	15	30
Grandeur B	4,2	6,3	12,6	18,9	31,5	63

$\left(\dfrac{12,6}{6}\right.$ = 2,1 est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la grandeur A à la grandeur B.)

Grandeur C	15	60	75	135	205	410
Grandeur D	36	144	180	324	492	984

$\left(\dfrac{180}{75}\right.$ = 2,4 est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la grandeur C à la grandeur D.)

10 Le prix des cahiers est proportionnel à leur nombre.

Douzaines de cahiers	Prix (en F CFA)
20	232 800
1	11 640
1,5	17 460
2	23 280
2,5	29 100

Si le prix de vingt douzaines de cahiers est 232 800 F CFA, alors le prix d'une douzaine est :

$\dfrac{232\,800}{20} = 11\,640$ F CFA.

18 ; 24 et 30 cahiers représentent respectivement 1,5 ; 2 et 2,5 douzaines, donc :

a. le prix de 18 cahiers est 17 460 F CFA ;

b. le prix de 24 cahiers est 23 280 F CFA ;

c. le prix de 30 cahiers est 29 100 F CFA.

11 Couples de quotients égaux : $\dfrac{10}{6} = \dfrac{45}{27}$ et $\dfrac{9}{8} = \dfrac{27}{24}$

$(10 \times 27 = 270 = 6 \times 45)$ et $(9 \times 24 = 216 = 8 \times 27)$.

Couples de quotients différents : $\dfrac{7}{5} \neq \dfrac{10}{7}$ et $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{25}{17}$

$(7 \times 7 = 49 ; 5 \times 10 = 50$ et $3 \times 17 = 51 ; 2 \times 25 = 50)$.

12 **1.** La masse de liège est proportionnelle à son volume.

Volume du liège (en m³)	1,5	5	8	*a*
Masse (en kg)	360	1 200	1 920	7

2. Si a désigne le volume de 7 kg de liège, alors :

$1\,200 \times a = 5 \times 7$

donc $a = \dfrac{5 \times 7}{1\,200} \approx 0{,}002\,916\,66\ \text{m}^3 \approx 3\ \text{dm}^3$.

13 Un téléchargement à débit stable sur Internet est une situation de proportionnalité :

Fichier (en Mo)	15	450
Durée (en s)	30	900

Temps de téléchargement d'un fichier de 450 Mo :

$450 \times \dfrac{30}{15} = 900\ \text{s} = 15\ \text{min}$.

14 **1.** Le prix « place entière » n'est pas proportionnel au prix « demi-place » ; en effet :

$\dfrac{900}{1\,600} = \dfrac{9}{16}$; $\dfrac{1\,500}{2\,500} = \dfrac{3}{5}$; $\dfrac{1\,900}{2\,700} = \dfrac{19}{27}$ et $\dfrac{2\,400}{3\,000} = \dfrac{4}{5}$;

(les quatre fractions sont distinctes deux à deux).

2. Nouveau prix « demi-tarif » pour obtenir un tableau de proportionnalité :

Douala-Eseka	Douala-Makak	Douala Yaoundé
$2\,500 \times \dfrac{9}{16}$	$2\,700 \times \dfrac{9}{16}$	$3\,000 \times \dfrac{9}{16}$
1 405,25 F CFA	1 518,75 F CFA	1687,50 F CFA

Pourcentages

15 **1.** Tenue scolaire pour garçon

Ancien prix (en F CFA)	100	7 500
Nouveau prix (en F CFA)	105	7 875

Soit *x* l'ancien prix (avant l'augmentation de 5 %) ;

on a : $7\,875 = x(1 + 5\ \%) = x \times \dfrac{105}{100}$;

donc : $x = 7\,875 \times \dfrac{100}{105} = 7\,500$ F CFA.

2. Tenue scolaire pour fille

Ancien prix (en F CFA)	100	7 200
Nouveau prix (en F CFA)	92	6 624

Soit *y* l'ancien prix (avant la baisse de 8 %) ;

on a : $6\,624 = y(1 - 8\ \%) = y \times \dfrac{92}{100}$;

donc : $y = 6\,624 \times \dfrac{100}{92} = 7\,200$ F CFA.

16 En passant de 210 F CFA à 250 F CFA, le pourcentage d'augmentation du prix d'un kilogramme de maïs est :

$\dfrac{250 - 210}{210} \times 100 = 19\ \%$.

17 Nombre de filles dans le collège de Marie :

$425 \times 44\ \% = 187$;

Nombre de filles dans le collège de Fua :

$675 \times 56\ \% = 378$.

Pourcentage de filles sur l'ensemble des deux collèges : $\dfrac{187 + 378}{425 + 675} \times 100 \approx 51\ \%$.

18 **1.** Nombre d'élèves favorables au projet en 4ᵉA :

$48 \times 25\ \% = 12$.

2. Pourcentage d'élèves favorables au projet en 4ᵉB :

$\dfrac{21}{56} \times 100 = 37{,}5\ \%$.

3. Pourcentage d'élèves favorables au projet sur les l'ensemble des deux classes :

$\dfrac{12 + 21}{48 + 56} \times 100 = 31{,}7\ \%$.

Le club d'échecs ouvrira.

Durée, distance, vitesse

19 **1.** La colonne grise du tableau de proportionnalité ci-dessous indique que : 1 min = $\dfrac{1}{60}$ h.

2.

Durée (en min)	1	3	10	48
Durée (en fraction d'heure)	$\dfrac{1}{60}$	$\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{4}{5}$

$\times \dfrac{1}{60}$

20 **1.** $1\ \text{h}\ 16\ \text{min} = 1\ \text{h} + \dfrac{16}{60}\ \text{h} = 1\ \text{h} + \dfrac{4}{15}\ \text{h} = \dfrac{19}{15}\ \text{h}$.

2. Vitesse moyenne d'un automobiliste, qui a parcouru 114 km en 1 h 16 min :

$\dfrac{114}{\frac{19}{15}} = 114 \times \dfrac{15}{19} = 6 \times 15 = 90\ \text{km/h}$.

21 **1. a.** $1{,}7\ \text{h} = 1\ \text{h} + \dfrac{7}{10}\ \text{h} = 1\ \text{h} + \dfrac{7}{10} \times 60\ \text{min}$

$= 1\ \text{h}\ 42\ \text{min}$.

b. Durée du parcours de 34 km, effectué par Nayah à la vitesse de 20 km/h : $\dfrac{34}{20} = 1{,}7\ \text{h} = 1\ \text{h}\ 42\ \text{min}$.

2. Durée du parcours de 57,6 km, effectué par Nayah à la vitesse de 18 km/h :

$\dfrac{57{,}6}{18} = 3{,}2\ \text{h} = 3\ \text{h} + \dfrac{2}{10} \times 60\ \text{min} = 3\ \text{h}\ 12\ \text{min}$.

22 **a.** 13 min $= \dfrac{16}{60}$ h ; **b.** 40 min $= \dfrac{2}{3}$ h ;

c. 55 min $= \dfrac{11}{12}$ h ; **d.** 1 h 20 min $= \dfrac{4}{3}$ h ;

e. 2 h 9 min $= \dfrac{43}{20}$ h ; **f.** 3 h 50 min $= \dfrac{23}{6}$ h.

23 On a : 2 h 3 min $= \dfrac{41}{20}$ h.
Vitesse moyenne de Patrick Makau, qui a parcouru 42,195 km en un peu plus de 2 h 3 min :

$$\frac{42{,}195}{\frac{41}{20}} = 42{,}195 \times \frac{41}{20} \approx 20{,}6 \text{ km/h} ;$$

Patrick Makau a dépassé les 20 km/h.

Produits en croix

24 **a.** $\left.\begin{array}{l}10 \times 9 = 90\\ 6 \times 15 = 90\end{array}\right\}$ donc $\dfrac{10}{6} = \dfrac{15}{9}$;

b. $\left.\begin{array}{l}10 \times 6 = 60\\ 15 \times 4 = 90\end{array}\right\}$ donc $\dfrac{10}{15} = \dfrac{4}{6}$;

c. $\left.\begin{array}{l}3 \times 17 = 51\\ 2 \times 25 = 50\end{array}\right\}$ donc $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{25}{17}$.

25 **1.** $15 \times 4 = 60$ et $3 \times 20 = 60$.
2. a. $\dfrac{15}{4} \neq \dfrac{3}{20}$; b. $\dfrac{20}{4} = \dfrac{15}{3}$; c. $\dfrac{15}{3} \neq \dfrac{4}{20}$.

26 **1.** $12 \times 8 = 96$ et $4 \times 24 = 96$.
2. a. $\dfrac{12}{4} = \dfrac{24}{8}$; b. $\dfrac{8}{4} = \dfrac{24}{12}$; b. $\dfrac{4}{8} = \dfrac{12}{24}$.

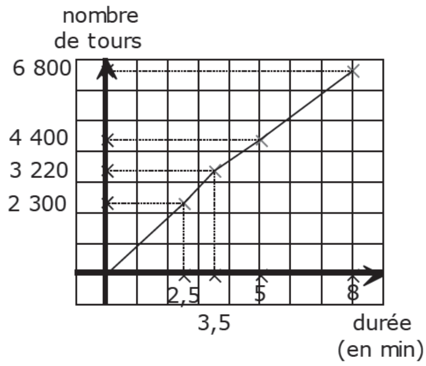
27

Grandeur A	5,25	7	10,5	19,25
Grandeur B	3	4	6	11

28

Durée (en min)	2,5	3,5	5	8
Nombres de tours	2 300	3 220	4 400	6 800

Le tableau ci-dessus donne le nombre de tours du tambour d'une machine à laver le linge, selon la durée d'utilisation.
Ci-dessous une représentation graphique de ce tableau.



Le nombre de tours n'est pas proportionnel à la durée ; en effet, sur le graphique, les quatre points de coordonnées (durée ; nombre de tours) ne sont pas alignés avec l'origine.
Vérification en utilisant l'un « des produits en croix » :

$\left.\begin{array}{l}2{,}5 \times 4\,400 = 11\,000\\ 5 \times 2\,300 = 11\,500\end{array}\right\}$ donc $\dfrac{2\,300}{2{,}5} \neq \dfrac{4\,400}{5}$.

Bien comprendre, mieux rédiger

29 **Faire le bon choix**

Grandeur A	3	7
Grandeur B	12	x

1. Calculs de x
• selon Safi : $\dfrac{12}{3} = 4$ donc $x = 7 \times 4 = 28$;
• selon Linda : $7 = 3 \times \dfrac{7}{3}$ donc $x = 12 \times \dfrac{7}{3} = 28$;
• selon Ketu : $3 \times x = 12 \times 7$ donc $x = \dfrac{12 \times 7}{3} = 28$.
2. C'est la méthode de Safi qui permet de trouver la réponse sans aucune difficulté par un calcul de tête.

3. a.

Grandeur E	18	9
Grandeur F	11	x

en utilisant la méthode de Linda, on a : $6 = 18 \div 2$, donc : $x = 11 \div 2 = 5{,}5$;

b.

Grandeur G	9	6
Grandeur H	6	x

en utilisant la méthode de Ketu, on a : $6 \times 6 = 36$, donc : $x = 36 \div 9 = 4$.

30 **Suffit ou suffit pas ?**

Grandeur A	5	9	12	24
Grandeur B	8	14,4	21,6	43,2

1. $\dfrac{8}{5} = 1{,}6$; $\dfrac{14{,}4}{9} = 1{,}6$; $\dfrac{21{,}6}{12} = 1{,}8$; $\dfrac{43{,}2}{24} = 1{,}8$;
donc il ne s'agit pas d'un tableau de proportionnalité.
2. Pour trouver la bonne réponse, Steve aurait dû :
• effectuer les deux quotients : $\dfrac{12}{9}$ et $\dfrac{21{,}6}{14{,}4}$;
• constater qu'ils sont différents :
$\dfrac{12}{9} \approx 1{,}33$ et $\dfrac{21{,}6}{14{,}4} = 1{,}5$.

31 **Proportionnel ou pas ?**
Le tableau ci-après donne le prix de pots de peinture et l'aire de la surface que l'on peut peindre, en fonction de la contenance de ces pots :

Contenance (en L)	2,5	4	30	20
Prix (en F CFA)	4 500	7 200	34 000	?
Aire (en m²)	22,5	36	270	?

1. Le prix de la peinture n'est pas proportionnel à la contenance des pots ; en effet :

$\frac{4\,500}{2{,}5} = 1\,800$; $\frac{7\,200}{4} = 1\,800$; $\frac{34\,000}{30} \approx 1\,133$.

2. L'aire de la surface que l'on peut peindre est proportionnelle à la contenance des pots ; en effet :

$\frac{22{,}5}{2{,}5} = 9$; $\frac{36}{4} = 9$; $\frac{270}{30} = 9$.

3. a. On ne peut pas connaître le prix de vente d'un pot de 20 litres … puisqu'il n'y a pas proportionnalité entre contenance et prix.

b. Par contre, si la proportionnalité entre contenance et aire de la surface à peindre est conservée, Éric peut évaluer l'aire de la surface qu'il pourra peindre avec 20 litres :

$20 \times 9 = 180$ m^2.

4. Le tableau ci-dessous donne l'aire des plafonds rectangulaires (dont un côté mesure 3,5 m) en fonction de la longueur de l'autre côté :

Autre côté (en m)	3	4,2	5,6	6
Aire (en m²)	10,5	14,7	19,6	21

L'aire de la surface à peindre est proportionnelle à la longueur des côtés, le coefficient de proportionnalité permettant de passer de cette longueur à cette aire étant la longueur commune à ces plafonds : 3,5 m.

32 Toujours penser à contrôler

1. Le graphique semble traduire une situation de proportionnalité entre les grandeurs A et B.

En effet les trois points semblent alignés avec l'origine du repère.

2. a. Tableau de correspondance entre ces deux grandeurs (obtenu par lecture graphique, sur le papier millimétré) :

Grandeur A	8	16	24
Grandeur B	10	18	26

b. $\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1{,}25$; $\frac{18}{16} = \frac{9}{8} = 1{,}125$; $\frac{26}{24} = \frac{13}{12} \approx 1{,}083\ldots$; donc il n'y a pas de coefficient de proportionnalité entre ces deux grandeurs.

c. La réponse donnée au **1.** n'est pas juste.

Exercices d'approfondissement

33 Composition minéralogique

1. Les 19,2 dm^3 de minéraux secondaires représentent :

(100 – 28 – 53 – 11) % = 8 % du bloc de granite ;

donc le volume total de ce bloc de granite est :

$\frac{19{,}2}{8\,\%} = \frac{19{,}2}{8} \times 100 = 240$ dm^3.

2. 240 dm3 = 0,24 m^3 ; donc la masse de ce bloc de granite est : $2{,}7 \times 0{,}24 = 0{,}648$ tonnes = 648 kg.

34 Les prix ont-ils été stables ?

1. Prix du sac de 50 kg de riz :

a. après l'augmentation de 20 % :

$19\,500 \times 120\,\% = 23\,400$ F CFA ;

b. après la baisse de 20 % :

$23\,400 \times 80\,\% = 18\,720$ F CFA.

2. Finalement le prix a baissé de :

$19\,500 - 18\,720 = 780$ F CFA ;

c'est donc Jolita qui a raison.

35 Jogging

1. À l'aller, Ahmed a parcouru 5 km en $\frac{1}{2}$ h.

sa vitesse moyenne a été de : $\frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$ km/h.

2. Au retour, Ahmed a parcouru 5 km en :

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ h $= \frac{5}{6}$ h ;

sa vitesse moyenne a été de : $\frac{5}{\frac{5}{6}} = 6$ km/h.

3. Moyenne des deux vitesses précédentes : $\frac{10 + 6}{2} = 8$.

4. Vitesse moyenne d'Ahmed sur le trajet aller et retour : $\frac{5 + 5}{\frac{1}{2} + \frac{5}{6}} = 7{,}5$ km/h.

Observation : la moyenne des vitesses est différente de la vitesse moyenne.

36 Vitesse des planètes

1. Orbites de certaines planètes autour du Soleil :

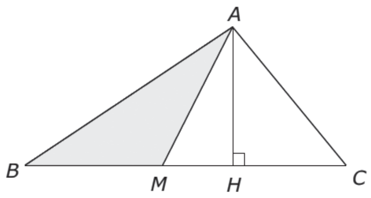
Planète	Longueur de l'orbite (en km)	Période de révolution (en h)
Mercure	364×10^6	2 112
Terre	942×10^6	8 760
Mars	$1\,433 \times 10^6$	16 488
Saturne	$8\,798 \times 10^6$	240 000
Neptune	$28\,274 \times 10^6$	1 440 000

2. a. Vitesse moyenne de chacune de ces planètes :

Planète	Vitesse moyenne (en km/h)
Mercure	$\frac{364}{2\,112} \times 10^6 \approx 172\,348$
Terre	$\frac{942}{8\,760} \times 10^6 \approx 107\,534$
Mars	$\frac{1\,433}{16\,488} \times 10^6 \approx 86\,912$
Saturne	$\frac{8\,798}{240\,000} \times 10^6 \approx 36\,658$
Neptune	$\frac{28\,274}{1\,440\,000} \times 10^6 \approx 19\,635$

b. Conclusion : plus une planète est éloignée du Soleil, moins grande est sa vitesse orbitale.

37 Étude d'une figure

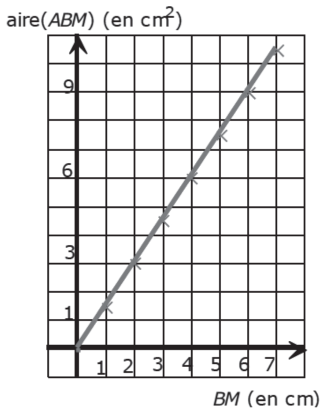


Dans le triangle *ABC*, de hauteur (*AH*) on a :
BC = 7 cm et *AH* = 3 cm ;
M est un point de [*BC*].

1.

BM (en cm)	1	2	3	4	5	6	7
Aire(*ABM*) (en cm²)	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5

2. Ci-contre la traduction du tableau par un graphique représentant l'aire du triangle *ABM* en fonction de la longueur *BM*.



3. a. L'aire de ABM est proportionnelle à BM ; en effet le graphique est une portion de droite, qui passe par l'origine du repère.

b. Ce résultat était prévisible ;

en effet : $\text{aire}(ABM) = \frac{BM \times AH}{2} = \frac{3}{2} BM$;

donc $\frac{3}{2}$ est le coefficient de proportionnalité, qui permet de passer de *BM* à aire(*ABM*).

38 Grille de proportionnalité

3,75	6,25	10	13,75
3	5	8	11
6,3	10,5	16,8	23,1
10,5	17,5	28	38,5

1. Pour compléter les lignes de la grille, proportionnelles entre elles, utiliser l'égalité des produits en croix dans chaque « carré 2 × 2 » où trois des quatre cases sont déjà connues :

étape 1 : $\frac{10{,}5 \times 28}{16{,}8} = 17{,}5$; étape 2 : $\frac{10{,}5 \times 10{,}5}{16{,}8} = 6{,}3$;

étape 3 : $\frac{10{,}5 \times 3}{6{,}3} = 5$; étape 4 : $\frac{5 \times 16{,}8}{10{,}5} = 8$.

etc…

L'égalité de tous les produits en croix permet de dire que les colonnes de cette grille sont aussi proportionnelles entre elles.

Activités d'intégration

39 Élevage de chèvres

Troupeau d'Azah : • $\frac{82}{100} \times 50 = 41$ chèvres du Sahel.

• 50 – 41 = 9 chèvres Djallonké.

Troupeau de Brice : • $\frac{45}{100} \times 40 = 18$ chèvres Djallonké.

• 40 – 18 = 22 chèvres du Sahel.

Ensemble du troupeau :
41 + 22 = 63 chèvres du Sahel.
9 + 18 = 27 chèvres Djallonké.

Production journalière de l'ensemble du troupeau :
• chèvres du Sahel : 63 × 2,3 = 144,9 L.
• chèvres Djallonké : 27 × 1,8 = 48,6 L.
• Ensemble du troupeau : 144,9 + 48,6 = 193,5 L.

40 Livraison de lait

• D'après le graphique, Azah a mis 130 min, soit 2h10. En partant à 7h20 le matin, il est donc rentré à 9h30.

• Il y a 40 km entre le village d'Azah et Maroua. Azah a donc parcouru 80 km (aller-retour) en 2h10.

$2\text{h}10 = 2\text{h} + \frac{1}{6}\text{h} = \frac{13}{6}\text{h}$.

Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet a donc été :

$$v = \frac{80}{\frac{13}{6}} = 80 \times \frac{6}{13} \approx 37 \text{ km/h}.$$

7 Statistiques

Manuel pages 79 à 90

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Étude d'une série statistique [1 p 82]		26, 27	
	Fréquences [2 p 82]	9, 10, 11, 12, 13	31	32, 33, 35
2, 3	Moyenne [3 p 83]	14, 15, 16, 17, 18, 19	28, 29, 30	33, 34
	Apprendre à calculer des fréquences et des moyennes [1 p 84]	**1, 2, 3, 4**		
4	Représentations graphiques [4 p 83]	20, 21, 22, 23, 24, 25		35, 36
	Apprendre à représenter des séries statistiques [2 p 85]	**5, 6, 7, 8**		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir–faire.

Introduction et contrôle des pré-requis

Lire et interpréter un graphique

1. a. Pourcentage de filles illettrées sur la période allant de 1985 à 1994 : 42 %.

b. Pourcentage de garçons illettrés sur la période allant de 1995 à 2004 : 25 %.

2. Les pourcentages diminuent dans le temps. On le voit par la hauteur « décroissante » des bandes qui les représentent.

Activités d'apprentissage

1 Séries statistiques, effectifs et fréquence

1. a. Effectif total (ou nombre de données) : 25.

b. Caractère étudié (ou à quoi s'intéresse-t-on dans cette enquête) : l'âge des nouveaux inscrits dans un club de karaté.

2. a. Nombre d'âges différents : quatre.

b. Valeurs du caractère (ou différents âges relevés) : 9, 11, 12 et 14.

3. Effectif de la valeur 9 (ou nombre de nouveaux inscrits de 9 ans) : 7.

Âge	9	11	12	14	Total
Effectif	7	12	5	1	25
Fréquence	28 %	48 %	20 %	4 %	100 %

4. a. Fréquence de la valeur 9 (ou proportion des nouveaux inscrits de 9 ans par rapport au nombre total des nouveaux inscrits) : $\frac{7}{25}$.

b. $\frac{7}{25} = 0{,}28 = 28\,\%$.

c. Voir tableau ci-dessus.

d. Le mode est 11 ans.

2 Moyenne

1. a. Nombre d'enfants qui ont répondu à la question : 6.

b. Nombre total de fois où ils sont allés à Yaoundé : $3 + 2 + 4 + 1 + 2 + 3 = 15$.

c. Nombre moyen de visites de ce groupe d'enfants à Yaoundé : $\dfrac{15}{6} = 2{,}5$.

2. a.

Nombre de visites	0	1	2	3	4	Total
Effectif (nombre d'enfants)	2	3	7	5	3	20

b. Le calcul d'Akem ($\dfrac{0+1+2+3+4}{5} = 2$) est incorrect car les nombres d'élèves qui sont déjà allés à Yaoundé 0 fois, 1 fois, 2 fois, 3 fois ou 4 fois ne sont pas égaux entre eux.

c. Nombre moyen des visites de ce groupe de 20 enfants : $\dfrac{0\times2+1\times3+2\times7+3\times5+4\times3}{20} = \dfrac{44}{20} = 2{,}2$.

3 Utilisation d'un tableur

1.

	A	B	C	D	E	F
1	Meilleures performances de carrière (en m)					
2	12,51	13,8	14,6	14,95	14,82	15,3
3	15,3	13,95	14,82	14,37	14,88	14,76
4	13,53	14,7	15,39	14,6	14,6	15,05
5						
6	Longueur moyenne de saut (en m)			14,55166667		
7	Mode			14,6		
8						

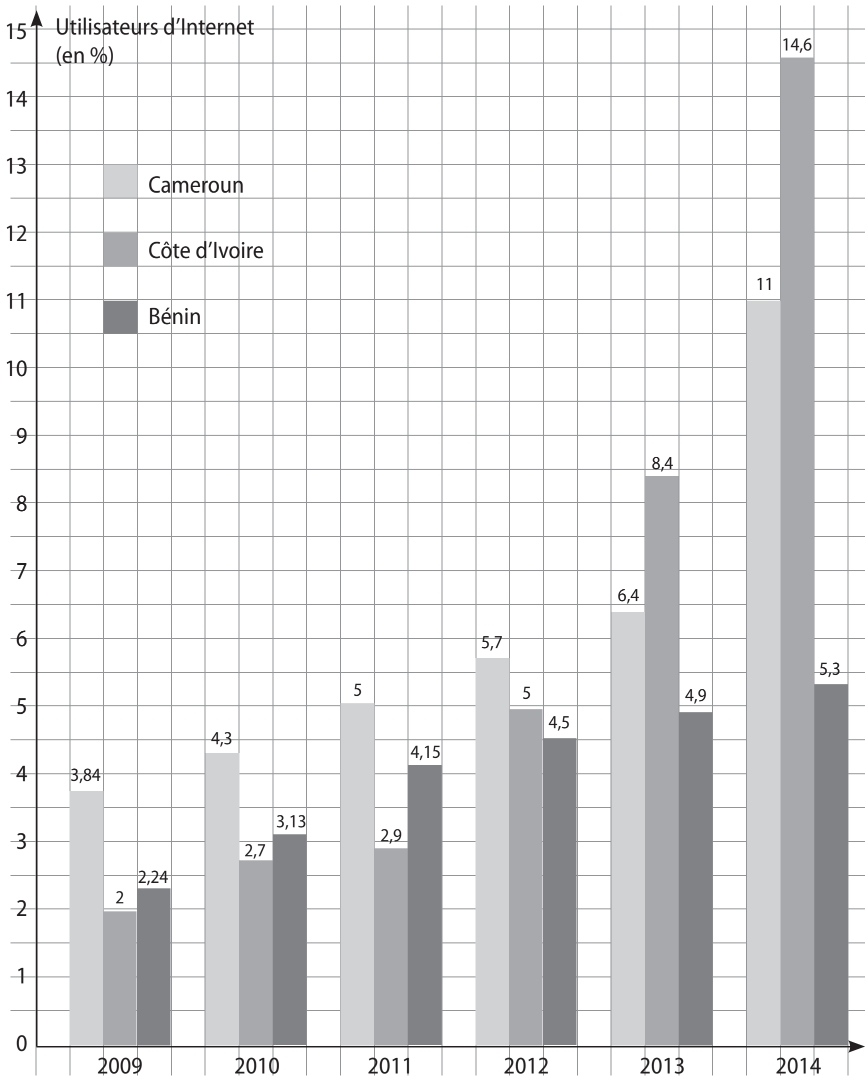
2. • Calcul de la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{12{,}51 + 13{,}8 + \ldots + 15{,}05}{18} \approx 14{,}55 \text{ m}.$$

• La valeur qui a le plus grand effectif est 14,6 m, donc le mode est 14,6.

4 Diagramme en bâtons

1. a. Oui, c'est vrai car :
3,84 < 4,3 < 5 < 5,7 < 6,4 (Cameroun)
2 < 2,7 < 2,9 < 5 < 8,4 (Côte d'Ivoire)
2,24 < 3,13 < 4,15 < 4,5 < 4,9 (Bénin).
b. Pour le Cameroun, c'était en 2010, pour la Côte d'Ivoire en 2012 et pour le Bénin en 2011.
c. En 2012 pour la première fois.
2. a. Pour le Cameroun : 11 cm.
Pour la Côte d'Ivoire : 14,6 cm.
Pour le Bénin : 5,3 cm.
b. Voir ci-contre.



Méthodes et savoir-faire

1. Apprendre à calculer des fréquences et des moyennes

1

Type	Cargo	Pétrolier	Remorqueur	Pêche	Total
Effectif	9	3	6	12	30
Fréquence	30 %	10 %	20 %	40 %	100 %

2

Bonnes réponses	0	1	2	3	4	5	Total
Effectif	2	6	8	15	5	4	40
Fréquence	5 %	15 %	20 %	37,5 %	12,5 %	10 %	100 %

Nombre moyen de bonnes réponses :

$$\frac{0\times2+1\times6+2\times8+3\times15+4\times5+5\times4}{40}=\frac{107}{40}=2{,}675.$$

3 **a.**

Opinion	Mécontent	Peu satisfait	Satisfait	Très satisfait	Total
Effectif	325	550	1 175	450	2 500
Fréquence	13 %	22 %	47 %	18 %	100 %

b. L'effectif le plus grand est 1 175, donc le mode est « satisfait ».

4 **a.**

Age (en années)	13	14	15	16	Total
Effectif	12	110	46	32	200
Fréquence (en %)	6	55	23	16	100

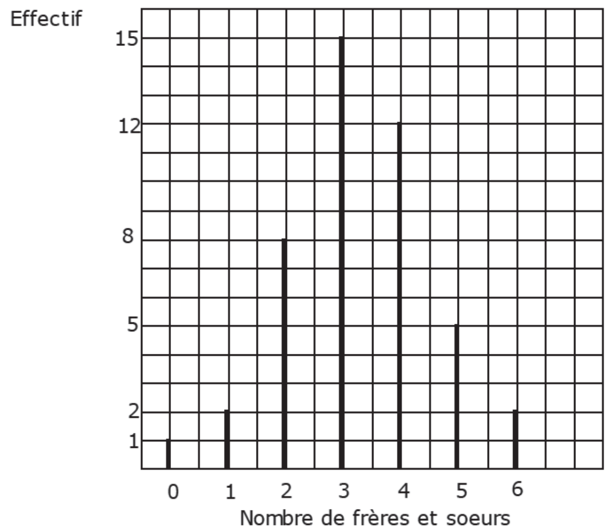
b. Âge moyen des élèves :

$$\frac{13\times12+14\times110+15\times46+16\times32}{200}=\frac{2\,898}{200}\approx14{,}49.$$

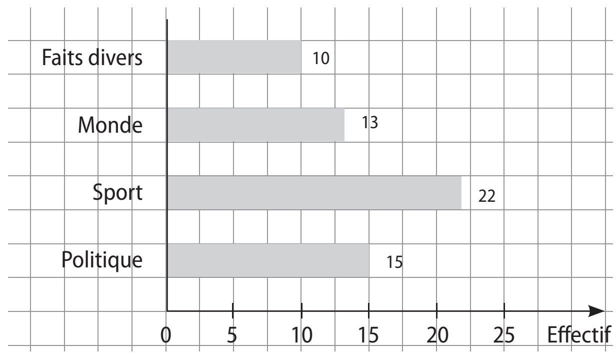
2. Apprendre représenter des séries statistiques

5 Représentation par un diagramme en bâtons de la série statistique ci-dessous, donnant la répartition des 45 élèves d'une classe selon le nombre de leurs frères et soeurs :

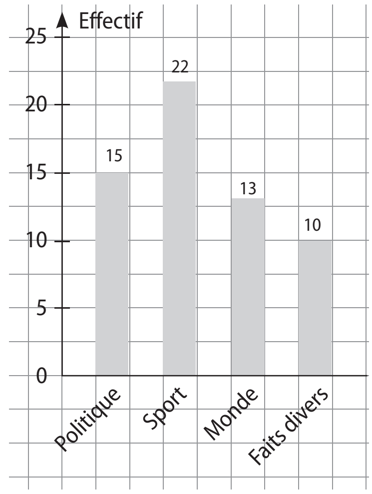
Nombre de frères et soeurs	0	1	2	3	4	5	6
Effectif	1	2	8	15	12	5	2
Hauteur des bâtons (en cm)	0,5	1	4	7,5	6	2,5	1



6 **a.**

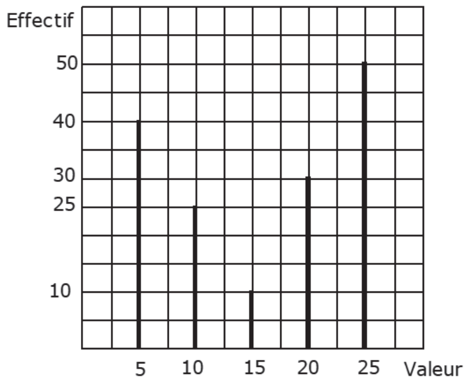


b.

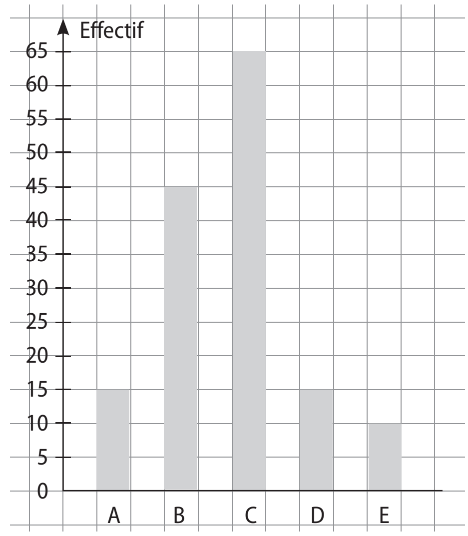


7 Représentation de la série statistique ci-dessous par un diagramme en bâtons :

Valeur	5	10	15	20	25
Effectif	40	25	10	30	50



8



Exercices d'application

Effectifs et fréquences

9

Pointure	36	37	38	39	40	41	42	Total
Effectif	2	5	6	9	8	7	3	40
Fréquence	0,05	0,125	0,15	0,225	0,2	0,175	0,075	1

10 **1.** Population du Gabon en 2003 : 1 517 685.

2.

	Région	Population	Fréquence
1	Estuaire	662 028	44 %
2	Haut-Ogooué	228 471	15 %
3	Moyen-Ogooué	60 990	4 %
4	Ngounié	101 415	7 %
5	Nyanga	50 297	3 %
6	Ogooué-Ivindo	64 163	4 %
7	Ogooué-Lolo	64 534	4 %
8	Ogooué-Maritime	128 774	9 %
9	Woleu-Ntem	157 013	10 %
	Total	1 517 685	100,0 %

11

Moyen de transport	Pieds	Voiture	Vélo	Moto	Total
Effectif	3	11	5	21	40
Fréquence	0,075	0,275	0,125	0,525	1

12

							Total
Effectif	45	35	25	55	60	30	250
Fréquence	18 %	14 %	10 %	22 %	24 %	12 %	100 %

13 **1.** Effectif total : $100 \times \dfrac{100}{25} = 400$.

2.

						Total
Effectif	100	80	120	20	80	400
Fréquence (en %)	25	20	30	5	20	100

Moyennes

14 Nombre moyen de buts marqués :

$$\frac{0\times6+1\times8+2\times12+3\times5+4\times2+5\times1}{6+8+12+5+2+1}=\frac{60}{34}=1{,}8.$$

15 Masse moyenne d'un seau de tomates :

$$\frac{4\times12+4{,}5\times15+4{,}75\times20+5\times18+5{,}25\times6}{12+15+20+18+6}=\frac{332}{71}=4{,}68\text{ kg}.$$

16 **1.** Répartition des 40 élèves d'une classe selon les notes obtenues lors d'une interrogation :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Effectif	1	2	1	2	3	4	5	8	7	4	3	40

2. Note moyenne :

$$\frac{0+2+2+6+12+20+30+56+56+36+30}{1+2+1+2+3+4+5+8+7+4+3}=\frac{250}{40}=6{,}25.$$

17 La valeur a est telle que :

$$\frac{a\times5+8\times4+9{,}5\times1+10\times1+11{,}5\times2+13\times6}{5+4+1+1+2+6}=10$$

$$\frac{5a+152{,}5}{19}=10 \text{ donc } a=\frac{190-152{,}5}{5}=7{,}5.$$

18 Chiffre d'affaire moyen de Jean-Pierre sur 25 jours :

$$\frac{100\,000\times24+150\,000}{25}=102\,000 \text{ F CFA}.$$

19 **1.** Moyenne actuelle d'Ali :

$$\frac{8+12+9+7+11+10+13+6}{8}=\frac{76}{8}=9{,}5.$$

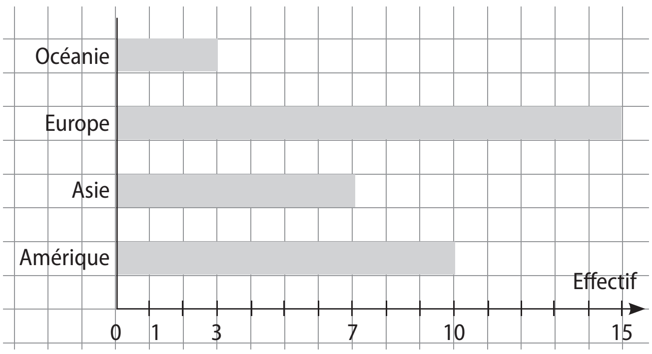
2. La note minimale, que doit obtenir Ali au dernier contrôle pour avoir au moins 10 de moyenne, est telle qu'en l'additionnant à 76 (somme des huit premières notes) on obtienne au moins 90 ; cette note minimale doit donc être égale à 14.

Diagrammes

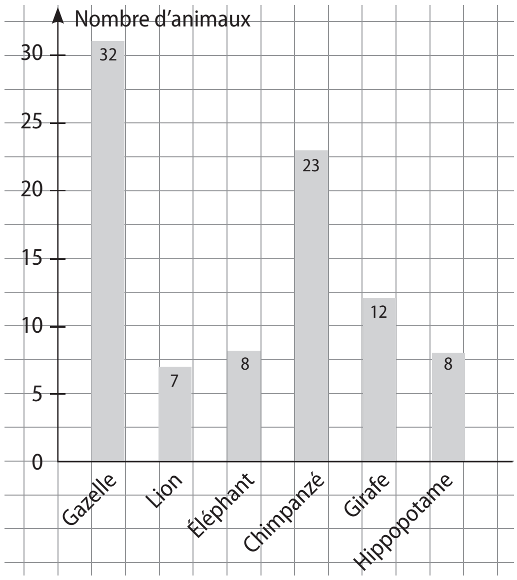
20 **1.**

Continent	Amérique	Asie	Europe	Océanie	Total
Effectif	10	7	15	3	35

2.

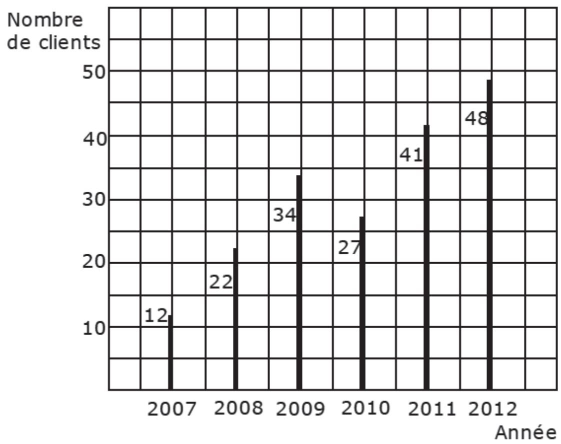


21



22

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Nombre de clients	12	22	34	27	41	48



23 **1.**

Salaire mensuel (en F CFA)	20 000	40 000	60 000	100 000	150 000
Effectif	10	13	5	2	1

2. Salaire moyen : $\dfrac{20\,000\times10+40\,000\times13+60\,000\times5+100\,000\times2+150\,000\times1}{10+13+5+2+1}=\dfrac{1\,370\,000}{31}=44\,194$ F CFA.

24

Source d'information	Internet	Télévision	Radio	Journal	Bouche à oreille	Total
Fréquence (en %)	10	20	30	25	15	100
Effectif	100	200	300	250	150	1 000

25 **1.** Nombre moyen de médecins pour 100 000 habitants au Cameroun :

en 1991 : $0{,}06\times100=6$; en 1996 : $0{,}06\times100=6$.

2. a. Nombre total de médecins au Cameroun :

en 1991 : $\dfrac{11\,500\,000}{1\,000}\times0{,}06=690$; en 1996 : $\dfrac{12\,587\,000}{1\,000}\times0{,}06=755$.

b. Aucune contradiction entre les réponses en **1.** et en **2.** : le nombre de médecins a vraisemblablement augmenté dans la même proportion que la population du Cameroun.

3. En 2012, avec 0,23 médecins pour 1 000 habitants et un nombre total de 4 630 médecin, on peut estimer la population du Cameroun à :

$\frac{4\,630}{0{,}23} \times 1\,000 \approx 20\,130\,435.$

Bien comprendre, mieux rédiger

26 Natures des caractères

1. Le style de musique préféré d'un groupe de personnes est un caractère **qualitatif** ;

la taille des joueurs d'un club de basket-ball est un caractère **quantitatif**.

2. Exemples…

a. de caractère quantitatif : nombre de frères et soeurs pour les élèves d'une classe (exercice 5) ou notes obtenues par un élève lors de contrôles (exercice 18) ;

b. de caractère qualitatif : rubrique préférée par 60 personnes dans un journal (exercice 6) ou continent d'origine d'un groupe de touristes étrangers (exercice 19).

27 Vocabulaire

Les clientes du magasin sont la population étudiée. La couleur est le caractère de cette étude. Les différentes valeurs du caractère sont « rouge », « vert », « bleu » et « jaune ». 7 est l'effectif de la couleur « bleu » ; 5 est l'effectif de la couleur « rouge ». 24 est l'effectif total.

28 Moyenne bien pondérée

1. $\frac{6+18}{2} = 12$ n'est pas la moyenne de Dominique.

Erreur commise dans ce calcul : 6 a été obtenu sept fois,alors que 18 a été obtenu qu'une seule fois.

2. Moyenne de Dominique : $\frac{6\times7+18\times1}{7+1} = \frac{60}{8} = 7{,}5.$

29 Limites de la moyenne

Salaire (en F CFA)	30 000	40 000	500 000
Effectif	10	9	1

1. a. Salaire moyen des employés :

$$\frac{30\,000\times10+40\,000\times9+500\,000\times1}{20} = 58\,000 \text{ F CFA.}$$

b. Ce résultat ne représente pas les salaires de l'entreprise : en effet 19 d'entre eux (sur 20) sont inférieurs à 40 000 F CFA.

2. a. Moyenne des salaires en ne comptant pas le salaire le plus élevé :

$$\frac{30\,000\times10+40\,000\times9}{19} \approx 34\,737 \text{ F CFA.}$$

b. Cette valeur est plus représentative que celle calculée en **1. a.**

30 Interpréter des moyennes

Valeur	2	100	150	350	1 000	6 000
Effectif	3	30	40	35	25	2

1. Moyenne de cette série statistique :

$$\frac{2\times3+100\times30+150\times40+350\times35+1\,000\times25+6\,000\times2}{3+30+40+35+25+2}$$

$$= \frac{58\,256}{135} = 431{,}5.$$

2. a. Moyenne de la même série sans tenir compte des deux valeurs extrêmes (à faibles effectifs : 3 et 2) :

$$\frac{100\times30+150\times40+350\times35+1\,000\times25}{30+40+35+25} = \frac{46\,250}{130}$$

$$\approx 355{,}8.$$

2. b. Les valeurs extrêmes (à faibles effectifs) faussent l'évaluation de la moyenne de cette série.

31 Proportion ou effectif

1. En affirmant que « il y a plus de conserves vendues dans la première épicerie », Jean a comparé les 40 % de conserves vendus dans cette première épicerie avec les 24 % de conserves vendus dans la seconde.

C'est insuffisant pour faire une telle affirmation … comme le montrent les informations complémentaires données dans la question suivante !

2. a. En vendant 200 produits alimentaires dans la journée, le nombre de conserves vendues dans la première épicerie est égal à $200 \times 40\,\% = 80$;

en vendant 350 produits alimentaires dans la journée, le nombre de conserves vendues dans la seconde épicerie est égal à $350 \times 24\,\% = 84$.

b. Finalement l'affirmation de Jean est bien erronée.

Exercices d'approfondissement

32 Vérification des calculs

Effectif	4	8	6	10	?	?
Fréquence	9 %	20 %	15 %	24 %	28 %	96 %

1. Dans le tableau ci-dessus, au moins une erreur a été commise, puisque la somme des fréquences n'est pas égale à 100 %.

2. Si l'effectif total est égal à 40, alors :

• l'effectif entaché est égal à : 40-(4 + 8 + 6 + 10) = 12 ;

• les fréquences exactes sont données dans le tableau suivant :

Effectif	4	8	6	10	12	40
Fréquence	10 %	20 %	15 %	25 %	30 %	100 %

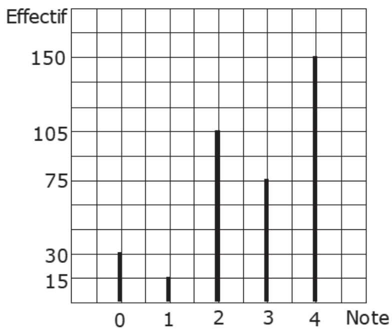
33 Résultats d'un test

1. Tableau complet des résultats d'un test noté de 0 à 4, passé par les 375 élèves d'un collège :

Note	0	1	2	3	4	Total
Effectif	30	15	105	75	150	375
Fréquence (en %)	8	4	28	20	40	100

2. Représentations des effectifs à l'aide d'un diagramme en bâtons :

Note	0	1	2	3	4
Effectif	30	15	105	75	150
Hauteur des bâtons (en cm)	1	0,5	3,5	2,5	5



Note : le **b.** *(diagramme circulaire) n'est pas exigé au programme de 4e.*

3. Note moyenne obtenue au test :

$$\frac{0 \times 8 + 1 \times 4 + 2 \times 28 + 3 \times 20 + 4 \times 40}{100} = 2{,}8.$$

34 Calcul de moyenne avec les fréquences

1. a. Nombre moyen de kilomètres parcourus :

$$m = \frac{n_1 \times 4 + n_2 \times 5 + n_3 \times 6 + n_4 \times 7}{N}$$

$$m = \frac{n_1}{N} \times 4 + \frac{n_2}{N} \times 5 + \frac{n_3}{N} \times 6 + \frac{n_4}{N} \times 7.$$

b. Chaque fraction de l'égalité ci-dessus est égale à la fréquence de la valeur correspondante du caractère.

c. On en déduit que le nombre moyen de kilomètres parcourus est :

$m = 0{,}20 \times 4 + 0{,}40 \times 5 + 0{,}25 \times 6 + 0{,}15 \times 7$

$= 5{,}35$ km.

2. Moyenne des notes obtenues :

$m = 0{,}05 \times 6 + 0{,}15 \times 8 + 0{,}2 \times 10 + 0{,}25 \times 11$

$+ 0{,}2 \times 12 + 0{,}1 \times 15 + 0{,}05 \times 18$

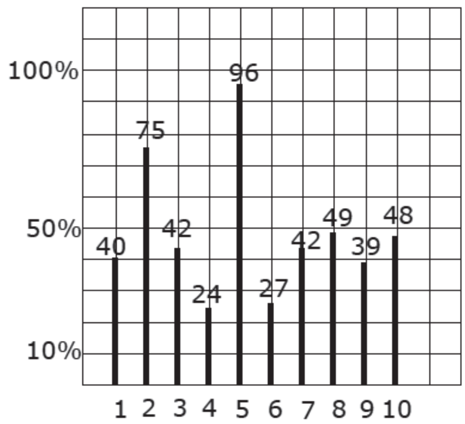
$= 11{,}05.$

35 Population urbaine et rurale

1. Tableau donnant les populations (en milliers d'habitants) dans les zones urbaines et rurales pour les 10 régions du Cameroun :

	Région	Population urbaine (milliers d'hab.)	Population rurale (milliers d'hab.)	Total (milliers d'hab.)	Taux d'urbanisation (en %)
1	Adamaoua	407	609	1 016	40 %
2	Centre	2 639	887	3 526	75 %
3	Est	334	468	802	42 %
4	Extrême-Nord	839	2 641	3 480	24 %
5	Littoral	2 755	111	2 866	96 %
6	Nord	558	1 492	2 050	27 %
7	Nord-Ouest	760	1 044	1 804	42 %
8	Ouest	868	917	1 785	49 %
9	Sud	269	423	692	39 %
10	Sud-Ouest	662	722	1 384	48 %
	Cameroun	10 091	9 314	19 405	52 %

2. Représentation du taux d'urbanisation par un diagramme en bâtons :



36 Comparaison de diagrammes

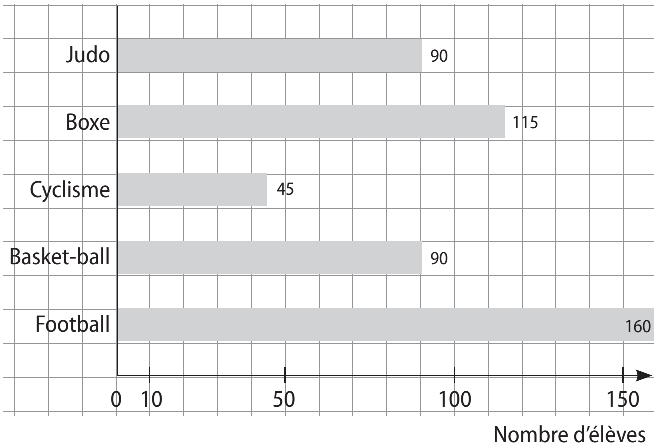
1. a. Le sport préféré des élèves est le football.

b. $32 + 18 = 50$ et $9 + 23 + 18 = 50$.

Donc les élèves aiment autant les sports collectifs que les sports individuels.

c. $32 < 23 + 18$ donc le football n'est pas préféré aux sports de combat.

2.



Activités d'intégration

37 Production d'électricité

• Par exemple, pour le pétrole.

Année	2010	2011	2012	2013	2014
Production (en GWh)	1 163	1 187	1 242	1 259	886

Ainsi, la moyenne est :

$$\overline{x}_P = \frac{1\,163 + 1\,187 + 1\,242 + 1\,259 + 886}{5}$$

$\overline{x}_P = 1147{,}4$ GWh.

• Pour le gaz naturel, la moyenne est :

$$\overline{x}_G = \frac{417 + 298 + 358 + 617 + 896}{5}$$

$\overline{x}_G = 517{,}2$ GWh.

• Pour l'énergie hydraulique, la moyenne est :

$$\overline{x}_E = \frac{4\,260 + 4\,397 + 4\,231 + 4\,231 + 5\,068}{5}$$

$\overline{x}_E = 4\,437{,}4$ GWh.

• Pour la biomasse, la moyenne est :

$$\overline{x}_B = \frac{59 + 61 + 64 + 68 + 72}{5}$$

$\overline{x}_B = 62{,}2$ GWh.

• Pour ces quatre sources d'énergie, la moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{5\,899 + 5\,943 + 5\,895 + 6\,175 + 6\,922}{5}$$

$\overline{x} = 6\,166{,}8$ GWh.

38 Bien s'implanter

Nom de la ville	A	B	C	D	E
Nombre de commerçants interrogés	45	25	12	20	32
Nombre de commerçants intéressés	18	16	9	7	20
Pourcentage des commerçants intéressés	40 %	64 %	75 %	35 %	63 %

Les villes que, selon les deux critères retenus, M. Tadjon va finalement retenir sont : B et E.

Distance aller/retour (en km)	A	B	C	D
E	20	24	18	16
D	20	22	18	
C	30	14		
B	24			

En tenant compte que tout déplacement entre deux villes est constitué d'un aller et d'un retour, distance moyenne quotidienne à parcourir :

• en retenant la ville B :

$$\frac{24 \times 2 + 14 \times 3 + 22 \times 5}{6} = \frac{200}{6} \approx 34 \text{ km.}$$

• en retenant la ville E :

$$\frac{20 \times 2 + 18 \times 3 + 16 \times 5}{6} = \frac{200}{6} \approx 29 \text{ km.}$$

M. Tadjon doit donc retenir la ville E.

8 Distances

Manuel pages 91 à 98

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Distance d'un point à une droite [1 p 93]	6, 7, 8, 9, 10, 11	18, 9, 20, 21, 22, 23	24, 25, 29
	Apprendre à calculer la distance d'un point à une droite [p 94]	**1**, **2**, **3**, **4**, **5**		
	Distance entre deux droites parallèles [2 p 93]			
2, 3	Bissectrice et égalité de distances [3 p 93]	12, 13, 14, 15, 16, 17	19, 21, 22, 23	26, 27, 28, 29, 30

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Introduction et contrôle des pré-requis

Aller à la plage

1. a. $d_R = 60 \times 5{,}5 = 330$. Rose doit parcourir 330 km. **b.** $d_I = 50 \times 6{,}5 = 325$. Irène doit parcourir 325 km.

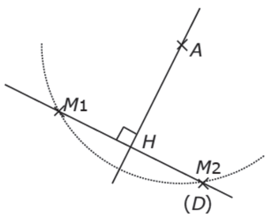
2. a. Sur la carte, entre le village de Rose et la plage la plus proche, on mesure environ 2,3 cm, ce qui représente environ 354 km.

b. Sur la carte, entre le village d'Irène et la plage la plus proche, on mesure environ 1,75 cm, ce qui représente environ 270 km.

Activités d'apprentissage

1 Distance d'un point à une droite

Observation

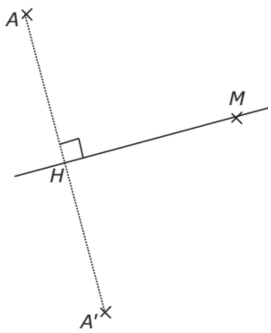


1. Le cercle de centre A, passant par M_1, recoupe la droite (D) en un deuxième point M_2 tel que $AM_2 = AM_1$.

2. H, point d'intersection de (D) et de la droite qui passe par A et est perpendiculaire à (D), semble être plus proche de A que tous les autres points de (D).

Démonstration

1.



2. a. Les points A, H et A' sont alignés sur la droite passant par A et perpendiculaire à (D), donc $AA' = AH + HA'$; A' et H sont les symétriques respectifs de A et H par rapport à (D), donc le segment [$A'H$] est le symétrique du segment [AH] par rapport à (D), donc : $AH = HA'$; d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$AA' \leqslant AM + MA'$; A' et M sont les symétriques respectifs de A et M par rapport à (D), donc le segment [$A'M$] est le symétrique du segment [AM] par rapport à (D), donc : $AM = MA'$; finalement :

$AA' = AH + HA' = 2AH$, $AM + MA' = 2AM$ et $2AH \leqslant 2AM$.

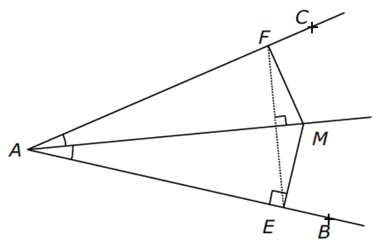
b. Lorsgue M appartient à (D) et est distinct de H, les points A, M et A' ne sont pas alignés ; d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$AA' < AM + MA'$, $2AH < 2AM$ et $AH < AM$.

Propriété *Si H est le pied de la perpendiculaire à la droite (D) passant par A, alors ce point H est le point de la droite (D) le plus proche de A.*

2 De la bissectrice à l'équidistance [propriété directe]

1.



2. a. L'axe de symétrie de l'angle $\widehat{BAC}$ est la bissectrice (AM) de cet angle.

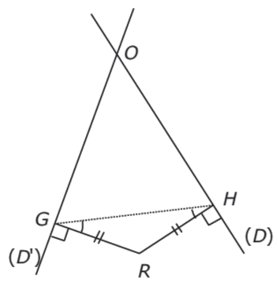
b. Le point E appartient à la droite (AB) donc le point F, symétrique de E par rapport à (AM), appartient à la droite (AC) symétrique de (AB) par rapport à (AM).

c. Deux angles symétriques par rapport à une droite ont la même mesure ; (AB) et (AC) sont symétriques par rapport à (AM), (ME) et (MF) sont symétriques par rapport à (AM) ; comme (ME) $\perp$ (AB) alors (MF) $\perp$ (AC) ;

Deux segments symétriques par rapport à une droite ont la même longueur ; E et F sont symétriques par rapport à (AM), $M \in (AM)$ donc M est son propre symétrique par rapport à (AM) et $ME = MF$.

Propriété *Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors ce point est à égale distance des supports des côtés de cet angle.*

3 De l'équidistance à la bissectrice [propriété réciproque]



Dans la figure ci-contre, le point R est situé à égale distance des droites (D) et (D') ; c'est-à-dire, puisque (RH) $\perp$ (D) et (RG) $\perp$ (D'), $RH = RG$.

1. a. Le triangle RHG est isocèle en R, donc les angles $\widehat{RHG}$ et $\widehat{RGH}$ ont la même mesure.

b. Mes $\widehat{OHG} = 90 -$ mes $\widehat{RHG}$; mes $\widehat{OGH} = 90 -$ mes $\widehat{RGH}$; donc : mes $\widehat{OHG} =$ mes $\widehat{OGH}$.

c. Finalement le triangle OHG est isocèle en O.

3. a. D'après ce qui précède, $RH = RG$ et $OH = OG$; donc la droite (OR) est la médiatrice de [GH].

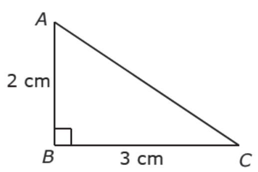
b. Dans le triangle OHG, isocèle en O, la médiatrice de la base [GH] est aussi la bissectrice de l'angle principal $\widehat{GOH}$.

Propriété *Si un point est à égale distance des supports des côtés d'un angle, alors ce point appartient à la bissectrice de cet angle.*

Méthodes et savoir-faire

Apprendre à calculer la distance d'un point à une droite

1 **1.**



2. La distance du point A à la droite (BC) est : $AB = 2$ cm.

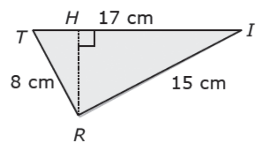
3. La distance du point C à la droite (AB) est : $BC = 3$ cm.

2 **1.** La distance du point A à la droite (BC) est : $AB = 4$ cm.
2. Si le périmètre de ce rectangle est égal à 20 cm, alors : $2 \times 4 + 2 \times AD = 20$ cm ;

donc : $AD = \dfrac{20 - 2 \times 4}{2} = 6$ cm.

a. La distance du point D à la droite (AB) est : $DA = 6$ cm.
b. La distance du point C à la droite (AB) est : $CB = 6$ cm.

3



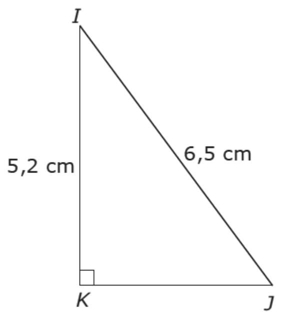
1. TIR est un triangle rectangle en R car :
$TI^2 = 17^2 = 289$,
$RT^2 + RI^2 = 8^2 + 15^2 = 289$.

2. La distance du point I à la droite (TR) est : $IR = 15$ cm.

3. La distance du point R à la droite (TI) est égale à la hauteur issue du sommet de l'angle droit : RH ;
or $RT \times RI = TI \times RH$,

donc $RH = \dfrac{RT \times RI}{TI} = \dfrac{15 \times 8}{15} \approx 7{,}1$ cm.

4 **1.**



2. La distance du point I à la droite (JK) est :
$IK = 52$ mm.

3. La distance du point J à la droite (IK) est égale à la longueur du côté [JK] de l'angle droit ; or, d'après la propriété de Pythagore dans le triangle IJK rectangle en K, on a :

$JK^2 = IJ^2 - IK^2 = 6{,}5^2 - 5{,}2^2 = 42{,}25 - 27{,}04 = 15{,}21.$

Donc : $JK = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9$ cm.

5 **1.** ABC est un triangle rectangle en A car :
$BC^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$;
$AC^2 + AB^2 = 1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25.$

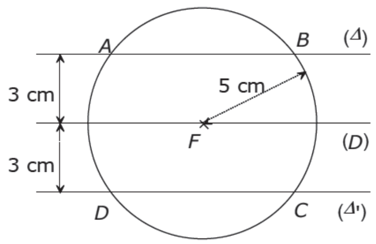
2. a. Aire de ABC : $\dfrac{AB \times AC}{2} = 1{,}5\ \text{cm}^2$.
b. L'aire de ABC est aussi : $\dfrac{AH \times BC}{2}$;
on en déduit que : $AH = \dfrac{2 \times 1{,}5}{2{,}5} = = 1{,}2$ cm.

3. Distance du point C à la droite (AB) : $CA = 2$ cm ;
distance du point B à la droite (AC) : $BA = 1{,}5$ cm ;
distance du point A à la droite (BC) : $AH = 1{,}2$ cm.

Exercices d'application

Distance d'un point à une droite

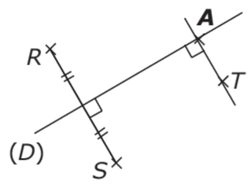
6 **1.**



Les points situés à 3 cm de la droite (D) sont les points des droites (Δ) et (Δ'), parallèles à (D) et telles que la distance de chacune d'elles à (D) soit égale à 3 cm.

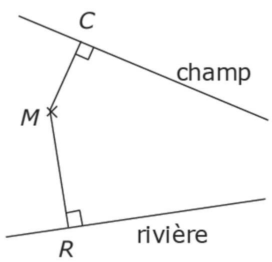
2. Les 4 points situés à 3 cm de (D) et à 5 cm de F sont les points d'intersection de (Δ) et (Δ') avec le cercle de centre F et de rayon 5 cm.

7 **1.**



2. Le point A à égale distance de R et de S, le plus près possible de T, est le pied de la perpendiculaire à la médiatrice (D) du segment [RS] passant par T.

8

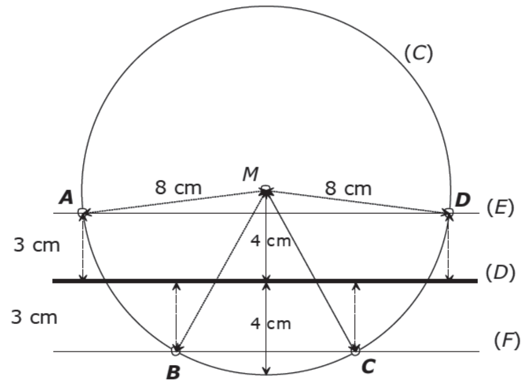


M désignant la maison, le chemin le plus court allant de la limite du champ au bord de la rivière, en passant par la maison, est CM suivi de MR, où :

• C est le pied de la perpendiculaire à la limite du champ passant par M ;

• R est le pied de la perpendiculaire à la limite de la rivière passant par M.

9



Dans la figure ci-dessus :

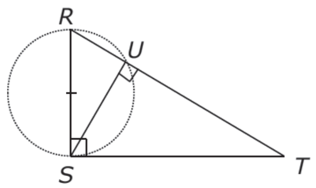
• le point M est à 4 cm de la droite (D) ;

• les droites (E) et (F) sont parallèles à (D) ; la distance entre (D) et (E) est égale à 3 cm, ainsi que la distance entre (D) et (F) ; ces deux droites constituent l'ensemble de tous les points situés à 3 cm de (D) ;

• (C) est le cercle de centre M et de rayon 8 cm ; ce cercle est l'ensemble de tous les points situés à 8 cm de M.

Finalement les points A, B, C et D, intersection des droites (E) et (F) avec le cercle (C), sont les quatre points situés à 8 cm du point M et à 3 cm de la droite (D).

10 **1.**

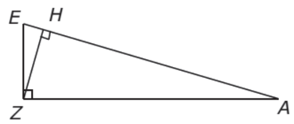


2. a. Le point U appartient au cercle de diamètre $[RS]$, donc le triangle RUS est rectangle en U, c'est-à-dire $(SU) \perp (RT)$.

b. La distance du point S à la droite (RT) est SU.

3. L'hypoténuse d'un triangle rectangle étant le plus long de ses côtés, on a : $SU < RS < RT$.

11



AZE est un triangle rectangle en Z tel que : $AZ = 24$ cm.

1. La distance de A à la droite (EZ) est : $AZ = 24$ cm.

2. Aire de $AZE = \dfrac{ZE \times AZ}{2}$, donc $\dfrac{ZE \times 24}{2} = 84\text{ cm}^2$;

la distance de E à la droite (AZ) est :

$ZE = \dfrac{84 \times 2}{2} = 7$ cm.

3. $AE^2 = ZA^2 + ZE^2 = 24^2 + 7^2 = 625$,

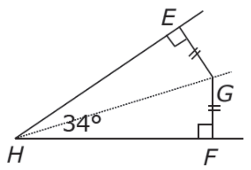
donc : $AE = \sqrt{625} = 25$ cm ;

de plus $ZH \times AE = ZA \times ZE$,

donc : $ZH = \dfrac{ZA \times ZE}{AE} = \dfrac{24 \times 7}{25} = 6{,}72$ cm.

Bissectrice et équidistance

12

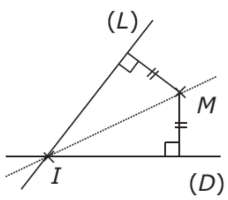


Le point G étant équidistant des côtés de l'angle en H, la droite (HG) est bissectrice de cet angle ;

donc : mes $\widehat{EHG} = 17°$,

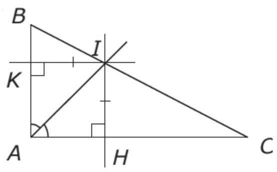
mes $\widehat{EGH} = 180 - 90 - 17 = 73°$.

13



La droite (L), symétrique de la droite (D) par rapport à la droite (IM), passe par I et est telle que M soit à égale distance de (D) et (L).

14 **1.**



a. ABC est un triangle rectangle en A.

b. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en I.

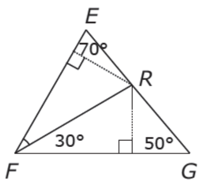
c. La parallèle à (AB), passant par I, coupe (AC) en H.

d. La parallèle à (AC), passant par I, coupe (AB) en K.

2. a. Le quadrilatère $AHIK$, qui a 3 angles droits, est un rectangle.

b. I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc $IK = IH$; le rectangle $AHIK$, qui a deux côtés consécutifs de même longueur, est un carré.

15

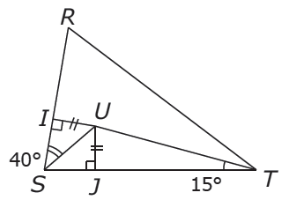


1. Mes $\widehat{EFG} = 180 - 50 - 70 = 60°$;

mes $\widehat{EFR} = 60 - 30 = 30°$.

2. Le point R, qui appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{EFG}$, est à égale distance des droites (FE) et (FG).

16



1. Le point U étant équidistant des côtés de l'angle $\widehat{RST}$, la droite (SU) est bissectrice de cet angle ; donc :

mes $\widehat{USJ} =$ mes $\widehat{USI} = 40°$.

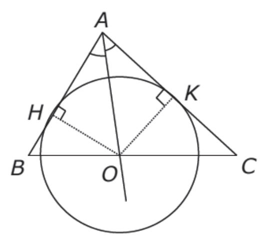
2. Mes $\widehat{IUS} = 180 - 90 - 40 = 50°$,

mes $\widehat{SUJ} = 180 - 90 - 40 = 50°$,

mes $\widehat{JUT} = 180 - 90 - 15 = 75°$;

or $50 + 50 + 75 = 175°$; donc les points T, U et I ne sont pas alignés.

17 **1.**

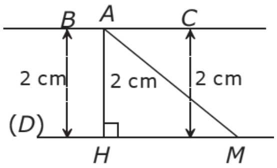


2. Tout cercle tangent aux droites (AB) et (AC) est centré sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Celui centré sur le segment $[BC]$ a pour centre le point d'intersection O de cette bissectrice avec $[BC]$; il passe par les pieds H et K des perpendiculaires respectives aux droites (AB) et (AC) passant par O.

Bien comprendre, mieux rédiger

18 Distance d'un point à une droite



1. a. $AH < AM$.

b. AH est la distance du point A à la droite (D).

2. Si B et C sont deux autres points situés du même côté que A par rapport à (D), à 2 cm de (D), alors $(BC)//(HM)$ [et $A \in (BC)$].

19 Ne pas confondre

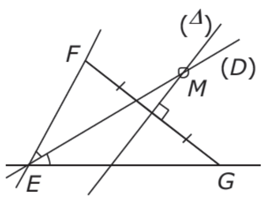
1. ① La droite rouge est la médiatrice du segment $[AB]$; ② La demi-droite rouge est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

2. ① D'après le codage, la droite rouge est la médiatrice de $[AB]$, or le point M appartient à cette droite, donc il est à égale distance des points A et B. Ainsi, $AM = BM$.

② D'après le codage, la demi-droite rouge est la bissectrice de $\widehat{AOB}$, or le point M appartient à cette demi-droite, donc il est à égale distance des droites (OA) et (OB). Ainsi $AM = BM$.

20 À propos d'équidistance

1.



2. a. Les points équidistants des droites (EF) et (EG) sont sur la bissectrice (D) de l'angle en E.

b. Les points équidistants des points F et G sont sur la médiatrice (Δ) du segment $[FG]$.

3. Lorsque EFG n'est pas isocèle en E, (D) et (Δ) sont sécantes en un point M, qui est à la fois équidistant des droites (EF) et (EG) et équidistant des points F et G.

21 Le bon mot

1. Si un point appartient à la **médiatrice** d'un segment, alors il est à même **distance** des extrémités de ce segment.

2. Si un point appartient à la **bissectrice** d'un angle, alors il est à la même **distance** des côtés de l'angle.

3. La **distance** à une droite (D) d'un point A qui n'appartient pas à cette droite (D est AH avec H le point de (D) tel que (AH) soit **perpendiculaire** à (D).

4. Si un point A est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la **bissectrice** de cet angle.

5. Si un point est situé à égale **distance** des extrémités d'un segment, alors il est sur la **médiatrice** de ce segment.

6. La droite **perpendiculaire** à la droite support d'un segment qui passe par le milieu de ce segment est la **médiatrice** de ce segment.

22 Justifier l'alignement de points

1. • D'après le codage, le point A est à égale distance des droites (OG) et (OH), donc il est situé sur la bissectrice de $\widehat{GOH}$.

• D'après le codage, le point B est à égale distance des droites (OG) et (OH), donc il est situé sur la bissectrice de $\widehat{GOH}$.

• Ainsi, les points O, A, B sont situés sur la bissectrice de $\widehat{GOH}$ donc ils sont alignés.

2. mes $\widehat{BOJ} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{IOJ}$

et mes $\widehat{AOG} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{HOG} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{IOJ}$.

Ainsi, mes $\widehat{BOJ}$ = mes $\widehat{AOG}$.

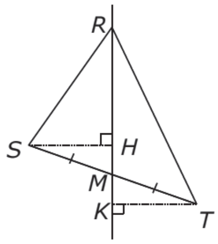
23 Justifier une longueur

D'après les codages, les demi-droites $[MI)$ et $[NI)$ sont des bissectrices des angles $\widehat{BMC}$ et $\widehat{ANB}$. Elles se coupent en I, donc I est à égale distance des droites (MC), (MN) et (AN).

Donc $IA = IB = IC = 3$ cm.

Exercices d'approfondissement

24 Distances comparables



(RM) est la médiane issue de R dans le triangle RST donc :

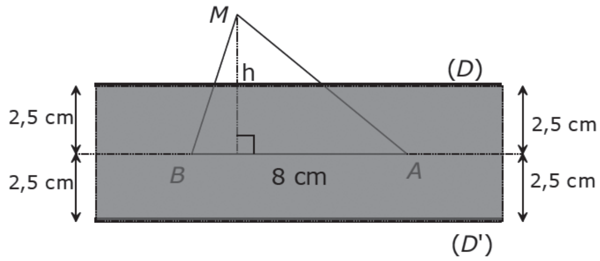
• M est le milieu du segment $[ST]$ et les points S et T sont symétriques par rapport au point M ;

• la droite (RM), qui passe par M, est sa propre symétrique par rapport au point M.

On en déduit que les droites perpendiculaires à (RM), passant respectivement par S et T, sont symétriques par rapport à M, ainsi que H et K, leurs points d'intersection avec (RM) ; finalement les segments $[SH]$ et $[TK]$, symétriques par rapport à M, sont de même longueur, c'est-à-dire que les points S et T sont à la même distance de la droite (RM).

25 Aire limitée

1.



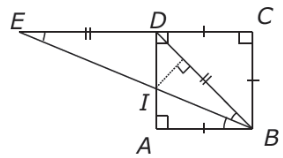
2. Aire $AMB = \dfrac{h \times BC}{2} = 4h$.

3. a. Pour que l'aire de ABM soit égale à 10 cm², il faut que $h = 2{,}5$ cm, c'est-à-dire que M soit placé sur l'une des deux droites (D) et (D') situées à 2,5 cm de la droite (AB).

Pour que l'aire du triangle ABM soit inférieure ou égale à 10 cm², il faut que $h \leqslant 2{,}5$ cm, c'est-à-dire que M soit placé entre les deux droites (D) et (D') [zone grise sur la figure].

26 Sans rapporteur

1.



$ABCD$ est un carré. $DE = DB$.

I est le point d'intersection de (BE) et (AD).

2. a DEB est un triangle isocèle en D, donc :

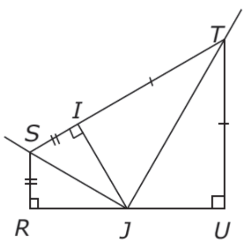
mes $\widehat{DEB}$ = mes $\widehat{EBD}$;

$(ED)//(BA)$, donc les angles alternes-internes $\widehat{DEB}$ et $\widehat{ABE}$ ont la même mesure.

b. On en déduit que $[BE)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABD}$.

3. $I \in (BE)$ donc I est à égale distance des droites (AB) et (BD).

27 Triangle rectangle



Les points R, J et U sont alignés

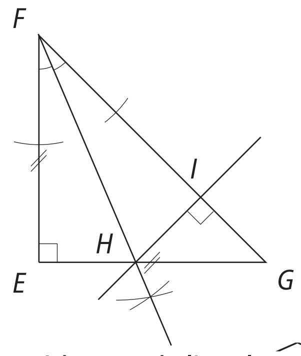
1. a. Le point S est équidistant des droites (JI) et (JR), donc $[JS)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{IJR}$.

b. Le point T est équidistant des droites (JI) et (JU), donc $[JT)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{IJU}$.

2. On en déduit que : mes $\widehat{SJT} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{RJU} = 90°$; c'est-à-dire que SJT est un triangle rectangle en J.

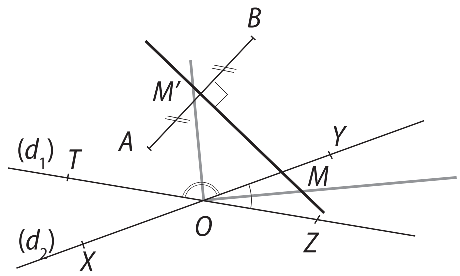
28 Point d'une bissectrice

1.



2. H est sur la médiatrice de l'angle $\widehat{EFG}$, donc $EH = HI$. Or le triangle HIG est rectangle en I, donc $HI < HG$. Ainsi $EH < HG$.

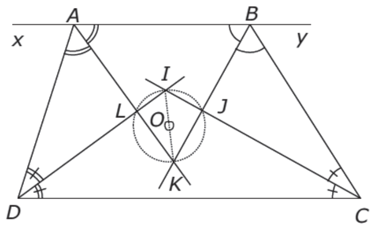
29 Une construction



Remarque : il existe deux points M possibles :

- l'un, noté M, est situé sur la médiatrice de $[AB]$ et sur la bissectrice de $\widehat{YOZ}$.
- l'autre, noté M', est situé sur la médiatrice de $[AB]$ et sur la bissectrice de $\widehat{TOY}$.

30 Trapèze et bissectrices



1. a. $(AB)//(CD)$, donc les angles alternes-internes $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CBy}$ ont la même mesure.

b. On en déduit que mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{BCD} = 180°$.

c. Donc : mes$\widehat{JBC}$ + mes$\widehat{JCB} = \dfrac{1}{2}$(mes$\widehat{ABC}$ + mes$\widehat{BCD}$)
$= 90°$,

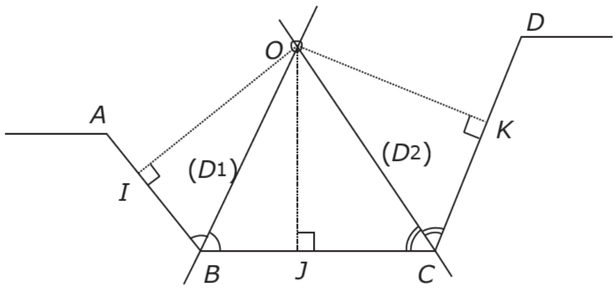
c'est-à-dire : BJC est un triangle rectangle en J.

2. De la même façon, on démontre que ALD est un triangle rectangle en L.

3. Les cercles circonscrits aux triangles KJI et KLI, rectangles en J et L, ont le même diamètre : $[KI]$; donc un même cercle, de centre le milieu O du segment $[KI]$, passe par les quatre points I, J, K et L.

Activités d'intégration

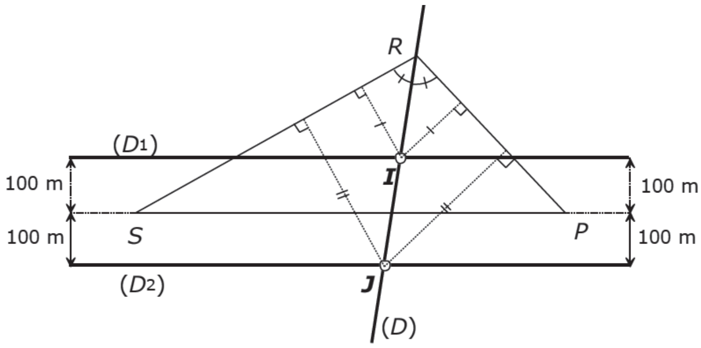
31 Implantation d'un abreuvoir



Pour être à égale distance des droites (*AB*) et (*BC*), l'abreuvoir doit se situer sur la bissectrice (D_1) de l'angle $\widehat{ABC}$.
Pour être à égale distance des droites (*BC*) et (*CD*), l'abreuvoir doit se situer sur la bissectrice (D_2) de l'angle $\widehat{BCD}$.
Finalement l'abreuvoir doit se situer au point d'intersection *O* de (D_1) et (D_2).
Pour être le plus près possible de l'abreuvoir :

- le portail de la clôture [*AB*] doit être installé en *I*, pied de la perpendiculaire à (*AB*) passant par *O* ;
- le portail de la clôture [*BC*] doit être installé en *J*, pied de la perpendiculaire à (*BC*) passant par *O* ;
- le portail de la clôture [*CD*] doit être installé en *K*, pied de la perpendiculaire à (*CD*) passant par *O*.

32 Chasse au trésor



Le trésor se situe à 100 m de la droite (*SP*), qui joint le sapin au puits ; donc le trésor appartient aux droites (D_1) et (D_2), parallèles à (*SP*) et dont la distance à (*SP*) est égale à 100 m.
Le trésor est à la même distance de la droite (*SR*), qui joint le sapin au rocher, que de la droite (*RP*), qui joint le rocher au puits ; donc le trésor appartient à la bissectrice (*D*) de l'angle $\widehat{SRP}$.
Finalement *I* et *J*, points d'intersection des deux droites (D_1) et (D_2) avec la droite (*D*), sont les deux emplacements possibles où Marie peut espérer trouver le trésor.

9 Triangles : milieux et droites particulières

Manuel pages 99 à 110

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2	Droite passant par les milieux de deux côtés [1a p 103]	9, 10, 11, 12, 13	29, 30	35, 36, 41
1, 3	Segment joignant les milieux de deux côtés [1b p 103]		29	
4	Milieu d'un côté et parallèle au support d'un autre côté [2 p 103]	5, 6, 7, 8	30	35, 41
	Apprendre à choisir et utiliser une propriété [p 105]	**1**, **2**, **3**, **4**		
5	Bissectrices et cercle inscrit [3a p 103]	14, 15, 16, 17	31, 32, 33, 34	37, 39
6	Hauteurs et orthocentre [3b p 104]	18, 19, 20, 21	31, 33, 34	40
7	Médianes et centre de gravité [3c p 104]	22, 23, 24	33, 34	38, 40, 41
	Triangle isocèle, triangle équilatéral [4 p 104]	25, 26, 27, 28		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Introduction et contrôle des pré-requis

Point d'équilibre d'un triangle

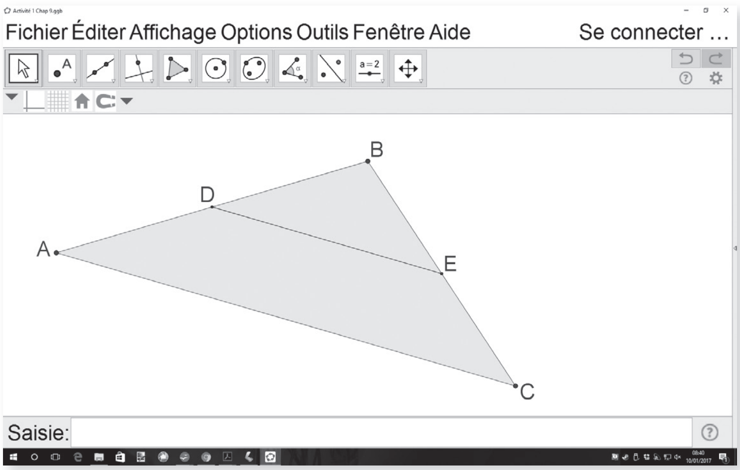
1. La droite passant par un sommet d'un triangle et le milieu du côté opposé est la médiane issue de ce sommet.

2. Le point d'équilibre d'un triangle (découpé dans une plaque cartonnée) est le point d'intersection de ces trois médianes.

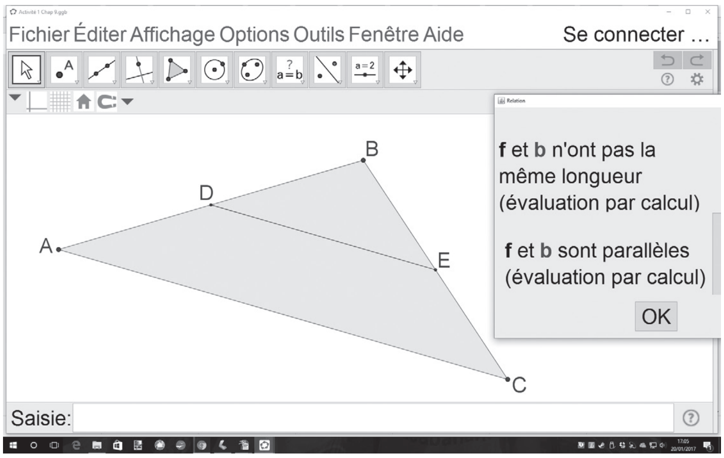
Activités d'apprentissage

1. Droite des milieux : conjectures

1.



2.

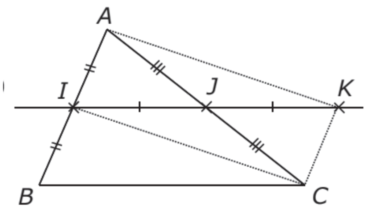


a. On conjecture que les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

b. On conjecture que $DE = \frac{1}{2}AC$.

2. Droite passant par les milieux de deux côtés

1. a.



b. D'après la propriété 3 (diagonales qui se coupent en leur milieu) *IAKC* est un parallélogramme.

c. D'après la propriété 1 (côtés opposés d'un parallélogramme) $AI = CK$ et (AI) // (CK).

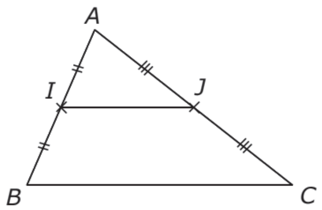
d. Or $BI = AI$ et (BI)//(AI) donc $BI = CK$ et (BI) // (CK) ; d'après la propriété 2 (quadrilatère non croisé dont deux côtés opposés ont même longueur et des supports parallèles) *BIKC* est un parallélogramme.

On en déduit que (IK) //(BC), c'est-à-dire : (IJ) // (BC).

2. *Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au support du troisième côté.*

3. Segment d'extrémités les milieux de deux côtés

1.



2. Conjecture

Il semble que $IJ = \frac{1}{2} BC$.

3. Démonstration

a. Soit *K* le milieu de $[BC]$. D'après la propriété énoncée dans l'activité précédente :

b. *I* milieu de $[AB]$ et *J* milieu de $[AC]$ donc (IJ) // (BC) ;

c. *I* milieu de $[BA]$ et *K* milieu de $[BC]$ donc (IK) // (AC).

d. On en déduit que (IJ) // (KC) et (IK) // (JC), c'est-à-dire que *IJCK* est un parallélogramme.

e. Finalement : $IJ = KC = \frac{1}{2} BC$.

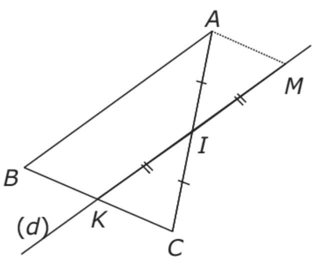
4. Propriété

Si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

4. Milieu d'un côté et parallèle au support d'un autre côté

1. Conjecture

Il semble que *K* est le milieu de $[BC]$.



2. Démonstration

Soit *M* le point symétrique de *K* par rapport à *I*.

a. Le quadrilatère *AMCK* est un parallélogramme ; en effet ses diagonales se coupent en leur milieu.

b. On en déduit que (AM) // (BK) puis que *AMKB*, dont les côtés opposés sont parallèles, est un parallélogramme.

c. Dans le parallélogramme *AMCK*, les côtés opposés ont la même longueur : $AM = KC$; dans le parallélogramme *AMKB*, les côtés opposés ont la même longueur : $AM = BK$.

d. Finalement $KC = BK$ et *K* est le milieu de $[BC]$.

3. Propriété

Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

5. Cercle inscrit dans un triangle

1. a. Le point *I*, qui appartient à la bissectrice de $\widehat{ABC}$, est équidistant des supports des côtés de cet angle ; donc $IP = IN$.

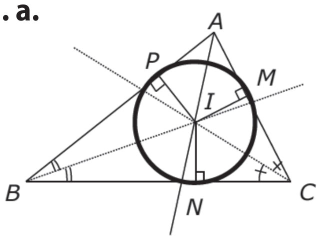
Le point *I*, qui appartient à la bissectrice de $\widehat{ACB}$, est équidistant des supports des côtés de cet angle ; donc $IN = IM$.

b. On en déduit que : $IP = IM$.

c. Le point I, qui est équidistant de (AB) et (AC), appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

d. Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.

2. a.



b. Le cercle, de centre *I* passant par *N*, passe aussi par *M* et *P*, puisque : *IN* = *IM* = *IP*.

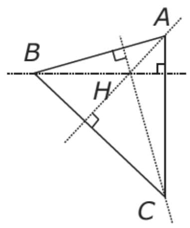
c. *N* appartient à ce cercle, de centre *I* ; la droite (*BC*) est perpendiculaire en *N* à *IN* ; donc (*BC*) est tangente à ce cercle en *N*.

Pour les mêmes raisons, (*AB*) et (*AC*) sont tangentes à ce cercle respectivement en *P* et *M*.

6. Cercle inscrit dans un triangle

Partie A Conjecture

a.

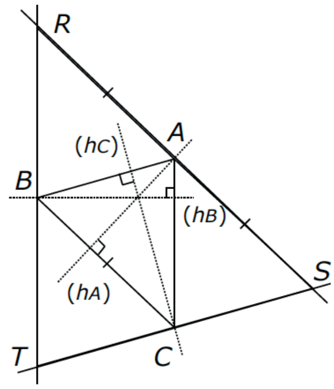


b. Il semble que les trois hauteurs sont concourantes.

Partie B Démonstration

Dans la figure ci-contre :

(*RS*) // (*BC*), (*RT*) // (*AC*) et (*ST*) // (*AB*).



1. a. (*RA*) // (*BC*) et (*AC*) // (*RB*), donc *ARBC* est un parallélogramme ;
(*AB*) // (*SC*) et (*BC*) // (*AS*), donc *ABCS* est un parallélogramme.

b. On a : *RA* = *BC* et *BC* = *AS* ; donc : *RA* = *AS*.

c. Les points *R*, *A* et *S* étant alignés, on peut dire que *A* est le milieu du segment [*RS*].

2. Soit (*hA*), (*hB*) et (*hC*) les hauteurs du triangle *ABC* issues respectivement de *A*, *B* et C.

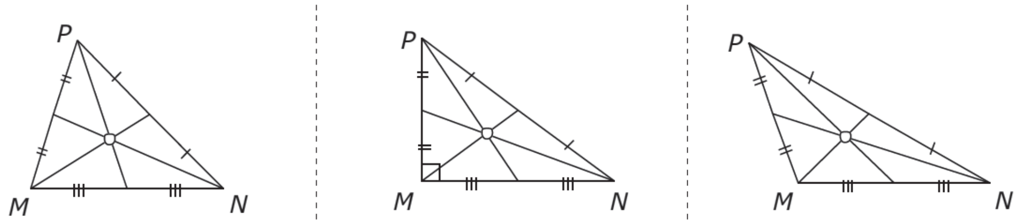
(*RS*) / /(*BC*) donc la hauteur (*hA*), qui passe par le milieu *A* de [*RS*] et est perpendiculaire à (*BC*), est en fait perpendiculaire à [*RS*] en son milieu ; donc (*hA*) est aussi la médiatrice du côté [*RS*] du triangle *RST*.

3. a. En admettant que les points *B* et *C* sont les milieux respectifs de [RT] et [*ST*], les droites (*hB*) et (*hC*) sont aussi les médiatrices respectives des côtés [*TR*] et [*TS*] du triangle *RST*.

b. Finalement les trois hauteurs de triangles *ABC*, qui sont aussi médiatrices du triangle *RST*, sont concourantes.

7. Centre de gravité d'un triangle

1. et **2. a**.



b. Il semble que les trois médianes d'un triangle sont concourantes

Méthodes et savoir-faire

Apprendre à choisir et utiliser une propriété

1 **1.** *A* et *B* sont les milieux des côtés [*FE*] et [*FG*] du triangle *EFG*.

2. (*AB*) // (*EG*) ; en effet si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté.

2 **1.** *I* et *J* sont les milieux respectifs de [*RS*] et [*RT*] ;

or, si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté ;

donc : **a.** (*IJ*) // (*ST*) ;

b. (*JK*) // (*RS*).

2. *IJKS* est un parallélogramme ; en effet ses côtés opposés sont parallèles.

3 **1.** *K* est le milieu de [*AB*] ;

mes *AKL* = mes *ABC* = 43°.

2. a. Les angles *AKL* et *ABC*, correspondants, ont la même mesure, donc : (*KL*) // (*BC*).

b. L est le milieu de [*AC*] ; car si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle au support d'un deuxième côté, alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

4 **1.** $M \in [RS]$, $RM = 3{,}5$ cm et $RS = 7$ cm ; donc : *M* est le milieu de [*RS*] ; $N \in [RT]$, $RN = NT = 2{,}6$ cm ; donc : *N* est le milieu de [*RT*].

2. $MN = 4$ cm ; car, si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

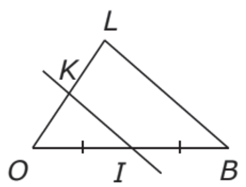
Exercices d'application

Droites parallèles et milieux

5 **1.** Dans le rectangle *ABCD*, les côtés opposés [*AB*] et [*DC*] ont la même longueur : 6 cm ; or $F \in [AB]$ et $FB = 3$ cm, donc *F* est milieu de [*AB*].

2. Dans le triangle *ABD*, *F* milieu de [*AB*] et *E* milieu de [*AD*] ; donc : (*EF*) // (*BD*).

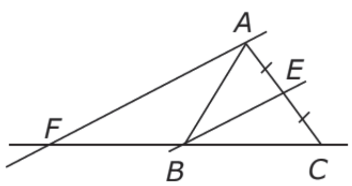
6 **1.**



$BO = 6$ cm, $OL = 4$ cm, LB = 5 cm.

2. Dans le triangle *OLB*, la droite, qui passe par le milieu *I* du côté [*BO*] et est parallèle à (*BL*), coupe le côté [*LO*] en son milieu *K*.

7 **1.**

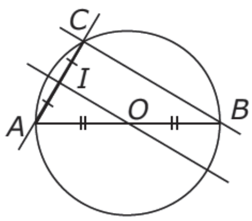


a. *E* est le milieu de [*AC*].

b. La parallèle à (*BE*) passant par *A* coupe (*BC*) en *F*.

2. Dans le triangle *ACF*, la droite (*EB*) passe par le milieu du côté [*AC*] et est parallèle au support du côté [*AF*] ; cette droite coupe donc le troisième côté [*CF*] en son milieu *B*.

8 **1.**



2. a. *O*, centre du cercle de diamètre [AB], est milieu de [*AB*] ; de plus I est milieu de [*AC*] ; or, dans un triangle la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté ;

donc : (*IO*) // (*BC*).

b. Le sommet *C* du triangle *ABC* appartient au cercle de diamètre [*AB*], donc ce triangle est rectangle en *C*.

(*AC*) ⊥ (*BC*) et (*IO*) // (*BC*) donc : (*IO*) ⊥ (*AC*).

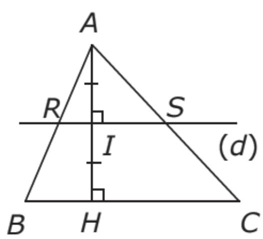
9 $AB = 5$ cm ; $AC = 4$ cm ; $BC = 6$ cm.

1. *I*, *J* et *K* sont les milieux respectifs de [*AB*], [*BC*] et [*CA*].

2. a. Si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté ; donc : $JK = 2{,}5$ cm.

b. Périmètre de *IJK* : $2{,}5 + 2 + 3 = 7{,}5$ cm.

10 **1.**



(*AH*) hauteur issue de *A* ; (*d*) médiatrice de [*AH*].

2.a. $(d) \perp (AH)$ et $(BC) \perp (AH)$, donc : (d) // (BC).

b. Dans le triangle *ABH*, (*d*) [droite passant par le milieu *I* de [*AH*] et parallèle à (*BH*)] coupe [AB] en son milieu *R* ; dans le triangle *ACH*, (*d*) [droite passant par le milieu *I* de [*AH*] et parallèle à (*CH*)] coupe [*AC*] en son milieu *S*.

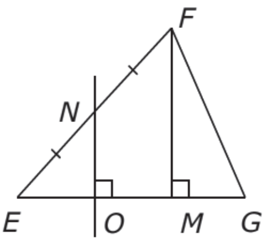
11 *M* milieu de [*AN*], *O* milieu de [*AP*], (*NR*) // (*MQ*).

1. Dans le triangle *ANP*, *M* et *O* sont les milieux respectifs des côtés [*AN*] et [*AP*], donc : (*MO*) // (*NP*).

2.a. Dans le triangle *ANR*, *M* est le milieu de [*AN*] et (*MQ*) // (*NR*), donc *Q* est le milieu de [*AR*].

Dans le triangle *APR*, *O* et *Q* sont les milieux respectifs des côtés [*AP*] et [*AR*], donc (*OQ*) // (*PR*).

12 **1.**



2. *M* est le pied de la hauteur issue de *F*,

donc : $(FM) \perp (EG)$.

O est le pied de la perpendiculaire issue de *N* sur (*EG*), donc : $(NO) \perp (EG)$.

Dans le triangle *EFM* la droite (*NO*), qui passe par le milieu *N* du côté [*EF*] et est parallèle au support du côté [*FM*], coupe le troisième côté [*EM*] en son milieu *O*.

13 *E* milieu de [*AB*] ; (*EF*) // (*BC*) ; (*FG*) // (*AB*)

1. *EFGH* est un parallélogramme ; en effet ses côtés opposés sont parallèles.

2. Dans le triangle *ABC* :

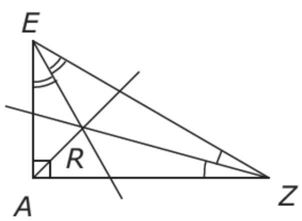
• la droite (*EF*), qui passe par le milieu *E* du côté [*AB*] et est parallèle au support du côté [*BC*], coupe le troisième côté [*AC*] en son milieu *F* ;

• la droite (*FG*), qui passe par le milieu *F* du côté [*AC*] et est parallèle au support du côté [*AB*], coupe le troisième côté [*BC*] en son milieu *G*.

3. La droite (*EG*), qui passe par les milieux des côtés [*AB*] et [*BC*] du triangle *ABC*, est parallèle au support (*AC*) du troisième côté de ce triangle.

Bissectrices d'un triangle

14



mes $\widehat{AZE} = 30°$.

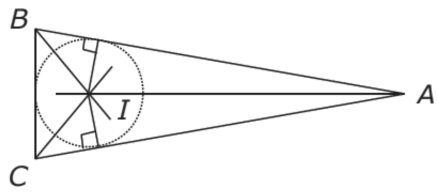
1. Mes $\widehat{AEZ} = 180\text{-}90\text{-}30 = 60°$.

2. Mes $\widehat{RZE} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{AZE} = 15°$.

3. Mes $\widehat{REZ} = \dfrac{1}{2}$mes $\widehat{AEZ} = 30°$;

mes $\widehat{ZRE} = 180 - 15 - 30 = 135°$.

15 **1.**



I est le centre du cercle inscrit dans *ABC*

mes $\widehat{ABI} = 40°$, mes $\widehat{BAI} = 10°$.

2. (*BI*) et (*AI*) sont bissectrices de $\widehat{ABC}$ et de $\widehat{BAC}$;

donc : mes $\widehat{ABC} = 80°$,

mes $\widehat{BAC} = 20°$.

3. On en déduit que : mes $\widehat{ACB} = 180 - 80 - 20 = 80°$;

donc le triangle $\widehat{ABC}$ est isocèle en *A*.

16 mes $\widehat{URI}$ = mes $\widehat{IRE} = 50°$

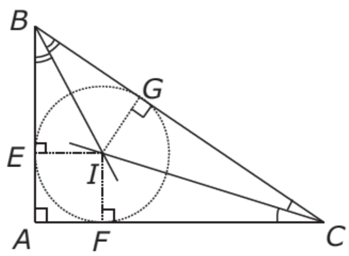
mes $\widehat{RUI}$ = mes $\widehat{IUE} = 25°$

a. (*RI*) et (*UI*) sont, par construction, les bissectrices de $\widehat{URE}$ et $\widehat{RUE}$; donc (*EI*) est la bissectrice de $\widehat{REU}$.

b. mes $\widehat{REU} = 180 - 100\text{-}50 = 30°$.

donc : mes $\widehat{IER} = 15°$.

17 **a.**



ABC est rectangle en *A*

b. *I*, point d'intersection des bissectrices, est le centre du cercle inscrit dans *ABC*.

c. Si *E*, *F* et *G* sont les points de contact respectifs du cercle avec les côtés [*AB*], [*AC*] et [*BC*], alors :

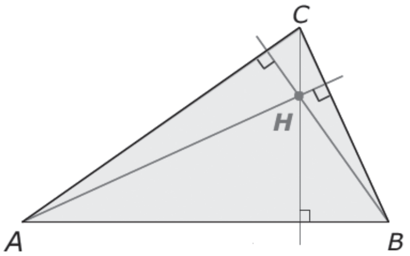
• mes $\widehat{AEI}$ = mes $\widehat{AFI} = 90°$,

• *IE* = *IF* (rayons du cercle).

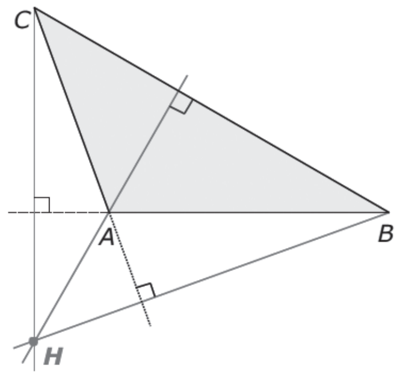
d. Donc *AEIF*, quadrilatère dont trois angles sont droits et deux côtés consécutifs ont même longueur, est un carré.

Hauteurs d'un triangle

18 1er cas : *ABC* est un triangle tel que : $AB = 6{,}5$ cm, $BC = 6$ cm, me $\widehat{ABC} = 35°$.
(construction avec règle graduée et rapporteur)



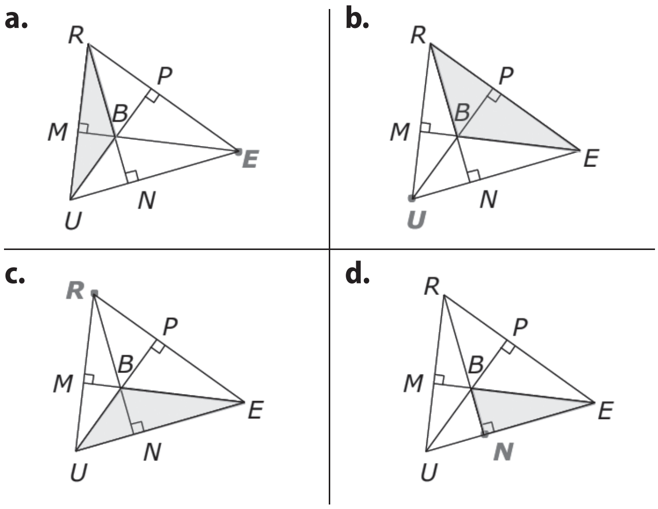
Observation : les angles de ce triangle sont aigus ; l'orthocentre est situé à « l'intérieur » du triangle.
2e cas : *ABC* est un triangle tel que : $AB = 5$ cm ;
mes $\widehat{ABC} = 30°$; mes $\widehat{ACB} = 40°$
(construction avec règle graduée et rapporteur, après avoir remarqué que : mes $BAC = 180\text{-}30\text{-}40 = 110°$)



Observation : un angle de ce triangle est obtus ; l'orthocentre est situé à « l'extérieur » du triangle.

19 **1.** Dans le triangle *MNP*, rectangle en *M*, la hauteur issue de *P* est la droite (*PM*).
2. L'orthocentre de ce triangle est le point *M* ; en effet la droite (*NM*), hauteur issue de *N*, coupe la hauteur issue de *P* en *M*.

20



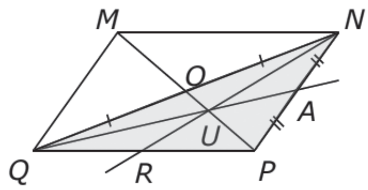
E est l'orthocentre du triangle *RUB*.
U est l'orthocentre du triangle *ERB*.
R est l'orthocentre du triangle *BUE*.
N est l'orthocentre du triangle *BNE*.

21 *I* étant un point du cercle (C) de diamètre [*RU*], le triangle *IRU* est rectangle en *I*.
On en déduit que :
- les droites (*RI*) et (*EJ*) sont les hauteurs du triangle *REU*, issues respectivement des sommets *R* et *E* ;
- *L* est alors l'orthocentre de ce triangle et (*UL*) en est la hauteur issue de *U*, c'est-à-dire $(UL) \perp (RE)$.

Médianes d'un triangle

22 *U*, *V* et *W* sont les milieux des côtés de *RST*.
1. Le point d'intersection *G* des deux médianes du triangle *RST*, issues respectivement des sommets *R* et *S*, est le centre de gravité de ce triangle.
2. La droite (*WG*) passe par le milieu de [*RS*] et le centre de gravité de *RST* ; c'est la troisième médiane de ce triangle, qui passe par le sommet *T*, opposé à [*RS*].

23 **1.**



MNPQ est un parallélogramme de centre *O*.
2. *O* milieu de la diagonale [*NQ*] et *A* milieu de [*NP*], donc :
- (*PO*) et (*QA*) sont les médianes issues des sommets *P* et *Q* du triangle *NPQ* ;
- *U* est le centre de gravité de ce triangle.

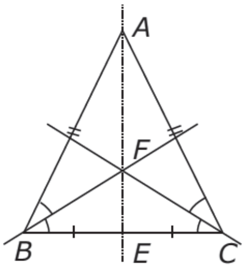
(*NU*) est alors la 3e médiane, issue du sommet *N* ; elle coupe le côté [*QP*] en son milieu *R*.

24 *R* est milieu de [*FG*] ; *S* est milieu de [*EG*] ;
$(ER) \perp (FS)$.
Par construction *M*, point d'intersection des médianes issues des sommets *E* et F du triangle *EFG*, est le centre de gravité de ce triangle.
Si $ER = 3{,}6$ cm et $FS = 4{,}8$ cm, alors :
- $EM = \dfrac{2}{3}\,ER = 2{,}4$ cm ; • $FM = \dfrac{2}{3}\,FS = 3{,}2$ cm.
- $MS = 3{,}6 - 2{,}4 = 1{,}2$ cm et $MR = 4{,}8 - 3{,}2 = 1{,}6$ cm.

Le triangle *MRS* est rectangle en *M* ; d'après la propriété de Pythagore : $RS = \sqrt{MS^2 + MR^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}6^2} = 2$ cm.
De plus, dans le triangle *EFG*, *R* et *S* sont les milieux respectifs de [*FG*] et [*EG*] ; donc : $RS = \dfrac{1}{2}\,EF = 4$ cm.

Triangle isocèle ; triangle équilatéral

25 **1.**

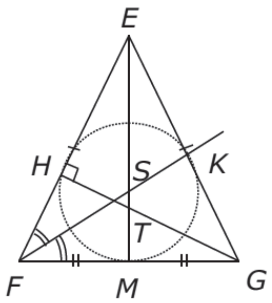


ABC isocèle en *A* ; *E* milieu de [*BC*] ; *F* point d'intersection des bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$

2. Dans le triangle *ABC*, isocèle en *A*, la médiane (*AE*) est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

(*AE*) passe donc par *F*, le point d'intersection des deux autres bissectrices de ce triangle ; donc les points *A*, *F* et *E* sont alignés.

26 **1.**

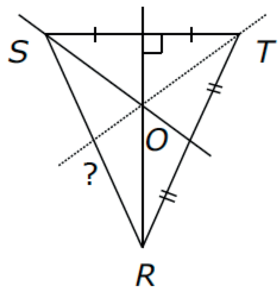


Dans le triangle *RST*, isocèle en *R*, la hauteur issue de *R* est aussi la médiane issue de *R*.

2. *O*, point d'intersection des médianes issues de *R* et de *S*, est le centre de gravité de ce triangle.

(*TO*) est alors la troisième médiane de *RST* ; donc (*TO*) coupe le côté [*RS*] en son milieu.

27 **1.**



ABC isocèle en *A* ; *BC* = 6 cm, *AB* = 5 cm ; *H* milieu de [*BC*] ; *G* centre de gravité

2. a. Dans le triangle *ABC*, isocèle en *A*, la médiane (*AH*) est aussi hauteur ; donc *ACH* est un triangle rectangle en *H* et, d'après la propriété de Pythagore, on a :

$AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$; $AH = 4$ cm.

b. Si *G* est le centre de gravité de *ABC*, alors :

$G \in [AH]$ et $GH = \dfrac{1}{3} AH \approx 1{,}3$ cm.

28 **1.** *I* est le centre du cercle inscrit dans le triangle *ABC*, isocèle en *A*.

(*AI*), bissectrice de $\widehat{BAC}$, est aussi la médiatrice de [*BC*] ; donc *IB* = *IC* et le triangle *BIC* est isocèle en *I*.

2. mes $\widehat{IBC}$ = mes $\widehat{ICB} = \dfrac{180 - 120}{2} = 30°$;

(*BI*) et (*CI*) sont les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$;

donc : mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{ACB} = 60°$,

ABC est en fait un triangle équilatéral.

Bien comprendre, mieux rédiger

29 **Retrouver les bonnes propriétés**.

1. a. $ST = \dfrac{EF}{2}$ car « *si, dans un triangle, un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté* ».

b. *HR* = *FR* = *RE* car « *si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit* ».

c. (*RS*) // (*FG*) car « *si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté* ».

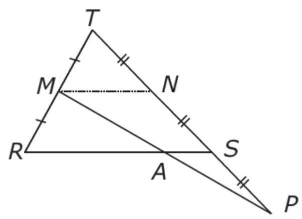
2. *HTSR* est un trapèze isocèle car :

• (*HT*) // (*RS*),

• (*HR*) et (*TS*) non parallèles, mais *HR* = *TS*.

30 **Bien repérer : données et conclusion**

1.



Dans le triangle *RST* ;

• *M* et *N* sont les milieux respectifs de [*RT*] et [*ST*] ;

• *P* est le symétrique de *N* par rapport à *S* ;

• *A* est le point d'intersection des droites (*RS*) et (*PM*).

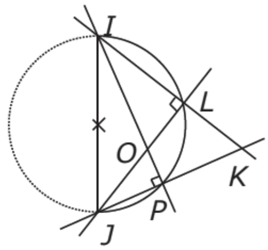
2. Dans son raisonnement, Roger a commis une erreur : mettre « *A* milieu de [*PM*] » en données et « (*SA*) // (*MN*) » en conclusion.

3. a. Dans le triangle *RST*, *M* milieu de [*RT*] et *N* milieu de [*ST*] ; donc : (*MN*) // (*RS*) ; c'est-à-dire : (*SA*) // (*MN*).

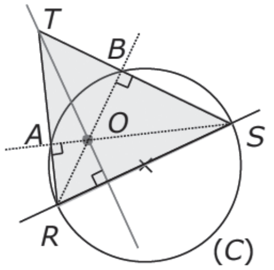
b. Dans le triangle *PMN*, la droite (*SA*), qui passe par le milieu *S* de [*PN*] et est parallèle à (*MN*), passe par le milieu *A* de [*PM*].

31 Retrouver la figure

1.



2.



a. *T* est un point extérieur au cercle (*C*) de diamètre [*RS*].

b. Construction, à la règle seule, de la perpendiculaire à (*RS*) passant par *T* :

• tracer les droites (*TR*) et (*TS*), qui coupent (*C*) respectivement en *A* et *B* ;

• tracer les droites (*RB*) et (*SA*), qui se coupent en l'orthocentre *O* de *RST* ;

• la droite (*TO*), hauteur issue de *T*, est alors perpendiculaire à (*RS*).

32 Démonstration à compléter

1. Justification que (*EO*) est la troisième bissectrice du triangle *EFG* :

a. D'après les codages : (*OA*) est perpendiculaire à (*FG*), (*OB*) est perpendiculaire à (*EG*) et *OA* = *OB*.

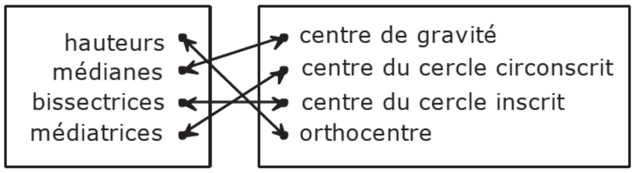
J'en déduis que le point *O* est à égale distance des droites (*FG*) et (*EG*).

Par conséquent (*GO*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{FGE}$.

b. Toujours d'après les codages : (*FO*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GFE}$; on en déduit que *O*, point d'intersection de deux bissectrices de *EFG*, appartient à la troisième bissectrice de ce triangle, qui est donc la droite (*EO*).

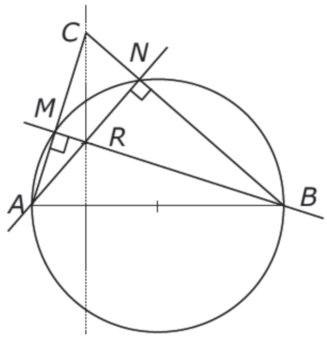
2. Mes $\widehat{FEO} = \dfrac{1}{2}(180 - 30 - 80) = 35°$.

33 Associer les bons mots



34 Une démonstration méli-mélo

1.



2. Preuve que (*CR*) ⊥ (*AB*) :

[*AB*] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle *ABM* et au triangle *ABN*.

Ainsi le triangle *ABM* est rectangle en *M* et le triangle *ABN* est rectangle en *N*.

(*BM*) est donc perpendiculaire à (*AC*) et (*BM*) est la hauteur de *ABC* issue de *B*.

(*AN*) est donc perpendiculaire à (*BC*) et (*AN*) est la hauteur de *ABC* issue de *A*.

R, l'intersection des hauteurs (*BM*) et (*AN*), est l'orthocentre de *ABC*.

(*CR*) passe par le sommet *C* de *ABC* et par *R* son orthocentre.

(*CR*) est donc la hauteur de *ABC* issue de *C* et, par définition, (*CR*) est perpendiculaire à (*AB*).

Exercices d'approfondissement

35 Alignement de milieux dans un trapèze

1. (*d*) = (*IJ*).

a. Dans le triangle *MOP*, *I* est le milieu de [*MP*] et *J* est le milieu de [*MO*] ; or, si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté ; donc (*d*) est parallèle à (*OP*).

b. Dans le trapèze *MNOP*, de bases [*MN*] et [*OP*], (*MN*) est parallèle à (*OP*) ;

on en conclut que (*d*) est parallèle à (*MN*).

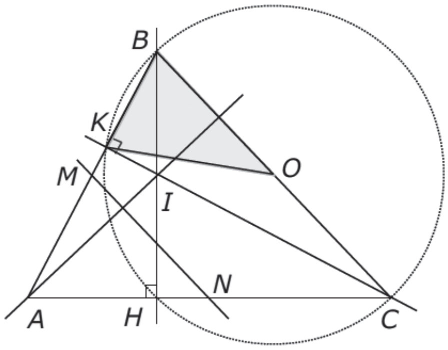
2.a. Dans le triangle *MNO*, *J* est le milieu de [*MO*], la droite (*d*) passe par *J* et est parallèle à (*MN*) ; or, si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle au support d'un deuxième côté, alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu ; donc (*d*) passe par *K* le milieu de [*NO*].

b. Dans le triangle *MNP*, *I* est le milieu de [*MP*], la droite (*d*) passe par *I* et est parallèle à (*MN*) ; or, si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle au support d'un deuxième côté, alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu ; donc (*d*) passe par *L* le milieu de [*NP*].

c. Finalement les points *I*, *J*, *K* et *L* sont alignés sur (*d*).

36 Cercle caché

1.



Dans la figure ci-dessus :

a. $AB = 4{,}6$ cm ; $BC = 5{,}6$ cm ; $AC = 6$ cm ;

b. les hauteurs (*BH*) et (*CK*) se coupent en *I* ;

c. *M* est le milieu de [*AB*], *N* est le milieu de [*AC*].

2. a. La droite (*MN*), qui passe par les milieux des côtés [*AB*] et [*AC*], est parallèle au support (*BC*) du troisième côté.

b. *I*, point d'intersection des hauteurs (*BH*) et (*CK*), est l'orthocentre de *ABC* ; la droite (*AI*), qui est alors la troisième hauteur de ce triangle, est perpendiculaire à (*BC*). On en déduit que : $(AI) \perp (MN)$.

3. a. *O* est le milieu de [*BC*].

b. [*BC*] est l'hypoténuse du triangle *BCK* rectangle en *K* ; on en déduit que :

• *O* est le centre du cercle circonscrit à ce triangle ;

• $OB = OK$ et le triangle *KOB* est isocèle en *O*.

c. Le cercle de diamètre [*BC*] coupe (*AB*) en *K* et (*AC*) en *H*. En effet les triangles *BCK* et *BCH* étant rectangles en *K* et *H*, le cercle de diamètre [*BC*] est circonscrit à chacun de ces triangles.

37 Bissectrice cachée

D'après les codages de la figure :

• (*AE*) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

• mes $\widehat{ACE} = 180 - 40 - 120 = 20°$;

• mes $\widehat{FEC} = 180 - 120 = 60°$; d'où :

mes $\widehat{ECF} = 180 - 100 - 60 = 20°$.

On en déduit que : (*CE*) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

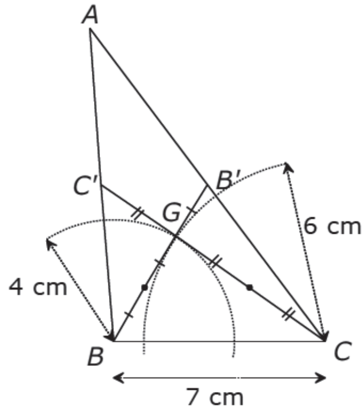
E étant point d'intersection de deux bissectrices de *ABC*, (*BE*) est la troisième bissectrice de ce triangle et

mes $\widehat{EBA} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{ABF} = \dfrac{1}{2}(180 - 80 - 40) = 30°$.

38 Problème de construction

B′ étant le milieu de [*AC*] et *C′* celui de [*AB*], si *ABC* est un triangle tel que : $BC = 7$ cm, $CC' = 9$ cm, $BB' = 6$ cm, alors le centre de gravité *G* de ce triangle est tel que :

$CG = \dfrac{2}{3} \times 9 = 6$ cm, $BG = \dfrac{2}{3} \times 6 = 4$ cm.



Pour construire un tel triangle *ABC* :

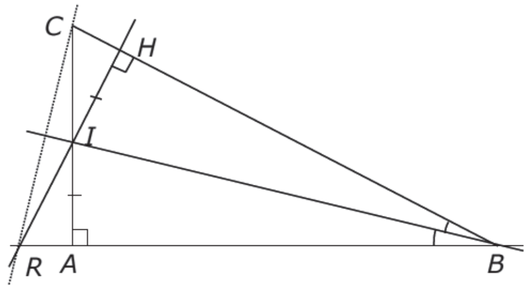
• construire tout d'abord un triangle *BCG* tel que $BC = 7$ cm, $BG = 4$ cm et $CG = 6$ cm ;

• construire le milieu de [*BG*] et son symétrique *B′* par rapport à *G*, puis le milieu de [*CG*] et son symétrique *C′* par rapport à *G* ;

• *A* est le point d'intersection des droites (*BC′*) et (*CB′*) (vérification : *B′* et *C′* doivent être les milieux de [*CA*] et [*BA*]).

39 Comparer des distances

1.



Ci-dessus :

a. *ABC* rectangle en *A* ; $AB = 7$ cm ; $AC = 3{,}6$ cm ;

b. (*BI*) bissectrice de $\widehat{ABC}$;

c. (*IH*) hauteur issue de *I* dans *IBC*.

2. [*IC*] étant l'hypoténuse de triangle *HCI*, rectangle en *H*, ce côté est le plus grand des trois côtés de ce triangle ; en particulier : $IH < IC$.

De plus, *I* étant un point de la bissectrice, on a : $IA = IH$;

on en déduit que *I* est plus près de *A* que de *C*.

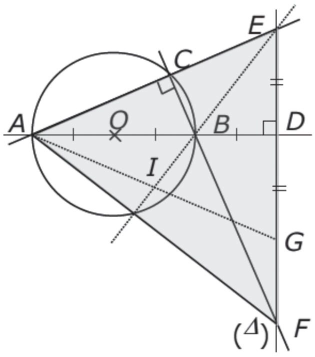
3. La droite (*IH*) coupe la droite (*AB*) en *R*.

Les droites (*BC*) et (*BR*) sont symétriques par rapport à (*BI*) ; les droites (*IH*) et (*IA*), passant par un point de (*BI*) et perpendiculaires respectivement à (*BC*) et (*BR*), sont aussi symétriques par rapport à (*BI*).

On en déduit que *C*, point d'intersection de (*IA*) et (*BC*), et *R*, point d'intersection de (*IH*) et (*BR*), sont symétriques par rapport à (*BI*) ; c'est-à-dire $(CR) \perp (IB)$.

40 Construire et bien observer

1.



Dans la figure ci-dessus :

a. *C* appartient au cercle de diamètre [*AB*], de centre *O* ;

b. *D* symétrique de *O*, par rapport à *B* ;

c. (Δ) $\perp$ (*AB*) et $D \in$ (Δ) ;

d. *E* et *F* sont les points d'intersection respectifs de (*AC*) et (*CB*) avec (Δ) ;

2. a. Le cercle circonscrit au triangle *ABC* a pour diamètre [*AB*] ; donc ce triangle est rectangle en *C* et (*FC*) est la hauteur issue de *F* dans le triangle *AEF*.

b. Comme (*AD*) est la hauteur issue de *A* dans *AEF*, le point *B* est l'orthocentre de ce triangle et (*EB*) en est la hauteur issue de *E* ; donc : (*EB*) $\perp$ (*AF*).

3. *G* est le symétrique de *E* par rapport à *D*, donc *D* est le milieu de [*EG*] ; *B*, situé aux deux tiers à partir de *A* sur la médiane [*AD*] de *AEG*, est le centre de gravité ce triangle.

On en déduit que la droite (*EB*) est la médiane issue de *E* dans *AEG* ; elle passe par le milieu *I* de [*AG*].

41 Centre de gravité d'un triangle

1. a. *BGCA'* est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.

b. On en déduit que :

(*GI*) // (*A'C*) et (*CG*) // (*BA'*).

2. a. Dans le triangle *AA'C*, (*GI*)

passe par le milieu I de [*AC*] et est parallèle à (*A'C*) ; donc *G* est le milieu de [*AA'*].

b. Dans le triangle *AA'B*, (*CG*) passe par le milieu *G* de [*AA'*] et est parallèle à (*A'B*) ; donc (CG) coupe le côté [*AB*] en son milieu.

c. Les droites (*BG*), (*CG*) et (*AG*) sont les médianes du triangle *ABC*.

d. On peut en conclure que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

3. a. *K* milieu de [*GA'*], donc : $GA' = 2GK$;

b. *G* milieu de [*AA'*], donc : $AG = GA' = 2GK$;

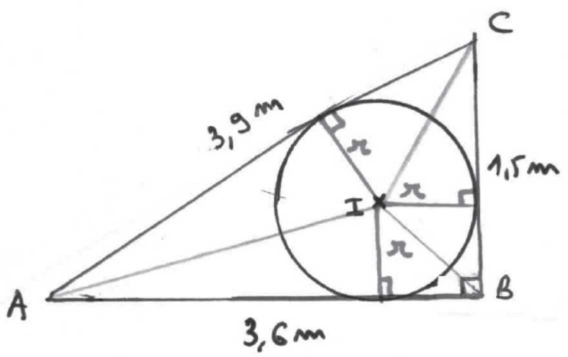
c. $AK = AG + GK = 2GK + GK = 3GK$;

d. donc : $GK = \frac{1}{3}AK$ et $AG = 2GK = \frac{2}{3}AK$.

Activités d'intégration

42 La fenêtre circulaire

La fenêtre circulaire correspond au cercle inscrit dans le triangle *ABC* rectangle en *B*.



Aire (*ABC*) = Aire (*AIB*) + Aire (*AIC*) + (*BIC*)

Aire (*ABC*) $= \frac{3{,}6 \times r}{2} + \frac{3{,}9 \times r}{2} + \frac{1{,}5 \times r}{2}$

Aire (*ABC*) $= 4{,}5r$.

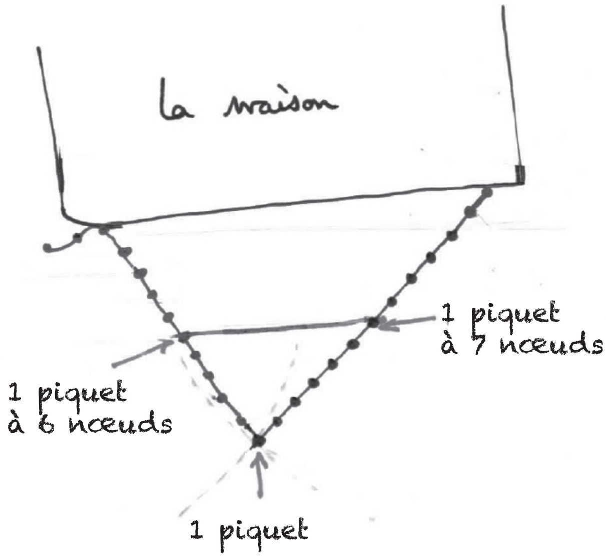
De plus, Aire (*ABC*) $= \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3{,}6 \times 1{,}5}{2} = 2{,}7$ m².

Ainsi, $4{,}5r = 2{,}7$, donc $r = 0{,}6$.

Le rayon de la fenêtre circulaire est de 0,6 m.

43 Le mur de clôture

Schéma à main levée



10 Triangle rectangle : propriétés métriques

Manuel pages 111 à 122

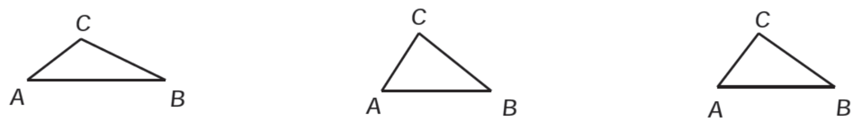
Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Triangle rectangle [1 p 115]		37	
2, 3	Propriété de Pythagore [2 p 115]	12, 13, 14, 15, 16, 17	38, 39, 40, 43	44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51
	Apprendre à calculer une longueur dans un triangle rectangle, à l'aide de la propriété de Pythagore [1 p 116]	**1**, **2**, **3**, **4**, **5**	38, 39, 40	
4				
5	Propriété réciproque de Pythagore [3 p 115]	18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36	41, 42, 43	
	Apprendre à justifier qu'un triangle est rectangle ou pas [2 p 117]	**6, 7, 8, 9, 10, 11**		
6	Relation métrique déduite de l'aire d'un triangle rectangle [[4 p 115]	25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	45	46

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Introduction et contrôle des pré-requis

Construire deux murs perpendiculaires entre eux

1. Représentation des trois triangles *ABC* à l'échelle $\frac{1}{5}$:



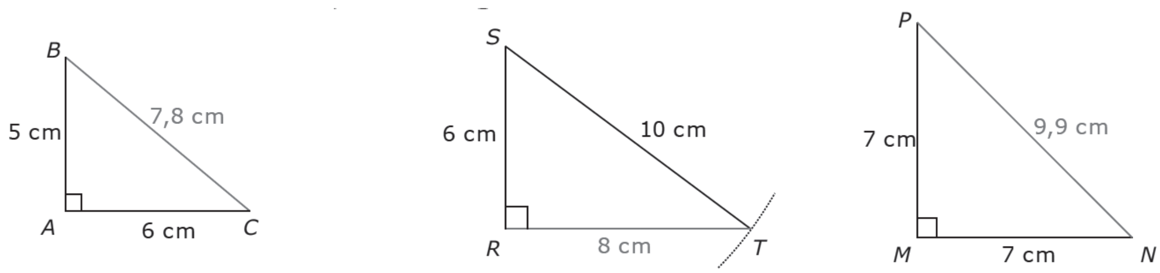
$CA = 9$ cm, $CB = 12$ cm, $AB = 18$ cm — $CA = 9$ cm, $CB = 12$ cm, $AB = 14$ cm — $CA = 9$ cm, $CB = 12$ cm, $AB = 15$ cm

2. La longueur pour laquelle les deux murs semblent être perpendiculaires entre eux est : 1,5 m.

Activités d'apprentissage

1. Longueurs dans un triangle rectangle

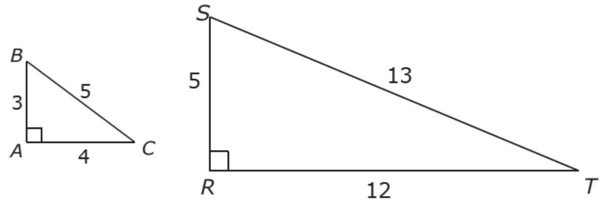
1. a.



2. Dans le triangle *ABC*, rectangle en *A*, tel que $AB = 5$ cm et $AC = 6$ cm, la longueur inconnue est $BC \approx 7{,}8$ cm ; *BC* est le plus grand côté.
Dans le triangle *RST*, rectangle en *R*, tel que $RS = 6$ cm et $ST = 10$ cm, la longueur inconnue est $TR = 8$ cm ; *ST* est le plus grand côté.
Dans le triangle *MNP*, rectangle et isocèle en *M*, tel que $MN = 7$ cm, la longueur inconnue est $NP \approx 9{,}9$ cm ; *NP* est le plus grand côté.

3. Si un triangle est rectangle, alors le plus grand côté est opposé à l'angle droit.

2. Propriété de Pythagore : expérimentation



1. Dans le triangle *ABC* rectangle en *A* avec $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm :
$BC = 5$ cm ; $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25$.

2. Dans le triangle *RST* rectangle en *R* avec $RS = 5$ cm et $RT = 12$ cm :
$ST = 13$ cm ; $RS^2 + RT^2 = ST^2 = 169$.

3. Propriété de Pythagore : démonstration

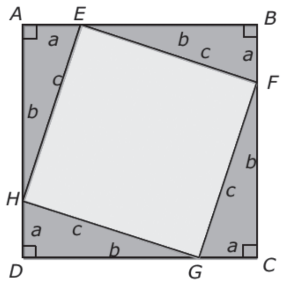


Figure 1

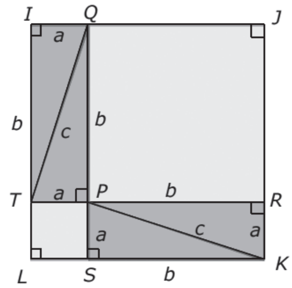


Figure 2

1. Figure 1

a. *EFGH*, quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur *c*, est un losange.

b. Dans le triangle *AEH*, rectangle en *A*, les angles $\widehat{AEH}$ et $\widehat{AHE}$ sont complémentaires ;
dans les triangles *AEH* et *BFE* superposables, mes $\widehat{AHE}$ = mes $\widehat{BEF}$;
finalement les angles $\widehat{AEH}$ et $\widehat{BEF}$ sont complémentaires.

c. On en déduit que : mes $\widehat{HEF}$ = mes $\widehat{AEB}$ – (mes $\widehat{AEH}$ + mes $\widehat{BEF}$) = 180 –90 = 90° ;
le losange *EFGH*, qui a un angle droit, est en fait un carré.

d. Aire du carré *EFGH* : c^2.

2. Figure 2

a. Les quadrilatères *PQJR* et *PSLT*, ayant chacun quatre angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur, sont des carrés.

b. Aire du carré *PQJR* : b^2 ; aire du carré *PSLT* : a^2.

3. a. Les carrés *ABCD* et *IJKL*, superposables, ont la même aire ; les quatre triangles rectangles de la figure 1 et les quatre triangles rectangles de la figure 2, superposables, ont la même aire.
Or : aire(*EFGH*) = aire(*ABCD*) – 4 × aire(*AEH*) et aire(*PQJR*) + aire(*PSLT*) = aire(*IJKL*) – 4 × aire(*IQT*) ;
on en déduit que : aire(*EFGH*) = aire(*PQJR*) + aire(*PSLT*).

b. L'égalité précédente peut s'écrire : $c^2 = a^2 + b^2$.

c. Propriété de Pythagore : si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

4. Découvrir les touches  ou  des calculatrices

1. Les longueurs des côtés des carrés d'aire 36 m², 81 cm² et 0,25 dm² sont respectivement 6 m, 9 cm et 0,5 dm.

2. a. Il n'est pas facile de donner (de tête) la longueur du côté d'un carré d'aire 60,84 cm².

b. Avec une calculatrice, on obtient : 7,8 cm.

c. De plus : $7{,}8^2 = 60{,}84$.

d. On en déduit que la longueur du côté d'un carré d'aire 60,84 cm² est égale à 7,8 cm.

3. a. Un carré d'aire 71 cm² a un côté de longueur 8,4 cm environ.

b. Un carré d'aire 17 cm² a un côté de longueur 4,1 cm environ.

c. Un carré d'aire 12 cm² a un côté de longueur 3,5 cm environ.

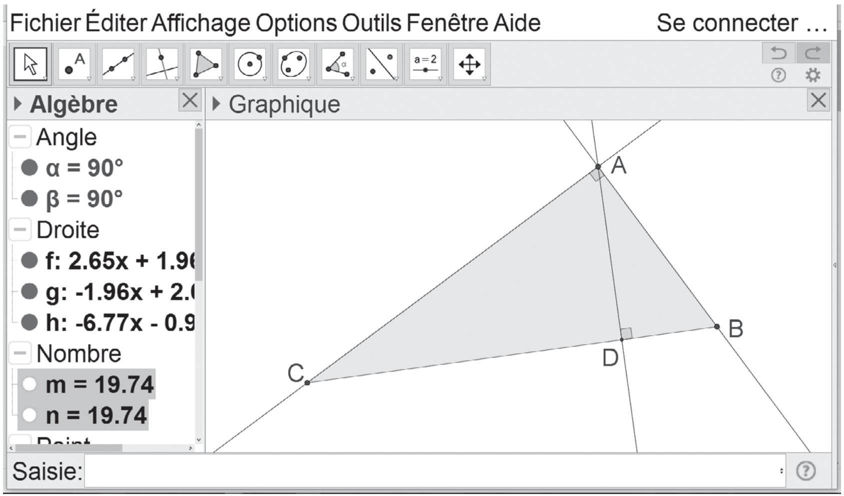
5. Propriété réciproque de Pythagore

Numéro du triangle	Longueur du plus grand côté *a*	Longueurs des deux autres côtés *b* et *c*		a^2	b^2+c^2	Le triangle semble-t-il rectangle ? Oui ou non
1	50	30	40	2 500	2 500	Oui
2	24	10	20	576	500	Non
3	39	15	36	1 521	1 521	Oui
4	30	20	20	900	800	Non
5	50	14	48	2 500	2 500	Oui
6	27	24	14	729	772	Non

2. a. Lorsque le triangle semble rectangle, on constate que : $a^2 = b^2 + c^2$.
b. Lorsque le triangle ne semble pas rectangle, on constate que : $a^2 \neq b^2 + c^2$.
c. Conjecture (admise) : si dans un triangle le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au plus grand côté.

6. Expérimenter avec un logiciel, puis démontrer

Partie A



On remarque que $m = n$, c'est-à-dire que $AB \times AC = AD \times BC$.

Partie B

1. Formule permettant de calculer l'aire d'un triangle quelconque : $\dfrac{\text{longueur d'un côté} \times \text{la hauteur associée}}{2}$.

2. S'agissant d'un triangle *ABC* rectangle en *A*, dont *H* est le pied de la hauteur issue de *A* :

a. la hauteur associée au côté [*AB*] de ce triangle étant *AC*, son aire est : $\dfrac{AB \times AC}{2}$

b. la hauteur associée au côté [*BC*] de ce triangle étant *AH* ; son aire est : $\dfrac{BC \times AH}{2}$

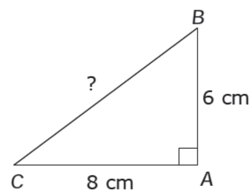
c. on en déduit que : $AB \times AC = BC \times AH$.

Méthodes et savoir-faire

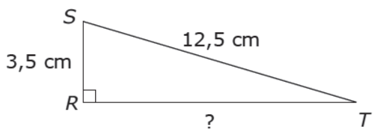
1 Apprendre à calculer une longueur dans un triangle rectangle à l'aide de la propriété de Pythagore

1 **1. a.** L'hypoténuse du triangle *ABC*, rectangle en *A*, est [*BC*].
b. D'après la propriété de Pythagore, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
c. On a donc $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2$; c'est-à-dire : $BC = 10$ cm.

2.

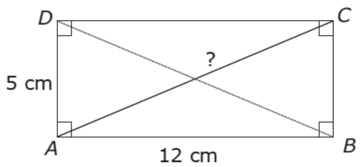


2 **1.**



2. L'hypoténuse du triangle RST, rectangle en R, est $[ST]$. D'après la propriété de Pythagore, on a :
$ST^2 = RS^2 + RT^2$.
On a donc : $RT^2 = ST^2 - RS^2 = 12{,}5^2 - 3{,}5^2 = 144 = 12^2$;
c'est-à-dire : $RT = 12$ cm.

3 **1.**



2. Dans le rectangle $ABCD$, $AC = BD$.
Or $[BD]$ est l'hypoténuse du triangle ABD, rectangle en A. Donc, d'après la propriété de Pythagore, on a :
$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 5^2 = 169 = 13^2$.
On obtient : $AC = 13$ cm.

4 D'après la propriété de Pythagore, on a :
• dans le triangle ABC, rectangle en B,
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 45$ donc $AC = 45 \approx 6{,}7$ cm ;
• dans le triangle DEF, rectangle en E,
$DE^2 = DF^2 - EF^2 = 27$ donc $DE = 27 \approx 5{,}2$ cm.

5 **1.** Le triangle ABC est rectangle en B, donc, d'après la propriété de Pythagore, on a : $AC^2 = BA^2 + BC^2$,
c'est-à-dire : $AC^2 = 8^2 + 15^2 = 289$;
on obtient : $AC = 289 = 17$.
2. a. Le triangle BCD est rectangle en D, donc, d'après la propriété de Pythagore, on a : $BC^2 = DB^2 + DC^2$,
c'est-à-dire : $CD^2 = 15^2 - 12^2 = 81$;
on obtient : $CD = 81 = 9$.
b. Périmètre de la figure : $8 + 12 + 9 + 17 = 46$ cm.
3. a. Aire(ABC) : $\dfrac{8 \times 15}{2} = 60$ cm^2 ;
aire(BCD) : $\dfrac{9 \times 12}{2} = 54$ cm^2.
b. Aire de la figure : $60 + 54 = 114$ cm^2.

2 Apprendre à justifier qu'un triangle est rectangle ou pas

6 **a.** $AC^2 = 25^2 = 625$;
$AB^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$.
On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
b. $BC^2 = 50^2 = 2\,500$; A
$B^2 + AC^2 = 14^2 + 48^2 = 196 + 2\,304 = 2\,500$.
On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

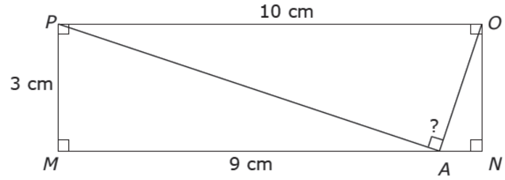
7 **1.** $DE^2 + DF^2 = 2{,}4^2 + 1^2 = 6{,}76$;
$EF^2 = 2{,}6^2 = 6{,}76$;
on a : $EF^2 = DE^2 + DF^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle DEF est rectangle en D.
$DE^2 + EG^2 = 2{,}4^2 + 0{,}7^2 = 6{,}25$; $DG^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$;
on a : $DG^2 = DE^2 + EG^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle DEG est rectangle en E.
2. Les droites (DF) et (GE), perpendiculaires à la même droite (DE), sont parallèles entre elles.

8 $SA^2 + AB^2 = 1{,}2^2 + 0{,}9^2 = 2{,}25$; $SB^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$;
On a : $SB^2 = SA^2 + AB^2$;
donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle SAB est rectangle en A. ; c'est-à-dire que le piquet $[AS]$ est perpendiculaire à la droite (AB).

9 **a.** $MN^2 = 15^2 = 225$;
$NP^2 + MP^2 = 10^2 + 11^2 = 100 + 121 = 221$.
On a : $MN^2 \neq NP^2 + MP^2$; $[MN]$ étant le plus grand côté du triangle MNP, ce triangle n'est pas rectangle.
b. $MP^2 = 13^2 = 169$;
$MN^2 + NP^2 = 11^2 + 7^2 = 121 + 49 = 170$.
On a : $MP^2 \neq MN^2 + NP^2$; $[MP]$ étant le plus grand côté du triangle MNP, ce triangle n'est pas rectangle.

10 $AB^2 = 17^2 = 289$;
$CA^2 + CB^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$.
On a : $AB^2 \neq CA^2 + CB^2$; $[AB]$ étant le plus grand côté du triangle ABC, ce triangle n'est pas rectangle.
$EG^2 = 40^2 = 1\,600$;
$FE^2 + FG^2 = 23^2 + 33^2 = 529 + 1\,089 = 1\,618$.
On a : $EG^2 \neq FE^2 + FG^2$; [EG] étant le plus grand côté du triangle EFG, ce triangle n'est pas rectangle.

11 **1.a.**



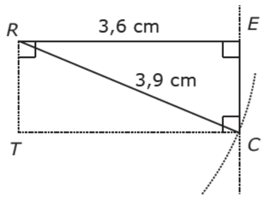
b. Le triangle OPA semble rectangle en A.
2. a. $OA^2 = NO^2 + NA^2 = 3^2 + 1^2 = 10$;
$PA^2 = MP^2 + MA^2 = 3^2 + 9^2 = 90$.
b. Constat : $AO^2 + AP^2 = 100 = OP^2$; d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle OPA est bien rectangle en A.

Exercices d'application

Calculs dans un triangle rectangle

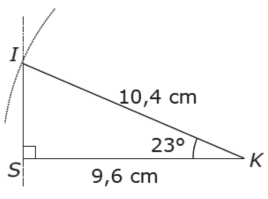
12 **1.** ABC est un triangle rectangle en A tel que :
$AB = 8$ cm et $BC = 17$ cm.
D'après la propriété de Pythagore :
$AC^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$;
donc $AC = \sqrt{225} = 15$ cm.
2. OMN est un triangle rectangle en M tel que :
$OM = 20$ cm et $MN = 21$ cm.
D'après la propriété de Pythagore :
$ON^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$; donc $ON = \sqrt{841} = 29$ cm.

13 **1.** Construction du rectangle $RECT$, tel que $RE = 3{,}6$ cm et RC = 3,9 cm :
• trace un segment $[RE]$ tel que $RE = 3{,}6$ cm ;
• C est l'un des points d'intersection du cercle de centre R, de rayon 3,9 cm, et de la droite perpendiculaire en E à (RE) ;
• T est le point d'intersection de la droite perpendiculaire en C à (CE) et de la droite perpendiculaire en R à (RE).



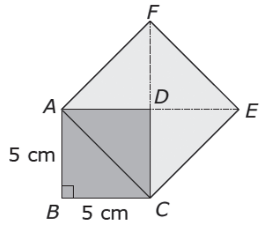
2. $EC^2 = RC^2 - RE^2 = 3{,}9^2 - 3{,}6^2 = 15{,}21 - 12{,}96 = 2{,}25$;
donc : $EC = 2{,}25 = 1{,}5$ cm.
On en déduit que le périmètre du rectangle $RECT$ est :
$3{,}6 \times 2 + 1{,}5 \times 2 = 10{,}2$ cm.

14 Construction du triangle SKI, rectangle en S, tel que $SK = 9{,}6$ cm et $KI = 10{,}4$ cm :
• trace un segment $[SK]$ tel que $SK = 9{,}6$ cm ;
• I est l'un des points d'intersection du cercle de centre K, de rayon 10,4 cm, et de la droite perpendiculaire en S à (SK).



2. $SI^2 = KI^2 - SK^2 = 10{,}4^2 - 9{,}6^2 = 108{,}16 - 92{,}16 = 16$;
donc : $SI = \sqrt{16} = 4$ cm.
3. Si mes $\widehat{SKI} = 23°$, alors mes $\widehat{SIK} = 180 - 90 - 23 = 67°$.

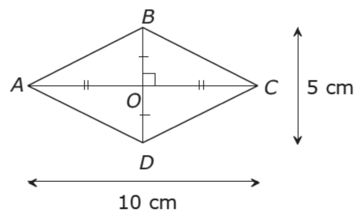
15 **1.** Aire$(ABCD) = AB^2 = 5^2 = 25$ cm^2.



2. Preuve « géométrique » :
aire$(ACEF) = 4 \times$ aire$(ACD) = 2 \times$ aire$(ABCD)$.
Preuve « numérique » :
d'après la propriété de Pythagore, dans le triangle ABC, rectangle en B, $AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50$;
donc : aire$(ACEF) = AC^2 = 50$ cm$^2 = 2 \times$ aire$(ABCD)$.

16 Dans le triangle ABC, rectangle en A avec $AB = 2$ cm et $AC = 19$ cm, on a :
$BC^2 = 2^2 + 19^2 = 4 + 361 = 365$.
Dans le triangle NOP, rectangle en N avec $NO = 13$ cm et $NP = 14$ cm, on a :
$OP^2 = 13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$.
Donc ces deux triangles rectangles ont des hypoténuses $[BC]$ et $[OP]$ de même longueur.

17



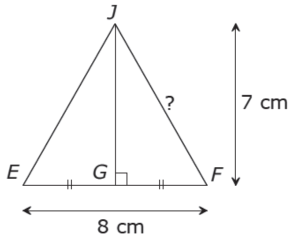
$ABCD$ est un losange. Dans le triangle AOB, rectangle en O, $AB^2 = AO^2 + OB^2 = 5^2 + 2{,}5^2$
$= 25 + 6{,}25 = 31{,}25$;
donc : $AB = \sqrt{31{,}25} \approx 5{,}6$ cm.
Le périmètre de $ABCD$ est égal (au millimètre près) à :
$4 \times 5{,}6 \approx 22{,}4$ cm.

Nature d'un triangle

18 $EFGH$ est un rectangle tel que :
$EF = 13$ cm et $FG = 8$ cm.
1. Longueur de ses diagonales :
$EG = \sqrt{13^2 + 8^2} \approx 15{,}3$ cm.
2. Longueur de son cercle circonscrit : $\pi \times EG \approx 48$ cm.

19 **1.** D'après la propriété de Pythagore,
$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 1^2 + 4^2 = 17$.
2. On en déduit, d'après la propriété de Pythagore, que :
$EH^2 = EG^2 + GH^2 = 17 + 64 = 81$;
donc : $EH = \sqrt{81} = 9$ cm.

20 **1.**



2. Le triangle *EFJ* n'est pas équilatéral ; en effet, d'après la propriété de Pythagore, on a :

$JF = \sqrt{GF^2 + GJ^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \neq 8$ cm.

21 Hauteur de l'arbre : $PM + MC$; d'après la propriété de Pythagore, $PM + MC = \sqrt{42 + 2{,}5^2} + \sqrt{6^2 + 2{,}5^2}$

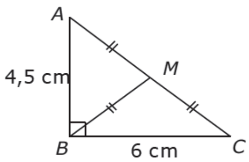
$= \sqrt{22{,}25} + \sqrt{42{,}25}$

$\approx 4{,}7 + 6{,}5$

$\approx 11{,}2$ m.

22 **1.** Dans le triangle *ABC*, la droite (*AO*), qui passe par le milieu *O* de [*BC*], est la médiane issue de *A*.
2. Le cercle circonscrit au triangle *ABC*, rectangle en *A*, a :
• pour centre *O*, milieu de l'hypoténuse [*BC*] ;
• pour rayon $OA = OB = OC = 5$ cm.
On en déduit que :
• $BC = 10$ cm ;
• $AC = 10^2 - 62 = 64 = 8$ cm.

23 **1.**

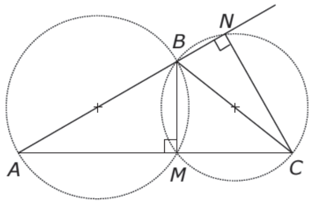


2. Si *M* est le milieu de l'hypoténuse [*AC*] du triangle *ABC*, rectangle en *A*, alors le cercle circonscrit à *ABC* a pour centre *M* et $MA = MC = MB = \dfrac{AC}{2}$.

Or, d'après la propriété de Pythagore, on a :

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ cm.
Donc : $BM = 3{,}75$ cm.

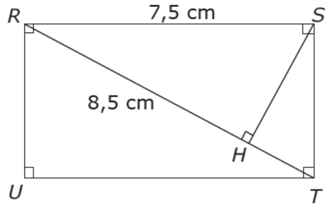
24 **1.** Le triangle *ABC* est tel que : $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 3{,}2$ cm.



2. Le point *M*, tel que $M \in (AC)$ et $MA^2 + MB^2 = AB^2$, est (d'après la réciproque de la propriété de Pythagore) rectangle en *M* ; *M* est donc le second point d'intersection de la droite (*AC*) avec le cercle de diamètre [*AB*].
Le point *N*, tel que $M \in (AB)$ et $NC^2 + NB^2 = CB^2$, est (d'après la réciproque de la propriété de Pythagore) rectangle en *N* ; *N* est donc le second point d'intersection de la droite (*AB*) avec le cercle de diamètre [*BC*]

Relation métrique déduite de l'aire d'un triangle

25 **1.** D'après la propriété de Pythagore :
$ST = 8{,}52 - 7{,}52 = 4$ cm.



2. Dans le triangle *RST*, rectangle en *S*, on a :
$SR \times ST = RT \times SH$;

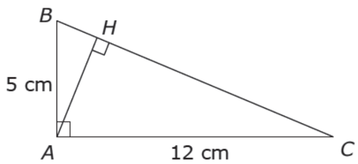
donc : $SH = \dfrac{7{,}5 \times 4}{2} = \dfrac{30}{8{,}5} \approx 3{,}5$ cm.

26 **1. a.** *ZER* est un triangle rectangle en *E*.
b. Pour ce triangle la droite (*EH*) est la hauteur issue de *E*.
c. On a : $EZ \times ER = RZ \times EH$.
2. On donne : $EZ = 15$ cm, $ZR = 25$ cm et $EH = 12$ cm.

a. $ER = \dfrac{RZ \times EH}{EZ} = \dfrac{25 \times 12}{15} = 20$ cm.

b. $ER = \sqrt{ZR^2 - EZ^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ cm.

27

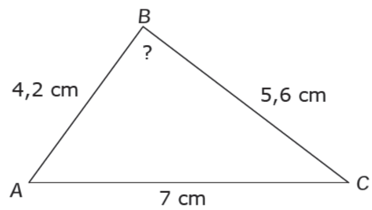


1. $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.

2. $AH = \dfrac{AB \times AC}{BC} = \dfrac{5 \times 12}{13} = \dfrac{60}{13}$.

Étude de triangles

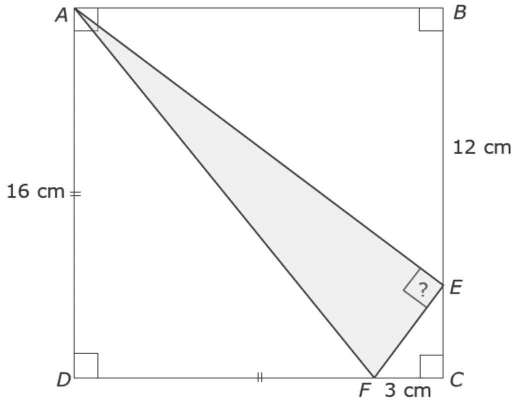
28 **1.**



2. $AB^2 + BC^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 17{,}64 + 31{,}36 = 49$;
$AC^2 = 7^2 = 49$;
donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, *ABC* est un triangle rectangle en *B*.
3. Périmètre de *ABC* : 16,8 cm ;

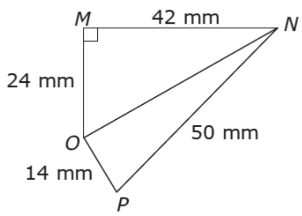
aire de *ABC* : $\dfrac{4{,}2 \times 5{,}6}{13} = 11{,}76$ cm^2.

29 **1.** $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$;
$EF^2 = EC^2 + CF^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$;
$AF^2 = AD^2 + DF^2 = 16^2 + 13^2 = 256 + 169 = 425$.



2. On a : $AF^2 = AE^2 + EF^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en E.

30 **1.**



2. D'après la propriété de Pythagore :

$ON^2 = OM^2 + MN^2 = 24^2 + 42^2 = 2\,340$;

donc : $ON = \sqrt{2\,340} \approx 48{,}4$ cm et $[PM]$ est le plus grand côté du triangle ONP.

Comme $ON^2 + OP^2 = 14^2 + 2\,340 = 2\,536 \neq PN^2$,

on peut dire que PON n'est pas un triangle rectangle.

31 Un triangle ABC tel que $AB = 3$ mm $= 0{,}3$ cm, $BC = 4$ cm et $CA = 5$ cm, qui n'existe pas (inégalité triangulaire non vérifiée : $5 > 4 + 0{,}3$), ne peut pas être rectangle.

32 **1.** Si $AB = 1$ dm $= 10$ cm, $AC = 24$ cm et $BC = 26$ cm, alors $[BC]$ est le plus grand côté du triangle ABC ;

de plus : $BC^2 = 26^2 = 676$,

$AB^2 + AC^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$;

donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et ABC est un triangle rectangle en A.

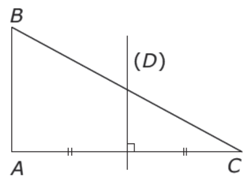
2. Si $AB = 1{,}5$ m $= 15$ dm, $AC = 170$ cm $= 17$ dm et $BC = 8$ dm, alors $[AC]$ est le plus grand côté du triangle ABC ; de plus :

$AC^2 = 17^2 = 289$,

$BA^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$;

donc $AC^2 = BA^2 + BC^2$ et ABC est un triangle rectangle en B.

33 **1.**



2. Si ABC est tel que $AB = 3{,}2$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 6{,}8$ cm, alors :

$BC^2 = 6{,}8^2 = 46{,}24$;

$AB^2 + AC^2 = 3{,}2^2 + 6^2 = 46{,}24$.

Donc ce triangle est rectangle en A et la médiatrice (D) du segment $[AC]$ est parallèle à la droite (AB).

34 **1. a.** Le segment $[RT]$ est un diamètre du cercle (C), circonscrit au triangle RST.
b. On en déduit que ce triangle est rectangle en S.
2. Si $ST = 3{,}6$ cm et $RT = 6$ cm, alors

$RS = \sqrt{RT^2 - ST^2} = 6^2 - 3{,}6^2 = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ cm.

35 $28^2 + 9{,}6^2 = 876{,}16$ et $29{,}6^2 = 876{,}16$;

donc, d'après la propriété de Pythagore, le triangle ILK est rectangle en L.

$11^2 + 9{,}6^2 = 213{,}16$ et $14{,}6^2 = 213{,}16$;

donc, d'après la propriété de Pythagore, le triangle KJL est rectangle en J.

On en déduit que les droites (IL) et (JK), perpendiculaires à la même droite (LJ), sont parallèles.

36 **1. a.** D'après la propriété de Pythagore dans le triangle BCF, rectangle en F, on a :

$BC^2 = FB^2 + FC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$;

donc : $BC = \sqrt{169} = 13$.

b. $AC^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$;

$AB^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117$.

2. On a : $BC^2 = AC^2 + AB^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A, c'est-à-dire : $(AB) \perp (AC)$.

Bien comprendre, mieux rédiger

37 **Repérer les hypoténuses**

Dans le triangle LIR, rectangle en L,
on a : $IR^2 = LI^2 + LR^2$.

Dans le triangle RIU, rectangle en R,
on a : $IU^2 = RI^2 + RU^2$.

Dans le triangle EIR, rectangle en E,
on a : $IR^2 = EI^2 + ER^2$.

Dans le triangle ERU, rectangle en E,
on a : $RU^2 = ER^2 + EU^2$.

38 **Différentes bonnes réponses**

a. $MO^2 = MN^2 + NO^2$;

b. $MO^2 = MT^2 - TO^2$.

39 Suivre un modèle de rédaction

1. Il est demandé de calculer le périmètre du losange *ABCD*, de centre *I* et tel que :

• $AC = 8$ cm,

• $BD = 12$ cm.

2. Solution :

ABCD est un losange, donc :

• ses diagonales [*AC*] et [*BD*] sont perpendiculaires en *I*. Par conséquent, le triangle *ABI* est rectangle en *I* ;

• ses diagonales [*AC*] et [*BD*] ont le même milieu *I*, d'où :

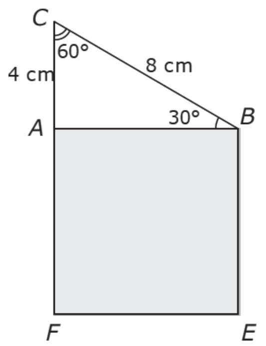
$IA = \frac{AC}{2} = 4$ cm et $IB = \frac{BD}{2} = 6$ cm. »

3. a. D'après la propriété de Pythagore,

$AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} = 52$.

b. Donc le périmètre de *ABCD* est : $4\sqrt{52} \approx 28{,}8$ cm.

40 Avant de calculer



mes $\widehat{BAC} = 180 - (30 + 60) = 90°$;

ABC est donc un triangle rectangle en *A*, d'hypoténuse [*BC*].

L'aire du carré *ABEF* est égale à AB^2 ; or, d'après la propriété de Pythagore :

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 64 - 16 = 48$.

Donc : aire(*ABEF*) = 48 cm^2.

41 Repérer les bons côtés

Correction du travail de Denis :

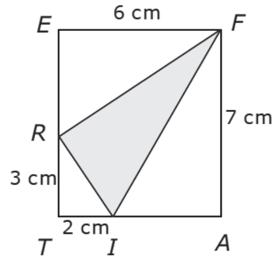
$AC^2 - AB^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576$.

$BC^2 = 24^2 = 576$.

Je constate que $AC^2 - AB^2 = BC^2$.

Donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, *ABC* est un triangle rectangle en *B*.

42 Suivre les conseils du professeur



Question

Le triangle *RIF* est-il rectangle ?

Solution

RTI est un triangle rectangle en *T* ; donc, d'après la propriété de Pythagore,

$RI^2 = RT^2 + TI^2 = 3^2 + 2^2$

$RI^2 = 9 + 4 = 13$.

REF est un triangle rectangle en *E* ; donc, d'après la propriété de Pythagore,

$RF^2 = RE^2 + EF^2 = 4^2 + 6^2$

$RF^2 = 16 + 36 = 52$.

IAF est un triangle rectangle en *A* ; donc, d'après la propriété de Pythagore,

$IF^2 = IA^2 + AF^2 = 4^2 + 7^2$

$IF^2 = 16 + 49 = 65$.

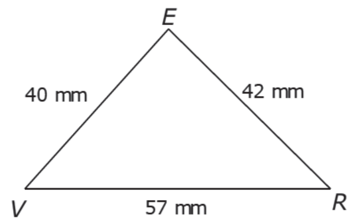
[*IF*] est le plus grand côté du triangle *RIF* ;

$IF^2 = 65$ et $RI^2 + RF^2 = 13 + 52 = 65$;

donc $IF^2 = RI^2 + RF^2$ et, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *RIF* est rectangle en *R*.

43 Ne pas se contenter d'une figure

1.a.



b. Le triangle *VER* semble effectivement rectangle en *E*.

2. En réalité *VER* n'est pas un triangle rectangle, car (d'après la réciproque de la propriété de Pythagore) le carré de la longueur de son plus grand côté est différent de la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (en effet, $57^2 = 3\,249$ et $40^2 + 42^2 = 1\,600 + 1\,764 = 3\,364$).

Exercices d'approfondissement

44 La même hypoténuse

1. D'après la propriété de Pythagore, dans les deux triangles *POT* et *ROT*, rectangles respectivement en *P* et *R*, on a :

$OT^2 = RO^2 + RT^2$ et $OT^2 = PO^2 + PT^2$,

$OT^2 = 8^2 + 11^2$ et $OT^2 = 13^2 + PT^2$,

$OT^2 = 185$ et $OT^2 = 169 + PT^2$.

2. On en déduit que : $PT^2 = 185 - 169 = 16$;
c'est-à-dire : $PT = 4$ cm.

45 Périmètre et aire d'un trapèze

D'après la propriété de Pythagore, dans les deux triangles AUE et UEB, rectangles respectivement en U et E, on a :

$AE^2 = UA^2 + UE^2$ et $UB^2 = EU^2 + EB^2$;
$AE^2 = 2^2 + 1{,}5^2$ et $UB^2 = 1{,}5^2 + 3{,}6^2$;
$AE^2 = 6{,}25$ et $UB^2 = 15{,}21$.
Donc : $AE = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ et $UB = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9$.

1. Périmètre du trapèze : $2 + 2{,}5 + 3{,}6 + 3{,}9 = 12$ cm.

2. Aire du trapèze : $\dfrac{2 \times 1{,}5}{2} + \dfrac{1{,}5 \times 3{,}6}{2} = 1{,}5 + 2{,}7$
$= 4{,}2\ \text{cm}^2$.

46 Calculs en cascade

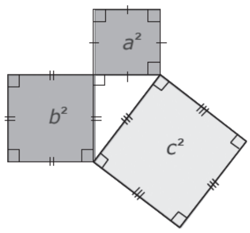
1. Dans le triangle ABC, rectangle en A, le milieu M de l'hypoténuse $[BC]$ est le centre de son cercle circonscrit ;
donc $MA = MB = MC$ et $BC = 14$ cm.

2. $HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33} \approx 5{,}7$ cm ;
$BH = BM - HM \approx 7 - \sqrt{33} \approx 1{,}3$ cm ;
$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} \approx \sqrt{1{,}3^2 + 4^2} \approx \sqrt{17{,}69} \approx 4{,}2$ cm ;
$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} \approx \sqrt{12{,}7^2 + 4^2} \approx \sqrt{177{,}29} \approx 13{,}4$ cm.

47 Par soustraction

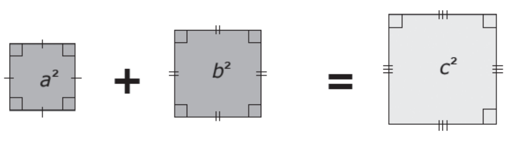
Dans le triangle ABC, rectangle en C, on a :
$AB = \sqrt{122 + 52} = \sqrt{169} = 13$ cm.
On en déduit que :
$BM = 13 - 12 = 1$ cm et $AN = 13 - 5 = 8$ cm ;
donc : $MN = 13 - 1 - 8 = 4$ cm.

48 Un défi de carrés

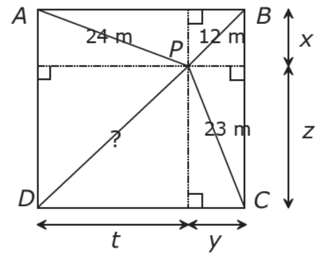


En construisant un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b, l'hypoténuse de ce triangle est c tel que $c^2 = a^2 + b^2$ (propriété de Pythagore).

C'est-à-dire que la somme des aires des deux carrés, de côtés a et b, est égale à l'aire du carré de côté c.



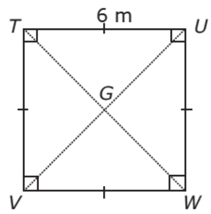
49 Pythagore puissance 4



1. D'après la propriété de Pythagore :
• $AP^2 = x^2 + t^2$ et $CP^2 = y^2 + z^2$,
donc : $AP^2 + CP^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$;
• $BP^2 = x^2 + y^2$ et $DP^2 = z^2 + t^2$,
donc : $BP^2 + DP^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

2. On en déduit que : $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$,
c'est-à-dire : $DP^2 = AP^2 + CP^2 - BP^2 = 24^2 + 23^2 - 12^2$
$= 576 + 529 - 144 = 961$,
donc : $DP = \sqrt{961} = 31$ m.

50 Une demi-diagonale



La longueur minimale de la laisse, pour que le chien atteigne sa gamelle, doit être égale à TG.
Or, dans le triangle TVW, rectangle en V,
$TW = \sqrt{TV^2 + VW^2} = 72$ cm.

Donc : $TG = \dfrac{TW}{2} \approx 4{,}2$ m (au dm près).

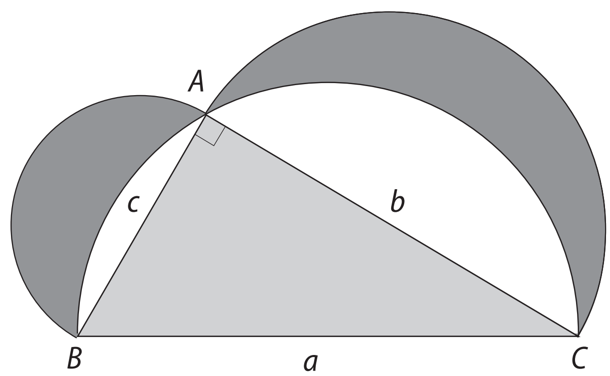
51 Les lunules d'Hippocrate (400 avant J.-C.)

(Manuel : lire π à la place du signe ≠.)

1. Aire d'un demi-disque de diamètre d :
$\dfrac{1}{2} \times \pi \times \dfrac{d}{2} \times \dfrac{d}{2} = \dfrac{\pi d^2}{8}$.

2. a. Aire totale de la figure :
$\dfrac{bc}{2} + \dfrac{\pi b^2}{8} + \dfrac{\pi c^2}{8}$.

b. Aire du demi disque de diamètre $[BC]$: $\dfrac{\pi a^2}{8}$.



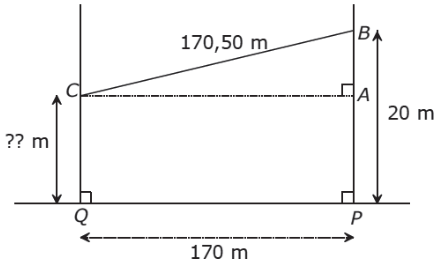
c. L'aire totale des lunules (en gris foncé) étant la différence entre l'aire totale de la figure et l'aire du demi-disque de diamètre $[BC]$, cette aire est égale à :

$\frac{bc}{2} + \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{bc}{2} + \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{bc}{2}$, (car, d'après la propriété de Pythagore pour le triangle *ABC* rectangle en *A*, on a : $a^2 = b^2 + c^2$) ; c'est-à-dire que l'aire des lunules est égale à l'aire du triangle.

Activités d'intégration

52 La tyrolienne

Schéma illustratif de la situation :



P et *Q* sont les pieds des deux arbres plantés perpendiculairement à un sol horizontal (d'où les angles droits en *P* et *Q*).

La distance entre les deux arbres est $PQ = 170$ m (que l'on retrouve en *AC*).

La tyrolienne, de longueur 170,50 m, est fixée :

- en *B* sur le premier arbre, à 20 m du sol ;
- en *C* sur le second arbre.

D'après la propriété de Pythagore dans le triangle *ABC*, rectangle en *A*, on a :

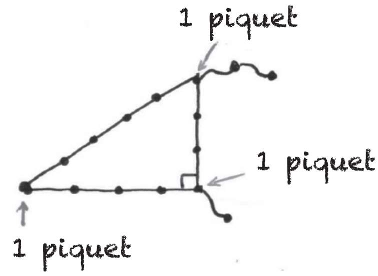
$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{170{,}5^2 - 170^2} = \sqrt{170{,}25} \approx 13$ m.

On en déduit que le point de fixation de la tyrolienne, sur le second arbre, est à : $20 - 13 \approx 7$ m du sol.

53 Les méthodes égyptiennes

- Avec une corde à 6 nœuds :

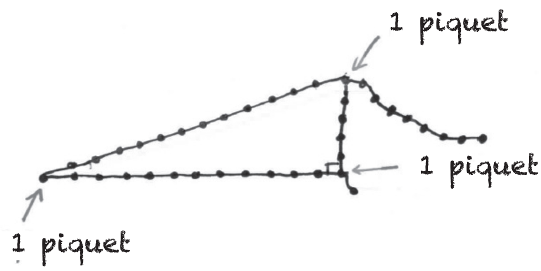
(*À main levée*)



L'angle est droit car $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ et $5^2 = 25$.

- Avec une corde à 14 nœuds :

(*À main levée*)



L'angle est droit car $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ et $13^2 = 169$.

11 Cercle

Manuel pages 123 à 130

Activités d'apprentissage	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Tangente à un cercle [2 p 125]	7, 8, 9, 12, 13	24, 25	28, 29, 30, 31
	Apprendre à construire des tangentes à un cercle [p 126]	**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, 14	21, 22,	
2	Angle au centre d'un cercle [3 p 125]	15, 16, 17, 18, 19, 20	26	32

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Introduction et contrôle des pré-requis

Champ de vision

1. La portée du champ de vision de l'observateur est de : $2{,}6 \times 200 = 520$ m.

2. Si l'observateur se tourne :

a. il verra l'éléphant, situé à $2{,}5 \times 200 = 500$ m ;

b. il verra la girafe, située à $2{,}6 \times 200 = 520$ m ;

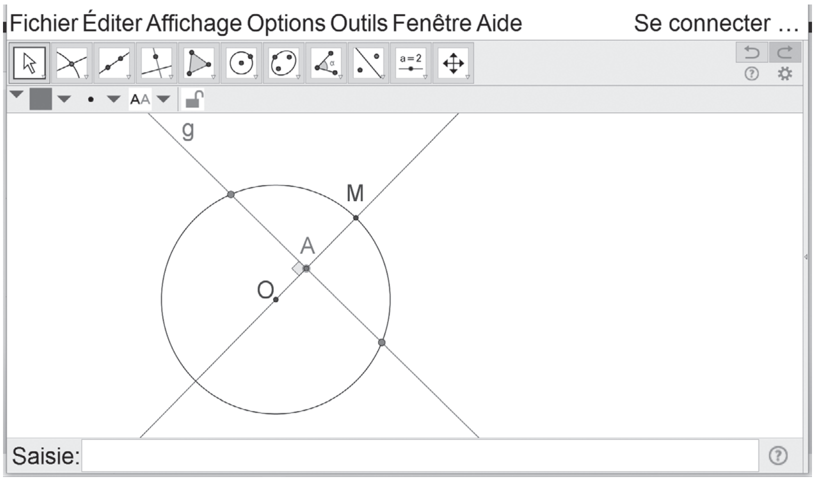
c. il ne verra pas la gazelle, située à $2{,}8 \times 200 = 560$ m.

3. En effectuant un tour sur lui-même, la figure géométrique illustrant l'ensemble du champ de vision de l'observateur est un disque (centré en l'observateur, de rayon 2,5 cm).

Activités d'apprentissage

1. Position d'une droite et d'un cercle

1.

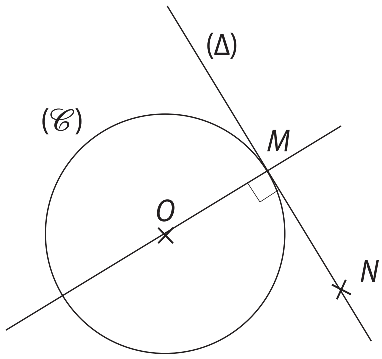


On observe que :
- lorsque $OA < OM$, il y a deux points communs au cercle et à la droite ;
- lorsque $OA = OM$, il n'y en a qu'un seul ;
- lorsque $OA > OM$, il n'y en a pas.

2. a. $ON > OM$ car le triangle OMN est rectangle en M et $[ON]$ est son hypoténuse.

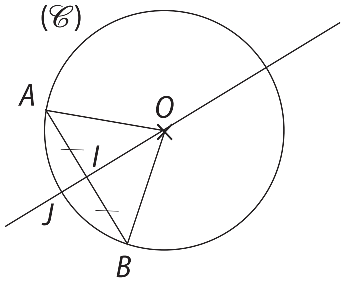
b. N ne peut pas appartenir au cercle $(\mathscr{C})$.

c. (Δ) et $(\mathscr{C})$ n'ont qu'un seul point commun : M.



2. Angle au centre d'un cercle

1.



2. $\text{mes}\,\widehat{AOB} = 60° = \dfrac{1}{6} \times 360°$.

Donc l'arc $\widehat{AB}$ a pour longueur $\dfrac{1}{6} \times$ périmètre de ($\mathscr{C}$).

Ainsi, la longueur ℓ de l'arc $\widehat{AB}$ est :

$\ell = \dfrac{1}{6} \times 2 \times \pi \times 4 = \dfrac{4}{3} \times \pi \text{ cm} \approx 4{,}2 \text{ cm}$.

3. a. Le triangle AOB est isocèle en O (car $OA = OB = 4$ cm) donc la médiatrice issue de O est aussi sa médiatrice.

Ainsi, par la symétrie par rapport à la droite (OI) :

- O a pour image O ;
- I a pour image I ;
- A a pour image B ;
- et donc $\widehat{AOI}$ a pour image $\widehat{BOI}$.

Or, la symétrie par rapport à une droite conserve les mesures des angles, donc :

$\text{mes}\,\widehat{AOI} = \text{mes}\,\widehat{BOI}$.

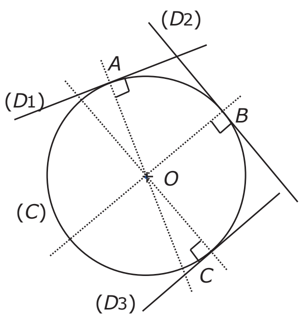
b. Ainsi, la longueur ℓ' de l'arc $\widehat{AJ}$ est égale à la moitié de la longueur ℓ de l'arc $\widehat{AB}$.

Donc, $\ell' = \dfrac{2}{3} \times \pi \text{ cm} \approx 2{,}1 \text{ cm}$.

Méthodes et savoir-faire

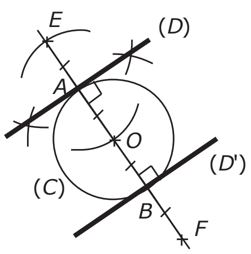
Apprendre à construire des tangentes à un cercle

1 **1.**



2. Construction des tangentes (D_1), (D_2) et (D_3) à ($\mathscr{C}$) en A, B et C, à l'aide d'une règle et d'une équerre.

2 **1.**

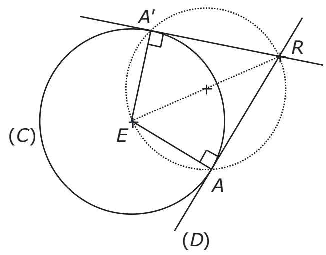


[AB] est un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$).

2. Construction des tangentes (D) et (D') à ($\mathscr{C}$) en A et B, à l'aide d'une règle et d'un compas : si E et F sont les symétriques de O par rapport à A et B, alors (D) et (D') sont les médiatrices de [OE] et [OF].

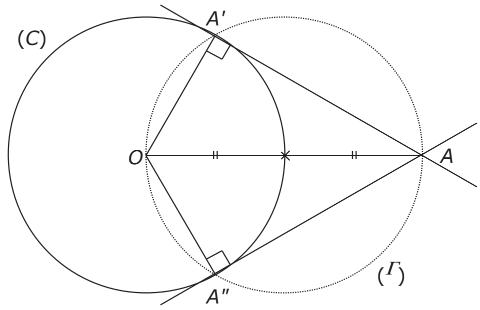
3. Les droites (D) et (D'), perpendiculaires en A et B à la droite (AB), sont parallèles entre elles.

3 **1.**



2. Si le cercle de diamètre [ER] recoupe ($\mathscr{C}$) au point A', la deuxième tangente à ($\mathscr{C}$) qui passe par le point R est la droite (RA').

4 **1.**



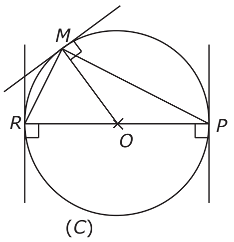
($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de rayon 3 cm ;

$OA = 6$ cm ;

(Γ) est le cercle de diamètre [OA].

2. Si A' et A'' sont les points d'intersection de ($\mathscr{C}$) et (Γ), alors (AA') et (AA'') sont les deux tangentes à ($\mathscr{C}$) qui passent par A.

5 **1.**

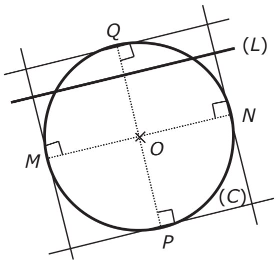


2. Si *O* est le milieu de [*RP*], alors :

• les tangentes à (𝒞) en *R* et *P* sont les droites perpendiculaires à (*RP*) respectivement en *R* et *P* ;

• la tangente à (𝒞) en *M* est la droite perpendiculaire à (*OM*) en *M*.

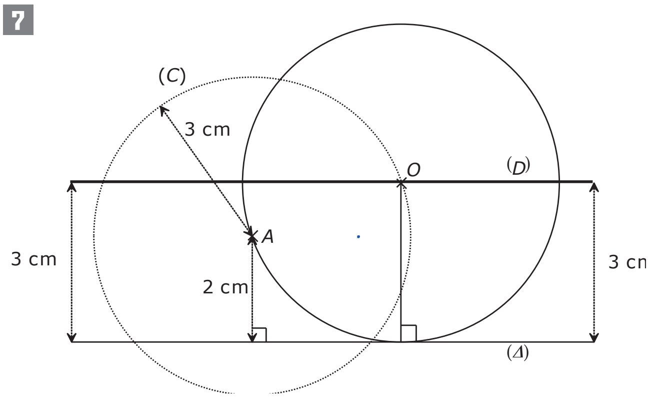
6 **1.**



2. a. Si *P* et *Q* sont les points d'intersection de (𝒞) avec la droite passant par *O* et perpendiculaire à (*L*), alors les tangentes à (𝒞) parallèles à la droite (*L*) passent par *P* et *Q* ;

b. si *M* et *N* sont les points d'intersection de (𝒞) avec la droite passant par *O* et parallèle à (*L*), alors les tangentes à (𝒞) perpendiculaires à la droite (*L*) passent par *M* et *N*.

7



1. Données : une droite (Δ) et un point *A* à 2 cm de (Δ).

2. Pour construire un cercle de centre *O*, de rayon 3 cm, passant par *A* et tangent à (Δ) :

• tracer la droite (*D*) parallèle à (Δ), située du même côté que *A* par rapport à (Δ) et telle que la distance entre (Δ) et (*D*) soit égale à 3 cm ;

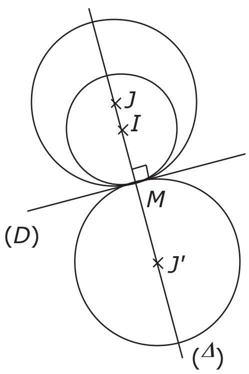
• tracer le cercle (𝒞) de centre *A* et de rayon 3 cm ;

• le centre *O* d'un cercle cherché est l'un des deux points d'intersection de (*D*) avec (𝒞).

Exercices d'application

Tangente à un cercle

8 **1.**



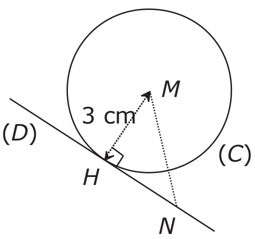
2. a. Le centre d'un cercle passant par *M* et tangent à la droite (*D*) doit être situé sur la droite (Δ), perpendiculaire en *M* à (*D*).

b. Si *I*, *J* et *J'* sont les points de (Δ) tels que *MI* = 2 cm, *MJ* = 3 cm et *MJ'* = 3 cm, alors :

• le cercle de centre *I* passant par *M* est tangent à (*D*) et a pour rayon 2 cm ;

• les cercles de centres *J* et *J'* passant par *M* sont tangents à (*D*) et ont pour rayon 3 cm.

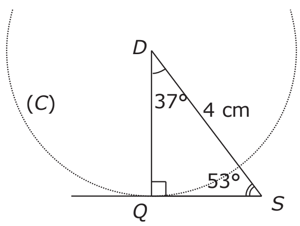
9 **1.**



2. a. Le cercle (𝒞), de centre *M* et de rayon 3 cm, est tangent en *H* à la droite (*D*).

b. En effet pour tout point *N*, appartenant à (*D*) et distinct de *H*, on a *MN* > 3 cm ; donc *N* ∉ (𝒞), c'est-à-dire (*D*) et (𝒞) ont un seul point commun.

10 **1.**

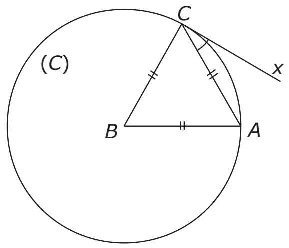


2. a. (𝒞) est le cercle de centre *D* et de rayon *DQ*.

b. La droite (*SQ*) est tangente à (𝒞) en *Q* car :

mes $\widehat{DQS} = 180 - 37 - 53 = 90°$.

11 **1.**



mes $\widehat{ACx} = 30°$.

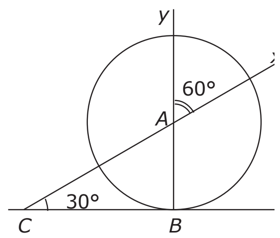
2. a. $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre B passant par A.

b. Dans le triangle équilatéral ABC :

• $BC = BA$ donc $(\mathscr{C})$ passe aussi par C ;

• mes $\widehat{BAC} = 60°$ donc mes $\widehat{BCx} = 30 + 60 = 90°$, et la droite support de $[Cx)$ est tangente en C à $(\mathscr{C})$.

12

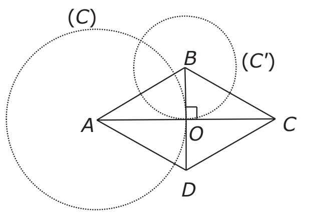


B appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre A ;

mes $\widehat{ABC} = 180 - 60 - 30 = 90°$;

donc la droite (BC) est tangente au cercle de centre A passant par B.

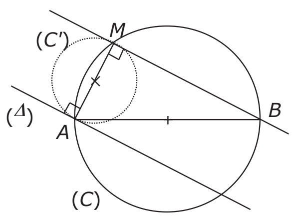
13 **1.**



2. Dans le losange $ABCD$ les diagonales (AC) et (BD) sont des droites perpendiculaires en O.

On en déduit que la droite (AC) est tangente à $(\mathscr{C}')$ en O et que la droite (BD) est tangente à $(\mathscr{C})$ en O.

14 **1. a.**



b. M est un point du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.

c. $(\mathscr{C}')$ est le cercle de diamètre $[AM]$.

d. La droite (Δ) est la tangente en A à $(\mathscr{C}')$.

2. $M \in (\mathscr{C})$ donc MAB est un triangle rectangle en M et $(MB) \perp (AM)$.

(Δ) tangente en A au cercle de diamètre $[AM]$, donc $(\Delta) \perp (AM)$.

Finalement les droites (Δ) et (AM) sont parallèles.

Angle au centre d'un cercle

15 Les angles au centre sont : $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOF}$.

16 Les arcs interceptés par ces angles sont :

• $\overset{\frown}{FD}$; • $\overset{\frown}{AD}$; • $\overset{\frown}{BD}$; • $\overset{\frown}{FA}$.

17 **a.** $\ell = \dfrac{120}{180} \times \pi \times 100 = \dfrac{200}{3} \times \pi \approx 209$ cm.

b. $\ell' = \dfrac{80}{180} \times \pi \times 20 = \dfrac{8}{9} \times \pi \approx 3$ dm.

18 **1.** $OA = OB = AB = 5$ cm, donc le triangle OAB est équilatéral.

2. D'après le **1.**, mes $\widehat{AOB} = 60°$.

Donc la longueur ℓ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est :

$\ell = \dfrac{60}{180} \times \pi \times 5 = \dfrac{5}{3} \times \pi \approx 5{,}2$ cm.

19 $\ell_{\overset{\frown}{MN}} = \dfrac{70}{180} \times \pi \times RN$

et $\ell_{\overset{\frown}{PQ}} = \dfrac{70}{180} \times \pi \times RQ$.

Or $RN = RQ$ donc $\ell_{\overset{\frown}{MN}} = \ell_{\overset{\frown}{PQ}}$.

(c'est la propriété 2 du paragraphe **3. b.** du cours).

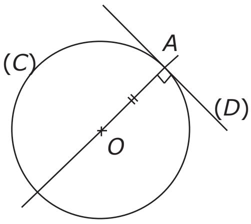
20 D'après la propriété 1 du paragraphe **3. b.** du cours, on en déduit que :

mes $\widehat{IOJ}$ = mes $\widehat{KOL}$.

Bien comprendre, mieux rédiger

21 Droite et cercle

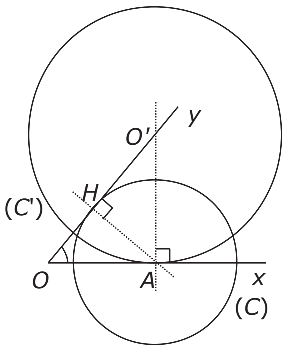
1.



2. La droite (*D*) est tangente en *A* à ($\mathscr{C}$).
(*D*) et ($\mathscr{C}$) ont un seul point en commun.

22 Programmes de construction

1.



2. Construction du cercle ($\mathscr{C}$) de centre *A* et tangent à [*Oy*) :
• tracer la droite passant par *A* et perpendiculaire à[*Oy*), droite qui coupe [*Oy*) en *H* ;
• ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre *A* passant par *H*.

3. Construction du cercle ($\mathscr{C}'$) centré sur [*Oy*) et tangent en *A* à [*Ox*) :
• tracer la droite passant par *A* et perpendiculaire à [*Ox*), droite qui coupe [*Oy*) en *O'* ;
• ($\mathscr{C}'$) est le cercle de centre *O'* passant par *A*.

23 **1.** La tangente en *A* à un **cercle** de centre *O* est la droite **perpendiculaire** en *A* à la droite support du segment [*OA*].

2. *O* est le centre du cercle ($\mathscr{C}$). La distance du point *O* à une tangente à ($\mathscr{C}$) est égale au **rayon** du cercle ($\mathscr{C}$).

3. *C* et *D* sont deux points d'un cercle ($\mathscr{C}$) de centre *O*. $\widehat{COD}$ est **l'angle au centre** qui **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{CD}$.

4. Une droite (*D*) coupe un cercle ($\mathscr{C}$) en un seul point *M*. On peut dire alors que (*D*) est **la tangente** au point *M* **au cercle** ($\mathscr{C}$).

24 ① D'après la propriété 2 du paragraphe **3. b**.

D'après le codage,
mes $\widehat{EOF}$ = mes $\widehat{GOH}$

↓

Conclusion :
les arcs $\overset{\frown}{EF}$ et $\overset{\frown}{GH}$ sont de même longueur.

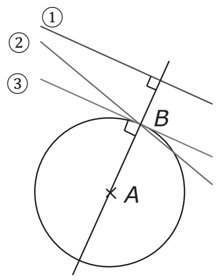
② D'après la propriété 1 du paragraphe **3. b**.

D'après le codage,
les arcs $\overset{\frown}{ML}$ et $\overset{\frown}{KJ}$ sont de même longueur

↓

Conclusion :
mes $\widehat{MOL}$ = mes $\widehat{KOJ}$.

25 À la recherche d'erreurs



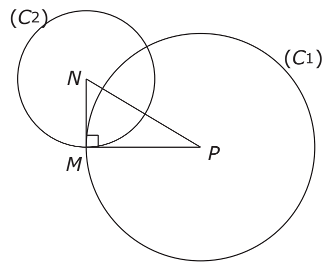
1. La réponse de Léa est fausse car la droite ① n'a pas de point commun avec le cercle.

2. La réponse de Chloé est fausse car la droite ② a deux points communs avec le cercle.

3. La droite ③ est effectivement une tangente au cercle car cette droite a un seul point commun avec ce cercle.

26 Triangle rectangle et tangentes

1.



Le triangle *MNP*, rectangle en *M*, est tel que :
MN = 3 cm, *MP* = 5 cm.

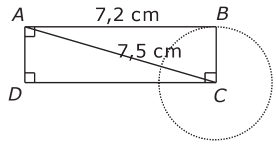
2. a. (*MN*) ⊥ (*MP*).
b. La distance de *P* à (*MN*) est égale à 5 cm.
c. La distance de *N* à (*MP*) est égale à 3 cm.

3. (*NM*) est la tangente en *M* au cercle (C1), de centre *P* et de rayon [*PM*], car (*NM*) est la droite perpendiculaire en *M* à (*PM*) ;
(*PM*) est la tangente en *M* au cercle (C2), de centre *N* et de rayon [*NM*], car (*PM*) est la droite perpendiculaire en *M* à (*NM*).

Exercices d'approfondissement

27 Utiliser des propriétés

1.

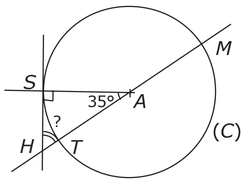


Le quadrilatère *ABCD*, qui a trois angles droits, est un rectangle ; donc *ABC* est un triangle rectangle en *B*.

2. Le rayon du cercle de centre *C*, tangent à (*AB*), est :
$CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{7{,}52 - 7{,}22} = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ cm.

28 Déduire la mesure d'un angle

1.



a. [*MT*] est un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$) de centre *A*.

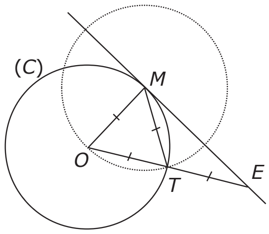
b. *S* est un point de ($\mathscr{C}$) tel que mes $\widehat{TAS} = 35°$.

c. La tangente en *S* à ($\mathscr{C}$) coupe (*MT*) en *H*.

2. Mes $\widehat{AHS} = 180 - 90 - 35 = 55°$.

29 Une tangente sans équerre

1.



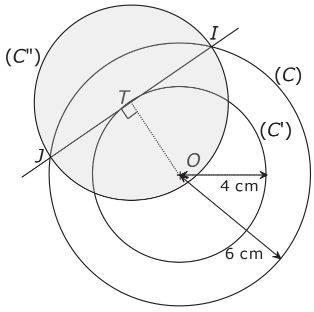
2. a. Le triangle *TOM* est équilatéral. Donc chacun de ses angles mesure 60°.

b. Dans le triangle *TME*, isocèle en *T*, on a :
mes $\widehat{MTE} = 180 - 60 = 120°$;
mes $\widehat{TME}$ = mes $\widehat{TEM} = \dfrac{180 - 120}{2} = 30°$.

c. Finalement le triangle *MOE* est rectangle en *M*, c'est-àdire que la droite (*ME*) est la tangente au cercle ($\mathscr{C}$) en *M*.

30 Des aires comparables

1.



2. Si *R* est le rayon du cercle ($\mathscr{C}$"), alors :

a. $R^2 = OI^2 - OT^2 = 6^2 - 4^2 = 20$;

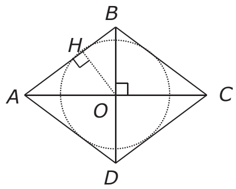
b. l'aire du disque limité par ($\mathscr{C}$") est égale à 20π.

3. a. Aire de la couronne circulaire limitée par ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) :
$6^2\pi - 4^2\pi = 20\pi$.

b. Les aires calculées précédemment sont donc égales.

31 Cercle inscrit dans un losange

1.



ABCD est un losange de centre *O*, tel que *AC* = 4 cm et *BD* = 3 cm.

2. $AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2^2 + 1{,}5^2 = 6{,}25$;
donc : $AB = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ cm ;
périmètre de *ABCD* = 10 cm.

3. a. Aire de $AOB = \dfrac{2 \times 1{,}5}{2} = 1{,}5$ cm^2.

b. Si *H* est le pied de la perpendiculaire à (*AB*) passant par *O*, l'aire de *AOB* est aussi égale à $\dfrac{\text{AB} \times \text{OH}}{2}$ donc :
$OH = \dfrac{2 \times 1{,}5}{2{,}5} = 1{,}2$ cm.

4. Le cercle de centre *O*, tangent à chacun des côtés du losange, passe par le point *H*.

32 Sur l'équateur

1. a. mes $\widehat{QOL} = 78 + 9 = 87°$.
Donc la longueur $\ell_{\widehat{QL}}$ de l'arc de cercle $\widehat{QL}$ est :
$\ell_{\widehat{QL}} = \dfrac{87}{180} \times \pi \times 6\,370 \approx 9\,672$ km.

b. La longueur de l'équateur est le périmètre du cercle équateur, donc :
$\ell_{éq} = 2 \times \pi \times 6\,370 \approx 40\,024$ km.

2. La longueur $\ell_{\widehat{LK}}$ de l'arc de cercle $\widehat{LK}$ est 2 557 km.
Donc $2\,557 = \dfrac{\text{mes}\,\widehat{LOK}}{180} \times \pi \times 6\,370$,
donc mes $\widehat{LOK} = \dfrac{2\,557 \times 180}{\pi \times 6\,370} \approx 23°$.

Kampala étant situé à l'Est (car l'Ouganda est à l'Est du Gabon), la longitude de Kampala est de 32° Est (9° + 23° Est).

Activités d'intégration

33 La station spatiale internationale

• On calcule la longueur ℓ de l'arc $\widehat{DF}$:

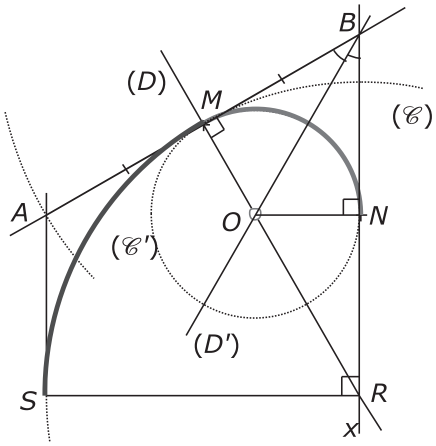
$$\ell = \frac{83}{180} \times \pi \times (6\,370 + 400) \approx 9\,807{,}18 \text{ km}.$$

• De plus, la sortie dans l'espace a duré $t = 21$ min, c'est-à-dire $t = \frac{21}{60}$ h $= 0{,}35$ h.

• Ainsi, la vitesse, arrondie au km/h de la station spatiale internationale est :

$$v = \frac{\ell}{t} \approx \frac{9\,807{,}18}{0{,}35} \approx 28\,020 \text{ km/h}.$$

34 Construction architecturale



Construction d'un arc rampant *SMN* ($\widehat{SM}$ en gris foncé, $\widehat{MN}$ en gris plus clair) :

• placer un point *B* et tracer la droite verticale (*Bx*) ;

• placer un point *A* tel que :

mes $\widehat{ABx} = 60°$,

$AB = 12$ cm ;

• construire la médiatrice (*D*) du segment [*AB*]; (*D*) coupe [*AB*] en son milieu *M* et (*Bx*) en *R* ;

• déterminer le point d'intersection *S* de la droite passant par *A* et parallèle à (*BR*) avec la droite perpendiculaire à (*BR*) en *R* ;

la droite (*SR*), qui est perpendiculaire à la droite (*BR*) en *R*, est aussi perpendiculaire à la droite (*AS*) en *S* ;

le cercle ($\mathscr{C}$), de centre *R* et passant par *M*, est tangent en *M* à (*AB*) et en *S* à (*AS*) ;

l'arc $\widehat{SM}$ (en gris foncé) est la portion entre *S* et *M* de ($\mathscr{C}$) ;

• construire la bissectrice (*D'*) de l'angle $\widehat{ABR}$;

si (*D'*) coupe (*D*) au point *O*, alors le cercle ($\mathscr{C}'$), de centre *O* et passant par *M*, est tangent en *M* à (*AB*) et en *N* à (*BR*) ;

l'arc $\widehat{MN}$ (en gris) est la portion entre *M* et *N* de ($\mathscr{C}'$).