8 Statistiques

Activités d'introduction

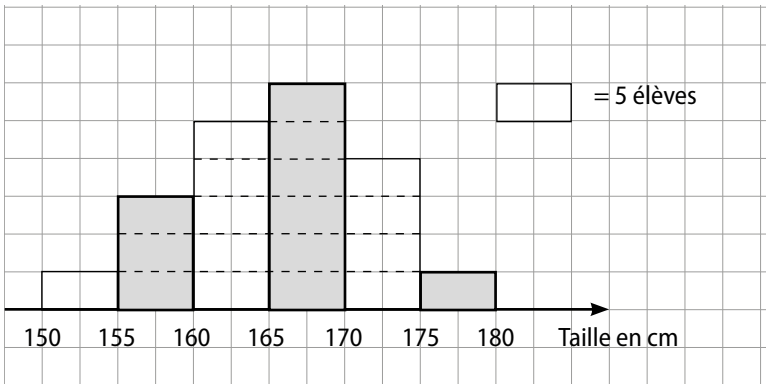
1 Moyenne et diagramme

1. a.

Centre des classes	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5
Effectif	5	15	25	30	20	5

b. $\dfrac{152{,}5 \times 5 + 157{,}5 \times 15 + \ldots + 177{,}5 \times 5}{5 + 15 + \ldots + 20 + 5} = \dfrac{16\,650}{100} = 165{,}5.$

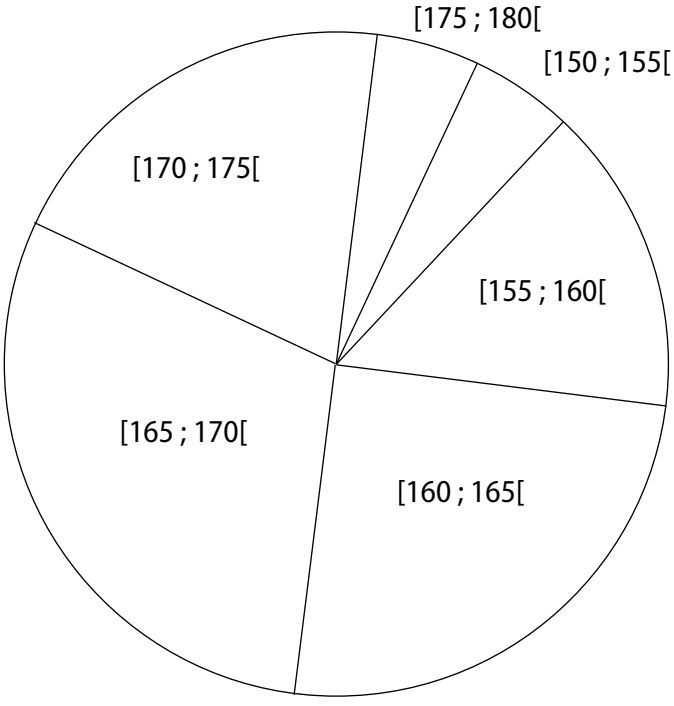
2. a. Histogramme



b.

Classe	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[
Effectif	5	15	25	30	20	5
Mesure d'angle	18°	54°	90°	108°	72°	18°

Diagramme circulaire :



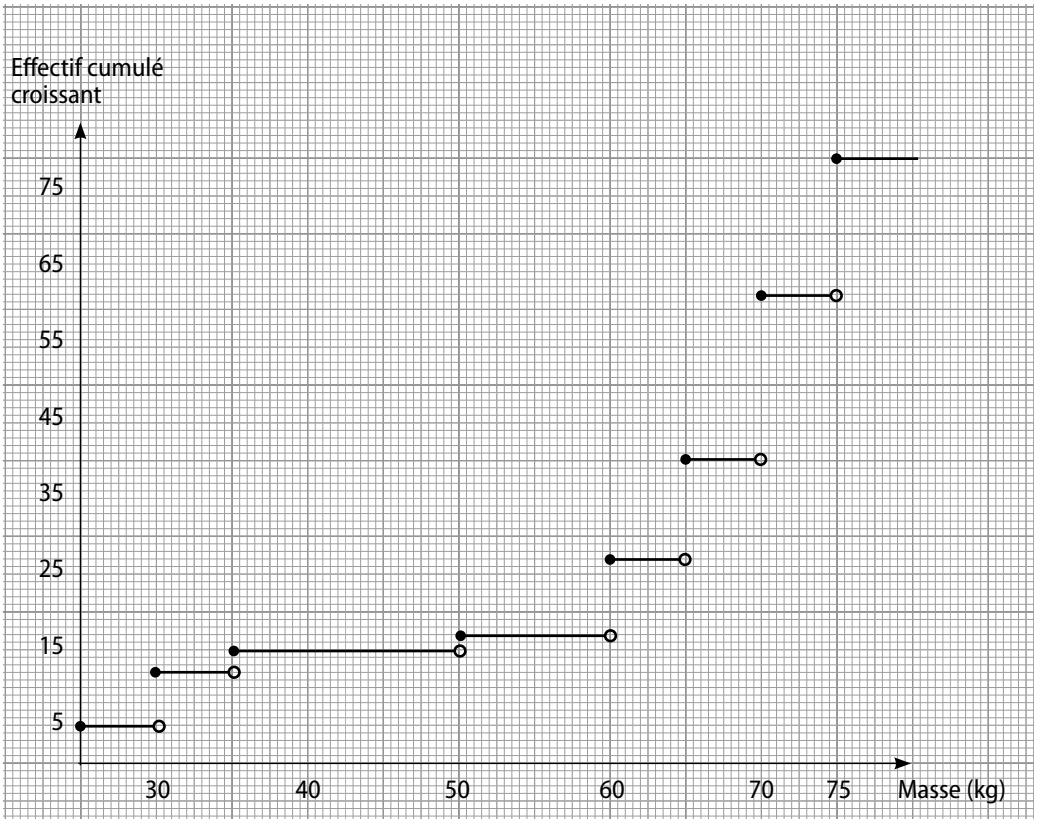
2 Effectifs cumulés croissants, diagramme cumulatif

1. a. 12 impalas ont une masse inférieure ou égale à 30 kg ;
17 impalas ont une masse inférieure ou égale à 50 kg ;
27 impalas ont une masse inférieure ou égale à 60 kg ;
62 impalas ont une masse inférieure ou égale à 70 kg.

b.

Masse	25	30	35	50	60	65	70	75
Effectif cumulé	5	12	15	17	27	40	62	80

2.



3 Médiane

1. a. Non, puisque $N = 13$. Effectif impair.

b. On classe les masses : $59 < 62 < 63 < 65 < 68 < 71 < 72 < 81 < 81 < 87 < 95 < 97 < 103$

6 6

Le lutteur de 72 kg peut être placé dans chaque catégorie.

2. a. Il y aura 6 lutteurs dans chaque poule. **b.** 71 kg pour les légers et 81 kg pour les lourds.

4 Homogène ou hétérogène

1. a. $\frac{7+13+13+12+8+13+11}{7} = \frac{77}{7} = 11$; $\frac{12+13+4+13+19+7+9}{7} = \frac{77}{7} = 11$.

b. Non, car elles sont identiques.

2. a. Atem :

7	13	13	12	8	13	11
– 4	2	2	1	– 3	2	0

Douma :

12	13	4	13	19	7	9
1	2	– 7	2	8	– 4	– 2

b. $\frac{1-41+2+2+1+(-3)+2}{7} = \frac{14}{7} = 2$; $\frac{1+2+(-7)+2+8+(-4)+(-2)}{7} = \frac{26}{7} \approx 4$.

Oui, celui d'Atem est inférieur à celui de Kouma.

c.

7	13	13	12	8	13	11
16	4	4	1	9	4	0

12	13	4	13	19	7	9
1	4	49	4	64	16	4

d. $\frac{16+4+4+1+9+4}{7} = \frac{38}{7} \approx 5{,}4$; $\frac{1+4+49+4+64+16+4}{7} = \frac{142}{7} \approx 20{,}3$.

Oui, même conclusion qu'au **2. b.**

Savoir-faire

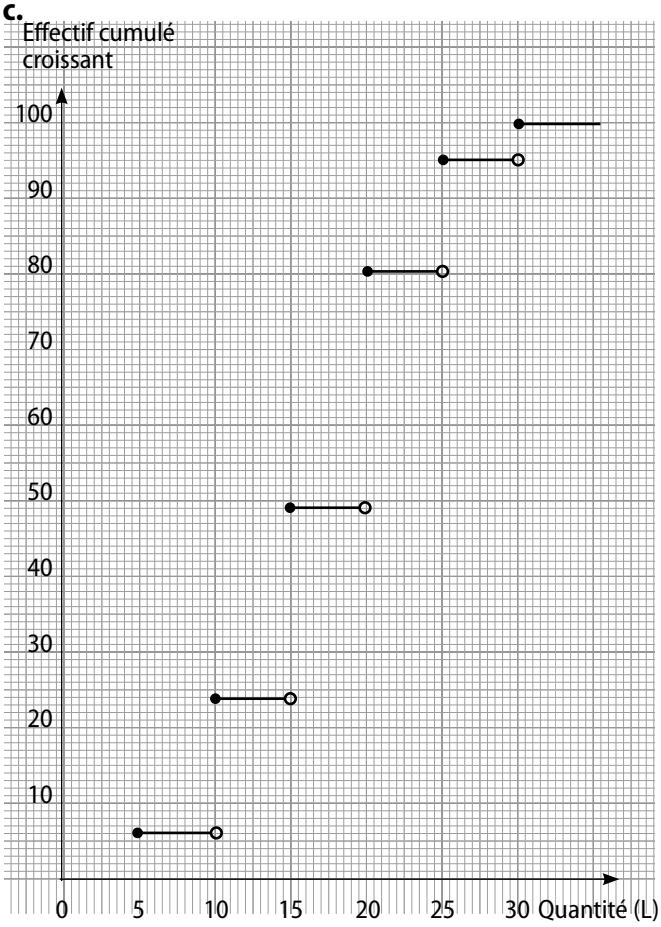
2 a.

Quantité	5	10	15	20	25	30
Effectif	6	18	25	31	15	5
Effectif cumulé croissant	6	24	49	80	95	100

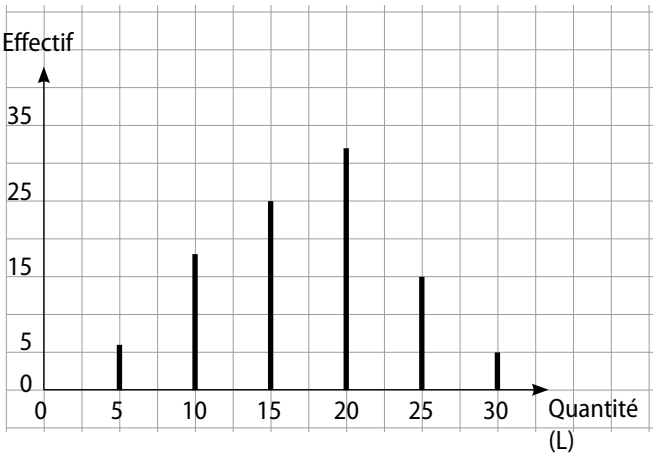
b. 15 est le nombre de fois qu'un client prend 25 L d'essence.

95 est le nombre de fois qu'un client prend au plus 25 L d'essence.

c.



d. Diagramme en bâtons



e. 5 fois. **f.** 49 fois.

4 19 ou 20 peuvent être le mode.

$\bar{x} = \frac{17{,}5 \times 1 + \ldots + 22 \times 3}{1+4+\ldots+3} = \frac{412}{21} \approx 19{,}62$.

• $N = 21$, donc la médiane est la 11e modalité de la série ordonnée, c'est-à-dire 20.

5 Mode : toute valeur de la série car elles ont toutes un effectif égal à 1.

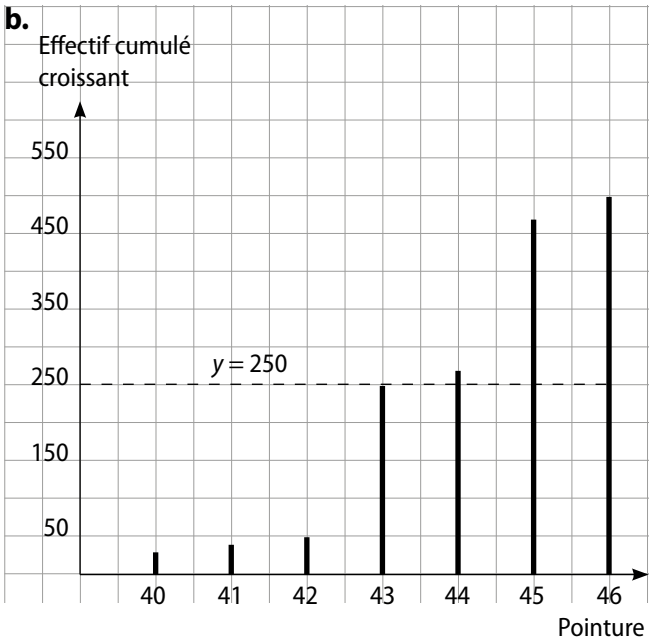
Moyenne : $\frac{53+112+\ldots+90+101}{24} = \frac{2\,327}{24} \approx 96{,}96$.

Médiane : $N = 24$ donc une médiane est un nombre de l'intervalle [12e valeur ; 13e valeur] c'est-à-dire [97 ; 101].

6 a.

Pointure	40	41	42	43	44	45	46
Effectif cumulé croissant	30	40	50	250	270	470	500

b.



c. Voir sur graphique : $y = \dfrac{500}{2}$ soit $y = 250$.
43 peut être une médiane.

d. $N = 500$ donc une médiane est un nombre de l'intervalle [250e valeur ; 251e valeur], c'est-à-dire [43 ; 44].

8 **a.** Centre de classe : 2,5 ; 7,5 et 12,5.

b. $\bar{x} \approx 8{,}6$ et $\sigma \approx 3{,}1$.

9 **a.** $\bar{x} = 1{,}7$ et $\sigma \approx 1{,}1$.

b. $\bar{x} = \dfrac{18 \times 0 + 72 \times 1 + 45 \times 2 + 36 \times 3 + 9 \times 4}{180}$

$= \dfrac{306}{180} = 1{,}7.$

$V = \dfrac{18 \times (-1{,}7)^2 + 72 \times (-0{,}7)^2 + 45 \times (0{,}3)^2 + 36 \times (1{,}3)^2 + 9 \times (2{,}3)^2}{180}$

$= \dfrac{199{,}8}{180} = 1{,}11.$

$\sigma = \sqrt{V} \approx 1{,}05.$

Exercices d'entraînement

10 La population est celle de 8 pays d'Afrique. Le caractère est l'âge médian. Les modalités : 20,8 ; 20,3 ; 18,3 ; 18,6 ; 17,7 ; 18,4 ; 16 et 19,6. L'effectif total est 8.

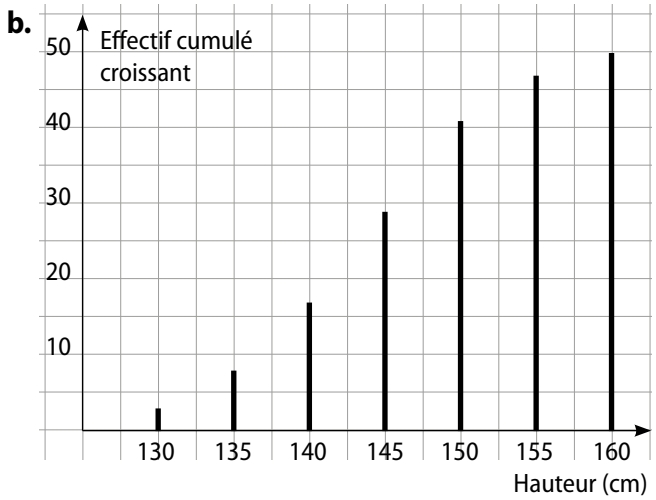
11 La population : les paniers marqués par une joueuse de basket. Le caractère : le nombre de paniers marqués. Les modalités sont 5, 7, 8, 9 et 12. L'effectif total est 15.

12 L'effectif total est 370. Les classes [150 ; 160[, …, [190 ; 200[.
La valeur minimale 150, la valeur maximale 200 et la classe modale [170 ; 180[.

13 **a.**

Hauteur	130	135	140	145	150	155	160
Effectif	3	5	9	12	12	6	3

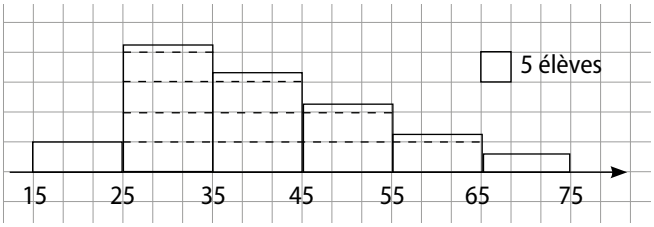
b.



14 **a.**

Tranche d'âge	[15 ; 25]	]25 ; 35]	]35 ; 45]	]45 ; 55]	]55 ; 65]	]65 ; 75]
Effectif	15	65	50	40	25	5

b.



c. Effectif dans [25 ; 45] : 115. $f = \dfrac{115}{200} = 0{,}575$.

15 **a.**

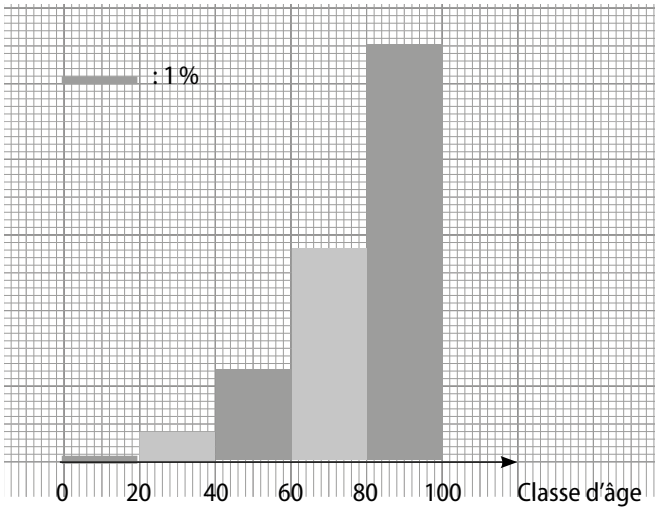
Classe d'âge	Mesure de l'angle	Fréquence (%)
[0 ; 20[	3	1
[20 ; 40[	15	4
[40 ; 60[	43	12
[60 ; 80[	102	28
[80 ; 100[	197	55
Total	360	100

Pour les fréquences :

a	f
360	100

est un tableau de proportionnalité.

b. Histogramme des fréquences en pourcentages :



c.

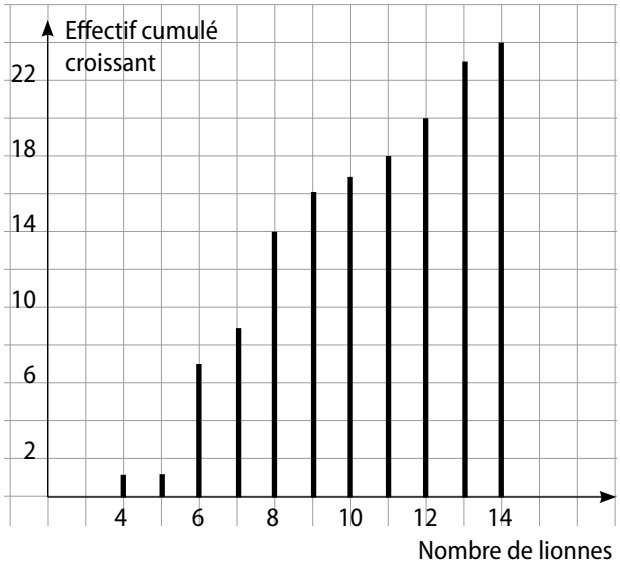
Classe d'âge	[0 ; 10[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[
Effectif	194 000	776 000	2,33 $\overline{M}$*	5,43 $\overline{M}$	10,67 $\overline{M}$

* $\overline{M}$ = millions.

16 **a.** $1 + 6 + 2 + 5 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 = 24$.

b. $\frac{6 + 2 + 5 + 2 + 1}{24} \times 100 \approx 67\ \%$.

c. Diagramme en bâtons des effectifs cumulés croissants :



17 Le mode est 6, la moyenne est 6 et la médiane est 6.

18 Le mode est 13, la moyenne est 14,8 et une médiane est un nombre de l'intervalle [13 ; 15].

19 La moyenne est 315,925 et l'effectif total est 40.

20 **a.** $\frac{116 + 121 + 114 + \ldots + 112}{20} = \frac{2\,340}{20} = 117$.

b.

Taille (cm)	108	111	112	114	116	118
Effectif cumulé croissant	2	3	6	8	9	11
Effectif cumulé décroissant	20	18	17	14	12	11

Taille (cm)	119	120	121	122	125
Effectif cumulé croissant	13	14	16	18	19
Effectif cumulé décroissant	9	7	6	4	2

c. $\frac{N}{2} = 10$. Une médiane est un nombre de l'intervalle [118 ; 118] soit 118.

La seule modalité pour laquelle l'effectif cumulé croissant et l'effectif cumulé décroissant sont supérieurs à 10 est 118. La médiane est 118.

21 **a.** $\frac{36,6 + 35,5 + \ldots + 31,4}{8} = \frac{270,45}{8} \approx 33,8$ ‰.

b. $29,25 \leqslant 31,4 \leqslant 31,7 \leqslant 35 \leqslant 35 \leqslant 35,5 \leqslant 36 \leqslant 36,6$.

$\frac{N}{2} = 4$, une médiane est un nombre de l'intervalle [35 ; 35] soit 35.

c. Effectif de ces pays : $7.\ 7/8 \times 100 = 87,5\ \%$.

Il y a bien au moins 75 % de ces pays qui ont un taux de natalité inférieur ou égal à celui du Bénin.

22 Effectué par les élèves en classe.

23 **a.**

Durée	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Effectif cumulé croissant	9	22	28	32	34

$N = 34$ donc $\frac{N}{2} = 17$. La classe qui contient la médiane est [2 ; 4[.

b. $\frac{9 \times 1 + 13 \times 3 + 6 \times 5 + 4 \times 7 + 2 \times 9}{34} = \frac{124}{34} \approx 3,65$.

24 **a.** [90 ; 120[est la classe modale.

Salaire	[90 ; 120[	[120 ; 150[	[150 ; 180[	[180 ; 210[
Eff. cumulé croissant	60	105	126	140

Salaire	[210 ; 270[	[270 ; 360[	[360 ; 600[
Eff.cumulé croissant	150	158	163

b. La médiane est la 82e valeur qui se trouve dans la classe [120 ; 150[.

c. $\dfrac{105\times 60+135\times 45+\ldots+480\times 5}{163}=\dfrac{25\,785}{163}$
$\approx 158{,}2.$

Le salaire moyen dans cette entreprise est de 158,2 milliers de FCFA.

25 $N=322$, $\bar{x}\approx 11{,}17$, $\sigma\approx 5{,}16$.

26 **a.** $\bar{x}=11$.

b. Écart moyen : $\dfrac{3+2+0+1+4}{5}=2$.

Variance : 6. Écart-type $\approx 2{,}5$.

27 $N=10$; $\bar{x}=8{,}5$;

$\sigma=\sqrt{\dfrac{5\times(3{,}5)^2+3\times(1{,}5)^2+2\times(6{,}5)^2}{10}}\approx 3{,}9.$

28 **a.** $\bar{x}\approx 14{,}3125$; $\sigma\approx 6{,}72$.

b. $\bar{x}\approx 12{,}97$; $\sigma\approx 4{,}53$.

c. $\bar{x}\approx 12$; $\sigma\approx 3{,}3$.

29 **a.**

i	1	2	3	4
x_i	2,5	3,5	5	6,5
n_i	3	2	4	7
$n_i\times x_i$	7,5	7	20	45,5
$n_i\times(x_i-5)$	–7,5	–3	0	10,5
$n_i\times(x_i-5)^2$	18,75	4,5	0	15,75

b. $A=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{4}(n_i\times x_i)=5$. Cela correspond à la moyenne.

$B=0$. Cela correspond à l'écart moyen.

$C=2{,}4375$. Cela correspond à la variance.

$D\approx 1{,}56$. Cela correspond à l'écart-type.

30 **a.** $\bar{x}=\dfrac{2\times 2+3\times 3+4\times 3+\ldots+12\times 3}{2+3+3+\ldots+3+3}=\dfrac{438}{60}$
$=7{,}3.$

Écart moyen :

$\dfrac{2\times(2-\bar{x})+3\times(3-\bar{x})+3\times(4-\bar{x})+\ldots}{60}=\dfrac{0}{60}=0$

Variance :

$\dfrac{2\times(2-\bar{x})^2+3\times(3-\bar{x})^2+3\times(4-\bar{x})^2+\ldots}{60}=\dfrac{356{,}6}{60}$
$\approx 5{,}9.$

Écart-type $=\sqrt{\text{variance}}\approx 2{,}44$.

b. $\bar{x}=7{,}3$; $\sigma\approx 2{,}437895267$.

31 **a.**

$\bar{x}=\dfrac{200\times 10{,}5+238\times 11{,}5+455\times 12{,}5+312\times 12{,}5}{200+238+455+312}$

$=\dfrac{14\,424{,}5}{1\,205}\approx 12.$

b. Écart moyen :

$\dfrac{200\times(10{,}5-12)+238\times(11{,}5-12)+\ldots}{1\,205}=\dfrac{120{,}5}{1\,205}=0{,}1.$

Variance :

$\dfrac{200\times(10{,}5-12)^2+238\times(11{,}5-12)^2+\ldots}{1\,205}=\dfrac{935{,}25}{1\,205}$
$\approx 0{,}78.$

Écart-type $\approx 0{,}025$.

c. Avec la calculatrice : $\bar{x}\approx 12{,}1$; $\sigma\approx 0{,}87$.

32 **a.** $\bar{x}=\dfrac{3\times 0+2\times 1+\ldots+1\times 7}{31}\approx 3{,}13.$

Durant ce mois de 31 jours, elle a envoyé environ 3,13 SMS par jour. Elle n'a donc pas à changer de forfait.

b. $V=\dfrac{3\times(0-\bar{x})^2+2\times(1-\bar{x})^2+\ldots+1\times(7-\bar{x})^2}{31}\approx 3{,}08.$

Donc $s=\sqrt{V}\approx 1{,}755$.

c. • $\bar{x}+s\approx 4{,}885$. Durant 7 jours de ce mois, le nombre de SMS envoyés a été supérieur à $\bar{x}+s$.

• $\bar{x}+2s\approx 6{,}64$. Durant 1 journée de ce mois, le nombre de SMS envoyés a été supérieur à $\bar{x}+2s$.

• $\bar{x}+3s\approx 8{,}395$. Il n'y a eu aucun jour de ce mois durant lequel le nombre de SMS envoyés a été supérieur à $\bar{x}+3s$.

33 **a.** $\bar{x}=\dfrac{3\times 0+2\times 1+\ldots+1\times 7}{31}\approx 3{,}13.$

Durant ce mois de 31 jours, elle a envoyé, en moyenne, 3,13 SMS par jour. Il est inutile de changer de forfait.

b. $V=\dfrac{3\times(0-\bar{x})^2+2\times(1-\bar{x})^2+\ldots+1\times(7-\bar{x})^2}{31}$
$\approx 3{,}08$ donc $s=\sqrt{V}\approx 1{,}755$.

c. $\bar{x}+s\approx 4{,}885$. Durant 7 jours de ce mois, le nombre de SMS envoyés a été supérieur à $\bar{x}+s$.

• $\bar{x}+2s\approx 6{,}64$. Durant 1 journée de ce mois, le nombre de SMS envoyés a été supérieur à $\bar{x}+2s$.

• $\bar{x}+3s\approx 8{,}395$. Il n'y a eu aucun jour de ce mois durant lequel le nombre de SMS envoyés a été supérieur à $\bar{x}+3s$.

34 **a.** En 2014 : $\dfrac{0\times 10+1\times 43+\ldots+5\times 1}{100}=\dfrac{150}{100}$
$=1{,}5$

En 2015 : $\dfrac{0\times 44+1\times 18+\ldots+5\times 12}{100}=\dfrac{150}{100}=1{,}5.$

Il semble que les pièces défectueuses sont en moyenne en même nombre en 2014 et en 2015.

b. En 2014 : étendue $=5-0=5$.

En 2015 : étendue $=5-0=5$.

c. En 2014 : $\frac{10\times(0-1{,}5)^2+43\times(1-1{,}5)^2+\ldots}{100}\approx 0{,}82$ donc $\sigma\approx 0{,}91$.

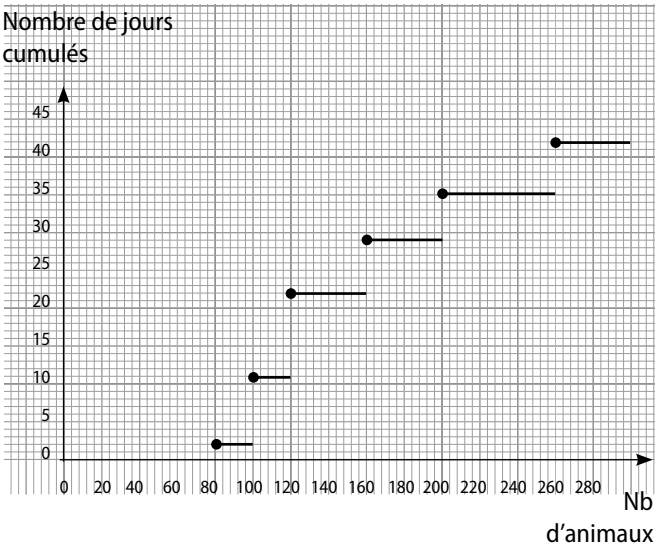
En 2015 : $\frac{44\times(0-1{,}5)^2+18\times(1-1{,}5)^2+\ldots}{100}\approx 3{,}1$ donc $\sigma\approx 1{,}75$. En 2015, il y a plus de variation.

35 **a.** $\frac{10\times 4+12\times 3+8\times 2}{4+3+2}=\frac{92}{9}\approx 10{,}2$.
Cet étudiant est reçu.

b. Soit x la note du deuxième étudiant en Physique.
$\frac{8\times 4+x\times 3+11\times 2}{4+3+2}\geqslant 10 \Leftrightarrow \frac{3x+54}{9}\geqslant 10$
$\Leftrightarrow 3x+54\geqslant 90 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{36}{3}=12$.
Cet étudiant doit obtenir au moins 12 en Physique pour être reçu.

c. Soit x la note du troisième étudiant en Français.
$\frac{2x\times 4+10\times 3+x\times 2}{9}=10 \Leftrightarrow \frac{10x+30}{9}=10$
$\Leftrightarrow 10x+30=90$
$\Leftrightarrow x=6$.
Cet étudiant a eu 6 en Français et 12 en Mathématiques.

36 **a.**



b. • $\bar{x}=\frac{2\times 80+9\times 100+\ldots+7\times 250}{42}=\frac{6450}{42}\approx 153$.

• $N = 42$ donc une médiane est un nombre de l'intervalle [21e valeur ; 22e valeur] = [120 ; 120], soit 120.

• Étendue = 250 − 80 = 170.

• $V=\frac{2\times(80-153)^2+9\times(100-153)^2+\ldots}{42}=\frac{1270}{42}$
$\approx 30{,}25$ donc $\sigma\approx 5{,}5$.

c.

Nombre d'animaux	80	100	140	180	220
Nombre de jours	8	8	4	12	4

d. $\bar{x}=140$.

• $N = 36$ donc une médiane est un nombre de l'intervalle [18e valeur ; 19e valeur], soit 140.

• Étendue = 120. • $\sigma\approx 49$.

f. En moyenne, il y a moins d'espèces animales qui migrent dans cette région.

37 **a.** $m=\frac{0\times 8+1\times 19+\ldots+5\times 6}{8+19+\ldots+6}=\frac{207}{90}=2{,}3$.

$V=\frac{(0-2{,}3)^2\times 8+(1-2{,}3)^2\times 19+\ldots+(5-2{,}3)^2\times 6}{8+19+\ldots+6}$
$=\frac{641}{90}\approx 7{,}12$.
$\sigma=\sqrt{V}\approx 1{,}35$.

b. Sur les 90 derniers jours ouvrables, il y a en moyenne environ deux absents par jour.

c. $[m-\sigma\,;m+\sigma]=[2{,}3-1{,}35\,;2{,}3+1{,}35]$
$=[0{,}95\,;3{,}65]$.

Il y en a $19+25+20=64$ soit $\frac{64}{90}\times 100\approx 71$ %.

Faire le point

38 L'effectif cumulé croissant de la modalité 2 100 est 15.

• 2 100 est la médiane de cette série.

• L'effectif total est 21 et la moyenne est 2 012.

• L'écart moyen est d'environ 473.

39 **a.** Djal n'a pas pris en compte les effectifs.

b. $\frac{20\times 5+30\times 3+35\times 7+40\times 3+50\times 7}{5+3+7+3+7}=\frac{905}{25}$
$=36{,}2$.

40 C'est un diagramme cumulatif donc des effectifs cumulés croissants.

Les effectifs sont 8 ; 20 − 8 = 12 ; 35 − 20 = 15 et 40 − 35 = 5.

Ainsi :
$\bar{x}=\frac{8\times 1000+12\times 20000+15\times 4000+5\times 5000}{40}$
$=\frac{117000}{40}=2925$.

41 **a.** Dans le menu STAT dans L1 on saisit les modalités et dans L2 on saisit les effectifs. Puis on calcule les paramètres.

b. $N = 181$;

$\bar{x} \approx 7{,}796$; med. $= 8$;

$Q_1 = 7$; écart-type $\approx 1{,}425$;

$Q_3 = 9$.

42 **a.** On trace la droite $y = 0{,}5$; le point d'intersection de cette droite avec la courbe est (22,3 ; 0,5). On obtient la médiane 22,3.

b.

Taille	21	22	23	24	25
Effectif cumulé croissant	6	9	24	27	30

$N = 30$; $\frac{N}{2} = 15$. Les 15e et 16e valeurs sont 23.

La médiane est 23.

c.

Taille	21	22	23	24	25
Effectif	6	3	15	3	3

$N = 30$; $\frac{N}{2} = 15$. Une médiane est un nombre de l'intervalle [23 ; 23], soit 23.

43 **1. a.** $\sum_{i=1}^{5} n_i = 3 + 2 + 5 + 3 + 4 = 17$. C'est N.

b. $\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{5} (n_i x_i) = \frac{1}{17}(3 \times 8 + 2 \times 9 + 5 \times 7 + 3 \times 6 + 4 \times 2)$

$= \frac{101}{17} \approx 6$. C'est la moyenne.

c. $\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{5} (n_i (x_i - x)^2)$

$= \frac{1}{17}(3\,(8-8)^2 + 2\,(9-8)^2 + 5\,(7-8)^2 + 3\,(6-8)^2 + 4\,(2-8)^2)$

$= \frac{163}{17} \approx 9{,}5$. C'est la variance.

2. a. $S = \sum_{i=1}^{5} (f_i \times x_i^2)$. **b.** $S' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{3} (n_i x_i^2) - \bar{x}^2$.

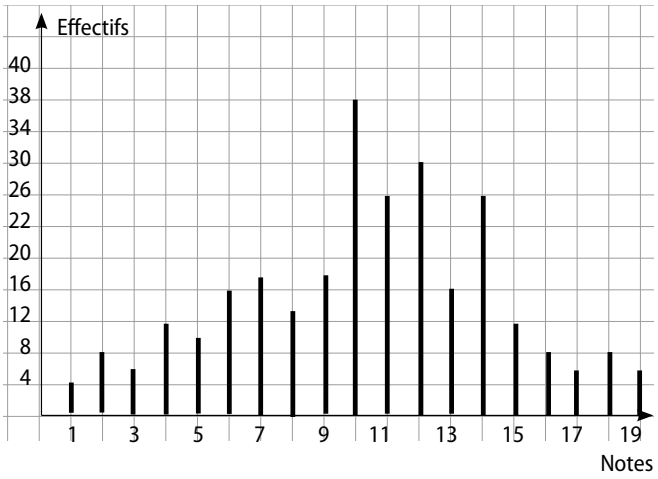
44 **1.** Voir ci-contre.

2. a.

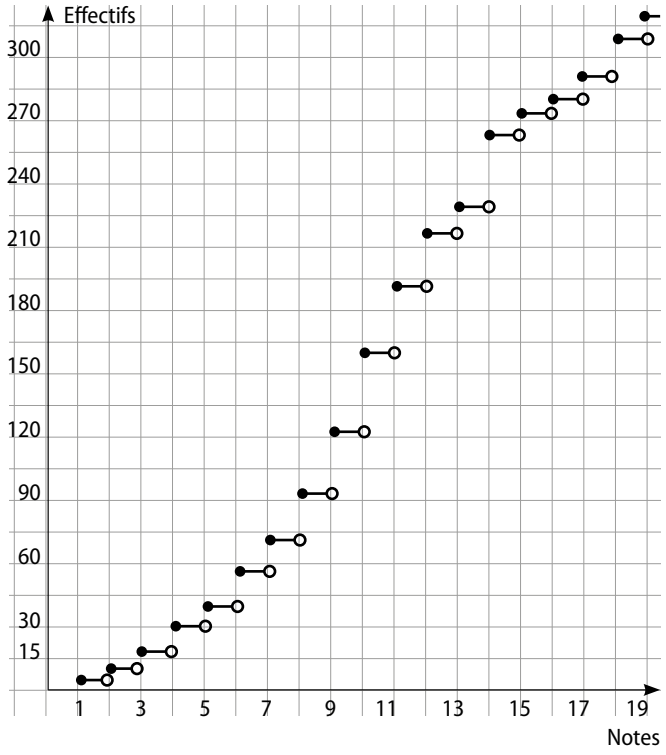
Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif cumulé croissant	4	12	18	30	40	56	74	98	126	164

Note	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectif cumulé croissant	190	220	236	262	274	282	288	296	302

(1.) Diagramme en bâtons :



2. b. Diagramme cumulatif :



Se tester

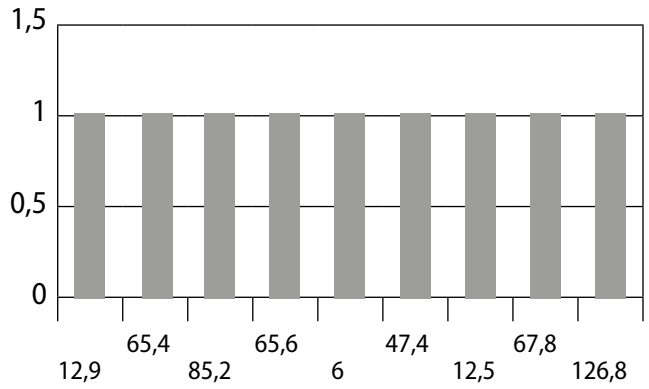
45 à **48** Voir Manuel de l'élève page 259.

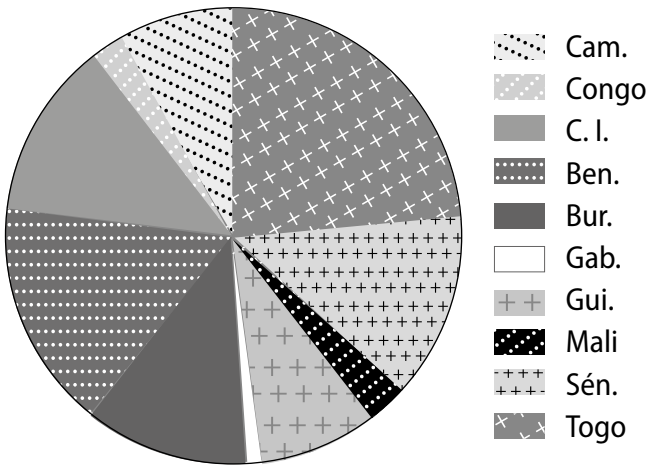
Exercices d'approfondissement

49 **a.**

	Nb. d'habitants	Superficie	Densité
Cameroun	21,5	475 400	45,2
Congo	4,4	342 000	12,9
Côte d'Ivoire	21,1	322 460	65,4
Bénin	9,6	112 620	85,2
Burkina Faso	18	274 200	65,6
Gabon	1,6	267 670	6,0
Guinée	11,8	248 860	47,4
Mali	15,5	1 240 000	12,5
Sénégal	13,3	196 190	67,8
Togo	7,2	56 785	126,8
Total	124	3 536 185	35

b.





c.

Pays	Cameroun	Congo	Côte d'Ivoire	Bénin	Burkina Faso
% en sup.	17,3	3,5	17,0	7,7	14,5
Angle	62	13	61	28	52

Pays	Gabon	Guinée	Mali	Sénégal	Togo
% en sup.	1,3	9,5	12,5	10,7	5,8
Angle	5	34	45	39	21

d. Densité de population des 10 pays : 35 hab/km^2.
Moyenne des densités :
$\frac{45,2 + 12,9 + \ldots + 126,8}{10} = \frac{534,8}{10} \approx 53,5$ hab/km^2.

50 **1.** $N = 22$ donc il faut tracer la droite horizontale d'équation $y = 11$. Une valeur de la médiane est 7.

2. a. $A(6,5 ; 8)$ et $B(7 ; 12)$;
coefficient directeur $= \frac{12 - 8}{7 - 6,5} = \frac{4}{0,5} = 8$.
$A(6,5 ; 8)$ est un point de la courbe représentant f, donc $8 = 8 \times 6,5 + b$. Ainsi, $b = -44$.
Finalement, $f(x) = 8x - 44$.

b. L'image de la médiane par f est $\frac{N}{2}$, soit 11.

c. $11 = 8 \times x - 44$. Ainsi, $x = 6,875$.
La médiane est 6,875.

51 **1.** $\bar{x} = \frac{5 \times 1 + \ldots + 4 \times 8}{5 + 7 + \ldots + 4} = \frac{242}{54} \approx 4,5$.

2. a.

Nouvelle note	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$4a + b$
Effectif	5	7	11	1

Nouvelle note	$5a + b$	$6a + b$	$7a + b$	$8a + b$
Effectif	8	12	6	4

b. $\bar{X}_1 = \frac{5(a + b) + 7(2a + b) + \ldots 4(8a + b)}{5 + 7 + \ldots + 4}$
$= \frac{242a + 54b}{54}$.

c. $f(\bar{x}) = a\bar{x} + b = a \times \frac{242}{54} + b = \frac{242a + 54b}{54} = \bar{X}_1$.

3. a.

Nouvelle note	1	4	9	16	25	36	49	64
Effectif	5	7	11	1	8	12	6	4

b. $\overline{X}_2 = \dfrac{5\times 1 + 7\times 4 + \ldots + 4\times 64}{5+7+\ldots+4} = \dfrac{1\,330}{54} \approx 24{,}6.$

c. $(\overline{x})^2 = \left(\dfrac{242}{54}\right)^2 = \dfrac{14\,641}{729} \approx 20.$

Donc $\overline{X}_2 \neq (\overline{x})^2$.

4. $\dfrac{242a + 54b}{54} = 10 \Leftrightarrow 242a + 54b = 540$

$\Leftrightarrow 121a + 27b = 270.$

Si a =	1	2	3
alors b =	$\approx 5{,}51$	≈ 1	$\approx 3{,}4$

Il peut choisir $f(x) = 2x + 1$.

52 **1. a.** $A = 7\times 700 + \ldots + 2\times 900 = 32\,240$ F CFA.

$B = 9\times 700 + \ldots + 3\times 900 = 32\,240$ F CFA.

b. A : $\overline{x} \approx 767$ F CFA ;

médiane : un nombre de [750 ; 750] : 750

B : $\overline{x} \approx 767$ F CFA ;

médiane : un nombre de [750 ; 750] : 750.

c. Non, ils sont identiques.

2. a. A : étendue : 200 écart moyen : –315 écart-type : 62,8

B : étendue : 200 écart moyen : –55,1 écart-type : 60,7

b. Les deux écarts.

3. a. A : $\dfrac{32}{42}\times 100 \approx 76$ %

B : $\dfrac{35}{42}\times 100 \approx 83$ %.

b. A : $\dfrac{13}{42}\times 100 \approx 31$ %

B : $\dfrac{13}{42}\times 100 \approx 31$ %.

53 Fait en classe par les élèves.

54 **1.** $\overline{x} = \dfrac{66 + 69 + \ldots + 74 + 75}{68} = \dfrac{4\,798}{68} \approx 70{,}55.$

$V = \dfrac{431}{68}$. $\sigma \approx 2{,}51.$

2. $\overline{x} \in [69{,}3\ ;\ 70{,}7]$, $\sigma \in [2{,}4\ ;\ 2{,}6]$.

Il y a 54 modalités qui appartiennent à]68 ; 74[soit 78 %.

Il y a 68 modalités qui appartiennent à]65 ; 76[soit 100 %.

Oui, on peut exporter ces sacs de cacao.

55 **a.** $d(x) = n_1(x_1 - x)^2 + n_2(x_2 - x)^2 + n_3(x_3 - x)^2$

$= n_1x_1^2 - 2n_1x_1x + n_1x^2 + n_2x_2^2 - 2n_2x_2x + n_2x^2$

$+ n_3x_3^2 - 2n_3x_3x + n_3x^2$

$= n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2 - 2x(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)$

$+ x^2(n_1 + n_2 + n_3).$

$d(x) = (n_1 + n_2 + n_3)x^2 - 2(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)\,x$

$+ (n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2)$

b. d est une fonction polynôme du second degré avec $n_1 + n_2 + n_3$ qui est N donc positif donc d admet un minimum en :

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)}{2\times(n_1 + n_2 + n_3)} = \dfrac{(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)}{n_1 + n_2 + n_3}$

$= \overline{x}.$

56 **1. a.** $\overline{x}_1 = \dfrac{6\,000}{300} = 20.$ $\overline{x}_2 = \dfrac{10\,100}{500} = 20{,}2.$

b. $\overline{x'}_1 = \dfrac{5\,050}{270} \approx 18{,}7.$ $\overline{x'}_2 = \dfrac{7\,700}{420} \approx 18{,}3.$

c. $\overline{x''}_1 = \dfrac{950}{30} \approx 31{,}7.$ $\overline{x''}_2 = \dfrac{2\,400}{80} \approx 30.$

2. $\overline{x}_1 = \dfrac{N'_1\overline{x}'_1 + N''_1\overline{x}''_1}{N_1}$ et $\overline{x}_2 = \dfrac{N'_2\overline{x}'_2 + N''_2\overline{x}''_2}{N_2}$.

Les effectifs jouent un rôle dans les calculs : on parle d'effet de structure.

57 **1. a.** $x_1 \leqslant x_i \leqslant x_K$.

b. $\sum_{i=1}^{k} n_i x_1 \leqslant \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} x_K n_i$

Soit $x_1 \sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \leqslant x_K \sum_{i=1}^{k} n_K$,

soit $\dfrac{x_1 \times N}{N} \leqslant \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} \leqslant \dfrac{x_k \times N}{N}$.

Ainsi $x \in [x_i\ ;\ x_K]$.

2. a. Oui.

b. C'est la définition de la médiane.

58 Par exemple :

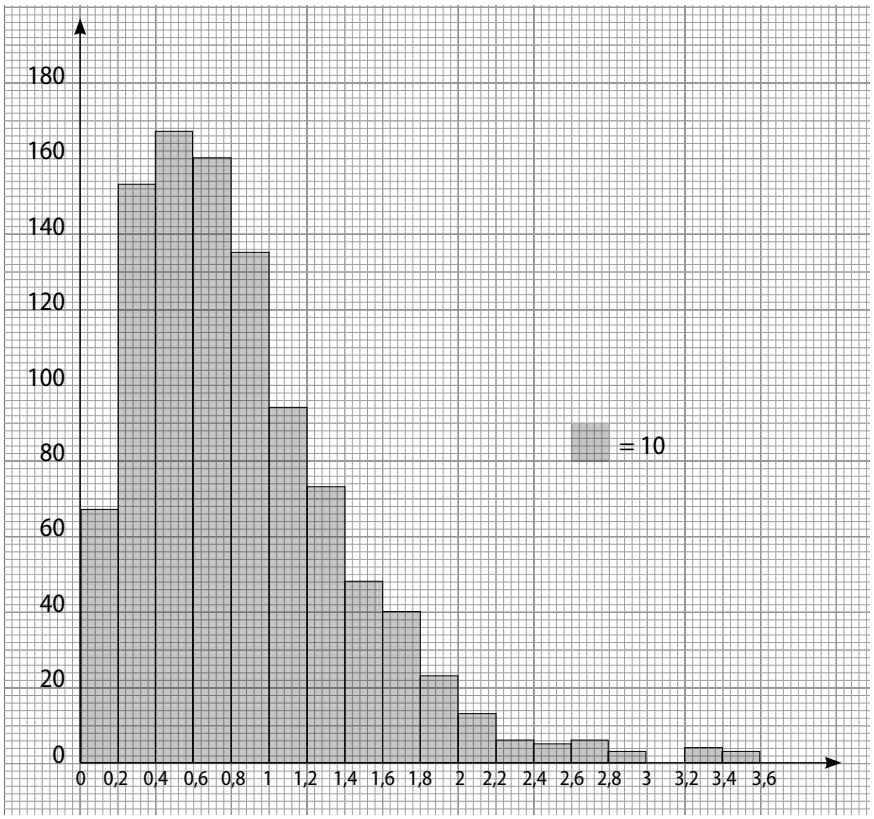
0	1	2	2	2,5	2,5	10	10	10	10

• 1re et dernière case : valeurs espacées de 10 (étendue) ;

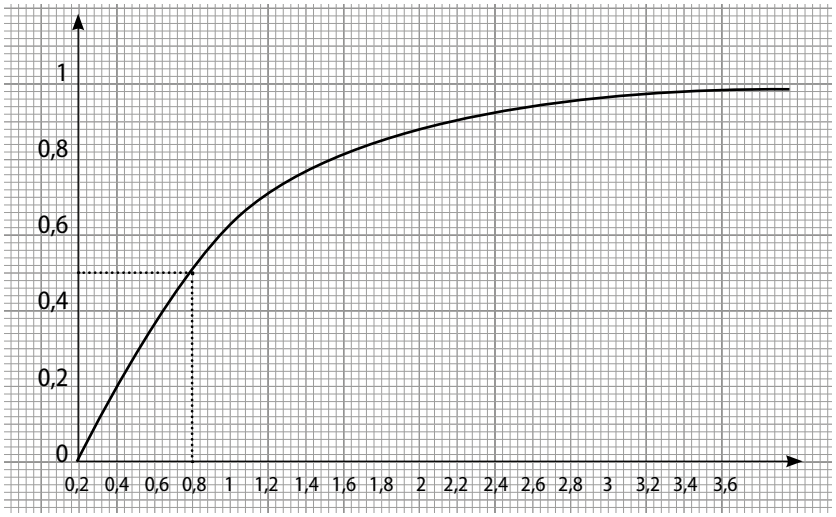
• La médiane se trouve entre la 5e et la 6e valeurs, il faut donc le même nombre dans ces cases : 2,5.

• On répartit des valeurs pour que la somme totale soit 50.

59 **1.**



2. a.



2. b. Médiane ≈ 0,75.

3.

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}
0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,58	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1,1	1,15	1,2	1,3	1,4	1,75	2

4. $\sqrt{V}_{19} \approx 1{,}41$.

$N = 120$.

$$d = \sqrt{120\left[\left(\frac{13}{120} - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{18}{120} - \frac{1}{6}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{30}{120} - \frac{1}{6}\right)^2\right]} \approx 2{,}367$$

Ainsi, $d > \sqrt{V}_{19}$, ce dé est donc irrégulier.

9 Calculs dans $\mathbb{R}$

Activités d'introduction

1 Nombres rationnels et nombres irrationnels

1. a. On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, donc il existe deux nombres entiers naturels a et b tels que $b \neq 0$ et $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ irréductible.

b. • $a = b\sqrt{2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Comme $b^2 \in \mathbb{N}$, a^2 est pair.

• Si le carré d'un nombre entier est pair, alors ce nombre est lui aussi pair, donc a est pair.

c. a est pair, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2p$.

On a alors : $a^2 = 4p^2$, puis $b^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{4p^2}{2} = 2p^2$ donc b^2 est pair et, par suite, b est pair.

d. a et b sont pairs donc a et b sont divisibles par 2, donc $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible. Contradiction. $\sqrt{2}$ est donc un nombre irrationnel.

2. a. Supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, tels que $r + x = \frac{p}{q}$. Donc $x = \frac{p}{q} + r$ car $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{Q}$; donc $x \in \mathbb{Q}$. Contradiction. Donc $r + x \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que $rx \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, tels que $rx = \frac{p}{q}$. Donc $rx = \frac{p}{q}$.

Comme $r \neq 0$, $x = \frac{p}{q} \times \frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$, contradiction. Donc $rx \notin \mathbb{Q}$.

b. $r' - r \in \mathbb{Q}$ car $r \in \mathbb{Q}$ et $r' \in \mathbb{Q}$.

Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ et $r' - r \in \mathbb{Q}$, d'après la propriété 2, $\frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$.

Comme $\frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{Q}$, d'après la propriété 1, $y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$.

De plus :

• $r' > r$, donc $y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) > r$;

• $r' - y = r' - r - \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) = (r' - r)(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ donc $r' - y > 0$.

On a donc montré que $r < y < r'$.

c. r et r' désignent deux nombres rationnels tels que $r' > r$. On pose $y = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$.

Alors : $r < y < r'$ et $y \notin \mathbb{Q}$.

2 Minimum et minorant – Maximum et majorant

1. a. 0 est un minorant, mais pas le minimum de]0 ; 4] car $0 \notin]0 ; 4]$.

b. 0 est un minorant et le minimum de [0 ; 4] car $0 \in [0 ; 4]$.

c. 0 est un minorant, mais pas le minimum de]0 ; 4[car $0 \notin]0 ; 4[$.

d. 0 est un minorant et le minimum de [0 ; 10] car $0 \in [0 ; 10]$.

2. a. 4 est un majorant et le maximum de [0 ; 4] car $4 \in [0 ; 4]$.

b. 4 est un majorant et le maximum de]0 ; 4] car $4 \in]0 ; 4]$.

c. 4 est un majorant, mais pas le maximum de [0 ; 4[car $4 \notin [0 ; 4[$.

d. 4 est un majorant, mais pas le maximum de]0 ; 4[car $4 \notin]0 ; 4[$.

3. a. –1 est un minorant et le minimum de [–1 ; 2,5].

2,5 est un majorant et le maximum de [–1 ; 2,5].

b. –3 est un minorant et le minimum de [–3 ; –1[.

–1 est un majorant de [–3 ; –1[.

[–3 ; –1[n'a pas de maximum.

c.]–∞ ; 1] n'est pas minoré et n'a pas de minimum.

1 est un majorant et le maximum de]–∞ ; 1].

d. –5 est un minorant de]–5 ; +∞[.

]–5 ; +∞[n'a pas de minimum.

]–5 ; +∞[n'est pas majoré et n'a pas de maximum.

4. • Un nombre réel M est un majorant de I, si pour tout x de I, $x \leqslant M$.

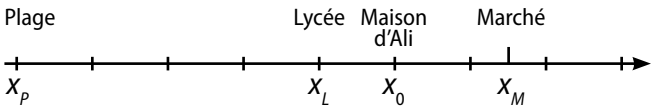
Si de plus, $M \in I$, on dit que M est le maximum de I.

• Un nombre réel m est un minorant de I, si pour tout x de I, $m \leqslant x$.

Si de plus, $m \in I$, on dit que m est le minimum de I.

3 Distance entre deux nombres réels

a.



On note x_0 l'abscisse de la maison d'Ali.

b.

Distance	Nombre de kilomètres	Expressions avec les lettres x_A et x_B	Notation $d(x_A ; x_B)$
maison - plage	5	$x_0 - x_P$	$d(x_0 ; x_P)$
maison - lycée	1	$x_0 - x_L$	$d(x_0 ; x_L)$
lycée - marché	2,5	$x_M - x_L$	$d(x_L ; x_M)$
marché - plage	6,5	$x_M - x_P$	$d(x_M ; x_P)$
marché - maison	1,5	$x_M - x_0$	$d(x_M ; x_0)$

c. $d(x_A ; x_B) = \begin{cases} x_B - x_A \text{ si } x_B - x_A \geqslant 0 \\ x_A - x_B \text{ si } x_B - x_A \leqslant 0 \end{cases}$

4 Approximation de π

1. b. Le périmètre de $(\mathscr{C})$ est égal à $\pi \times EG = \pi$.

• Le périmètre du carré *ABCD* est égal à

$4 \times AB = 4 \times 1 = 4$.

• Le périmètre du carré de *EFGH* est égal à :

$4 \times EF = 4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

En effet : dans le triangle *EFB* rectangle isocèle en *B*, le théorème de Pythagore permet d'écrire que :

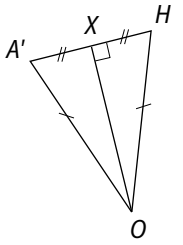
$EF^2 = EB^2 + BF^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \times 2 = \dfrac{1}{2}$.

donc $EF = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (car $EF > 0$).

c. Comme le périmètre de *EFGH* est inférieur au périmètre de $(\mathscr{C})$ qui, lui, est inférieur à celui de *ABCD*, on a : $2\sqrt{2} < \pi < 4$.

d. $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ donc $2{,}828 < \pi < 4$ et un arrondi à l'unité de π est 3.

2. b. L'octogone *A'EB'FC'GD'H* étant régulier, $\mathscr{P}_1 = 8 \times A'H$.



• Dans le triangle *OA'H* isocèle en *O*, on note *X* le milieu du segment [*A'H*].

Le triangle *A'XO* est rectangle en *X*.

On sait de plus que :

mes $(\widehat{A'OH}) = \dfrac{360}{28} = 45°$,

donc mes $(\widehat{A'OX}) = \dfrac{45}{2} = 22{,}5°$.

Et ainsi : $\sin(22{,}5°) = \dfrac{A'X}{A'O}$ donc $A'X = A'O \times \sin(22{,}5°)$.

Par conséquent : $A'H = 2 \times A'X = 2 \times A'O \times \sin(22{,}5°)$
$= \sin(22{,}5°)$

et $\mathscr{P}_1 = 8 \times \sin(22{,}5°)$.

c. • L'octogone *MUTSRQPN* étant régulier, $\mathscr{P}_2 = 8 \times UM$.

Comme *A'* est le milieu du segment [*UM*] :

$\mathscr{P}_2 = 2 \times 8 \times A'M = 16\, A'M$.

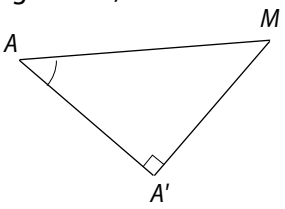
• Dans le triangle *AOH* rectangle en *H*, le théorème de Pythagore permet d'écrire que :

$AO^2 = AH^2 + HO^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

donc $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (car $AO > 0$).

Ainsi, $AA' = AO - A'O = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

• Dans le triangle *A'MA* rectangle en *A'*,



$\tan(45°) = \dfrac{A'M}{AA'}$ car mes $(\widehat{A'AM}) = 45°$.

Donc $1 = \dfrac{A'M}{AA'}$, puis

$A'M = AA' = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

On a alors $\mathscr{P}_2 = 16 \times A'M = 8(\sqrt{2} - 1)$.

d. Comme le périmètre de *A'EB'FC'GD'H* est inférieur au périmètre de $(\mathscr{C})$ qui, lui, est inférieur à celui de *MUTSRQPN*, on a : $8 \sin(22{,}5°) < \pi < 8(\sqrt{2} - 1)$.

e. $\sin(22{,}5°) \approx 0{,}383$ donc $3{,}064 < \pi < 3{,}314$.

Savoir-faire

3 $A = \dfrac{50}{9} \times \dfrac{21}{2} + 3 = \dfrac{2 \times 25 \times 3 \times 7}{3 \times 3 \times 2} + 3$

$A = \dfrac{175}{3} + 3 = \dfrac{175}{3} + \dfrac{9}{3} = \dfrac{184}{3}$ donc $A \in \mathbb{Q}$.

$B = \dfrac{1{,}5 \times 10^3}{0{,}5} = \dfrac{3 \times 0{,}5 \times 10^3}{0{,}5} = 3\,000$ donc $B \in \mathbb{N}$.

$C = \dfrac{3 \times (10^2)^4 \times 10^{-5}}{6 \times 10^{14}} = \dfrac{3 \times 10^8 \times 10^{-5}}{3 \times 2 \times 10^{14}}$

$C = \dfrac{10^{8+(-5)+(-14)}}{2} = \dfrac{1}{2} \times 10^{-11}$

$C = 0{,}5 \times 10^{-11} = 5 \times 10^{-12}$ donc $C \in \mathbb{D}$.

$D = \dfrac{5}{3} \div \dfrac{-4}{9} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{9}{-4} = \dfrac{15}{-4} = -3{,}75$ donc $D \in \mathbb{D}$.

$E = \sqrt{100} - \sqrt{72} + 6\sqrt{2}$

$E = \sqrt{10^2} - \sqrt{36 \times 2} + 6\sqrt{2}$

$E = 10 - \sqrt{36} \times \sqrt{2} + 6\sqrt{2}$

$E = 10 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 10$ donc $E \in \mathbb{N}$.

$F = (\sqrt{3} - 5)^2 + 9\sqrt{3}$

$F = (\sqrt{3})^2 - 2 \times 5 \times \sqrt{3} + 25 + 9\sqrt{3}$

$F = 9 + 25 - 10\sqrt{3} + 9\sqrt{3}$

$F = 34 - \sqrt{3}$ donc $F \in \mathbb{R}$.

$G = (2^3)^5 - 4^{-1} = 2^{15} - \dfrac{1}{4}$ donc $G \in \mathbb{D}$.

$H = (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 = 4$ donc $H \in \mathbb{N}$.

4 $A(x) = (7 + 3x)(x - 1) + (3 - x)^2$
$= 7x - 7 + 3x^2 - 3x + 9 - 6x + x^2$
$= 4x^2 - 2x + 2.$

$B(x) = (7x - 1)(7x + 1) - 50x^2$
$= (7x)^2 - 1^2 - 50x^2$
$= 49x^2 - 1 - 50x^2$
$= -x^2 - 1.$

$C(x) = (5x - 8)(x^2 + 1) - (x - 2)^2$
$= 5x^2 + 5x - 8x^2 - 8 - (x^2 - 4x + 4)$
$= 5x^3 + 5x - 8x^2 - 8 - x^2 + 4x - 4$
$= 5x^3 - 9x^2 + 9x - 12.$

$D(x) = x(2 - x) + x^2(3 - x)$
$= 2x - x^2 + 3x^2 - x^3$
$= -x^3 + 2x^2 + 2x.$

5 $A(x) = 3x(x - 1) - (5 + x)(x - 1)$
$= (x - 1)[3x - (5 + x)]$
$= (x - 1)[3x - 5 - x]$
$= (x - 1)(2x - 5)$

$B(x) = (x - 3)^2 - (5 - x)^2$
$= [(x - 3) - (5 - x)][(x - 3) + (5 - x)]$
$= [x - 3 - 5 + x][x - 3 + 5 - x]$
$= (2x - 8) \times 2$
$= 4(x - 4).$

$C(x) = (2 - x)^2 - (2 - x)(3x + 1)$
$= (2 - x)(2 - x) - (2 - x)(3x + 1)$
$= (2 - x)[(2 - x) - (3x + 1)]$
$= (2 - x)(2 - x - 3x - 1)$
$= (2 - x)(-4x + 1).$

$D(x) = 4x^2 - 20x + 25$
$= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2$
$= (2x - 5)^2.$

8 **a.** $|4 - \sqrt{5}| + 2|-2 - 3| = 4 - \sqrt{5} + 2(2 + 3)$
$= 4 - \sqrt{5} + 10 = 14 - \sqrt{5}$

b. $\left|\dfrac{\pi - 4}{-3}\right| = \dfrac{4 - \pi}{3}$.

c. $|\sqrt{2} - 11| - |10 - \sqrt{5}| = (11 - \sqrt{2}) - (10 - \sqrt{5})$
$= 11 - \sqrt{2} - 10 + \sqrt{5} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{5}$

d. $|\pi^2 - 2\pi| + |\pi - \sqrt{7}| = \pi^2 - 2\pi + \pi - \sqrt{7} = \pi^2 - \pi - \sqrt{7}$.

9 **a.** $|x - 3| = 7 \iff x - 3 = 7$ ou $x - 3 = -7$
$\iff x = 10$ ou $x = -4$.

b. $|2x - 5| = 3 \iff 2x - 5 = 3$ ou $2x - 5 = -3$
$\iff 2x = 8$ ou $2x = 2$
$\iff x = 4$ ou $x = 1$.

c. $|-x + 7| = \dfrac{1}{2} \iff -x + 7 = \dfrac{1}{2}$ ou $-x + 7 = -\dfrac{1}{2}$
$\iff x = 7 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{2}$ ou $x = 7 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{15}{2}$.

10 **a.** $|x - 5| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x - 5 \leqslant 1$
$\iff 4 \leqslant x \leqslant 6 \iff x \in [4\,;\,6]$.

b. $|x + 10| > 3 \iff x + 10 < -3$ ou $x + 10 > 3$
$\iff x < -13$ ou $x > -7$
$\iff x \in]-\infty\,;\,-13[$ ou $x \in]-7\,;\,+\infty[$.

c. $|2x + 4| \leqslant 6 \iff -6 \leqslant 2x + 4 \leqslant 6$
$\iff -10 \leqslant 2x \leqslant 2$
$\iff -5 \leqslant x \leqslant 1$
$\iff x \in [-5\,;\,1]$.

13 $0{,}1 < x < 0{,}5$; donc $0{,}01 < x^2 < 0{,}25$; donc $0{,}05 < 5x^2 < 1{,}25$; donc $3{,}05 < 3 + 5x^2 < 4{,}25$.

14 **a.** $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 15^3$; $\mathcal{V} = 4\,500\,\pi$. L'arrondi d'ordre 0 est 14 137 cm^3 et celui d'ordre 1 est 14 137,2 cm^3.

b. $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 3 = 25\pi$.

L'arrondi d'ordre 0 est 79 cm^3 et celui d'ordre 1 est 78,5 cm^3.

15 **a.** $503{,}4 \times 10^{-3} = 5{,}034 \times 10^{-1}$ donc l'ordre de grandeur de $503{,}4 \times 10^{-3}$ est 1.

b. $1\,251 \times 10^7 = 1{,}251 \times 10^{10}$ donc l'ordre de grandeur de 1251×10^7 est 10^{10} (car $0 < 1{,}251 < 5$).

c. $83{,}01 \times 10^{11} = 8{,}301 \times 10^{12}$ donc l'ordre de grandeur de $83{,}01 \times 10^{11}$ est 10^{13} (car $5 < 8{,}301 < 10$).

16 **a.** $R_T = 65 \times 10^2 = 6{,}5 \times 10^3$ donc l'ordre de grandeur du rayon de la Terre est 10^4 km (car $5 < 6{,}5 < 10$).

b. $R_S = 1{,}7 \times 10^9$ donc l'ordre de grandeur du rayon du Soleil est 10^9 km (car $0 < 1{,}7 < 5$).

c. $R_J = 7 \times 10^5$ donc l'ordre de grandeur du rayon de Jupiter est 10^6 km (car $5 < 7 < 10$).

Exercices d'entraînement

17

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
3,14			X	X	X
$-\sqrt{16}$		X	X	X	X
$2{,}17 \times 10^4$	X	X	X	X	X
5π					X
$\frac{\sqrt{4}}{3}$				X	X
$\frac{112}{-4}$		X	X	X	X
$1 + \frac{1}{3}$				X	X

18 **a.** $11 \in \mathbb{N}$; **b.** $11 \in \mathbb{Z}$; **c.** $0{,}33 \in \mathbb{D}$; **d.** $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$; **e.** $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$; **f.** $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$; **g.** $413 \times 10^{-2} \notin \mathbb{Z}$; **h.** $\frac{5}{4} \times 10^2 \in \mathbb{Q}$; **i.** $0 \in \mathbb{Z}$; **j.** $(\sqrt{3})^2 + 1 \in \mathbb{N}$; **k.** $\frac{\pi}{3{,}14} \notin \mathbb{N}$; **l.** $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \notin \mathbb{D}$.

19 **a.** -4 ; **b.** $\frac{1}{3}$; **c.** π ; **d.** $-0{,}34$.

20 **a.** $-18/6 \in \mathbb{Z}$ car $-\frac{18}{6} = -3$.

b. $3\sqrt{2} \times \sqrt{2} \in \mathbb{N}$ car $3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{4} = 6$.

c. $\frac{1{,}21}{1{,}1} \times 10^{-3} \in \mathbb{D}$ car $\frac{1{,}21}{1{,}1} \times 10^{-3} = 1{,}1 \times 10^{-3}$.

d. $\frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \in \mathbb{D}$ car $\frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{5}{2}$.

e. $\frac{\sqrt{25}}{3} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{\sqrt{25}}{3} = \frac{5}{3}$. **f.** $-4\pi \in \mathbb{R}$.

g. $\frac{5}{7} \times \frac{21}{4} \times \frac{25}{3} \in \mathbb{D}$ car :

$\frac{5}{7} \times \frac{21}{4} \times \frac{25}{3} = \frac{5 \times 7 \times 3 \times 25}{7 \times 4 \times 3} = \frac{5 \times 25}{4} = \frac{125}{4}$.

h. $\frac{9 \times (10^4)^3 \times 4^7}{10^7 \times 12 \times 10^5} \in \mathbb{N}$ car :

$\frac{9 \times (10^4)^3 \times 4^7}{10^7 \times 12 \times 10^5} = \frac{3 \times 3 \times 10^{12} \times 4 \times 4^6}{10^{12} \times 3 \times 4} = 3 \times 4^6$.

i. $(3 - \sqrt{2})^2 \in \mathbb{R}$ car $(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 11 - 6(\sqrt{2})$.

21 **a.** Faux. Par exemple, $3 \in \mathbb{Z}$ et son opposé est $-3 \notin \mathbb{N}$.

b. Faux. Par exemple, $3 \in \mathbb{N}^*$ et son inverse $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

c. Faux. Par exemple, $\sqrt{1{,}21} = \sqrt{1{,}1}^2 = 1{,}1$ et $1{,}1 \in \mathbb{D}$.

d. Faux. Par exemple $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ est un nombre entier naturel.

22 **a.** $1 - \frac{1}{20} + \frac{2}{5} = \frac{20}{20} - \frac{1}{20} + \frac{8}{20} = \frac{20 - 1 + 8}{20} = \frac{27}{20}$.

b. $4 \times \frac{7}{25} \times \left(9 - \frac{2}{3}\right) = 4 \times \frac{7}{25} \times \left(\frac{27}{3} - \frac{2}{3}\right)$

$= 4 \times \frac{7}{\cancel{25}} \times \frac{\cancel{25}}{3} = 4 \times \frac{7}{3} = \frac{28}{3}$.

c. $\frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{1}{5}$.

d. $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) - 1 = 1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{16}$.

23 **a.** $\frac{10^2 \times 15 \times 2^3}{5 \times 4 \times 10} = \frac{10^2}{10} \times \frac{15}{5} \times \frac{2^3}{4}$

$= 10 \times 3 \times 2 = 60$.

b. $\frac{9 \times (10^3)^4 \times 7^2}{10^{12} \times 21} = \frac{3 \times 3 \times 7^2 \times 10^{12}}{3 \times 7 \times 10^{12}} = 3 \times 7 = 21$.

c. $2\sqrt{36} - 3\sqrt{25} + \sqrt{2} = 2 \times 6 - 3 \times 5 + \sqrt{2} = -3 + \sqrt{2}$.

d. $\sqrt{400} + \sqrt{16} - \sqrt{81} = 20 + 4 - 9 = 15$.

24 **a.** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$; $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$;

$\frac{1}{9} + \frac{2}{6} = \frac{2 + 6}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4 \times 2}{9 \times 2} = \frac{4}{9}$;

$\frac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)}{9} = \frac{(\sqrt{5})^2 - (1)^2}{9} = \frac{5 - 1}{9} = \frac{4}{9}$.

b. $(-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$; $\frac{21}{7} = 3$;

$1 + 1 \div \frac{1}{2} = 1 + 1 \times \frac{2}{1} = 1 + 2 = 3$;

$\frac{0{,}3 \times (10^4)^2}{10^7} = \frac{0{,}3 \times 10^8}{10^7} = 0{,}3 \times 10 = 3$.

25 **a.** $\frac{4}{7}\times\frac{7}{2}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{2}\right)=\frac{4\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times 2}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)$

$=2-\frac{2}{5}\left(\frac{2-9}{6}\right)=2-\frac{2}{5}\times\left(\frac{-7}{2\times 3}\right)=2-\frac{-7}{5\times 3}$

$=2+\frac{7}{15}=\frac{30+7}{15}=\frac{37}{15}$.

b. $\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{7}\times\frac{14}{15}}{\frac{7}{6}+1\div\frac{12}{5}}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{\cancel{5}\times\cancel{7}\times 2}{\cancel{7}\times 3\times\cancel{5}}}{\frac{7}{6}+1\times\frac{5}{12}}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{7}{6}+\frac{5}{12}}$

$=\frac{\frac{9-8}{12}}{\frac{14+5}{12}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{19}{12}}=\frac{1}{12}\times\frac{12}{19}=\frac{1}{19}$.

c. $\frac{7}{16}\times\left(\frac{2}{7}\right)^2-\frac{11}{7}\div\frac{44}{5}=\frac{7\times 4}{4\times 4\times 7^2}-\frac{11}{7}\times\frac{5}{4\times 11}$

$=\frac{1}{28}-\frac{5}{28}=-\frac{4}{28}=\frac{-4\times 1}{4\times 7}=-\frac{1}{7}$.

d. $\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}\div\frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{9+8}{12}}{\frac{9-8}{12}}\div\frac{\frac{16-15}{20}}{\frac{16+15}{20}}$

$=\frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{12}}\div\frac{\frac{1}{20}}{\frac{31}{20}}=\left(\frac{17}{12}\times\frac{12}{1}\right)\div\left(\frac{1}{20}\times\frac{20}{31}\right)$

$=17\div\frac{1}{31}=17\times\frac{31}{1}=17\times 31=527$.

26 **a.** $\frac{2^7\times 3^7\times 7\times 25^3\times 11}{3^{-4}\times 2^3\times 9^2\times 8}=\frac{2^7\times(5^2)^3\times 3^7\times 7\times 11}{2^3\times 2^3\times(3^2)^2\times 3^{-4}}$

$=\frac{2^7\times 5^6\times 3^7\times 7\times 11}{2^6\times 3^4\times 3^{-4}}=2^{7-6}\times 5^6\times 3^7\times 7\times 11$

$=2\times 3^7\times 5^6\times 7\times 11$.

b. $\frac{12^3\times 5\times(-9)^4\times 21}{10^3\times(7\times 5^3)^{-2}}$

$=\frac{(4\times 3)^3\times 5\times(3^2)^4\times 3\times 7\times(7\times 5^3)^2}{(5\times 2)^3}$

$=\frac{2^6\times 3^3\times 3^8\times 3\times 5\times 7\times 7^2\times 5^6}{5^3\times 2^3}$

$=2^{6-3}\times 3^{3+8+1}\times 5^{1+6-3}\times 7^{1+2}$

$=2^3\times 3^{12}\times 5^4\times 7^3$.

27 **a.** $59\,000\times 0{,}032=5{,}9\times 10^4\times 3{,}2\times 10^{-2}$

$=5{,}9\times 3{,}2\times 10^2=18{,}88\times 10^2$

$=1{,}88\times 10\times 10^2=1{,}88\times 10^3$.

b. $5\times 10^7\times 4{,}1\times 10^{-4}=20{,}5\times 10^3=2{,}05\times 10\times 10^3$

$=2{,}05\times 10^4$.

c. $\frac{36\times 10^5\times 0{,}4}{4^2\times 3\times 10^3}=0{,}75\times 10^2\times 0{,}4$

$=0{,}3\times 10^2=3\times 10^{-1}\times 10^2=3\times 10$.

d. $\frac{15{,}5\times(10^4)^2\times 0{,}7}{(10^{-2})^3\times 5}=\frac{15{,}5}{5}\times 0{,}7\times\frac{10^8}{10^{-6}}$

$=3{,}1\times 0{,}7\times 10^{14}=2{,}17\times 10^{14}$.

28 **a.** $\sqrt{80}-4\sqrt{125}+3\sqrt{45}=\sqrt{16\times 5}-4\sqrt{5\times 25}+3\sqrt{9\times 5}$

$=\sqrt{16}\times\sqrt{5}-4\times\sqrt{25}\times\sqrt{5}+3\sqrt{9}\times\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}-4\times 5\sqrt{5}+3\times 3\sqrt{5}$

$=(4-20+9)\sqrt{5}=-7\sqrt{5}$.

b. $(3+\sqrt{5})^2=3^2+2\times 3\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$

$=9+6\sqrt{5}+5=14+6\sqrt{5}$.

c. $(7-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})=7^2-(\sqrt{5})^2=49-5=44$.

d. $\frac{(1-\sqrt{5})^2-1}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}=\frac{1^2-2\times 1\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2-1}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}$

$=\frac{1-2\sqrt{5}+5-1}{7-6}=5-2\sqrt{5}$.

29 **a.** $7\sqrt{50}-\sqrt{72}+\sqrt{200}$

$=7\times\sqrt{25\times 2}-\sqrt{36\times 2}+\sqrt{100\times 2}$

$=7\times\sqrt{25}\times\sqrt{2}-\sqrt{36}\times\sqrt{2}+\sqrt{100}\times\sqrt{2}$

$=7\times 5\times\sqrt{2}-6\sqrt{2}+10\sqrt{2}$

$=(35-6+10)\sqrt{2}=39\sqrt{2}$.

b. $(\sqrt{3}+2)^2-(\sqrt{3}-2)^2$

$=[(\sqrt{3})^2+2\times 2\sqrt{3}+2^2]-[(\sqrt{3})^2-2\times 2\sqrt{3}+2^2]$

$=(3+4\sqrt{3}+4)-(3-4\sqrt{3}+4)=8\sqrt{3}$.

c. $\frac{6}{\sqrt{3}}-5\sqrt{48}=\frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-5\times\sqrt{16\times 3}$

$=\frac{6\sqrt{3}}{3}-5\times\sqrt{16}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}-5\times 4\sqrt{3}$

$=(2-20)\sqrt{3}=-18\sqrt{3}$.

d. $-\sqrt{28}+\sqrt{63}+2\sqrt{700}$

$=-\sqrt{4\times 7}+\sqrt{9\times 7}+2\sqrt{100\times 7}$

$=-\sqrt{4}\times\sqrt{7}+\sqrt{9}\times\sqrt{7}+2\sqrt{100}\times\sqrt{7}$

$=-2\sqrt{7}+3\sqrt{7}+20\sqrt{7}$

$=(-2+3+20)\sqrt{7}=21\sqrt{7}$.

30 **a.** Faux. En effet : $1+\frac{1}{\sqrt{13}}-13=-12+\frac{\sqrt{13}}{13}\notin\mathbb{N}$.

b. Faux. En effet :

$\sqrt{\sqrt{7}-1}\times\sqrt{\sqrt{7}+1}=\sqrt{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}$

$=\sqrt{(\sqrt{7})^2-1^2}=\sqrt{7-1}=\sqrt{6}\notin\mathbb{N}$.

c. Vrai. En effet :

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{5-1}=\frac{10}{4}=\frac{5\times 2}{2\times 2}=\frac{5}{2}=2{,}5$.

d. Vrai. En effet :

$$\frac{1-\frac{1}{\pi}}{1+\frac{1}{\pi}} \div \frac{\pi^2-\pi}{\pi^2+\pi} = \frac{\frac{\pi-1}{\pi}}{\frac{\pi+1}{\pi}} \div \frac{\pi(\pi-1)}{\pi(\pi+1)}$$
$$= \frac{\pi-1}{\pi} \times \frac{\pi}{\pi+1} \times \frac{\pi+1}{\pi-1} = 1.$$

31 **a.** $\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\times\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$
$= 5 + 2 + \frac{1}{5} = 7 + \frac{1}{5} = 7{,}2 \in \mathbb{D}$.

2. $\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{7}(\sqrt{7}+\sqrt{2}) - 5\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}$
$= \frac{5[(\sqrt{7})^2 + \sqrt{14} - \sqrt{14} - (\sqrt{2})^2]}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{5(7+2)}{7-2}$
$= \frac{5\times 9}{5} = 9 \in \mathbb{N}$.

32 **a.** $2x - y = 2\times 3 - (-1) = 6 + 1 = 7$.

b. $x^2 - y^2 = 3^2 - (-1)^2 = 9 - 1 = 8$.

c. $x^3 - 1/y = 3^3 - 1/-1 = 27 + 1 = 28$.

33 **a.** $2x(x-3) = 2x^2 - 6x$.

b. $7(5-2x) = 35 - 14x = -14x + 35$.

c. $x(7-x) + 2x^2 = 7x - x^2 + 2x^2 = x^2 + 7x$.

34 **a.** $4x - 8 = 4\times x - 4\times 2 = 4(x-2)$.

b. $x^2 + 3x = x\times x + x\times 3 = x(x+3)$

c. $5x^2 + 25x - 10 = 5\times x^2 + 5\times 5x - 5\times 2$
$= 5(x^2 + 5x - 2)$.

35 **a.** $4a - 14b = 4\times\frac{5}{2} - 14\times\frac{4}{7} = 2\times 5 - 2\times 4$
$= 10 - 8 = 2$.

b. $\frac{1}{a}(7b-5c) = \frac{2}{5}\times\left[7\times\frac{4}{7} - 5\times\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$
$= \frac{2}{5}\times(4+1) = \frac{2}{5}\times 5 = 2$.

c. $\frac{a+c}{7b+5c} = \frac{\frac{5}{2}+\left(-\frac{1}{5}\right)}{7\times\frac{4}{7}+5\times\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{25-2}{10}}{4-1} = \frac{\frac{23}{10}}{3}$
$= \frac{23}{10}\times\frac{1}{3} = \frac{23}{30}$

36 **a.** $(a+b)^2 + (a-b)^2 = (a^2+2ab+b^2) + (a^2-2ab+b^2)$
$= 2(a^2+b^2) = 2\times 1 = 2$.

b. $(a^2+b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$, puis
$(a^2+b^2)^3 = a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2+b^2)$.
Comme $a^2+b^2 = 1$, on a :
$1 = (a^2+b^2)^3 = a^6 + b^6 + 3a^2b^2$.

37 **a.** $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\times\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2$
$= x + 2\sqrt{xy} + y = 10 + 2\sqrt{4} = 10 + 4 = 14$.

b. $5x(1+y) + y(5-2x) = 5x + 5xy + 5y - 10xy$
$= 5(x+y) - 5xy = 5\times 10 - 5\times 4 = 50 - 20 = 30$.

38 **a.** x désigne un nombre réel tel que $x \neq -2$.

$$x + 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+1)(x+2)-1}{x+2} = \frac{x^2+3x+2-1}{x+2}$$
$$= \frac{x^2+3x+1}{x+2}.$$

b. x désigne un nombre réel tel que $x > 2$.

Comme $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} \neq 0$, on a :

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \frac{(x+2)-(x-2)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}.$$

39 **a.** $(5x+1)(x-2) - 2x(x-3)$
$= 5x^2 - 10x + x - 2 - 2x^2 + 6x = 3x^2 - 3x - 2$.

b. $(5x-1)^2 + (x-1)(2-x)$
$= (5x^2 - 2\times 5x + 1^2) + 2x - x^2 - 2 + x = 4x^2 - 7x - 1$.

c. $3x(x+4) - (x-1)^2 = 3x^2 + 12x - (x^2 - 2x + 1)$
$= 3x^2 + 12x - x^2 + 2x - 1 = 2x^2 + 14x - 1$.

d. $(2x+7)^2 + x^2(x-3) = 4x^2 + 28x + 49 + x^3 - 3x^2$
$= x^3 + x^2 + 28x + 49$.

40 **a.** $(3x-1)(4x+1) + (x-5)(4x+1)$
$= (4x+1)[(3x-1) + (x-5)]$
$= (4x+1)(4x-6) = 2(4x+1)(2x-3)$.

b. $(4x-3)^2 - x^2 = [(4x-3) - x][(4x-3) + x]$
$= (3x-3)(5x-3) = 3(x-1)(5x-3)$.

c. $(5-2x)^2 + 3x(5-2x)$
$= (5-2x)\times(5-2x) + 3x\times(5-2x)$
$= (5-2x)[(5-2x) + 3x] = (5-2x)(x+5)$.

d. $x(3x+4) - (3x+4)^2 = x(3x+4) - (3x+4)(3x+4)$
$= (3x+4)[x - (3x+4)] = (3x+4)[x - 3x - 4]$
$= (3x-4)(-2x-4) = -2(3x-4)(x+2)$.

e. $(5-7x)^2 - (x-1)^2$
$= [(5-7x) - (x-1)][(5-7x) + (x-1)]$
$= [5 - 7x - x + 1][5 - 7x + x - 1]$
$= [-8x + 6][-6x + 4] = 4(-4x+3)(-3x+2)$.

f. $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 1 + 1^2 = (3x+1)^2$.

41 **a.** $A(x) = 3x^2 + 6x - [5x - 6x^2 + 10 - 12x]$
$= 3x^2 + 6x + 7x + 6x^2 - 10 = 9x^2 + 13x - 10$.

b. $A(x) = (x+2)[3x - (5-6x)] = (x+2)[3x - 5 + 6x]$
$= (x+2)(9x-5)$.

c. $A(-2) = (-2+2)(9\times(-2)-5) = 0$.

$A\left(\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}+2\right)\left(9\times\frac{5}{9}-5\right) = 0$.

$A(0) = 9\times 0^2 + 13\times 0 - 10 = -10$.

42 **1. a.** $(1+1)^2 = 2^2 = 4$ et $4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$.

Le résultat est 3.

b. $(-5+1)^2 = (-4)^2 = 16$ et $16 - (-5)^2 = 16 - 25 = -9$.

Le résultat est –9.

c. $\left(\frac{1}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ et $\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

Le résultat est 2.

d. $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et

$(3+2\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2}$.

Le résultat est $1 + 2\sqrt{2}$.

2. Il a raison. En effet : x désigne le nombre réel choisi. On a successivement :

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$;

puis $(x^2 + 2x + 1) - x^2 = 2x + 1$.

43 **1.** $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$

et $\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} = \frac{3+2+1}{6n} = \frac{6}{6n} = \frac{1}{n}$.

2. a. $1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

et $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

b. $\frac{1}{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{10\times 11} = \frac{1}{11} + \frac{1}{110}$

et $\frac{1}{10} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}$.

c. $\frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10\,001} + \frac{1}{100\,010\,000}$

et $\frac{1}{10\,000} = \frac{1}{20\,000} + \frac{1}{30\,000} + \frac{1}{60\,000}$

d. $\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7\times 8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$

et $\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}$.

44 **a.** On remarque que $x + 1$ est la plus grande longueur car $x > 0$. On calcule :

$\begin{cases} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x}{2}+1}\right)^2 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 = x + 1 \end{cases}$

or $x^2 + 2x + 1 \neq x + 1$ car $x > 0$

donc $(x+1)^2 \neq \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x}{2}+1}\right)^2$.

Donc le triangle n'est pas rectangle, l'égalité de Pythagore n'étant pas vérifiée.

b. Il est clair que $x^2 + y^2 \geqslant x^2 - y^2$.

De plus, $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.

• Ainsi, $x^2 + y^2$ est la plus grande longueur. On calcule :

$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \\ (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4. \end{cases}$

L'égalité de Pythagore étant vérifiée, le triangle est rectangle et l'hypoténuse mesure $x^2 + y^2$.

45 **a.** Comme (MQ) et (NP) sont parallèles, la hauteur issue de O du triangle NOP mesure $10 - x$.

• L'aire du triangle MOQ est égale à $x \times \frac{10}{2} = 5x$.

• L'aire du triangle NOP est égale à :

$(10-x) \times \frac{10}{2} = 5(10-x)$.

• L'aire colorée est donc égale à $5x + 5(10-x) = 50$.

b. L'aire du carré $MNPQ$ est égale à $10^2 = 100$.

Donc l'aire colorée est égale à la moitié de celle du carré, quel que soit le point O.

46 **a.** Faux. Par exemple, si le nombre choisi est 2. Alors : $x + 2 = 4 > 0$ et $x - 3 = -1 < 0$ donc le résultat est -4 et $-4 \notin \mathbb{N}$.

b. Faux. Par exemple, si le nombre choisi est $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$.

Alors $\begin{cases} x + 2 = \sqrt{2} + \frac{5}{2} \\ x - 3 = \sqrt{2} - \frac{5}{2} \end{cases}$

et $(x+2)(x-3) = \left(\sqrt{2}+\frac{5}{2}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)$

$= (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2 - \frac{25}{4} = \frac{8}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{17}{4} \in \mathbb{D}$.

c. Vrai. x désigne le nombre réel choisi. Alors le résultat est $(x-3)(x+2)$. Donc le résultat est nul si et seulement si $x = 3$ ou $x = -2$.

47 **a.** $\frac{7}{11} = \frac{21}{33}$ donc $\frac{7}{11} > \frac{16}{33}$.

b. $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$ et $\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$ donc $\frac{5}{12} > \frac{7}{18}$.

c. $\frac{13}{6} > \frac{13}{11}$ (car $6 < 11$).

d. $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$ donc $4^2 < 25$.

e. $(\sqrt{3})^8 = ((\sqrt{3})^2)^4 = 3^4$ donc $(\sqrt{3})^8 < 3^5$.

f. $3{,}9 < 5$ donc $\sqrt{3{,}9} < \sqrt{5}$.

48 **a.** $\frac{7}{13} = \frac{14}{26}$; $1 = \frac{26}{26}$; $\frac{14}{13} = \frac{28}{26}$.

Or $1 < 14 < 25 < 26 < 28$,

donc $\frac{1}{26} < \frac{7}{13} < \frac{25}{26} < 1 < \frac{14}{13}$.

b. $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$; $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; $\frac{9}{10}=\frac{18}{20}$; $\frac{11}{5}=\frac{44}{20}$; $\frac{1}{2}=\frac{10}{20}$.

Comme $8<10<15<18<44$,

$\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{9}{10}<\frac{11}{5}$.

c. $-1=-\frac{9}{9}$; $\frac{7}{3}=\frac{21}{9}$.

On a : $-\frac{11}{9}<-1<\frac{11}{-18}<\frac{11}{9}<\frac{7}{3}$.

d. $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{\frac{18}{6}}=\sqrt{3}$; $\frac{11}{5}=\sqrt{\frac{121}{25}}$; $\sqrt{16}$.

Comme $4<\frac{121}{25}<5$, $\sqrt{2}<\sqrt{\frac{18}{6}}<\frac{11}{5}<\sqrt{7}<\sqrt{16}$.

49 $\frac{\sqrt{25}}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

• $\frac{\sqrt{20}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{4\times5}}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$.

• $\frac{5\times10^3\times10^7}{(10^4)^2\times10}=\frac{5\times10^{10}}{10^{8+1}}=5\times10=50$.

• $(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1^2+2\sqrt{5}=5+1=6$.

Ainsi, on a :

$\frac{\sqrt{25}}{15}<\frac{\sqrt{20}}{4\sqrt{5}}<(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}<\frac{5\times10^3\times10^7}{(10^4)^2\times10}$.

50 **a.** $(7\sqrt{2})^2=49\times2=98$ et $(2\sqrt{7})^2=4\times7=28$.

Comme $7\sqrt{2}$ et $2\sqrt{7}$ sont des nombres réels positifs et comme $(2\sqrt{7})^2<(7\sqrt{2})^2$, $2\sqrt{7}<7\sqrt{2}$.

b. $(-10)^2=100$ et $(-6\sqrt{10})^2=360$.

Comme -10 et $6\sqrt{10}$ sont des nombres réels négatifs et comme $(-10)^2<(-6\sqrt{10})^2$, $-10>-6\sqrt{10}$.

c. $(2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$
et $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2=7+4\sqrt{3}$.

Comme $(2+\sqrt{3})^2=(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2$, et comme $2+\sqrt{3}$ et $7+4\sqrt{3}$ sont des nombres réels positifs, $2+\sqrt{3}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

51 **a.** Comme $0<5-2\sqrt{2}<5+2\sqrt{2}$, $\sqrt{5-2\sqrt{2}}<\sqrt{5+2\sqrt{2}}$, donc X est négatif.

b. $X^2=(5-2\sqrt{2})-2\sqrt{5-2\sqrt{2}}\sqrt{5+2\sqrt{2}}+(5+2\sqrt{2})$

$=10-2\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=10-2\sqrt{25}-4\times2$

$=10-2\sqrt{25}-8=10-2\sqrt{17}$.

• On a montré que $X^2=10-2\sqrt{17}$ donc $X=\sqrt{10-2\sqrt{17}}$ ou $X=-\sqrt{10-2\sqrt{17}}$.

Comme $X<0$, $X=-\sqrt{10-2\sqrt{17}}$.

52 **a.** $A=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

Comme $A>1$, on a : $A<A^2<A^3$.

b. $B^2=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{3}=4-2\sqrt{3}=2(2-\sqrt{3})$

et $B^3=B^2\times\frac{3-\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$

$=\frac{2}{3}(6-5\sqrt{3}+3)=\frac{2}{3}(9-5\sqrt{3})=6-\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

On compare :

$B-B^2=\frac{3-\sqrt{3}}{3}-\frac{6(2-\sqrt{3})}{3}=\frac{5\sqrt{3}-9}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}-3$

Donc $B>B^2$.

$B^2-B^3=4-2\sqrt{3}-6+\frac{10}{3}\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}-2>0$ donc $B^2>B^3$.

On conclut : $B>B^2>B^3$.

c. $C^2=6-2\sqrt{5}$;

$C^3=(6-2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)=8\sqrt{5}-6-10=8\sqrt{5}-16$.

On compare :

$C^2-C=6-2\sqrt{5}-\sqrt{5}+1=7-3\sqrt{5}>0$ donc $C^2>C$.

$C^3-C^2=8\sqrt{5}-16-6+2\sqrt{5}=10\sqrt{5}-22>0$ donc $C^3>C^2$.

On conclut : $C<C^2<C^3$.

53 **a.** La calculatrice affiche 1,000 000 008 donc $E>F$.

b. $E-F=1-\frac{1}{123\,456\,789}+\frac{1}{123\,456\,788}$

$=1+\frac{123\,456\,789-123\,456\,788}{123\,456\,789\times123\,456\,788}$

$=1+\frac{1}{123\,456\,789\times123\,456\,788}>0$ donc $E>F$.

54 **a.** n désigne un nombre entier naturel.

$\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$

$=\frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$

donc $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$.

b. On applique ce qui précède à $n=49\,999$.

Donc $\frac{49\,999}{50\,000}<\frac{50\,000}{50\,001}$.

55 **a.** $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}$

$=\frac{ab-ac-ba-bc}{b(b+c)}=\frac{-(ac+bc)}{b(b+c)}<0$

car $a>0$, $b>0$ et $c>0$. Donc $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$.

b. On choisit $a=5{,}5$, $b=3{,}5$ et $c=2+\sqrt{2}$ ($a>0$, $b>0$ et $c>0$) donc $\frac{5{,}5}{3{,}5}<\frac{\sqrt{2}+7{,}5}{\sqrt{2}+5{,}5}$.

56 **a.** $\frac{5x}{7}-\frac{3x}{4}=\frac{4\times5x-7\times3x}{28}=-\frac{x}{28}$.

Comme $x<0$, $\frac{5x}{7}-\frac{3x}{4}>0$ donc $\frac{5x}{7}>\frac{3x}{4}$.

b. $\frac{5}{7x} - \frac{3}{4x} = \frac{5\times 4 - 3\times 7}{28x} = -\frac{1}{28x}$.
Comme $x < 0$, $\frac{5}{7x} - \frac{3}{4x} > 0$ donc $\frac{5}{7x} > \frac{3}{4x}$.

57 $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$
• $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.
Donc $(\sqrt{a+b})^2 \leqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
Comme les nombres réels $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sont positifs, on a : $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

58 Périmètre $_{\text{rectangle}} = 2(\sqrt{20} + 7\sqrt{5}) = 2(2\sqrt{5} + 7\sqrt{5})$
$= 2 \times 9\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$.
Aire$_{\text{rectangle}} = \sqrt{20} \times 7\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \times 7\sqrt{5} = 2 \times 7(\sqrt{5})^2$
$= 14 \times 5 = 70$.
Périmètre$_{\text{carré}} = 4 \times 6\sqrt{5} = 24\sqrt{5}$.
Aire$_{\text{carré}} = (6\sqrt{5})^2 = 6^2 \times (\sqrt{5})^2 = 36 \times 5 = 180$.
Périmètre$_{\text{cercle}} = \pi \times \sqrt{180} = \sqrt{36} \times \sqrt{5} \times \pi = 6\pi\sqrt{5}$.
Aire$_{\text{disque}} = \pi \times \left(\frac{\sqrt{180}}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{180}{4} = 45\pi$.

59 **a.** Majorant, maximum : 10.
Minorant, minimum : 0.
b. Majorant : 28, pas de maximum.
Minorant, minimum : –3.
c. Majorant : 4. Minorant : 1.
Pas de maximum, pas de minimum.
d. Majorant, maximum : 0.
Pas de minorant, pas de minimum.
e. Pas de majorant, pas de maximum.
Minorant, minimum : –5.
f. Pas de majorant, pas de maximum.
Minorant : –2, pas de minimum.

60 **a.** $[-2 ; 3]$; **b.** $[2 ; +\infty[$; **c.** $[-5 ; 3[$; **d.** $]-\infty ; 0[$.

61 $x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $1 \leqslant 5x \leqslant 10) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 2)$. Donc $\frac{1}{5}$ est le minimum de $\mathcal{A}$ et 2 est le maximum de $\mathcal{A}$.
• $x \in \mathcal{B} \Leftrightarrow (x \geqslant 0$ et $-5 \leqslant 3x + 2 < 17)$
$\Leftrightarrow (x \geqslant 0$ et $-7 \leqslant 3x < 15)$
$\Leftrightarrow (x \geqslant 0$ et $-\frac{7}{3} \leqslant x \leqslant \frac{15}{3})$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x < \frac{15}{3} \Leftrightarrow 0 \leqslant x < 5$.
Donc 0 est le minimum de $\mathcal{B}$. Mais $\mathcal{B}$ n'a pas de maximum.

62 $x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $x^2 \leqslant 4) \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$.
Donc –2 est le minimum de $\mathcal{A}$ et 2 est le maximum de $\mathcal{A}$.
• $x \in \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x^2 > 100 \Leftrightarrow x < -10$ ou $x > 10$.
$\mathcal{B}$ n'a ni minimum, ni maximum.

63 $n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (n \in \mathbb{N}$ et $8 \leqslant 2n \leqslant 19{,}5) \Leftrightarrow (n \in \mathbb{N}$ et $4 \leqslant n \leqslant 9{,}75)$. Donc 4 est le minimum de $\mathcal{A}$ et 9 le maximum de $\mathcal{A}$.
• $n \in \mathcal{B} \Leftrightarrow (n \in \mathbb{Z}$ et $-12 < n < 7)$. Donc –11 est le minimum de $\mathcal{B}$ et 6 est le maximum de $\mathcal{B}$.

64 **a.** $|1 - \pi| = \pi - 1$ car $1 - \pi < 0$.
b. $|-\sqrt{5} - 0{,}1| = \sqrt{5} + 0{,}1$ car $-(\sqrt{5} + 0{,}1) < 0$.
c. $|-3{,}15 + 4{,}1| = 4{,}1 - 3{,}15$ car $4{,}1 - 3{,}15 > 0$.

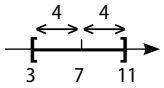
65 **a.** Si $|x| \leqslant 5$, alors $-5 \leqslant x \leqslant 5$.
b. Si $|x| > 3$, alors $x < -3$ ou $x > 3$.

66 **a.** $|x| = 10 \Leftrightarrow x = -10$ ou $x = 10$.
b. $|x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = -5$ ou $x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 8$.
c. $|x + 1| = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

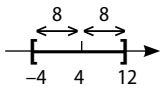
67 **1.** $|x - 5| = \begin{cases} x - 5 \text{ si } x \geqslant 5 \\ 5 - x \text{ si } x \leqslant 5. \end{cases}$
2. a. $|x + 7| = \begin{cases} x + 7 \text{ si } x \geqslant -7 \\ -x - 7 \text{ si } x \leqslant -7. \end{cases}$
b. $|4x - 1| = \begin{cases} 4x - 1 \text{ si } x \geqslant 1/4 \\ 1 - 4x \text{ si } x \leqslant 1/4 \end{cases}$
c. $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \geqslant -1 \\ -x - 1 \text{ si } x \leqslant -1 \end{cases}$
et $|x - 2| = \begin{cases} x - 2 \text{ si } x \geqslant 2 \\ 2 - x \text{ si } x \leqslant 2 \end{cases}$
donc $|x + 1||x - 2| = \begin{cases} (x+1)(x-2) \text{ si } x \geqslant 2 \\ (x+1)(2-x) \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ (-x-1)(2-x) \text{ si } x \leqslant -1. \end{cases}$

68

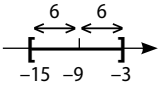
Intervalle	Encadrement	Valeur absolue	Schéma
$x \in [-1 ; 3]$	$-1 \leqslant x \leqslant 3$	$\lvert x - 1\rvert \leqslant 2$	–1 3
$x \in [1 ; 5]$	$1 \leqslant x \leqslant 5$	$\lvert x - 3\rvert \leqslant 2$	1 5
$x \in [-1 ; 7]$	$-1 \leqslant x \leqslant 7$	$\lvert x - 3\rvert \leqslant 4$	–1 7
$x \in [-2 ; 2]$	$-2 \leqslant x \leqslant 2$	$\lvert x\rvert \leqslant 2$	–2 2

69 **a.** 

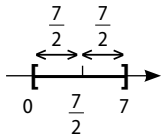
$\left(\frac{3+11}{2}=7\right)$
$|x-7|\leqslant 4$.

b. 

$\left(\frac{(-4)+12}{2}=\frac{8}{2}=4\right)$
$|x-4|<8$.

c. 

$\frac{(-15)+(-3)}{2}=\frac{18}{2}=-9$
$|x-(-9)|\geqslant 6 \iff |x+9|\geqslant 6$.

d. 

$|x-\frac{7}{2}|>\frac{7}{2}$.

70 **1.** Lorsque x désigne un nombre réel tel que $|x-4|\geqslant 5$, alors $x\leqslant -1$ ou $x\geqslant 9$.

2. a. Si $|x+8|<3$, alors $-3<x+8<3$,

donc $-11<x<-5$.

b. Si $|2x-3|\leqslant 1$, alors $-1\leqslant 2x-3\leqslant 1$, donc $2\leqslant 2x\leqslant 4$, donc $1\leqslant x\leqslant 2$.

c. Si $|5-x|>1$, alors $5-x<-1$ ou $5-x>1$, donc $x<4$ ou $x>6$.

d. Si $|1-3x|\geqslant 4$, alors $1-3x\leqslant -4$ ou $1-3x\geqslant 4$ donc $3x\leqslant -3$ ou $3x\geqslant 5$ donc $x\leqslant -1$ ou $x\geqslant \frac{5}{3}$.

71 **a.** $x\in\mathbb{N}$ et $|x|<10 \iff x\in\mathbb{N}$ et $-10<x<10$
$\iff x\in\{0\,;1\,;\ldots\,;8\,;9\}$.

b. $x\in\mathbb{Z}$ et $|x|\leqslant 6 \iff x\in\mathbb{Z}$ et $-6\leqslant x\leqslant 6$
$\iff x\in\{-6\,;-5\,;\ldots\,;5\,;6\}$.

c. $x\in\mathbb{N}$ et $|7-x|<4 \iff x\in\mathbb{N}$ et $-4<7-x<4$
$\iff x\in\mathbb{N}$ et $-11<-x<-3$
$\iff x\in\mathbb{N}$ et $3<x<11$
$\iff x\in\{4\,;5\,;\ldots\,;9\,;10\}$.

72 **1. a.** $1\leqslant x\leqslant 2 \iff 2\leqslant 2x\leqslant 4 \iff 1\leqslant 2x-1\leqslant 3$.

b. $0<1\leqslant x\leqslant 2$ donc $1\leqslant x^2\leqslant 4$ donc $-4\leqslant -x^2\leqslant -1$ donc $-3\leqslant 1-x^2\leqslant 0$.

2. a. $-3\leqslant y\leqslant -2 \iff -2\times(-3)\leqslant -3y\leqslant -3\times(-3)$
$\iff 6\leqslant -3y\leqslant 9 \iff 8\leqslant 2-3y\leqslant 11$.

b. $-3\leqslant y-2<0$ donc $4\leqslant y^2\leqslant 9$ donc $0\leqslant y^2-4\leqslant 5$.

3. a. $\sqrt{2}\leqslant z\leqslant\sqrt{5}$ donc $2\leqslant z^2\leqslant 5$ donc $1\leqslant z^2-1\leqslant 4$.

b. $0<2\leqslant z^2\leqslant 5$ donc $\frac{1}{5}\leqslant\frac{1}{z^2}\leqslant\frac{1}{2}$ donc $\frac{2}{5}\leqslant\frac{2}{z^2}\leqslant 1$.

73 **a.** Arrondi à l'ordre 3 : 79,773.

b. Arrondi à l'ordre 5 : 79,77254.

74 **a.** 10^6. **b.** 2×10^{-5}. **c.** 9×10^6.

75

App. décimale d'ordre	0	1	2	3
Par défaut	1	1,2	1,28	1,285
Par excès	2	1,3	1,29	1,286
Arrondi	1	1,3	1,29	1,286

76 **a.** $\begin{cases}2<x<3\\3<y<4\end{cases}$ donc $\begin{cases}4<x^2<9\\-4<-y<-3\end{cases}$.

Ainsi : $\begin{cases}5<x+y<7\\-2<x-y<0\end{cases}$ et $\begin{cases}12<x^2y<36\\\frac{1}{2}<\frac{x}{y}<1\end{cases}$.

b. $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant -1\\1\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$ donc $\begin{cases}1\leqslant x^2\leqslant 4\\-2\leqslant -y\leqslant -1\end{cases}$.

Ainsi : $\begin{cases}-1\leqslant x+y\leqslant 1\\-4\leqslant x-y\leqslant -2\end{cases}$ et $\begin{cases}1\leqslant x^2y\leqslant 8\\-2\leqslant\frac{x}{y}\leqslant -\frac{1}{2}\end{cases}$.

77 **a.** $-1\leqslant x\leqslant 2 \iff -2\leqslant 2x\leqslant 4 \iff 1\leqslant 2x+3\leqslant 7$
donc $1\leqslant(2x+3)^2\leqslant 49$.

b. $-1\leqslant x\leqslant 2 \iff -6\leqslant -3x\leqslant 3 \iff 1\leqslant 7-3x\leqslant 10$
donc $\frac{1}{10}\leqslant\frac{1}{7-3x}\leqslant 1$.

78 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ donc $0<x^2<\frac{1}{4}$ et $1<x^2+1<\frac{5}{4}$.
Ainsi, $1<\sqrt{x^2+1}<\frac{\sqrt{5}}{2} \iff -\frac{\sqrt{5}}{2}<-\sqrt{x^2+1}<-1$.
Or $\frac{1}{2}<x+1<\frac{3}{2}$ donc $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}<x+1-\sqrt{x^2+1}<\frac{1}{2}$.

79 **a.** $x\geqslant 2 \iff x+1\geqslant 3$ donc $\frac{1}{x+1}\leqslant\frac{1}{3}\leqslant 3$.

b. $x\geqslant 2 \iff x+7\geqslant 9$ donc $\sqrt{x+7}\geqslant\sqrt{9}$ donc $\frac{1}{\sqrt{x+7}}\leqslant\frac{1}{3}$
donc $\frac{3}{\sqrt{x+7}}\leqslant 1$.

80 **a.** $\begin{cases}1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415\\-1{,}733<-\sqrt{3}<-1{,}732\end{cases}$
donc $2{,}509<3\sqrt{2}-\sqrt{3}<2{,}513$.

b. $3{,}146<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}148$ donc $0{,}317<\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}<0{,}318$.

81 **a.** $v=20\sqrt{273+25}=20\times\sqrt{298}\approx 345$ m/s.

b. $20\sqrt{273+T}\approx 320$ donc $\sqrt{273+T}\approx 16$
donc $273+T\approx 256$ donc $T\approx -17$°C.

Faire le point

82 **a.** $\dfrac{21\times(10^{-3})^4}{3\times10^7}=7\times10^{-12}\times10^{-7}=7\times10^{-19}\in\mathbb{D}$.

b. $\dfrac{7(\sqrt{3})^2}{6}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{7\times\cancel{3}\times3}{\cancel{3}\times2\times4}=\dfrac{21}{8}\in\mathbb{D}$.

c. $\sqrt{75}-5\sqrt{3}-10=\sqrt{25\times3}-5\sqrt{3}-10$
$=\sqrt{25}\sqrt{3}-5\sqrt{3}-10=-10\in\mathbb{Z}$.

d. $\left(\pi+\dfrac{1}{\pi}\right)\div\pi=\dfrac{\pi^2+1}{\pi}\times\dfrac{1}{\pi}=\dfrac{\pi^2+1}{\pi^2}=1+\dfrac{1}{\pi^2}\in\mathbb{R}$.

e. $-\dfrac{\sqrt{100}}{5}+\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{28}}{2}=-\dfrac{10}{5}+\dfrac{\sqrt{7}\times2\sqrt{7}}{2}=-2+(\sqrt{7})^2$
$=-2+7=5\in\mathbb{N}$.

f. $\sqrt{\dfrac{64}{49}}\div\dfrac{4}{7}=\dfrac{8}{7}\times\dfrac{7}{4}=2\in\mathbb{N}$.

83 • Calcul de A – Erreurs de priorité :

$\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\neq\dfrac{13}{6}\left(1-\dfrac{1}{10}\right)$

et $1-4\times\dfrac{7}{11}\neq-3\times\dfrac{7}{11}$.

• Calcul de B – Erreur : $\sqrt{10}-\sqrt{3}\neq\sqrt{7}$.

• Corrections :

$$A=\frac{\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{10}\right)}{1-4\times\dfrac{7}{11}}=\frac{\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{9}{10}}{1-\dfrac{28}{11}}=\frac{\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}}{-\dfrac{17}{11}}$$

$$A=\frac{\dfrac{16+9}{12}}{-\dfrac{17}{11}}=\frac{25}{12}\times\frac{11}{-17}=-\frac{275}{204}.$$

$$B=\frac{\sqrt{40}-7\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{3}}{5-3}=\frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{3})}{2}$$

$B=\sqrt{10}-\sqrt{3}$.

84 $A(x)=4(\underline{2x+1})(2x+1)+(\underline{2x+1})\times1$
$=2x+1)[4(2x+1)+1]=(2x+1)(8x+5)$.

$B(x)=(\underline{3-4x})\times(3-4x)+(\underline{3-4x})\times1$
$=(3-4x)[(3-4x)+1]$
$=(3-4x)(-4x+4)=4(3-4x)(-x+1)$.

$C(x)=(\underline{5x-2})(x+1)+(\underline{5x-2})\times(-1)$
$=(5x-2)[(x+1)-1]=(5x-2)\times x$.

$D(x)=(\underline{1+x})\times1-(\underline{1+x})\times(1+x)$
$=(1+x)[1-(1+x)]=(1+x)(1-1-x)$
$=-x\times(1+x)$.

85 **a.** $|6x+3|<18\Leftrightarrow|6\,(x+3/6)|<18$

$\Leftrightarrow|x+\dfrac{1}{2}|<\dfrac{18}{6}$ (car $6>0$) $\Leftrightarrow|x+\dfrac{1}{2}|<3$.

b. $|x+\dfrac{1}{2}|<3\Leftrightarrow-3<x+\dfrac{1}{2}<3\Leftrightarrow-\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{5}{2}$.

Les solutions de *I* sont les nombres *x* tels que :

$x\in\left]-\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right[$.

86 **1.** Si $a\leqslant b$ et $c\leqslant d$ alors $a+c\leqslant b+d$.

• Si $a\leqslant b$ et $c\geqslant0$ alors $ac\leqslant bc$.

• Si $a\leqslant b$ et $c\leqslant0$ alors $ac\geqslant bc$.

• Si $0\leqslant a\leqslant b$ alors $a^2\leqslant b^2$ et $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$.

• Si $a\leqslant b<0$ alors $a^2\geqslant b^2$ et $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{1}{b}$.

• Si $0<a\leqslant b$ alors $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{1}{b}$.

2. a. $\begin{cases}-3<x<-2\\0{,}1<y<0{,}2\end{cases}$ donc $\begin{cases}4<x^2<9\\0{,}01<y^2<0{,}04\end{cases}$

donc $4{,}01<x^2+y^2<9{,}04$.

b. $\begin{cases}4<x^2<9\\0{,}1<y<0{,}2\end{cases}$ donc $0{,}4<x^2y<1{,}8$.

c. $\begin{cases}0{,}01<y^2<0{,}04\\-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x}<-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ donc $-0{,}01<\dfrac{y^2}{x}<-\dfrac{-0{,}01}{3}$.

87 C'est Dahirou qui a raison :

$(10^{15}-1)(10^{15}+1)=(10^{15})^2-1^2=10^{30}-1$.

• La calculatrice fait des erreurs d'arrondis.

88 **1.** $\sqrt{7}\approx2{,}646$ et $\pi\approx3{,}141$.

2. $2{,}646\times3{,}141=8{,}311\,086$.

3. a. L'arrondi de $\pi\times\sqrt{7}$ par excès à l'ordre 3 est 8,312.

b. Le produit des arrondis à l'ordre 3 de deux nombres donnés n'est pas nécessairement égal à l'arrondi à l'ordre 3 des produits.

89 **1.** Vitesse $\approx3\times10^5$ km/s. Distance $\approx1{,}5\times10^8$ km.

2. Temps $=\dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$ donc un ordre de grandeur du temps mis par la lumière pour aller du Soleil à la Terre est $\dfrac{1{,}5\times10^8}{3\times10^5}=0{,}5\times10^3=500$ s, soit environ 8 minutes.

Se tester

90 à **93** Voir Manuel de l'élève page 260.

Exercices d'approfondissement

94 **1. a.** $100^2 - 98^2 = (100 + 98)(100 - 98) = 198 \times 2 = 396$.

b. $101^2 - 99^2 = (101 + 99) \times (101 - 99) = 200 \times 2 = 400$.

c. $102^2 - 100^2 = (102 + 100) \times (102 - 100) = 202 \times 2 = 404$.

2. $396 = 4 \times 99$; $400 = 4 \times 100$ et $404 = 4 \times 101$ donc 396, 400 et 404 sont divisibles par 4.

3. $(n + 2)^2 - n^2 = (n + 2 + n)(n + 2 - n) = 2(2n + 2) = 2 \times 2(n + 1) = 4(n + 1)$.

Comme $n + 1$ est un nombre entier naturel, $(n + 2)^2 - n^2$ est divisible par 4.

95 **1.** $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

donc $1^2 = x^2 + y^2 + 2xy \iff 1 = 2 + 2xy \iff xy = -\frac{1}{2}$.

2. • $x + y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

• $x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2}{4}$

$= \frac{1^2 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{4} = \frac{8}{4} = 2$

donc x et y vérifient les deux conditions de l'énoncé.

3. a. $x' = -0{,}36\,603$ et $y' = 1{,}36\,603$

b. • $x'^2 + y'^2 \approx 2{,}000\,015\,922$. Son arrondi d'ordre 5 par excès est 2,00 002.

• L'arrondi de $x^2 + y^2$ à l'ordre 5 est 2 car $x^2 + y^2 = 2$.

• On voit que $x^2 + y^2$ et $x'^2 + y'$ n'ont pas le même arrondi d'ordre 5.

Cette différence est due aux erreurs d'arrondis.

96 **a.** n désigne un nombre entier naturel tel que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que p et q soient premiers entre eux et $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$.

Ainsi $n = (\sqrt{n})^2 = \frac{p^2}{q^2}$. Comme $n \in \mathbb{N}$, $\frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{N}$.

b. a désigne un nombre entier naturel non égal à un carré parfait.

Supposons que $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. Alors d'après la question **a.**, $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$. Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{a} = k$, donc $a = k^2$. Contradiction.

Ainsi, $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel.

97 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. Donc E est minoré par -1 et majoré par 1.

98 **a.** p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. Donc p est impair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k + 1$.

Ainsi $\begin{cases} X = \frac{p+1}{2} = \frac{2k+1+1}{2} = k + 1 \in \mathbb{N} \\ Y = \frac{p-1}{2} = \frac{2k+1-1}{2} = k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

b. $X^2 - Y^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

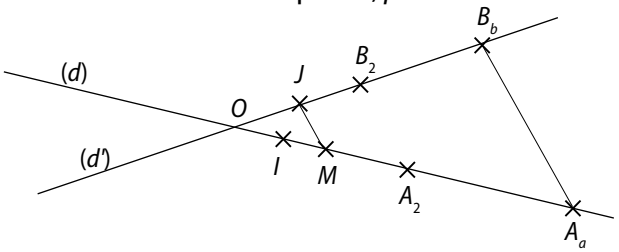
$= \frac{(p+1)^2 - (p-1)^2}{4} = \frac{(p^2 + 2p + 1) - (p^2 - 2p + 1)}{4}$

$= \frac{p^2 + 2p + 1 - p^2 + 2p - 1}{4} = \frac{4p}{2} = p$.

• Si p désigne un nombre premier tel que $p \geqslant 3$, alors $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ avec $\frac{p-1}{2}$ et $\frac{p+1}{2}$ deux nombres entiers (d'après **a.**) consécutifs.

99 **1. a.** Si $x \in \mathbb{Q}$, alors il existe $x \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, tels que $x = \frac{a}{b}$.

Comme x est strictement positif, $p \in \mathbb{N}^*$.



Les droites (d) et (d') sont sécantes en O. Les droites (MJ) et (B_bA_a) sont parallèles.

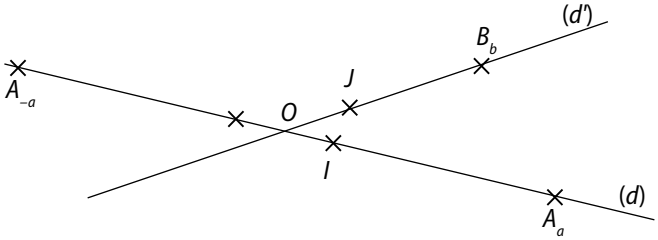
D'après le théorème de Thalès :

$\frac{OJ}{OB_b} = \frac{OM}{OA_a}$ donc $\frac{1}{b} = \frac{OM}{a}$ donc $OM = \frac{a}{b}$.

Ainsi, $OM = x$; x est constructible.

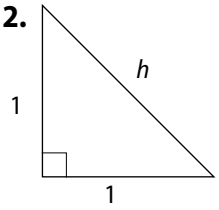
b. x désigne un nombre rationnel strictement négatif.

Il existe alors $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = -\frac{a}{b}$.

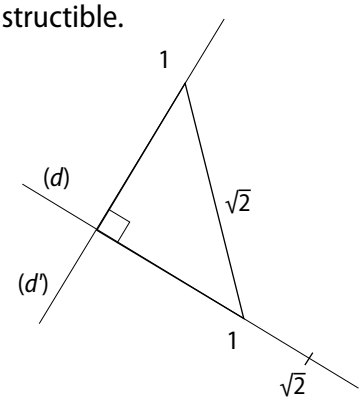


On construit le nombre $-x$, qui est un nombre rationnel positif (question précédente) : le point M est un point de (d) tel que $OM = -x$.

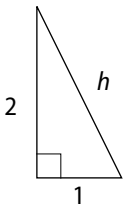
Enfin, on construit le symétrique M' du point M par rapport à O. On a : $OM' = -x$.

2. 

Le triangle étant rectangle, le théorème de Pythagore permet d'écrire que $h^2 = 1 + 1 = 2$ donc $h = \sqrt{2}$ ($h > 0$). Ainsi $\sqrt{2}$ est constructible.

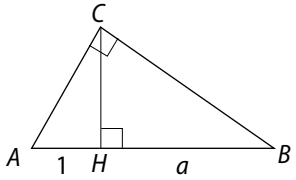


(d) et (d') perpendiculaires.



Le triangle étant rectangle, le théorème de Pythagore permet d'écrire que $h^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$ donc $h = \sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ est ($h > 0$) constructible.

• Montrons que si a est un nombre réel, $a \geqslant 0$, constructible, alors $\sqrt{a}$ est constructible.



ABC est un triangle rectangle en C tel que $AB = 1 + a$. D'après le théorème de Pythagore, appliqué successivement dans les triangles ACH, BCH et ABC, on a :

$$\begin{cases} AC^2 = CH^2 + 1 \\ BC^2 = CH^2 + a^2 \\ AC^2 + BC^2 = AB^2 = (1 + a)^2. \end{cases}$$

Ainsi : $1 + a^2 + 2CH^2 = (1 + a)^2$

$\iff 2CH^2 = (1 + a)^2 - 1 - a^2 \iff 2CH^2 = 2a$

$\iff CH = \sqrt{a}$ car CH est une longueur et $a \geqslant 0$.

On en déduit donc que si a est constructible, alors $\sqrt{a}$ est aussi constructible.

100 D'une part : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

puis : $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

$= a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2$

$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

101 Remarquons que $\sqrt{a - b}$ est défini car $a > b$ et que $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$ car $a \neq b$.

a. Comme $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$:

$$\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{a\sqrt{b}\sqrt{a} + a(\sqrt{b})^2 - b(\sqrt{a})^2 - b\sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}$$

$$= \frac{(a - b)\sqrt{b}\sqrt{a} + ab - ba}{a - b} = \frac{(a - b)\sqrt{ab}}{a - b} = \sqrt{ab}.$$

b. Comme $a > b$, on a :

$\sqrt{a - b} \times \sqrt{a - b} = (\sqrt{a - b})^2 = a - b$

et $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$

donc $\sqrt{a - b} \times \sqrt{a - b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

Ainsi, comme $a \neq b$: $\dfrac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a - b}}$.

102 **a.** On remarque que $a \geqslant b$ donc $a^2 - b^2 \geqslant 0$ donc $\sqrt{a^2 - b^2}$ est défini.

• D'une part : $a + \sqrt{a^2 - b^2} \geqslant 0$ car $a \geqslant 0$ et $\sqrt{a^2 - b^2} \geqslant 0$.

• D'autre part : $a - \sqrt{a^2 - b^2} \geqslant 0$ car $a \geqslant b \geqslant 0$. En effet : $a^2 \geqslant a^2 - b^2 \geqslant 0$ donc $a = \sqrt{a^2} \geqslant \sqrt{a^2 - b^2}$.

• Ainsi, A est bien défini.

b. $A^2 = a + \sqrt{a^2 - b^2} + 2\sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a - \sqrt{a^2 - b^2})}$
$+ a - \sqrt{a^2 - b^2}$

$= 2a + 2\sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2} = 2a + 2\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)}$

$= 2a + 2\sqrt{b^2} = 2a + 2b$ car $b \geqslant 0$

$= 2(a + b)$.

c. $A^2 = 2(a + b)$ or $A \geqslant 0$ donc $A = \sqrt{2(a + b)}$.

103 **1. a.** $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$

$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

b. $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

c. $(a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 - ba^2 - 2ab^2 - b^3$

$= a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$.

d. $(a + b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 + ba^2 - 2ab^2 + b^3$

$= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$.

2. a. $101^3 = (100 + 1)^3$

$= 100^3 + 3 \times 1 + 100^2 + 3 \times 100 \times 1^2 + 1^3$

$= 1\,000\,000 + 30\,000 + 300 + 1$

$= 1\,030\,301$.

b. $70^3 + 30^3 = (100 - 30)^3 + 30^3$

$= 100^3 - 3 \times 100^2 \times 30 + 3 \times 100 \times 30^2 - 30^3 + 30^3$

$= 1\,000\,000 - 900\,000 + 270\,000$

$= 100\,000 + 270\,000 = 370\,000$.

c. $100^3 - 90^3 = 100^3 - (100 - 10)^3$
$= 100^3 - [100^3 - 3 \times 100^2 \times 10 + 3 \times 100 \times 10^2 - 10^3]$
$= 3 \times 100^2 \times 10 - 3 \times 100 \times 10^2 + 10^3 = 271\,000.$

d. $99^3 = (100 - 1)^3$
$= 100^3 - 3 \times 100^2 \times 1 + 3 \times 100 \times 1^2 - 1^3$
$= 1\,000\,000 - 30\,000 + 300 - 1 = 970\,299.$

104 x désigne la quantité, en L, de sang débitée au repos par le cœur en une minute. D'après l'énoncé, 68 % de x ($100 - 13 - 19 = 68$) est égal à 3,5.

Donc $\frac{68}{100}x = 3{,}5 \iff x = \frac{3{,}5 \times 100}{68} = \frac{87{,}5}{17}$.
Environ 5,15 L sont débités au repos en une minute par le cœur.

105 **1.** Pour tous nombres réels x et y :
$\begin{cases} |x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y| \\ |y| = |y - x + x| \leqslant |y - x| + |x| \end{cases}$

donc $\begin{cases} |x| - |y| \leqslant |x - y| \\ |y| - |x| \leqslant |x - y| \end{cases}$ donc $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

2. a. • $|xy| = |x| \times |y| < 1$ car $|x| < 1$ et $|y| < 1$.
Comme $|xy| < 1$, $-1 < xy < 1$ donc $0 < 1 + xy$.

b. $(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy$
et $(1 - x)(1 - y) = 1 - x - y + xy$.

c. $x + y = (1 + x)(1 + y) - (1 + xy)$, or $1 + xy \neq 0$,

donc $\frac{x + y}{1 + xy} = \frac{(1 + x)(1 + y)}{1 + xy} - 1 \geqslant -1$.

$x + y = 1 + xy - (1 - x)(1 - y)$, or $1 + xy \neq 0$,

donc $\frac{x + y}{1 + xy} = 1 - \frac{(1 - x)(1 - y)}{1 + xy} \leqslant 1$.

106 **a.** $\Phi^2 - \Phi - 1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1$
$= \frac{1 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) - 4}{4}$
$= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4}{4} = 0.$

b. $\Phi - \frac{1}{\Phi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}$
$= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5}$
$= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

c. $\frac{1}{1 + \Phi} = \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$.

• $1 - \frac{1}{1 + \Phi} = 1 - \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$
$= \frac{(1 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{3 - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5}{9 - 5} = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4}$
$= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

• $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \Phi}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$
$= \frac{2(1 + \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)} \frac{2(1 + \sqrt{5})}{5 - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$

d. $\Phi^2 - \Phi = 1$ d'après la question **a**. donc $\Phi^3 - \Phi^2 = \Phi$ or d'après **a.**, $\Phi^2 = \Phi + 1$ donc $\Phi^3 - \Phi - 1 = \Phi$ donc $\Phi^3 - 2\Phi = 1$.

107 **1. a.** $1 + \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x} = \frac{x^2}{x} = x$.

b. $1 1 + \frac{1}{x} = x$ donc $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x}} = 1 + \frac{1}{x} = x$.

Puis $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x}} = 1 + \frac{1}{x} = x$.

2. $\frac{11}{13} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{13}{11}}}$ et $\frac{13}{11} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{11}{13}}$.

3. L'exercice 106 montre que $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ vérifie $\Phi^2 - \Phi = 1$.

Donc d'après la question 1, on a : $\Phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}$.

108 **1.** $A_1 = 1 - x^2$;
$A_2 = (1 - x)(1 + x + x^2) = 1 + x + x^2 - x - x^2 - x^3 = 1 - x^3$.
$A_3 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)$
$= 1 + x + x^2 + x^3 - x - x^2 - x^3 - x^4 = 1 - x^4$.
$A_4 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$
$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 = 1 - x^5$.

a. Il semble que pour tout nombre entier naturel non nul n : $A_n = 1 - x^{n+1}$.

b. n désigne un nombre entier naturel non nul.
$A_n = (1 - x)(1 + x + \ldots + x^n)$
$= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^n - x^{n+1}$
$= 1 - x^{n+1}$.

2. a. $B = \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 - x^4} = \frac{1 + x + x^2 + x^3}{A_3} = \frac{1}{1 - x}$.

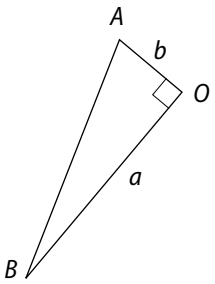
$C = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{1 - x^5} = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}{A_4} = \frac{1}{1 - x}$.

b. $\frac{1 + 3 + 9 + 27 + 81}{1 - 243} = \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4}{1 - 3^5}$
$= \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{1+0{,}2+0{,}04+0{,}008}{1-0{,}0016}=\frac{1+0{,}2+0{,}2^2+0{,}2^3}{1-0{,}2^4}$$
$$=\frac{1}{1-0{,}2}=1{,}25.$$

109 L'aire d'un triangle rectangle est égale à : $\frac{a\times b}{2}=\frac{ab}{2}$.
Donc l'aire colorée est égale à :

$AB^2-4\times\frac{ab}{2}=AB^2-2ab$.



• Calcul de AB^2 :
Dans le triangle AOB rectangle en O, l'égalité de Pythagore permet d'écrire que :
$AB^2=AO^2+OB^2=a^2+b^2$.
• Ainsi, l'aire colorée est égale à :
$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$.

110 **1. a.** x désigne un élément de E. Supposons que x admette deux symétriques $x'\in E$ et $x''\in E$.

Par définition : $\begin{cases} x*x'=e=x'*x \\ x*x''=e=x''*x. \end{cases}$

De $x*x'=e$, il suit que $x''*x*x'=x''*e=x''$.

Or $x''*x=e$ donc $e*x'=x''$ donc $x'=x''$.

On en déduit que, lorsqu'il existe, le symétrique d'un élément x de E est unique.

b. a et b désignent deux éléments de E.
$a*x=b$ donc $a'*a*x=a'*b$, donc $e*x=a'*b$, donc $x=a'*b$. L'équation $a*x=b$ admet une unique solution $x=a'*b$, où a' est le symétrique de a.

2. a. Montrons que $(\mathbb{R}\,;+)$ est un groupe.
Pour tous $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $x+y\in\mathbb{R}$,
pour tous $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{R}$,
$x+(y+z)=(x+y)+z$
« il existe » $0\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$x+0=0+x=x$;
pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $x'\in\mathbb{R}$ tel que :
$x+x'=0=x'+x$. En effet, $x'=-x$ convient.

• Montrons que $(\mathbb{R}^*\,;\times)$ est un groupe.
Pour tous $x\in\mathbb{R}^*$, $y\in\mathbb{R}^*$, $x\times y\in\mathbb{R}^*$
pour tous $x\in\mathbb{R}^*$, $y\in\mathbb{R}^*$, $z\in\mathbb{R}^*$
$x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$
« il existe » $1\in\mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:
$x\times 1=1\times x=x$;
pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, il existe $x'\in\mathbb{R}^*$ tel que :
$x\times x'=1=x'\times x$. En effet, $x'=-x$ convient.

b. • $(\mathbb{Z}\,;+)$ est un groupe. En effet :
pour tous $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$, $y+x\in\mathbb{Z}$
pour tous $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$, $z\in\mathbb{Z}$,
$x+(y+z)=(x+y)+z$
« il existe » $0\in\mathbb{Z}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{Z}$,
$x+0=0+x=x$;
pour tout $x\in\mathbb{Z}$, il existe $x'\in\mathbb{Z}$ tel que
$x+x'=0=x'+x$. En effet, $x'=-x$ convient.

• $(\mathbb{N}\,;\times)$ n'est pas un groupe car $2\in\mathbb{N}$ et 2 n'a pas de symétrique dans $\mathbb{N}$ (si $n\in\mathbb{N}$ alors $-n\notin\mathbb{N}$).

c. • Pour tous $x\in I$, $y\in I$: $-2<x+y<2$

et $\begin{cases} -1<xy<1 \\ 0<1+xy<2 \end{cases}$ donc $-1<\frac{x+y}{1+xy}$.

De plus, $x+y<1+xy$
car $x+y<1+xy\iff 0<(1-y)(1-x)$.

Or $1+xy>0$ donc $\frac{x+y}{1+xy}<1$. Et par suite, $x*y\in I$.

• Pour tous $x\in I$, $y\in I$, $z\in I$

$$x*(y*z)=\frac{x+y*z}{1+x(y*z)}=\frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{x(y+z)}{1+yz}}$$

$$=\frac{\frac{x+xyz+y+z}{1+yz}}{\frac{1+yz+x(y+z)}{1+yz}}=\frac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+xz}$$

$$\text{et } (x*y)*z=\frac{(x*y)+z}{1+z(x*y)}=\frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{z(x+y)}{1+xy}}$$

$$=\frac{\frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy}}{\frac{1+xy+z(x+y)}{1+xy}}=\frac{x+y+z+zxy}{1+xy+zx+zy}$$

donc $x*(y*z)=(x*y)*z$.

• Pour tout $x\in I$: $x*0=x=0*x$. Donc 0 est l'élément neutre de I.

• Pour tout $x\in I$: $x*x'=0=x'*x$ avec $x'=-x\in I$.

111 **1. a.** $1=\frac{1}{1}$ donc $1\in E$.

b. n désigne un nombre entier naturel non nul :
$n\geqslant 1>0$ donc $\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{1}$ donc $\frac{1}{n}\leqslant 1$.

2. Pour tout élément x de E, il existe un nombre entier naturel n non nul tel que $x=\frac{1}{n}$.
D'après la question **1. b.** : $x\leqslant 1$.
Donc E est majoré.
Comme $1\in E$, 1 est le maximum de E.

3. Pour tout élément x de E, il existe un nombre entier naturel n non nul tel que $x = \frac{1}{n}$. Donc $x > 0$.
Ainsi, E est minoré par 0.

4. E ne possède pas de maximum car 0 est le grand minorant de E et 0 n'est pas l'inverse d'un nombre entier naturel non nul.

112 **1. a.** M est le maximum de $]-\infty ; a[$ donc $M \in]-\infty ; a[$ donc $M < a$.

Ainsi : $\frac{a+M}{2} < \frac{a+a}{2}$ donc $\frac{a+M}{2} < a$

donc $\frac{a+M}{2} \in]-\infty ; a[$.

b. On vient de montrer que $\frac{a+M}{2} \in]-\infty ; a[$.

Comme M est le maximum de $]-\infty ; a[$: $a + \frac{M}{2} < M$

donc $a + M < 2M$ et $a < M$.

On obtient $a < M$ et $M < a$ (question 1. a.) donc contradiction. $]-\infty ; a[$ n'admet donc pas de maximum.

2. Pour tout nombre réel b, $]b ; +\infty[$ n'admet pas de minimum.

Un raisonnement par l'absurde identique à celui de la question **1** le prouve.

3. Pour tout nombre réel a et b tels que $a < b$:

• $[a ; b[$ admet a pour minimum car $a \in [a ; b[$ et pour tout $x \in [a ; b[$, $x \geqslant a$.

• $[a ; b[$ n'admet pas de maximum (raisonnement par l'absurde identique à celui de la question **1**).

113 **1.** Le résultat affiché est 0. Ce n'est pas correct car $10^{26} + 4 - 10^{26} = 4$.

La calculatrice commet une erreur d'arrondi en raison des deux « grands nombres » 10^{26} et -10^{26}.

2. Le résultat affiché est 2 000 000 000. Ce n'est pas correct car :

$999\,999\,999^2 - 999\,999\,9989^2 =$

$(999\,999\,999 - 999\,999\,998)(999\,999\,999 + 999\,999\,998)$

$= 1 \times 1\,999\,999\,997 = 999\,999\,997$.

La calculatrice commet là encore une erreur d'arrondi en raison des deux « grands nombres » 999 999 999 et 999 999 998.

114 **1. a.** • $x = 0{,}01010101\ldots$ donc

$100x = 1{,}010101\ldots = 1 + x$.

Ainsi : $100x - x = 1$ et $99x = 1$, donc $x = \frac{1}{99}$ et $x \in \mathbb{Q}$.

b. $y = 7{,}01010101\ldots$ donc $y = 7 + x = 7 + \frac{1}{99}$ et $y \in \mathbb{Q}$.

2. On pose $x = 0{,}99999\ldots$

donc $100x = 99{,}9999\ldots = 99 + x$.

Ainsi : $100x - x = 99$ et $99x = 99$, donc $x = 1$.

3. On pose $y = 1{,}119999\ldots$ et $x = 0{,}99999\ldots$

donc $100y = 111{,}9999\ldots = 111 + x = 111 + 1 = 112$

donc $y = \frac{112}{100} = 1{,}12$.

115 **1.** $S(n) - \frac{1}{2}S(n)$

$= \overbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)}^{n+1 \text{ termes}} - \overbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}^{n+1 \text{ termes}}$

$= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

2. On a alors : $\frac{1}{2}S(n) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

donc $S(n) = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$.

3. Pour tout nombre entier naturel n, $n \geqslant 2$ on a

$0 \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant 1$, donc $0 \geqslant -\frac{1}{2^n} \geqslant -\frac{1}{4} \geqslant -1$,

d'où $2 \geqslant 2 - \frac{1}{2^n} \geqslant 2 - \frac{1}{4} \geqslant 1$ et $1 \leqslant S(n) \leqslant 2 - \frac{1}{4} \leqslant 2$.

116 $p = \frac{m}{V} = \frac{675}{V}$ où V est le volume de l'objet.

Or $V = 10^2 \times 17{,}5 - 10^2 \times 15 = 10^2 \times 2{,}5 = 250$

donc $p = \frac{675}{250} = 2{,}7$.

La masse volumique de l'objet est égale à 2,7 g/cm^3.

117 **1. a.**

État	0	1	2	3
Nombre de côtés	3	12	48	192

b. À l'état 5, le nombre de côtés est $192 \times 4 \times 4 = 3\,072$.

À l'état 10, le nombre de côtés est :

$3\,072 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 3\,145\,728$.

c. $C(0) = 3$; $C(1) = 12$ et $C(2) = 48$.

• Entre l'état n et l'état $n + 1$, chaque segment en « donne » quatre.

Ainsi = $C(n + 1) = 4 \times C^{(n)}$.

Par conséquent, comme $C(0) = 3$, $C(1) = 4 \times 3$, $C(2) = 4 \times 4 \times 3$, …, $C(n) = 4^n \times 3$ pour tout entier n naturel.

d. $2^{10} = 1\,024$ donc $2^{10} \approx 10^3$.

• $C(50) = 3 \times 4^{50} = 3 \times (2^2)^{50} = 3 \times 2^{100}$

donc $C(50) \approx 3 \times (10^3)^{10}$ et $C(50) \approx 3 \times 10^{30}$.

$C(100) = 3 \times 4^{100} = 3 \times (2^2)^{100} = 3 \times 2^{200} = 3 \times (2^{10})^{20}$
donc $C(100) \approx 3 \times (10^3)^{20}$
et $C(100) \approx 3 \times 10^{60}$.

2. a.

État	0	1	2	3	4
Longueur d'un côté	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$

b. Entre l'état n et l'état $n + 1$, chaque segment de longueur a donné est divisé en trois segments de longueur identique $\frac{a}{3}$.
Ainsi, $L(n+1) = \frac{L(n)}{3}$.

• Comme $L(0) = 1$, $L(1) = \frac{1}{3}$, $L(2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$… et $L(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout nombre entier n naturel.

3. a. $P(n) = C(n) \times L(n)$
$= 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

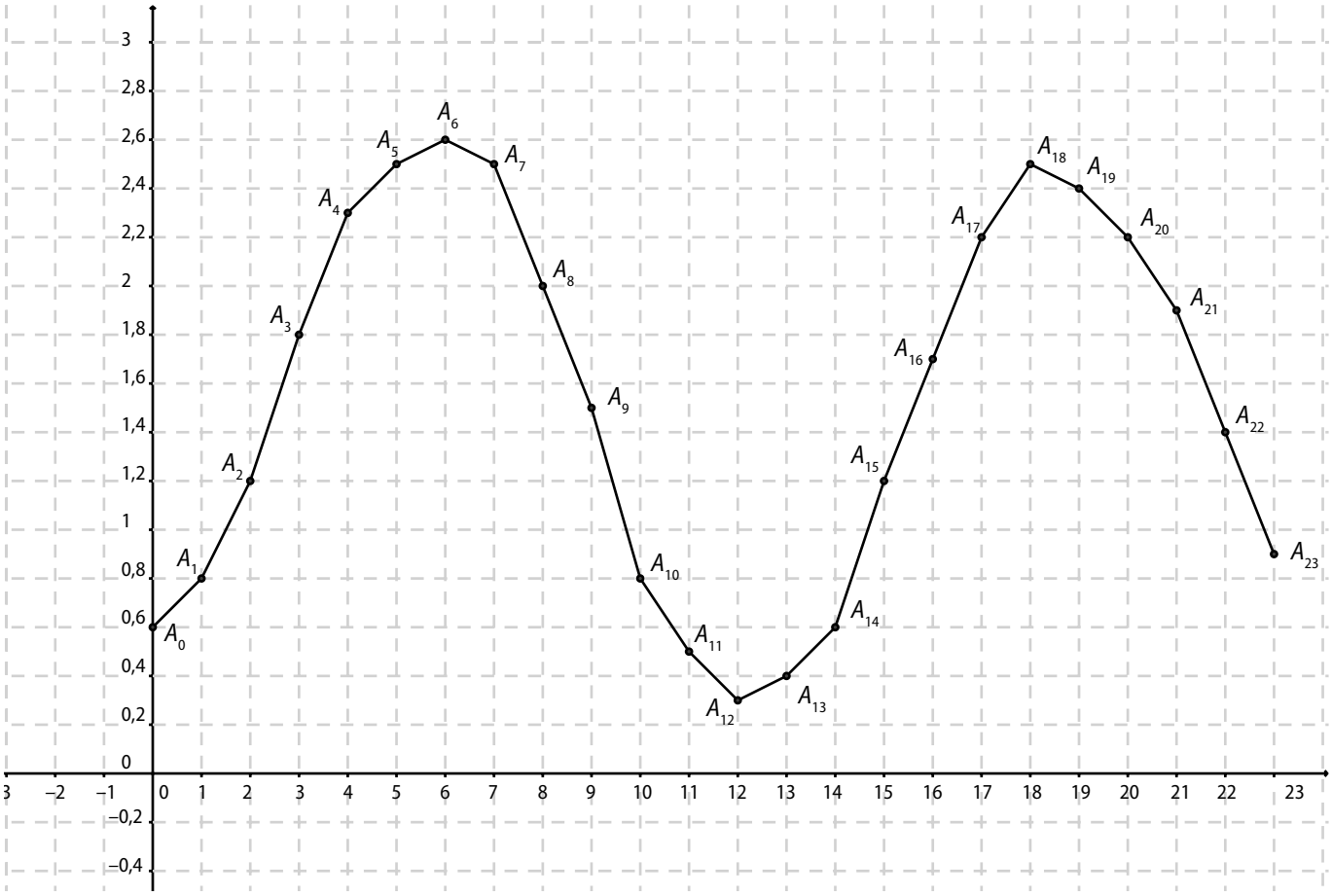
b. $\left(\frac{4}{3}\right)^{10} \approx 18$ à l'aide de la calculatrice.
Ainsi : $P(50) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{50} = 3 \times \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{10}\right)^5 \approx 3 \times 18^5$
et $P(100) = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{100} = 3 \times \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{10}\right)^{10}$
$\approx 3 \times 18^{10}$.

10 Fonctions – Généralités

Activités d'introduction

1 Marées

1. a. et **b.**



2. a. • Entre 0 h et 11 h / 0,5 m ; • entre 12 h et 23 h / 0,3 m ; • entre 0 h et 23 h / 0,3 m.

b. • entre 0 h et 11 h ? 2,6 ;• entre 12 h et 23 h ? 2,5 ; • entre 0 h et 23 h ? 2,6.

c. La marée est montante entre 0 h et 6 h ainsi qu'entre 12 h et 18 h.

La marée est descendante entre 6 h et 12 h ainsi qu'entre 18 h et 23 h.

2 Aire

1. b. L'aire estimée est de 17 carreaux donc de 17 cm².

Aire $LMPQ$ = aire $ABCD$ – 4 aire ALQ

$$= 5^2 - 4 \times \frac{1 \times 4}{2} = 25 - 8 = 17.$$

c. L'aire estimée est de 13 carreaux donc de 13 cm².

Aire $LMPQ$ = aire $ABCD$ – 4 aire ALQ

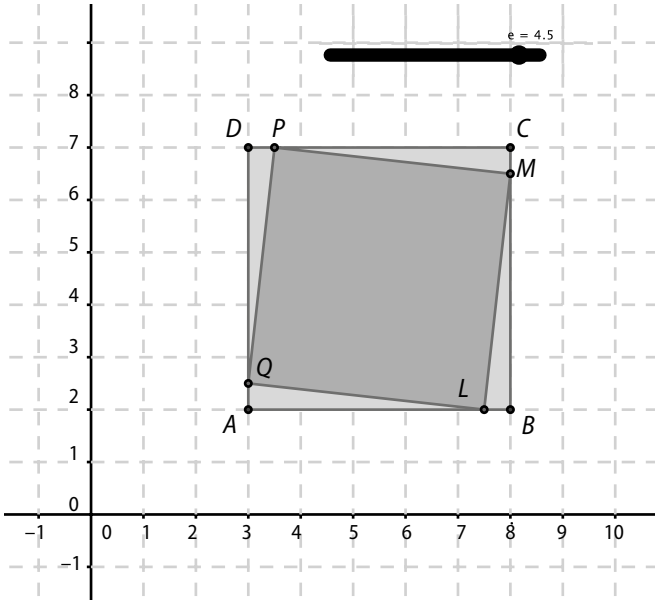
$$= 5^2 - 4 \times \frac{3 \times 2}{2} = 25 - 12 = 13.$$

2. a. $0 \leqslant x \leqslant 5$.

b. $f(x) = 25 - 4 \times \dfrac{x(5-x)}{2} = 25 - 2(5x - x^2)$

$= 2x^2 - 10x + 25.$

c. $f(1) = 2(1)^2 - 10(1) + 25 = 2 - 10 + 25 = 17$; $f(3) = 2(3)^2 - 10(3) + 25 = 18 - 30 + 25 = 13$.



3. Le fichier Geogebra permet de donner la réponse en utilisant le curseur. Il y a deux solutions : l'une dans [0,5 ; 0,6], l'autre dans [4,4 ; 4,5].

3 Distance d'arrêt

1. a. • 30 km/h : 15 m ; • 50 km/h :30 m ; • 90 km/h : 80 m ; • 110 km/h : 110 m ;• 130 km/h : 150 m.

b. La fonction est croissante.

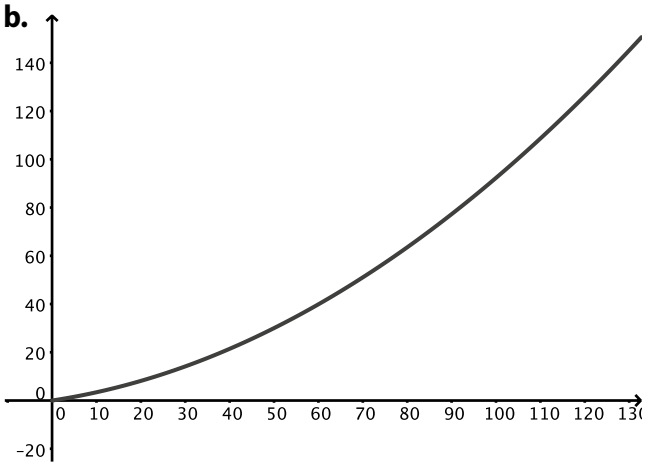
c. La vitesse était de 105 km/h.

d. Il faut rouler à 60 m du véhicule précédent.

2. a.

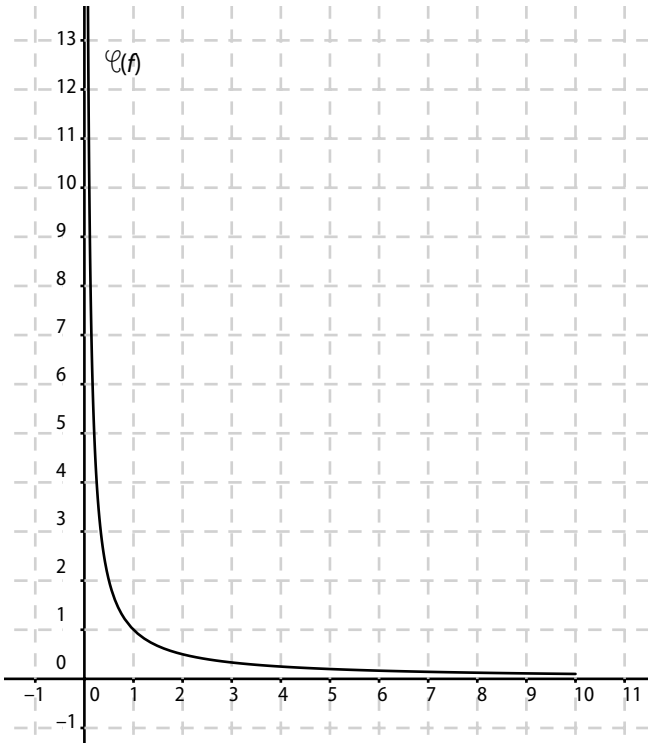
Vitesse v	30	50	90	110	130
Distance d'arrêt d	14,14	30,02	77,26	108,62	145,14

b.

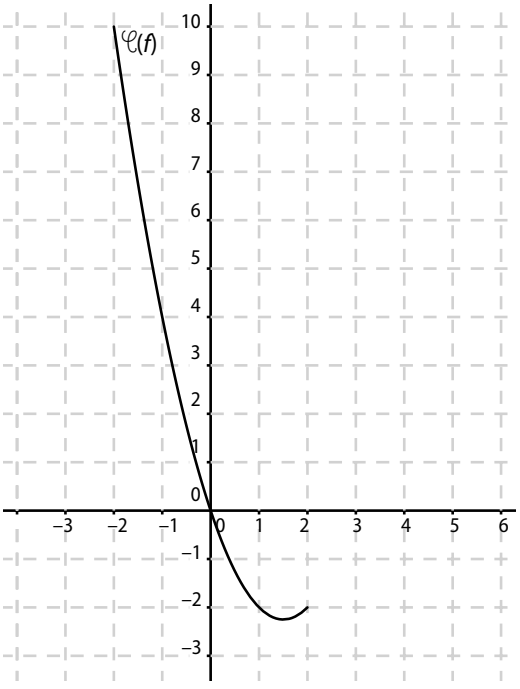


Savoir-faire

3



4

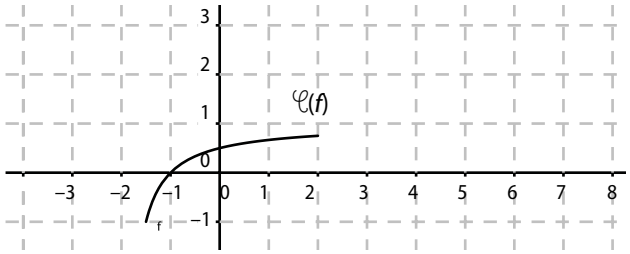


5

6 a.

x	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	–1	0	0,33	0,5	0,6	0,67	0,71	0,75

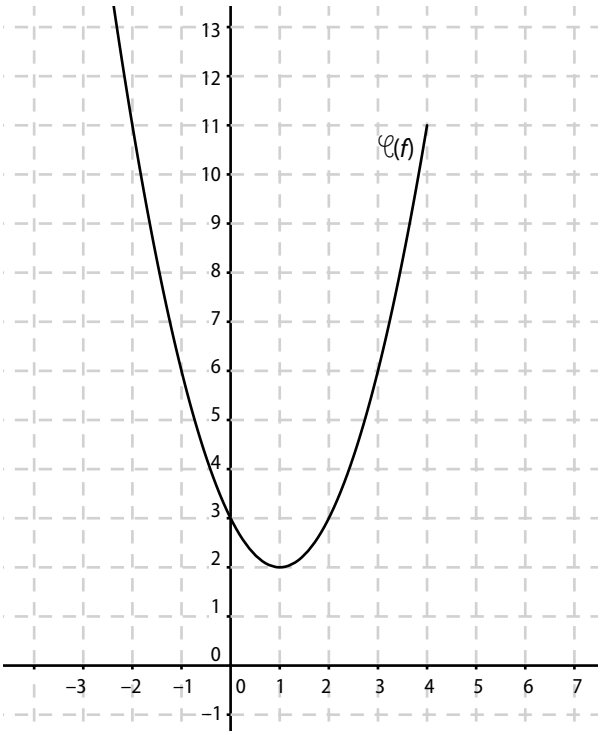
b.



9 a. $f(-2) = 5$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 2$; $f(1) = 0$; $f(2) = 5$.

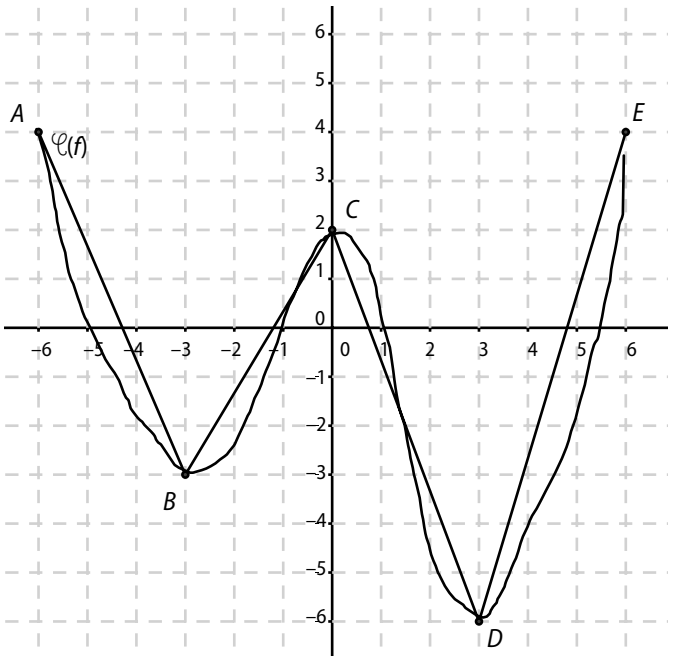
b. Pas d'antécédent pour –1 ;
–1,5 ; –1 ; 1 et 1,5 sont les antécédents de 0 ;
–0,8 ; 0 et 0,8 sont les antécédents de 2 ;
–1,9 et 1,9 sont les antécédents de 4.

10 a.

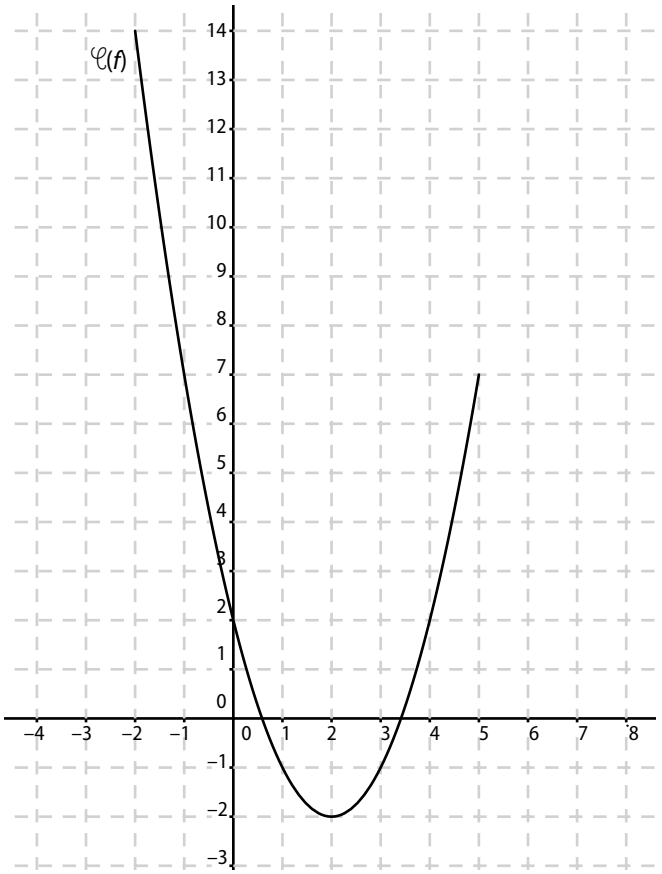


b. $f(x) < 6 \Leftrightarrow x \in]-1\,;\,3[$;
$f(x) \geqslant 6 \Leftrightarrow x \in [-3\,;\,-1] \cup [3\,;\,4]$.

13



14 a.



b.

x	-2	2	5
$f(x)$	14 ↘	–2	↗ 7

Exercices d'entraînement

15 Les graphiques **a**, **c** et **d** sont des représentations de fonctions.

16 **a.** $P(R) = \pi R^2$; **b.** non ; **c.** $M = \mu V$ (μ est la masse volumique)

17 **a.** non ; **b.** oui ; **c.** non

18 $f(x) = 3x^2$.

19
- Je le double → f_5
- J'en prends la moitié → f_3
- Je le double puis j'ajoute 3 → f_1
- J'ajoute 3 puis je double → f_6
- Je soustrais 4 puis je triple → f_4
- Je le triple puis je soustrais 4 → f_2

20 $D_f = [3 ; +\infty[$; $D_g =]-\infty ; 0{,}5]$; $D_h = [-1 ; +\infty[$; $D_i = \mathbb{R}$; $D_j = \mathbb{R} - \{1\}$; $D_k = [-2 ; +\infty[$.

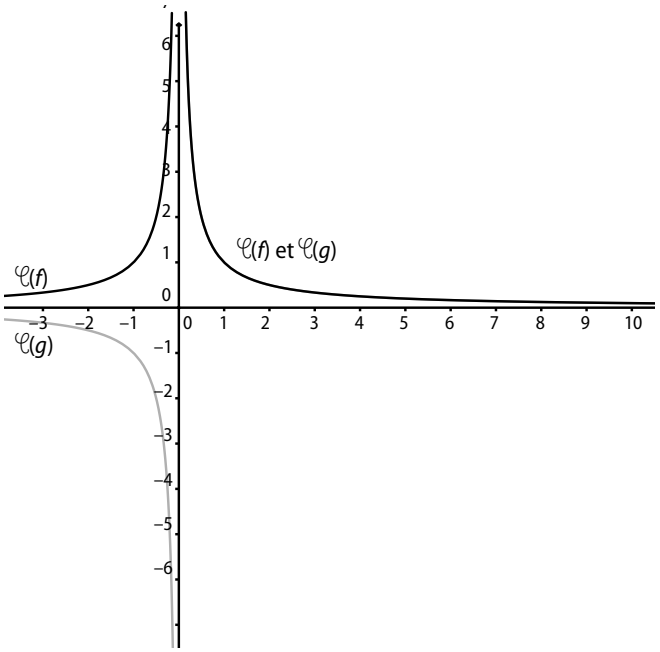
21 $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$; $D_g = \mathbb{R}$; $D_h =]1 ; +\infty[$; $D_i = \mathbb{R} - \{-3\}$.

22 $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$; $D_h =]1 ; +\infty[$; $D_i = \mathbb{R} - \{-1 ; 3\}$.

23 Les domaines de définition de f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 ne sont pas égaux à $\mathbb{R}$. Elles ne coïncident pas avec f. On a seulement $f_3 = f$.

24 **a.** $f = g$ sur $\mathbb{R}$; **b.** $f = g$ sur $[1 ; +\infty[$;
c. $f = g$ sur $]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$; **d.** $f \neq g$.

25



26 $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 3$;
$f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 6$.

27 **a.** 4 est l'image par f de 2 ;
b. 2 est un antécédent par f de 4 ;
c. 2 a pour image 4 par f ;
d. 4 a pour antécédent 2 par f.

28 **1. a.** 2 ; **b.** -5 ; **c.** 1. **2. a.** 0 ; **b.** 2 ; **c.** -2 et 1.

29 **1. a.** 8 ; **b.** 2 ; **c.** 4. **2. a.** 2 ; **b.** 1/3 ; **c.** 0.

30

I	0	$\frac{2}{3}$	4	10	12	$\frac{44}{3}$
U	0	10	60	150	180	220

31 **1. a.** 0 ; **b.** –6 ; **c.** 0. **2. a.** 0 et –2 ; **b.** –3 et 1.

32 $f(10^{-2}) = 0{,}00980001 = g(10^2)$;
$f(10^{-1}) = 0{,}0801 = g(10)$;
$f(10) = 9810 = g(10^{-1})$;
$f(10^2) = 99980100 = g(10^{-2})$.

33 **a.** $f(-2) = -3 \Leftrightarrow -(-2)^2 + (-2) + k = -3$
$\Leftrightarrow -6 + k = -3$ d'où $k = 3$.

b.

x	–2	2	3	5
$f(x)$	–3	1	–3	–17

c. $-x^2 + x + 3 = 3 \Leftrightarrow -x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

34 **a.** $f(0) = g(0) + k \Leftrightarrow -2 = -1 + k \Leftrightarrow k = -1$.

b.

x	–5	5	10	15
$f(x)$	–127	123	998	3 373

35 **a.** $f(1) = 1 \Leftrightarrow 1^2 - k(1) + 1 = 1 \Leftrightarrow 2 - k = 1$ d'où $k = 1$.

b.

x	–5	–1	7	10
$f(x)$	31	3	43	91

36 **a.** f est définie pour $x \geqslant -3$, donc sur $[0 ; 7]$.

b.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1,7	3	4,2	5,4	6,6	7,8	9	10,1

37 **a.** 4 ; **b.** 0.

38 **a.** [–2 ; 0] ; **b.** [0 ; 4].

39 **a**. 4 ; **b.** –2,5 et 1,5 ; **c.** [–2 ; 4] ;
d. [–2,8 ; –2,5] ∪ [1,5 ; 1,8].

40 **1. a.** {3} ; **b.** [-2 ; 1] ∪ [2 ; 5].
2. a. [–4 ; –2] ; **b.** [–2 ; 1] ∪ [–2,7 ; 4,2].
3. [–2 ; 1] ∪ {3,4}.

41 Si $x \in [-4 ; -2]$, $f(x) = x + 5$;
si $x \in [-2 ; 6]$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$;
si $x \in [6 ; 7]$, $f(x) = 3x - 17$.

42

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–3	–1	–0,33	0	0,2	0,33

x	6	7	8	9	10
$f(x)$	0,43	0,5	0,55	0,6	0,64

43

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1,73	2,24	2,65	3	3,32	3,61

x	6	7	8	9	10
$f(x)$	3,87	4,12	4,36	4,58	4,80

44

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5
$f(x)$	–4	0,125	2	2,375	2	1,625

x	1	1,5	2
$f(x)$	2	3,875	8

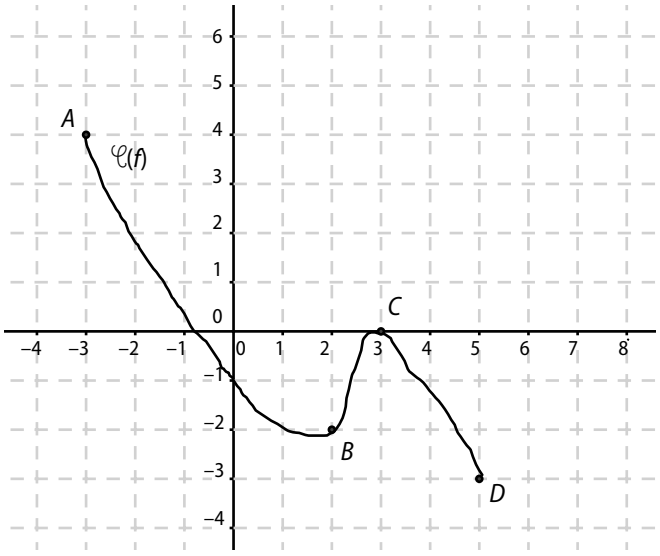
45 ① représente h, ② représente f et ③ représente g.

46 **a.** $f(-1) = 4$, $f(0) = 2$ et $f(1) = 0$ donc (C_f) contient A, B et C.
b. $f(-1) \neq 4$, $f(0) = 2$ et $f(1) \neq 0$, donc (C_f) contient B.
c. $f(-1) \neq 4$, $f(0) = 2$ et $f(1) = 0$, donc (C_f) contient B et C.
d. $f(-1) = 4$, $f(0) = 2$ et $f(1) = 0$, donc (C_f) contient A, B et C.

47 $f_1(x) = 2$ sur [3 ; 6] ; $f_2(x) = 32x - 7$ sur[6 ; 8] ;
$f_3(x) = 0{,}6x + 0{,}2$ sur [3 ; 8].

48 À gauche, f est croissante. À droite, f est croissante sur $]-\infty ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

49



50 ①

x	–2		0		4
$f(x)$	1	↗	3	↘	–5

②

x	–4		–2,5		–0,5		0,5		1
$f(x)$		↘	–4,5	↗	–1,9	↘	–2,1	↗	–1,2

③

x	–3		–2		0		1
$f(x)$	–3	↗	1	↘	–3	↗	1

51

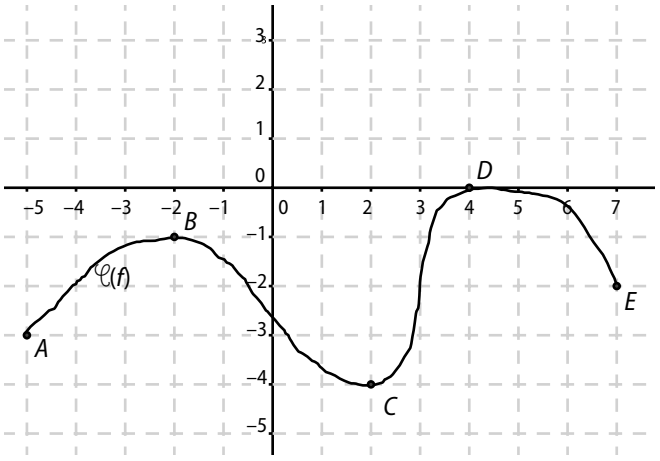
x	–2		–1		2
$f(x)$	–2	↘	–3	↗	6

x	–3		–2		0		1
$f(x)$	0	↘	–5	↗	–1	↘	–6

52 **a.** $D_f = [-5 ; 7]$;

b. $A(-5 ; -3)$; $B(-2 ; -1)$; $C(2 ; -4)$; $D(4 ; 0)$; $E(7 ; -2)$.

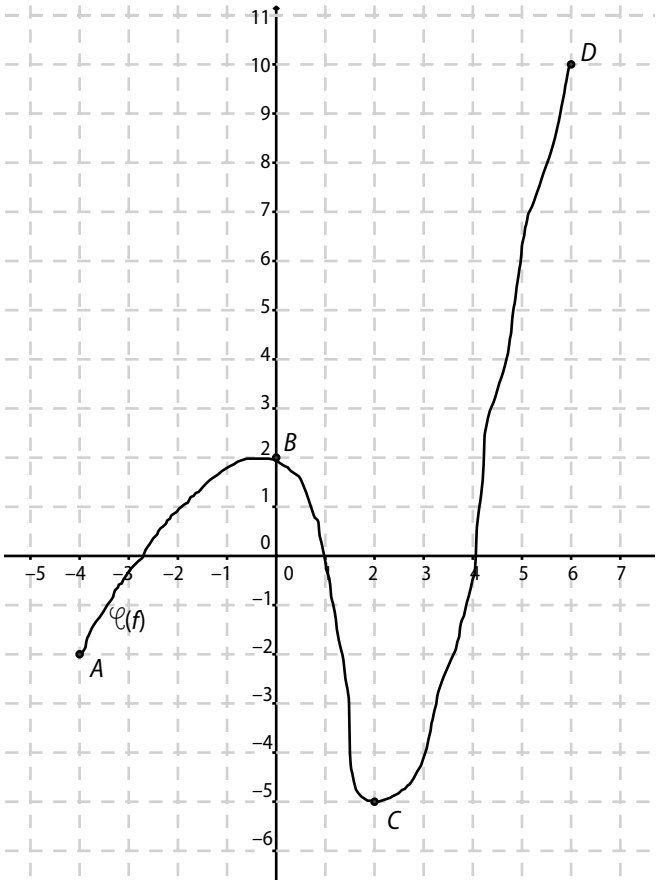
c.



53 **a.**

x	-4		0		2		6
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-5	↗	10

b.



54 **1. a.** $a < b \Leftrightarrow 2a < 2b \Leftrightarrow 2a + 5 < 2b + 5$
$\Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

f est donc croissante.

b.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↗	

2. a. $a < b \Leftrightarrow 3a < 3b \Leftrightarrow 3a + 1 < 3b + 1 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

f est donc croissante.

b.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↗	

3. a. $a < b \Leftrightarrow -2a > -2b \Leftrightarrow -2a + 3 > -2b + 3$
$\Leftrightarrow f(a) > f(b)$.

f est donc décroissante.

b.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↘	

55 **a.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	4	↗	

b. $(x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 2x + 5 = f(x)$.

c. $1 < a < b \Leftrightarrow 0 < a - 1 < b - 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 < (b-1)^2$
$\Leftrightarrow (a-1)^2 + 4 < (b-1)^2 + 4 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

f est donc croissante sur $[1 ; +\infty[$.

56 **a.** f est croissante sur $[-4 ; 2]$ donc
$-3 < -1 \Rightarrow f(-3) < f(-1)$.

b. $f(-4) = 5$; $f(10) = -20$ donc $f(-4) > f(10)$.

c. f n'est pas monotone sur $[0 ; 3]$, on ne peut donc pas conclure.

d. f est décroissante sur $[2 ; 10]$ donc
$3 < 4 \Rightarrow f(3) > f(4)$

57 **1. a.** $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 3$.

b. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-6 ; -4[$.

c. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-4 ; 3[\cup]3 ; 5[$.

2. Sur [–4 ; 5], f est située au dessus de l'axe des abscisses (les points de l'axe compris).

58 **a.** $f(2) = -2$; $f([2 ; 5]) = [-3 ; 0]$.

b. –1 a trois antécédents par f.

59 **a.** $a < b \Leftrightarrow 3a < 3b \Leftrightarrow 3a - 1 < 3b - 1 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

f est donc croissante.

b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$;

c. Si $x < \frac{1}{3}$, alors $f(x) < 0$; si $x > \frac{1}{3}$, alors $f(x) > 0$.

60

	Min	atteint pour $x =$	Max	atteint pour $x =$
[–4 ; 4]	–4	–6	3	2
[–6 ; 0]	–4	–6	1	–3
[–3 ; 1]	–3	–2	1,5	1

61 **a.** $(x-2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7 = f(x)$.

b. $(x-2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0$.

c. $x = 2$.

62 $x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geqslant -1 \Leftrightarrow f(x) \geqslant -1$; de plus $f(0) = -1$ donc f admet –1 comme minimum atteint en 0.

63 $(x+1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - (x+1)^2 \leqslant 1$.
Donc $f(x) \leqslant 1$; de plus $f(-1) = 1$ donc f admet 1 comme maximum atteint en –1.

64 $x \geqslant 0 \Rightarrow x^3 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0$; de plus $f(0) = 0$ donc f admet 0 comme minimum atteint en 0.

65 **a.** $x \geqslant 2 \Leftrightarrow x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) = x - 2$; f est croissante car c'est une fonction affine de coefficient directeur (1) positif.

• $x \leqslant 2 \Leftrightarrow x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) = -(x-2)$; f est décroissante car c'est une fonction affine de coefficient directeur (–1) négatif.

b.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

Il y a donc un minimum égal à 0 atteint en 2.

66 **a.** • $x \geqslant -\frac{2}{3} \Leftrightarrow |3x+2| = 3x + 2 \Leftrightarrow f(x) = -x - 2$; f est décroissante car c'est une fonction affine de coefficient directeur (–1) négatif.

• $x \leqslant -\frac{2}{3} \Leftrightarrow |3x+2| = -(3x+2) \Leftrightarrow f(x) = 5x + 2$; f est croissante car c'est une fonction affine de coefficient directeur (5) positif.

b.

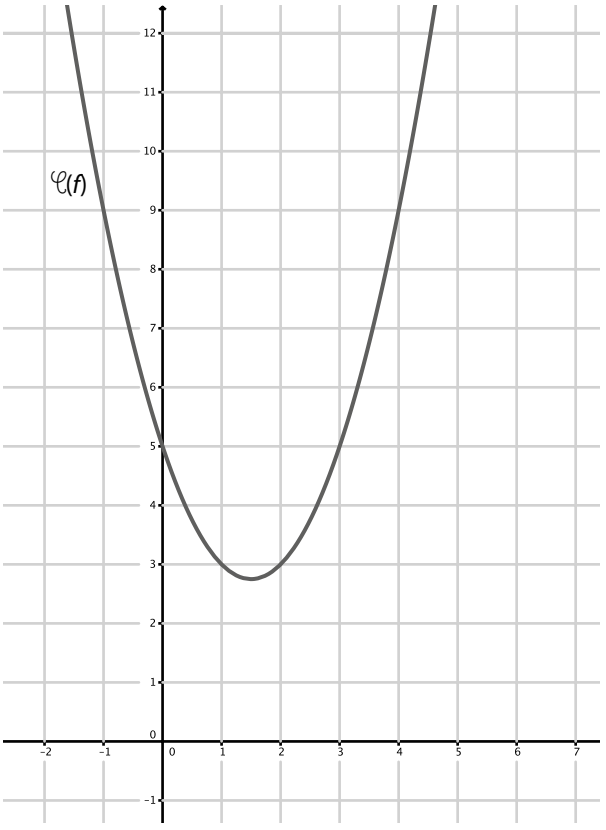
x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$-\frac{4}{3}$	↘	

67 **a.** Aire $AMN = \frac{1}{2} AN \times MN = \frac{1}{2}(x+6)(-\frac{2}{9}x^2 + 8)$.

b. On conjecture que $x = 2$.

c. $f(2) = \frac{256}{9}$, donc $M(2 ; \frac{256}{9})$.

68 **a.**



Il y a un minimum égal à 2,75.

b. L'abscisse correspondant au minimum est comprise entre 1 et 2, puis entre 2,7 et 2,8.

c. $(x - 1{,}5)^2 + 2{,}75 = x^2 - 3x + 2{,}25 + 2{,}75 = f(x)$.

69 **2.** $f(b) - f(a) = (b-1)^2 - (a-1)^2$
$= [(b-1) - (a-1)] - [(b-1) + (a-1)]$
$= (b-a)(a+b-2)$.

Faire le point

3. $b - a > 0$; $a + b - 2 < 0$; $b - a > 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) < 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty ; 1]$.

4. Avec un raisonnement analogue, on démontre que f est croissante sur $]1 ; +\infty[$.

5. f admet donc un minimum égal à 0 atteint en 1.

70

x	–4	–2	1	4	5
$f(x)$	6	–1,5	1	–1,5	0

x	–4	–2	1	4	5
$f(x)$	6 ↘	–1,5 ↗	1 ↘	–1,5 ↗	0

71 Dans la ligne des x, –3,5 doit être avant –3 car il est plus petit.

La fonction ne peut décroître de 2 à $\frac{7}{3}$ car $2 < \frac{7}{3}$.

72 **a.** $f(0) = \frac{1}{2}$.

b. Il manque les parenthèses dans la saisie :

$Y_1 = (X + 1)/(X - 2)$.

73 On doit vérifier que $f(3,5) = 4$.

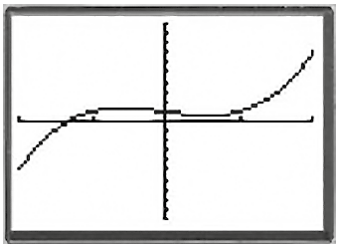
$f(3,5) = (3,5)^2 - 3(3,5) + 2 = 3,75$; $3,75 \neq 4$ donc l'élève a tort.

74 **a.** $f(5) = 6$; $f(7) = 22$ donc $f(x) > 0$ sur $[5 ; 7]$.

b. $f(2) = -3$; $f(7) = 22$ donc on ne peut répondre.

c. $f(2) = -3$; $f(3) = -2$ donc $f(x) < 0$ sur $[2 ; 3]$.

75 **a.**



x	–2	–0,6	0,6	2
$f(x)$	–5 ↗	↘	↗	7

b. Le minimum appartient à [0,6 ; 0,7]

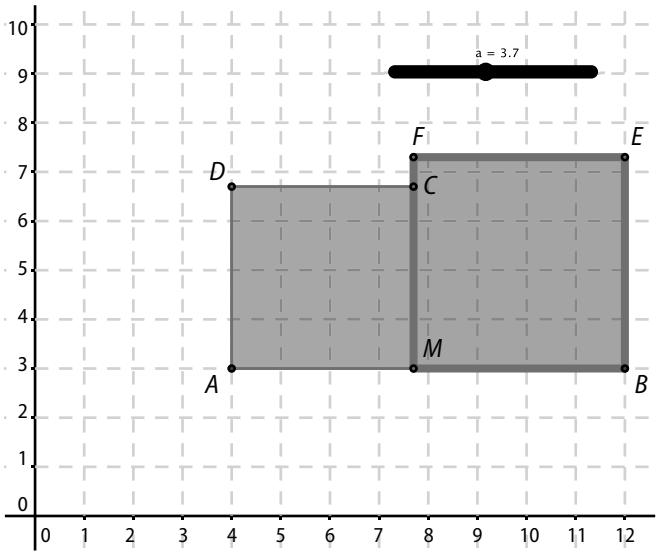
76 Le calcul de $f(0,5) = 0,5^3 - 0,5 + 1 = 0,625$ suffit à prouver que la fonction n'est pas constante sur $[-1 ; 1]$.

77 **Démarche 1**

AM	*MB*	*Aire totale*
1	7	50
2	6	40
3	5	34
4	4	32
5	3	34
6	2	40
7	1	50

Il semble y avoir un minimum pour $AM = 4$, mais il faudrait faire des calculs plus précis pour affiner le résultat, par exemple entre 3 et 5 avec un pas de 0,1.

Démarche 2



On peut obtenir une conjecture en prenant un pas assez petit pour le curseur, mais on n'a pas la valeur exacte, du moins on ne peut l'assurer.

Démarche 3 : mêmes remarques que pour la démarche 2.

Démarche 4 : $f(x) = 2x^2 - 16x + 64 = 2(x - 4)^2 + 32$.

Un carré étant toujours positif ou nul, la fonction est donc minimale lorsque ce carré est nul, c'est à dire lorsque $x = 4$.

Se tester

78 à **81** Voir Manuel de l'élève page 260.

Exercices d'approfondissement

82 $f(0) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{-1} = -2 \Leftrightarrow b = 2.$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2a+2}{2-1} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1.$

83 $g(0) = 0 \Leftrightarrow -4a + c = 0$; $g(-2) = 3 \Leftrightarrow -2b + c = 3$; $g(2) = 1 \Leftrightarrow 2b + c = 1$.

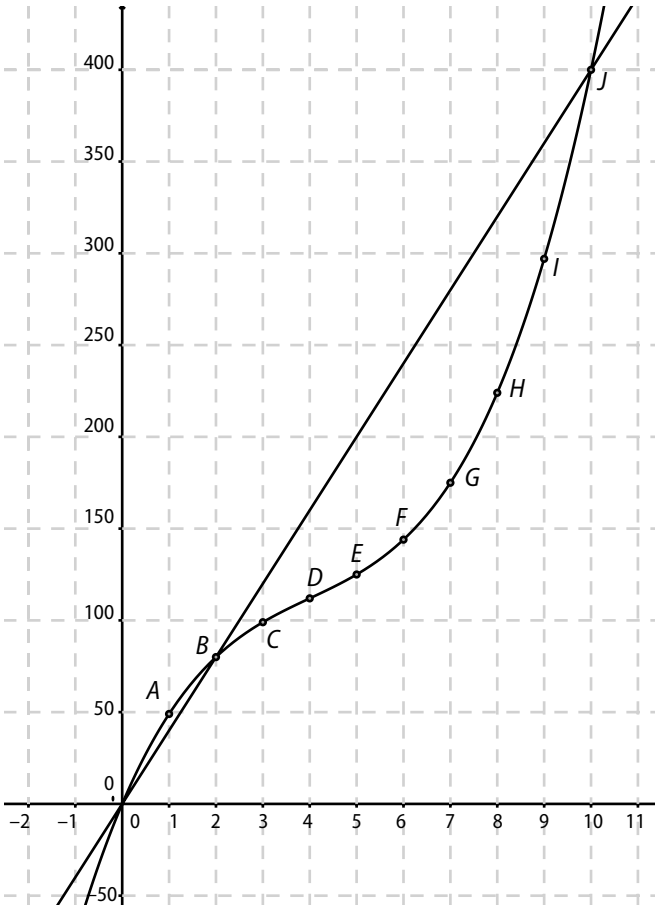
On obtient alors $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = 2$.

84 **a.**

x	0	1	2	3	4	5
$C(x)$	0	49	80	99	112	125

x	6	7	8	9	10
$C(x)$	144	175	224	297	400

b. c. d.



e. $B(x) = R(x) - C(x) = -x^3 + 12x^2 - 20x$.

f. Il y a bénéfice si la courbe représentative de la recette est « au-dessus » de celle représentant le coût. Graphiquement , c'est le cas lorsque $2 < x < 10$.

85 Volume du verre : $\dfrac{\pi \times 2^2 \times 6}{3} = 8\pi$.

Le théorème de Thalès donne : $\dfrac{r}{x} = \dfrac{2}{6}$ (r étant le rayon du cône de hauteur x). On a donc : $r = \dfrac{1}{3}x$.

Volume du liquide : $V(x) = \dfrac{\pi \times r^2 \times x}{3} = \dfrac{\pi \times x^3}{27}$.

Pour que le verre soit à moitié plein, il faut :

$V(x) = \dfrac{1}{2}V = 4\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi x^3}{27} = 4\pi \Leftrightarrow x^3 = 108.$

$x = \sqrt[3]{108}$ d'où $x \approx 4{,}76$.

86 **a.** $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.

b. Ajouter 1 à x. • Prendre la racine carrée du résultat. • Prendre l'inverse du résultat. • Soustraire le résultat à 1. • Ajouter le carré de x au résultat.

87 **a.**

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

b. $-2 + \dfrac{7}{-x+5} = \dfrac{-2(-x+5)+7}{-x+5} = \dfrac{2x-3}{-x+5} = f(x).$

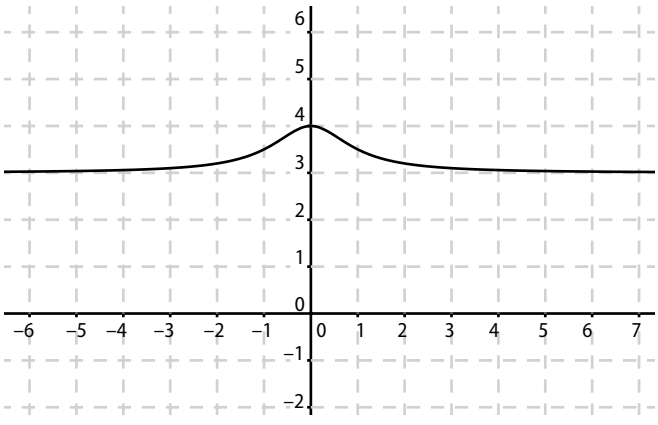
c. Ajouter 5 à l'opposé de x. • Prendre l'inverse du résultat. • Multiplier le résultat par 7. • Soustraire 2 au résultat.

d. $a < b \Rightarrow -a + 5 > -b + 5 \Rightarrow \dfrac{7}{-a+5} < \dfrac{7}{-b+5}$

$\Rightarrow -2 + \dfrac{7}{-a+5} < -2 + \dfrac{7}{-b+5}.$

Donc f est croissante sur $]5 ; +\infty[$.

88 **a.**



On peut aussi utiliser la calculatrice.

On conjecture que la fonction f présente un maximum égal à 4 atteint en 0.

b. Pour tout nombre réel x,

$$3 + \frac{1}{x^2+1} = \frac{3(x^2+1)+1}{x^2+1} = \frac{3x^2+4}{x^2+1} = f(x).$$

c. Pour tout nombre réel x,

$$x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{1}{x^2+1} \leqslant 4$$

$$\Rightarrow f(x) \leqslant f(0).$$

89 On désigne par h_0 la hauteur initiale des bougies et par t le temps, en heures.

Pour la première bougie, on a : $h_1(t) = h_0 - \frac{h_0}{4}t$.

Pour la deuxième bougie, on a : $h_2(t) = h_0 - \frac{h_0}{5}t$.

Pour que la deuxième bougie ait une hauteur double de la première, il faut que :

$$h_2(t) = 2h_1(t) \Leftrightarrow h_0 - \frac{h_0}{5}t = 2\left(h_0 - \frac{h_0}{4}t\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{5}t = 2 - \frac{1}{2}t$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10}t = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{10}{3}.$$

On obtient donc un temps de 3 h 20 min.

90 **1. a.** $f(a+1) = 4(a+1)+3 = 4a+7$.

$4a+7 > 4a+3 \Leftrightarrow f(a+1) > f(a)$, donc $f(a)$ n'est pas un maximum pour f.

b. $f(a-1) = 4(a-1)+3 = 4a-1$.

$4a-1 < 4a+3 \Leftrightarrow f(a-1) < f(a)$, donc $f(a)$ n'est pas un minimum pour f.

2. a. $g(a+1) = (a+1)^3$.

$(a+1)^3 > a^3 \Leftrightarrow g(a+1) > g(a)$, donc $g(a)$ n'est pas un maximum pour g.

b. $g(a-1) = (a-1)^3$.

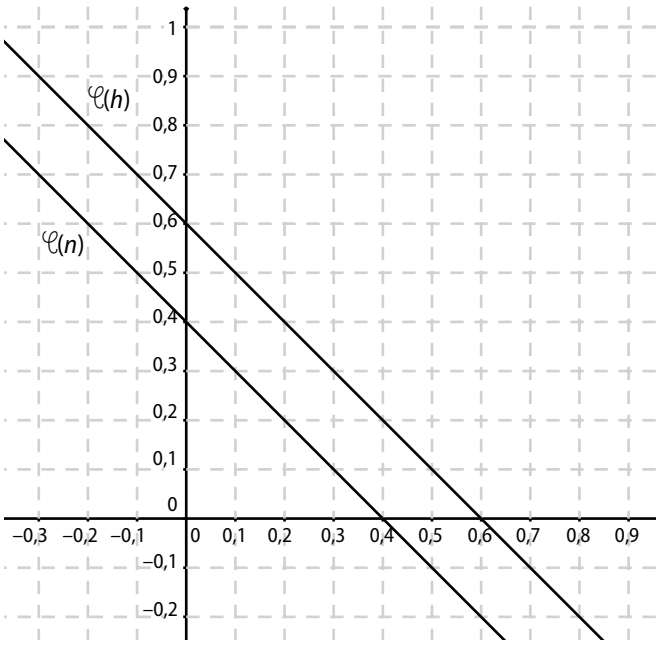
$(a-1)^3 < a^3 \Leftrightarrow g(a-1) < g(a)$, donc $g(a)$ n'est pas un minimum pour g.

91 **1.** $D_n = [0\,;4]$; $D_h = [0\,;0{,}6]$.

2. Les deux fonctions sont affines de coefficients directeurs négatifs (–1), elles sont donc décroissantes.

Les quantités de matières de N_2 et H_2 diminuent.

3.

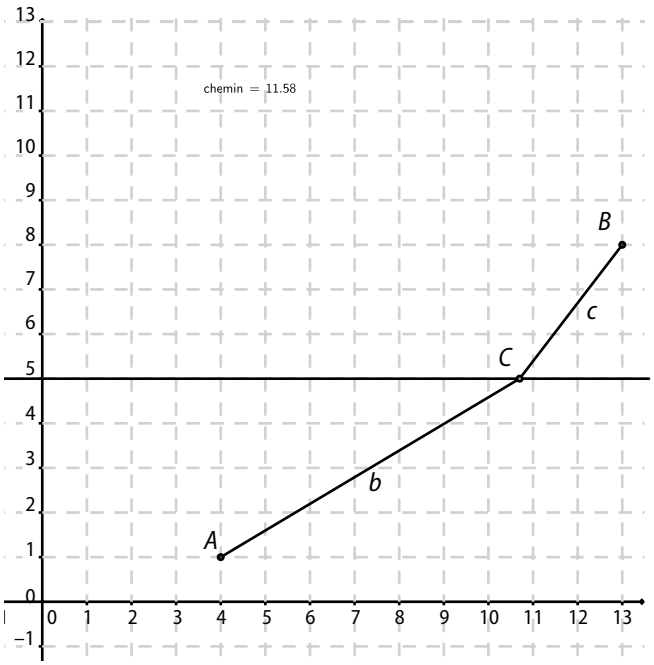


4. a. C'est N_2 dont la quantité s'annule en premier.

$n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}4$.

b. Il reste H_2 en quantité 0,2 et il se crée NH_3 en quantité 0,4.

92



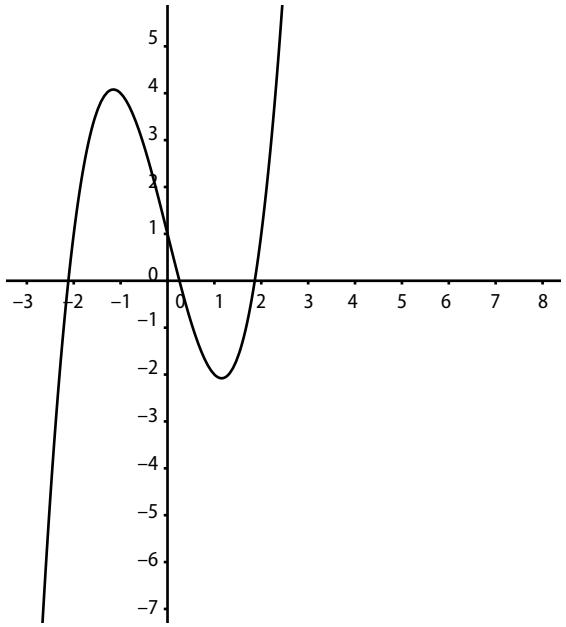
La distance de la rivière étant constante, le chemin le plus court correspond à l'alignement des points A, B et C.

Le théorème de Thalès donne :

$$\frac{x}{40} = \frac{100-x}{30} \Leftrightarrow 30\,x = 4\,000 - 40\,x.$$

On obtient donc $70\,x = 4\,000 \Leftrightarrow x = \frac{400}{7} \approx 57{,}14$.

93



a. Faux $f(0) = 1$ et $f(1) = -2$.

b. Faux $f(3) = 16$.

c. Faux.

94 **Démarche 1**

Avec la calculatrice ou Geogebra :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	||	↗

Démarche 2

a. Pour tout x de $]-1 ; +\infty[$,

$$1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} = f(x).$$

b. Pour tout a, b de $]-1 ; +\infty[$,

$$a < b \Rightarrow a+1 < b+1 \Rightarrow \frac{-2}{a+1} < \frac{-2}{b+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{a+1} < 1 - \frac{2}{b+1} \; f(a) < f(b).$$

c. f est donc croissante sur $]1 ; +\infty[$.

Démarche 3

a. Pour tout a, b de $]-1 ; +\infty[$,

$$f(a) - f(b) = \left(1 - \frac{2}{a+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{b+1}\right)$$

$$= \frac{-2}{a+1} + \frac{-2}{b+1} = \frac{-2(b+1) + 2(a+1)}{(a+1)(b+1)}$$

$$= \frac{2(a-b)}{(a+1)(b+1)}.$$

b. Sur $]-1 ; +\infty[$, $a+1$ et $b+1$ sont positifs, $f(a) - f(b)$ est du même signe que $a - b$.

f est donc croissante sur $]-1 ; +\infty[$.

95 **1. a.** Pour tout a, b de $\mathbb{R}$,

$f(a) - f(b) = a^3 - a^2 - a - b^3 + b^2 + b$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2 - a - b - 1)$

$= a^3 + a^2 b + a b^2 - a^2 - ab - a - a^2 b - ab^2 - b^3 + ab + b^2 + b$

$= a^3 - a^2 - a - b^3 + b^2 + b = f(a) - f(b)$

$a^2 + ab + b^2 - a - b - 1 = a(a-1) + b(b-1) + ab - 1.$

b. Sur $]1 ; +\infty[$, $a(a-1) > 0$, $b(b-1) > 0$ et $ab - 1 > 0$.

c. On en déduit que $a(a-1) + b(b-1) + ab - 1 > 0$ et donc que $f(a) - f(b)$ est du même signe que $a - b$.

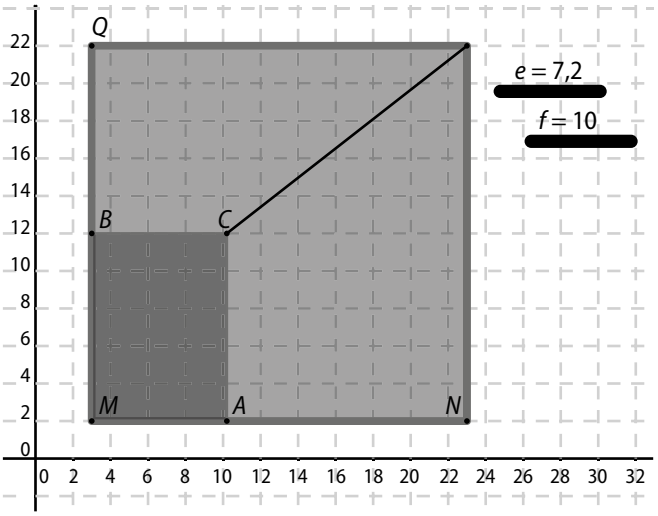
f est donc croissante sur $]1 ; +\infty[$.

2. $a < -\frac{1}{3}$ et $b < -\frac{1}{3}$, donc $a(a-1) > \frac{4}{9}$, $b(b-1) > \frac{4}{9}$ et $ab - 1 > -\frac{8}{9}$.

On en déduit que $a(a-1) + b(b-1) + ab - 1 > 0$ et donc que $f(a) - f(b)$ est du même signe que $a - b$.

f est donc croissante sur $]-\infty ; -\frac{1}{3}[$.

96



97 **a.** Pour tout a, b de $\mathbb{R}$,

$a < b < 2 \Leftrightarrow 3a - 6 < 3b - 6 < 0$

$\Rightarrow (3a-6)^2 > (3b-6)^2$

$\Rightarrow (3a-6)^2 + 1 > (3b-6)^2 + 1$

$\Rightarrow f(a) > f(b)$.

f est donc décroissante sur $]-\infty ; 2[$.

b. De même sur $]2 ; +\infty[$.

c. Un carré est toujours positif ou nul, donc $f(x) \geqslant 1$. Comme $f(2) = 1$, f admet un minimum égal à 1 et atteint pour $x = 2$.

98 **1.** Pour tout nombre réel t,

$(-0{,}7t + 1{,}5)(7t + 1) = 0{,}49t^2 - 0{,}7t + 10{,}5t + 1{,}5$

$= h(t)$.

2. $h(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{7}$ ou $t = \frac{1{,}5}{0{,}7} = 2{,}14$.

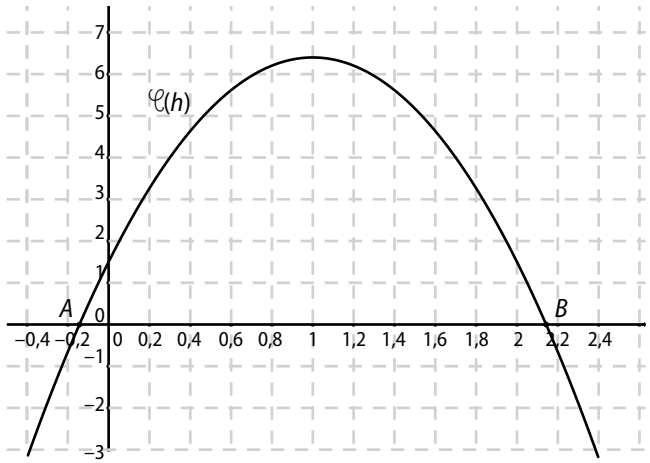
$t > 0 \Rightarrow t = 2{,}14$.

3. a.

x	0		1		2,14
$f(x)$	1,5	↗	6,4	↘	0

b. Le maximum est de 6,4 atteint pour $t = 1$.

4.



99 **1.** $f(0) = -3$; $f(2) = 7$.

2.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3. a. Pour tout a, b de $\mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$ car la fonction cube est croissante.

$a < b \Rightarrow a - 3 < b - 3$ car fonction affine croissante.

Par somme, on a donc $f(a) < f(b)$.

b. f est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, donc $1 < \alpha < 2$.

5. $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

100 Posons $BM = x$, $x \in [0 ; 9]$.

L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 45°, donc $\widehat{QBM}$ aussi.

Le triangle BMQ est donc rectangle isocèle, ainsi $MQ = BM = x$. Aire $MNPQ = x(9 - 2x)$.

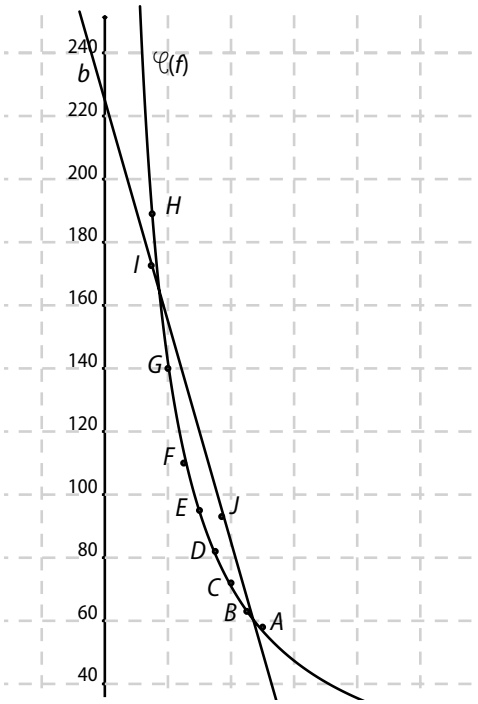
Cette aire est maximale pour $x = 2{,}25$.

101 **a.** $f(0) = g(0) = 1$.

b. Les deux fonctions semblent égales.

c. $(x^2 + 2)(x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 2$ entraîne que $f(x) = g(x)$.

102 **1. a . b.**



c. $P(V) = -3{,}5V + 225$.

2. a.

x	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	189	142	114	95	81	71	63	57

b. Voir courbe ci-dessus.

3. La modélisation est meilleure.

4. $P = \frac{2\,840}{V}$.

103 On note $T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$.

a. Pour tout a, b de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$,

$T = \frac{(3a + 1) - (3b + 1)}{a - b} = \frac{3a - 3b}{a - b} = 3$ et $3 > 0$, donc f est croissante.

b. Pour tout a, b de $[2 ; +\infty[$ tels que $a < b$,

$T = \frac{(a^2 - 4a + 3) - (b^2 - 4b + 3)}{a - b} = \frac{a^2 - b^2 - 4a + 4b}{a - b}$

$= \frac{(a - b)(a + b) - 4(a + b)}{a - b} = a + b - 4$.

$a > 2$ et $b > 2$ donc $T > 0$; f est croissante.

c. Pour tout a, b de $]3 ; +\infty[$ tels que $a < b$,

$T = \frac{\frac{a+1}{a-3} - \frac{b+1}{b-3}}{a - b} = \frac{(a + 1)(b - 3) - (b + 1)(a - 3)}{(a - 3)(b - 3)(a - b)}$

$= \frac{-4a + 4b}{(a - 3)(b - 3)(a - b)} = \frac{-4}{(a - 3)(b - 3)}$.

$a > 3$ et $b > 2$ donc $T > 0$, f est décroissante.

d. Pour tout a, b de $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ tels que $a < b$,

$$T = \frac{\sqrt{2a-1} - \sqrt{2b-1}}{a-b}$$

$$= \frac{(\sqrt{2a-1} - \sqrt{2b-1})(\sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1})}{(a-b)(\sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1})}$$

$$= \frac{2a-2b}{(a-b)(\sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1})} = \frac{2}{\sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1}}.$$

$T > 0$, f est croissante.

104 **a.** Les solutions sont : 1, 2 et 3.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, donc $f(x) = 0$ lorsque $x = 1$, $x = 2$ ou $x = 3$.

105 **1. a.** $\frac{m}{1{,}68^2} < 25 \Leftrightarrow m < 25 \times 1{,}68^2 \Leftrightarrow m < 70{,}56$.

b. $\frac{75}{T^2} < 25 \Leftrightarrow T^2 > \frac{75}{25} \Leftrightarrow T > \sqrt{3} \Leftrightarrow T > 1{,}73$.

2. a. $f(x) = \frac{m}{1{,}8^2} = \frac{m}{3{,}24}$.

b. $\frac{m}{3{,}24} = 25 \Leftrightarrow m = 3{,}24 \times 25 = 81$.

Un homme mesurant 1,80 m ne doit pas peser plus de 81 kg pour ne pas être en surpoids.

106 La fonction semble constante sur l'écran.
Or, $f(1{,}5) \approx 1{,}40$; $f(2) \approx 1{,}38$; $f(2{,}5) \approx 1{,}42$.
Les valeurs sont trop proches pour que l'affichage puisse les différencier.

107 **a.** Pour tout $x > 0$, aire de la base : $x \times 2x = 2x^2$.

Hauteur : $\frac{\textit{Volume}}{\textit{Aire de la base}} = \frac{5}{2x^2}$.

Surface latérale = *Hauteur* × *Périmètre*

$$= \frac{5}{2x^2} \times (x + 2x + x + 2x)$$

$$= \frac{5}{2x^2} \times 6x = \frac{15}{x}.$$

b. Coût : $500 \times 2x^2 + 400 \times \frac{15}{x} = 1\,000x^2 + \frac{6\,000}{x}$.

À la calculatrice, on trouve un minimum pour $x = 1{,}44$.

108 $f(5) = 5 \Leftrightarrow 5a + b = 5$.

$f(1) \leqslant f(2) \Leftrightarrow a + b \leqslant 2a + b \Leftrightarrow a \geqslant 0$.

$f(3) \geqslant f(4) \Leftrightarrow 3a + b \Leftrightarrow 4a + b \Leftrightarrow a \leqslant 0$.

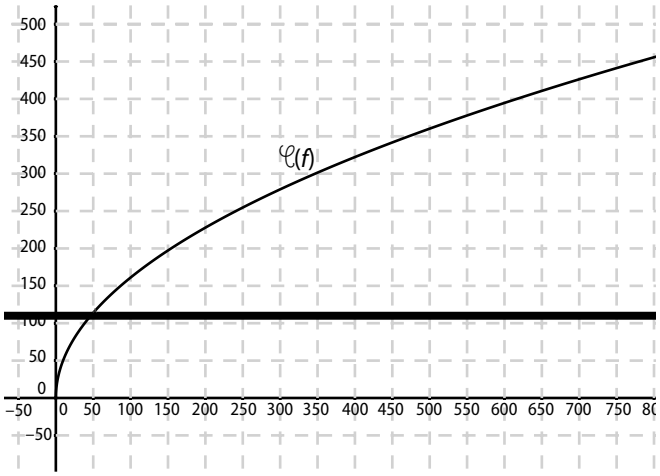
D'où $a = 0$ et $b = 5$.

109 **1. a.**

t	10	15	20	25	30	35
$f(t)$	50,9	62,4	72,0	80,1	88,2	95,3

t	40	45	50	55	60
$f(t)$	101,9	108,1	113,9	119,5	124,8

b.



c. Graphiquement 46,6.

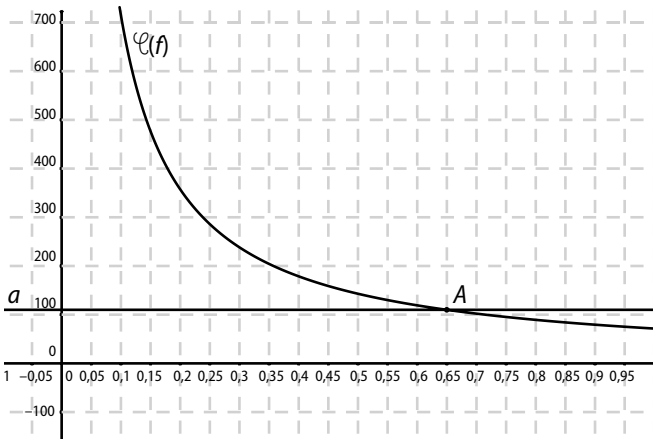
$16{,}11\sqrt{t} = 110 \Leftrightarrow t = \left(\frac{110}{16{,}11}\right)^2 \approx 46{,}68$.

2.a.

l	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$f(l)$	714,8	476,5	357,4	285,9	238,3	204,2

l	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
$f(l)$	178,7	158,8	143,0	130,0	119,1	110,0

b.



c. Graphiquement 0,65.

$\frac{71{,}48}{l} = 110 \Leftrightarrow l = \frac{71{,}48}{110} = 0{,}65$.

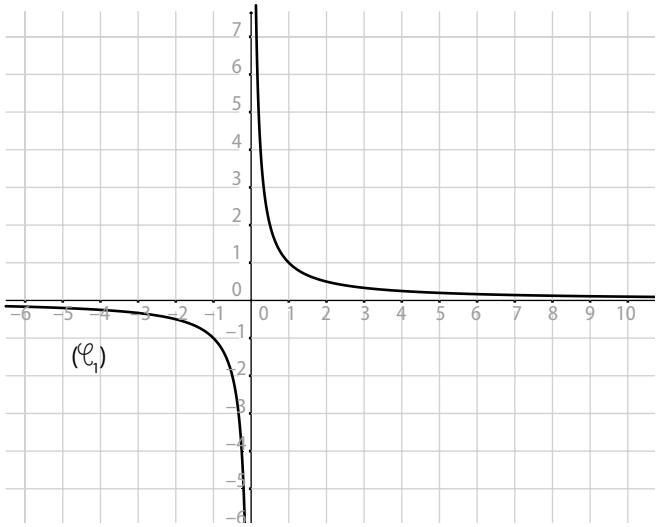
110 **a.** Aire $ADM = \dfrac{lx}{2}$; Aire $MBC = \dfrac{l(L-x)}{2}$;

Aire $MDC = lL - \dfrac{lx}{2} - \dfrac{l(L-x)}{2}$

c. Aire $MDC = \dfrac{2lL - lx - l(L-x)}{2} = \dfrac{lL}{2}$

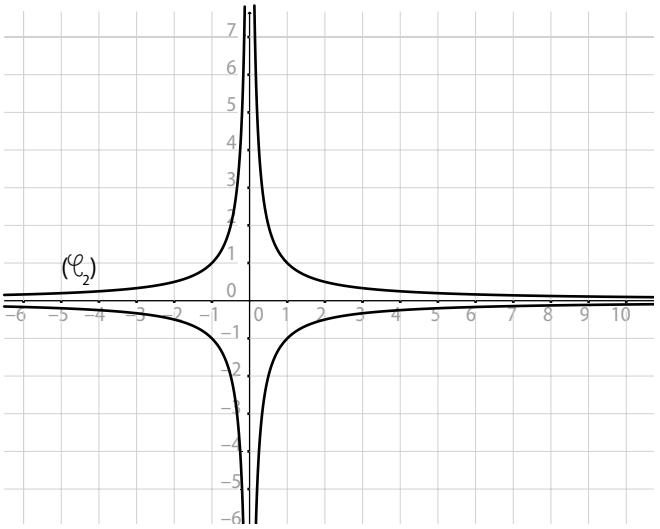
Le triangle MDC a donc une aire moitié de celle du rectangle $ABCD$.

111 **a.** $xy = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$.

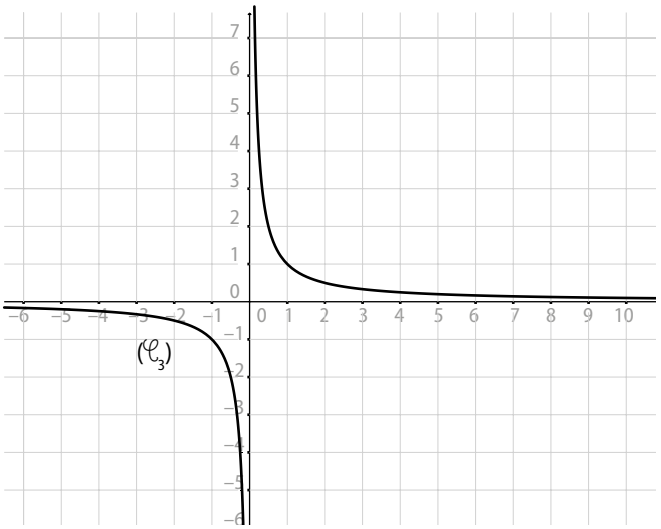


b. $x^2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$.

ou $y = -\dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$.



c. $x^3y^3 = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$.



11 Fonctions usuelles

Activités d'introduction

1 Fonction affine par intervalles

1. a. D'après le coefficient directeur de chaque portion de droite, le premier déplacement se fait en vélo, puis en bus et enfin à pied.

b. Pour $x = 1$, $y \approx 140$. Il a parcouru $210 - 140 = 70$ km.

c. Environ 1 h 40 min.

d. De 40 min à 120 min, Fofona a parcouru 150 km, donc $v = \dfrac{150}{\frac{4}{3}} = 150 \times \dfrac{3}{4} = 112{,}5$ km.h^{-1}.

Sur cet intervalle, la vitesse moyenne est constante donc, pendant la 2e heure, la vitesse moyenne est de 112,5 km.h^{-1}.

2. a. Cette droite passe par les points A(0 ; 210) et $B\left(\dfrac{2}{3} ; 180\right)$ donc $m = \dfrac{180 - 210}{\frac{2}{3} - 0} = -90$.

Puis $y_A = -90 \times x_A + p \Leftrightarrow p = 210$. Ainsi $f_1 : t \mapsto -90t + 210$.

b. Pour f_2 : $m_2 = \dfrac{30 - 180}{2 - \frac{2}{3}} = -112{,}5$.

$30 = -112{,}5 \times 2 + p \Leftrightarrow p = 255$.

$f_2 : t \mapsto -112{,}5t + 255$.

Pour f_3 : $m_3 = \dfrac{0 - 30}{\frac{11}{3} - \frac{6}{3}} = -18$.

$0 = \dfrac{11}{3} \times (-18) + p \Leftrightarrow p = 66$.

$f_3 : t \mapsto -18t + 66$.

2 Une parabole

1. b. $x^2 = y$.

2. a. Tableau de signes de f sur [–3 ; 3] :

x	–3		0		3
$f(x)$		+	0	+	

Tableau de variation de f sur [–3 ; 3] :

x	–3		0		3
$f(x)$	9	↘	0	↗	9

b. Oui, l'axe des ordonnées.

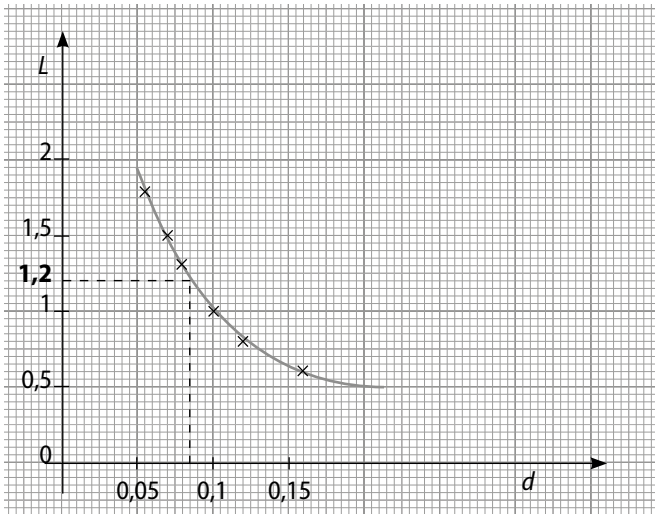
3 Figure de diffraction

1. a. Voir ci-contre.

b. Ce n'est ni une fonction linéaire, ni une fonction affine puisque la courbe n'est pas une droite.

Ce n'est pas une fonction carré puisque la courbe n'est pas une parabole.

c. Si $L = 1{,}2$ cm, alors $d = 0{,}085$ (pointillés sur le **1. a.**).



2. a.

d	0,08	0,056	0,072
$g(d)$	0,769	0,556	0,667

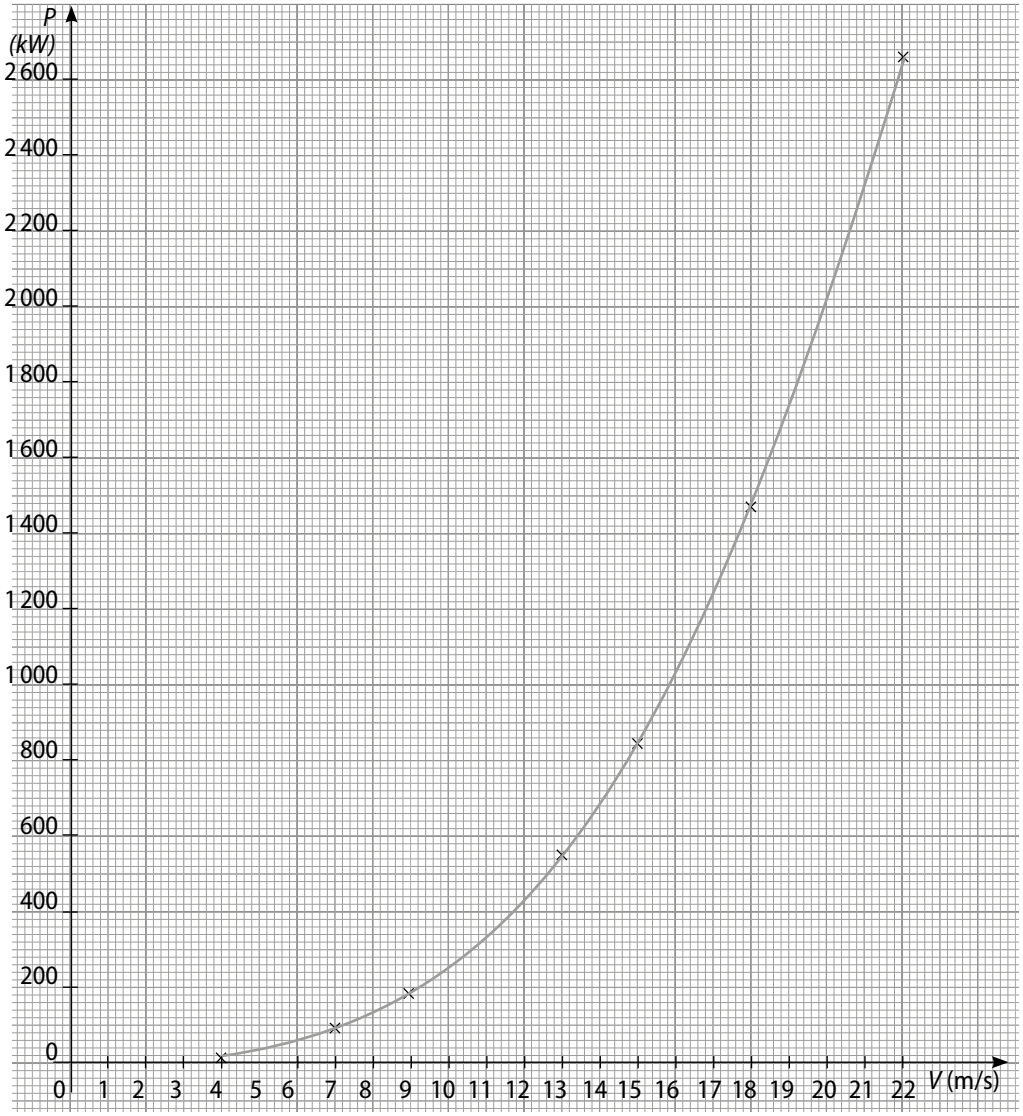
d	0,10	0,12	0,16
$g(d)$	1	1,25	1,667

$\frac{0{,}769}{0{,}12} \approx 10$; $\frac{0{,}556}{0{,}056} \approx 10$; $\frac{0{,}667}{0{,}072} \approx 10$; $\frac{1}{0{,}10} \approx 10$; $\frac{1{,}25}{0{,}12} \approx 10$; $\frac{1{,}667}{0{,}16} \approx 10$. $g(d) = 10d$ pour $d \in [0{,}056\,;\,0{,}16]$.

b. Pour $d \in [0{,}056\,;\,0{,}16]$, $g(d) = \frac{1}{f(d)} \Leftrightarrow f(d) = \frac{1}{g(d)}$ et donc $f(d) = \frac{1}{10d} = 0{,}1\,\frac{1}{d}$.

4 Puissance d'une éolienne

1. a.

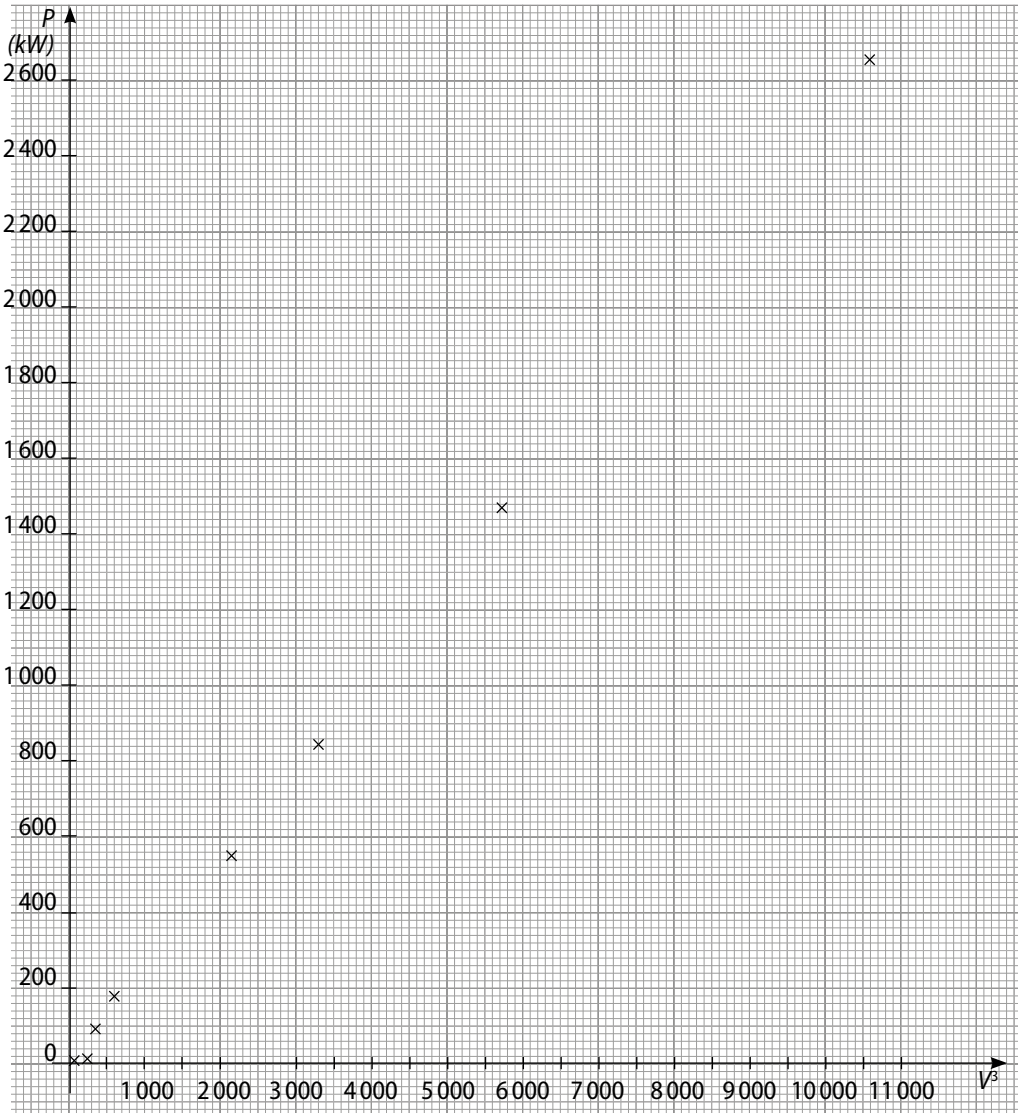


b. Non, puisqu'elle n'est ni une droite, ni une parabole, ni une hyperbole.

2. a.

V^3	27	64	343	729	2 197	3 375	5 832	10 648
P	7	16	85	182	550	844	1 458	2 662

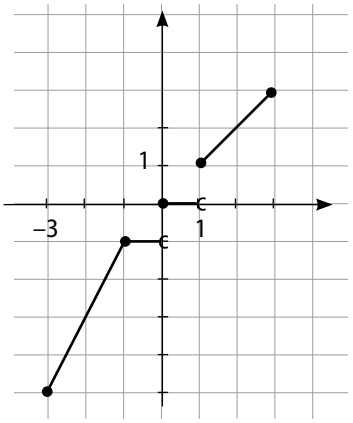
b.



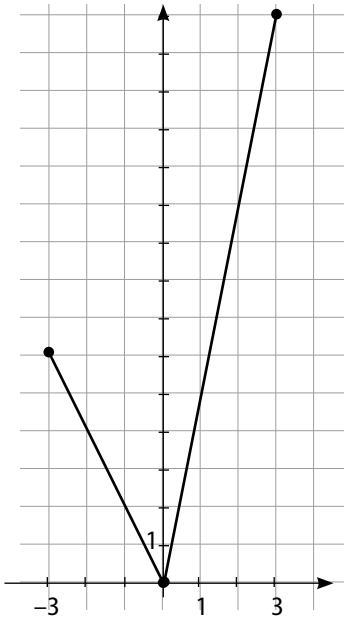
c. Cette fonction est affine. $f : V^3 \mapsto 4P$ et donc $P = \frac{1}{4}V^3$.

Savoir-faire

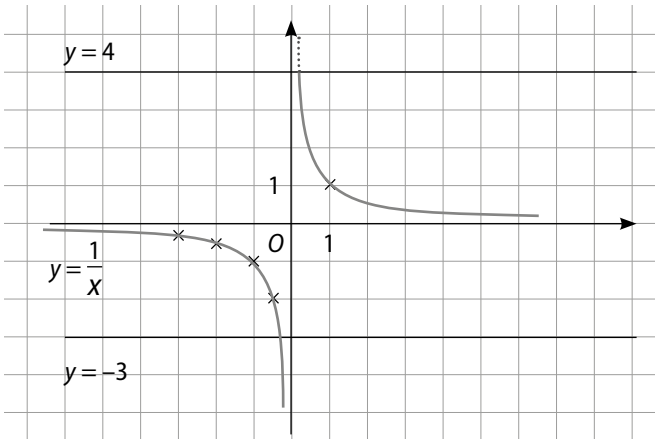
3 $f(-3) = 2(-3) + 1 = -5$.
$f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$.
Si $x \in [-1 ; 0[$, $E(x) = -1$.
Si x $[0 ; 1[$, $E(x) = 0$.
$f(1) = |1| = 1$.
$f(3) = |3| = 3$.



4 $f(-3) = 2|-3| = 6$.
$f(0) = 2|0| = 0$.
$f(3) = 5\ E(3) = 15$.



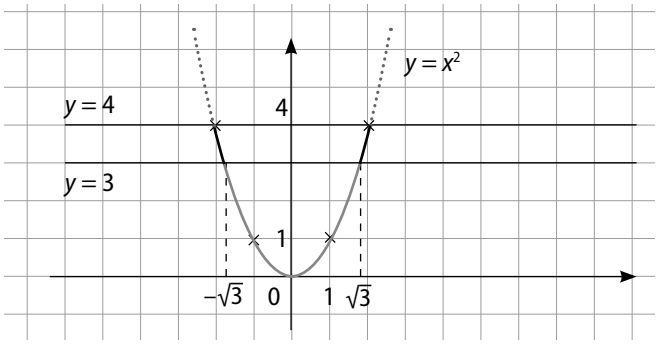
5 et **6**



$\frac{1}{x} > 4$ pour $0 < x < \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{x} + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geqslant -3$ pour $x \leqslant -\frac{1}{3}$ ou $0 < x$.

7 et **8**



$x^2 \geqslant 4$ pour $\begin{cases} x \leqslant -2 \\ \text{ou} \\ x \geqslant 2 \end{cases}$, soit pour $x \in]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$.

$x^2 - 2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3} ; \sqrt{3}[$.

11 Avec le tableau de variation de la fonction cube sur $[-3 ; 2]$:

x	-3		2
			8
x^3		↗	
	-27		

Pour $a \in [-3 ; 2]$, $-27 \leqslant a^3 \leqslant 8$.

12 Avec le tableau de variation de la fonction inverse sur $[1 ; 7]$:

x	1		7
	1		
$\frac{1}{x}$		↘	
			$\frac{1}{7}$

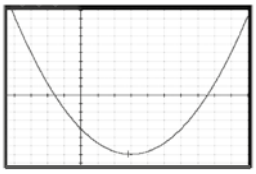
Pour $a \in [1 ; 7]$, $\frac{1}{7} \leqslant \frac{1}{a} \leqslant 1$.

13 **a.** On utilise la fonction carré puis la fonction affine $x \mapsto -x + 8$. a et b désignent deux nombres réels de $[-2 ; 2]$ tels que $a \leqslant b$. La fonction carré est décroissante sur $[-2 ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; 2]$ donc, sur $[-2 ; 0]$, $a^2 \geqslant b^2$ puis, sur $[0 ; 2]$, $a^2 \leqslant b^2$.
Ensuite, la fonction affine $x \mapsto -x + 8$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, sur $[-2 ; 0]$, $-a^2 + 8 \leqslant -b^2 + 8$. Puis, sur $[0 ; 2]$, $-a^2 + 8 \geqslant -b^2 + 8$.
Ainsi, sur $[-2 ; 0]$, $f(a) \leqslant f(b)$ et sur $[0 ; 2]$, $f(a) \geqslant f(b)$.
Finalement, f est croissante sur $[-2 ; 0]$ puis décroissante sur $[0 ; 2]$.
b. Sur $]0 ; +\infty[$, la fonction inverse est décroissante donc, pour a et b de $]0 ; +\infty[$ tels que $a \leqslant b$, $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.
Puis la fonction affine $x \mapsto 3x - 7$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $3 \times \frac{1}{a} - 7 \geqslant 3 \times \frac{1}{b} - 7$, soit $\frac{3}{a} - 7 \geqslant \frac{3}{b} - 7$ donc $f(a) \geqslant f(b)$. f est donc décroissante su $]0 ; +\infty[$.

16 $x \xmapsto{f} x^3 \xmapsto{g} -2x^3$. $g \circ f(x) = -2x^3$.

17 $x \xmapsto{u} \frac{1}{x} \xmapsto{v} \frac{8}{x}$; fonction inverse puis fonction linéaire $x \mapsto 8x$. $f = v \circ u$ où $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $v : x \mapsto 8x$.

18



19 Tableau de valeurs de f :

x	-5	-4	-3	-2	-1
$f(x)$	0,9	1,2	1,8	3,3	10
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	0,3	−0,2	−0,3	−0,3

Exercices d'entraînement

20 $f(-3) = -2 \times (-3) - 1 = 5$; $f(-2) = -2 \times (-2) - 1 = 3$; $f(-1) = |-1| = 1$; $f(0) = |0| = 0$; $f(1) = |1| = 1$ ou $-1 + 2$ donc $f(1) = 1$; $f(2) = -2 + 2 = 0$; $f(4) = -4 + 2 = -2$.

21

x	-3		-1		0		1		4
$f(x)$	5	↘		↘	0	↗	1	↘	-2

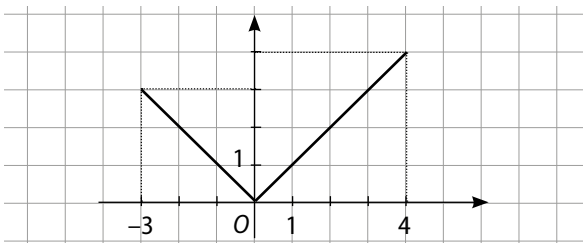
22 Sur $[-1 ; 0]$, $|x| = 0{,}5 \Leftrightarrow x = -0{,}5$. Sur $[0 ; 1]$, $|x| = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 0{,}5$. Sur $[1 ; 4]$, $-x + 2 = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 1{,}5$.

$-0{,}5$, $0{,}5$ et $1{,}5$ sont les antécédents de $0{,}5$ par f.

23 Sur $[-3 ; 1]$, $(\mathscr{C}_f)$ est une droite de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et passant par $(1 ; 0)$, donc $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Sur $[1 ; 3]$, $(\mathscr{C}_f)$ est une droite de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ et passant par $(3 ; 1)$, donc $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Ainsi $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ si } x \in [-3 ; 1] ; \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ si } x \in [1 ; 3]. \end{cases}$

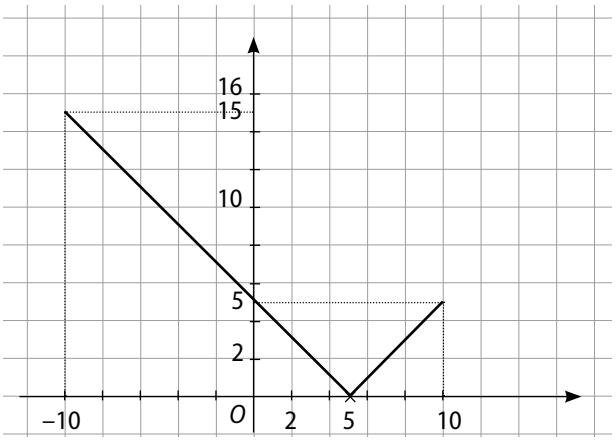
24



25 **a.** $f(-10) = |-10 - 5| = |-15| = 15$; $f(-5) = 10$; $f(0) = 5$; $f(5) = 0$ et $f(10) = 5$.

b. $f(x) = \begin{cases} -x + 5 \text{ si } x < 5 ; \\ x - 5 \text{ si } x \geqslant 5. \end{cases}$

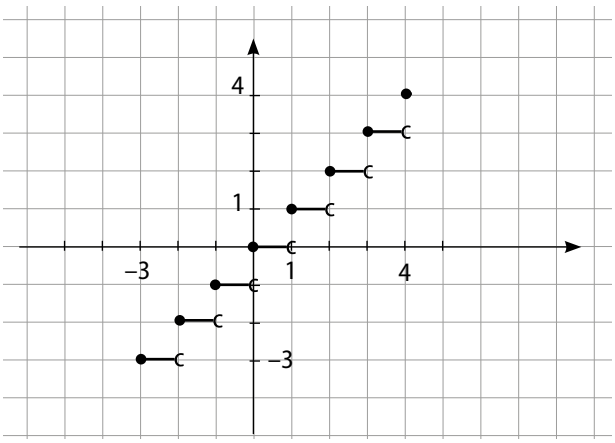
c.



26

x	-5		-1		5
signe de $x + 1$		$-$	0	$+$	
$\lvert x + 1 \rvert =$		$-x - 1$	0	$x + 1$	
$f(x) =$		$4x - 3$	-7	$6x - 1$	

27



28 **a.** $E(-13) = -13$; $E(-7) = -7$; $E(-4{,}2) = -5$; $E(-0{,}8) = -1$; $E(3) = 3$ et $E(7{,}1) = 7$.

b. $E(x) = 3$ pour $x \in [3 ; 4[$; $E(x) = -2$ pour $x \in [-2 ; -1[$.

29 **a.** $f(-2) = 1 - (-2)$ $E(-2) = 1 + 2 \times (-2) = -3$. $f(1) = 1 - 1 \times E(1) = 0$. $f(4) = 1 - 4 \times E(4) = -15$.

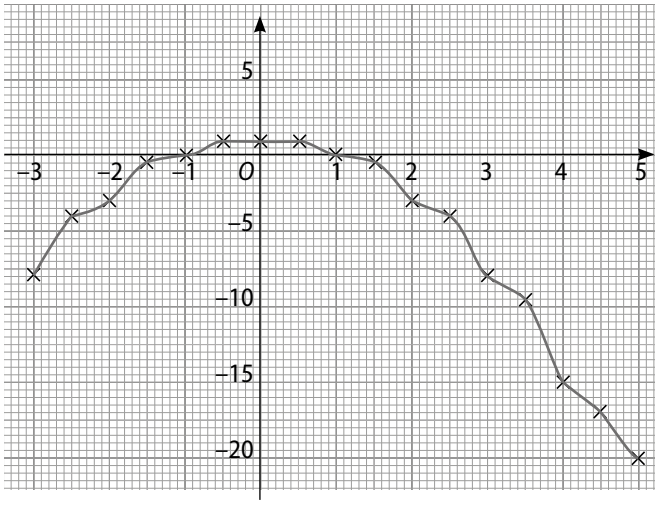
b. Pour $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n ; n + 1[$, $f(n) = 1 - n \times n = 1 - n^2$.

c.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1
$f(x)$	-8	-4	-3	$-0{,}5$	0

x	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	1	1	1	0	-05	-3
x	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4	$4{,}5$	5
$f(x)$	-4	-8	$-9{,}5$	-15	-17	-20

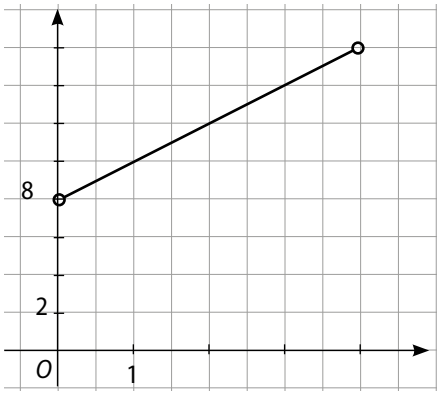
d.



30 **a.** $\mathcal{P}(x) = AC + CD + DE + EF + FB + AB$
$= AC + (CD + EF) + (DE + FB) + AB$
$= x + 4 + x + 4 = 2x + 8$.

b. $x \in]0 ; 4[$.

c.

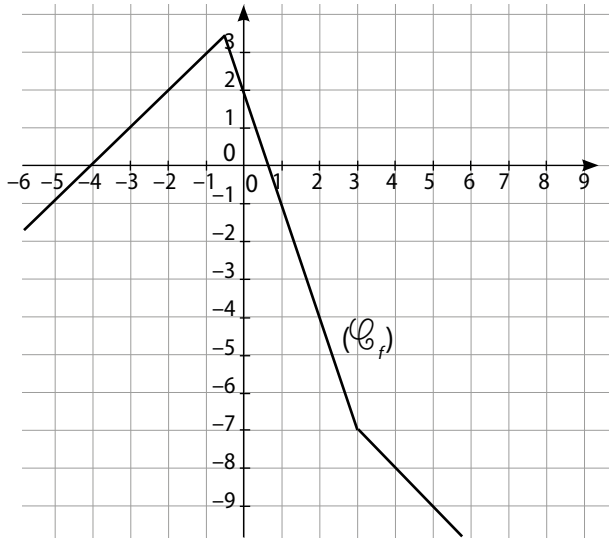


31 **a.**

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
signe de $x-3$	$-$		$+$	0	$+$
$\lvert x-3\rvert =$	$-x+3$		$-x+3$		$x-3$
signe de $2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\lvert 2x+1\rvert =$	$-2x-1$		$2x+1$		$2x+1$
$\lvert x-3\rvert - \lvert 2x+1\rvert =$	$x+4$		$-3x+2$		$-x-4$

b. $f(x) = \begin{cases} x+4 \text{ si } x \in]-\infty ; -\frac{1}{2}[; \\ -3x+2 \text{ si } x \in [-\frac{1}{2} ; 3] ; \\ -x-4 \text{ si } x \in]3 ; +\infty[. \end{cases}$

c.



32

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖		↘	

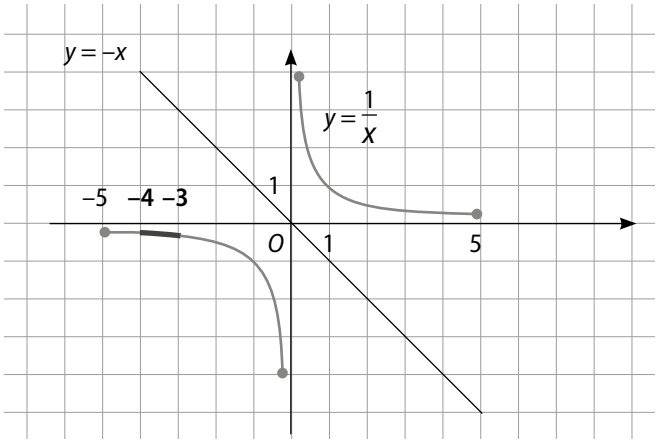
33 $\frac{1}{4} ; \frac{1}{10} ; 3 ; \frac{4}{3}$.

34 **a.** Décroissante ; $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$.

b. Inverse ; $]-\infty ; 0[; -\frac{1}{\sqrt{2}} > -1$.

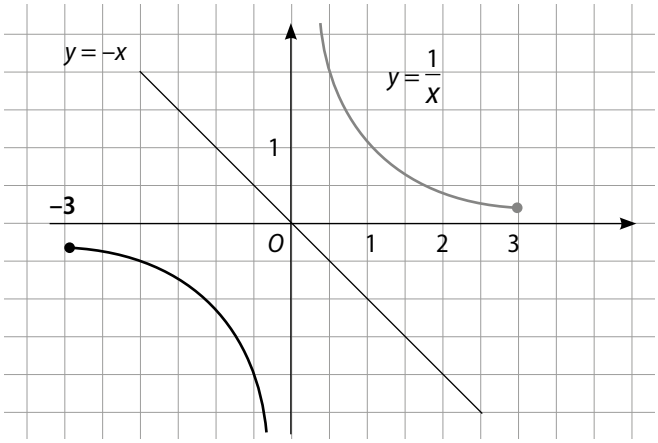
35 $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$; $\frac{1}{-3} > \frac{1}{-2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{-2} < \frac{1}{0{,}5}$.

36 **a.**



b. Pour tout $x \in [-4 ; -3[$, $-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{4}$.

37 **a.**



b. $\frac{1}{x} > -x$ pour $x \in]0 ; 3]$.

c. Non, pas sur $\mathbb{R}$ puisque pour $x \in [-3 ; 0[$, $\frac{1}{x} < -x$.

38 $-3 < \frac{1}{x} \leqslant -1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x < -\frac{1}{3}$. $\mathcal{P} = [-1 ; -\frac{1}{3}]$.

$-2 < \frac{1}{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{x} < 0$ ou $0 < \frac{1}{x} < 1$

$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ ou $1 < x$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ des solutions est : $]-\infty ; -\frac{1}{2}] \cup]1 ; +\infty[$.

39 **a.** $x \longrightarrow \boxed{\frac{1}{x}} \longrightarrow \boxed{-\frac{1}{x}} \longrightarrow \boxed{-\frac{1}{x}+2}$

b. $\boxed{-5 \leqslant x \leqslant -1} \longrightarrow \boxed{-1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{5}}$

la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$;

$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{5} \leqslant -\frac{1}{x} \leqslant 1}$

multiplier une inégalité par un nombres réel négatif change l'ordre ;

$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{5}+2 \leqslant -\frac{1}{x}+2 \leqslant 1+2}$

ajouter un nombre réel à chaque membre d'une inégalité ne change pas l'ordre.

Ainsi, si $x \in [-5 ; -1]$, alors $f(x) \in \left[\frac{11}{5} ; 3\right]$.

c. De même, si $x \in [1 ; 3]$, alors $f(x) \in \left[1 ; \frac{5}{3}\right]$.

40 **a.** $f(x)$ n'a pas de sens logique lorsque $x - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 1$.
Donc $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

b.
$\boxed{x} \xrightarrow[1]{\text{soustraire}} \boxed{x-1} \xrightarrow{\text{prendre l'inverse}} \boxed{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow[3]{\text{ajouter}} \boxed{\frac{1}{x-1}+3}$

c. $a \leqslant b < 1$ — On ajoute -1.

$a - 1 \leqslant b - 1 < 0$ — La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

$\frac{1}{a-1} \geqslant \frac{1}{b-1}$ — On ajoute 3.

$3 + \frac{1}{a-1} \geqslant 3 + \frac{1}{b-1}$.

d. Pour deux nombres réels a et b de $]-\infty ; 1[$ tels que $a \leqslant b$, on obtient $f(a) \geqslant f(b)$. Cela signifie que f est décroissante sur $]-\infty ; 1[$.

e. De même, $1 < a \leqslant b \Leftrightarrow 0 < a - 1 \leqslant b - 1$
$\Leftrightarrow \frac{1}{a-1} \geqslant \frac{1}{b-1} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{a-1} \geqslant 3 + \frac{1}{b-1}$. Cela signifie que f est décroissante sur $]1 ; +\infty$.

41 **a.** $f(x)$ n'a pas de sens logique lorsque $x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$.
$D_f =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

b. Pour tout nombre réel $x \in I$:
$2 + \frac{7}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{7}{x-3} = \frac{2x-6+7}{x-3} = f(x)$.
L'égalité est montrée pour tout $x \in I$.

c.
$\boxed{x} \xrightarrow[-3]{\text{ajouter}} \boxed{x-3} \xrightarrow{\text{prendre l'inverse}} \boxed{\frac{1}{x-3}} \xrightarrow[\text{par } 7]{\text{multiplier}} \boxed{\frac{7}{x-3}} \xrightarrow[2]{\text{ajouter}} \boxed{\frac{7}{x-3}+2}$

d. $3 < a \leqslant b \Leftrightarrow 0 < a - 3 \leqslant b - 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a-3} \geqslant \frac{1}{b-3}$
$\Leftrightarrow \frac{7}{a-3} \geqslant \frac{7}{b-3} \Leftrightarrow 2 + \frac{7}{a-3} \geqslant 2 + \frac{7}{b-3}$
$\Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$.

Cela signifie que sur $]3 ; +\infty[$, f est décroissante.

42 **a.** Pour tous nombres réels a et b non nuls :
$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b \times 1}{b \times a} - \frac{a \times 1}{a \times b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$.

b. Pour $0 < b < a$, $b - a < 0$ et $a \times b > 0$, donc $\frac{b-a}{ab} < 0$, donc $f(a) - f(b) < 0$.

c. $0 < b < a$, donc $f(a) < f(b)$; cela signifie que f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

d. Pour $b < a < 0$, $b - a < 0$ et $a \times b > 0$ donc $\frac{b-a}{ab} < 0$, donc $f(a) - f(b) < 0$, donc $f(a) < f(b)$.
Cela signifie que f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

43

x	-5		0		5
x^2	25	↘	0	↗	25

44 La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.
Si $x \leqslant -3$ alors $x^2 \geqslant 9$.
Si $-2 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

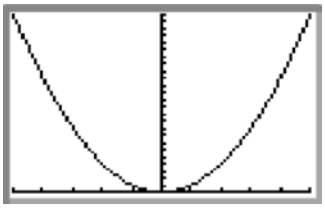
45 **a.** $\leqslant$; **b.** $\geqslant$; **c.** $\leqslant$; **d.** $\geqslant$.

46 **a.**

x	-2		0		2
x^2	4	↘	0	↗	4

b. $x \in [-1 ; \sqrt{2}] \Leftrightarrow x^2 \in [0 ; 2]$.

47 **a.**



b. Il y a deux points d'intersection entre $(\mathscr{C})$: $y = x^2$ et $(\mathscr{D}_1)$: $y = 4$, dont les abscisses -2 et 2 sont les solutions de l'équation $x^2 = 4$.

• De même, les abscisses sont $-\sqrt{12}$ et $\sqrt{12}$.

• Aucun point d'intersection, donc aucune solution.

c. Les solutions sont les abscisses des points de $(\mathcal{C})$ situés en-dessous de $(\mathcal{D})$: $y = 16$, soit $[-4 ; 4]$.

• De même, mais cette fois-ci au-dessus, soit : $]-\infty ; -3[\cup]3 ; +\infty[$.

• De même, $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$.

48 **a.** $x \longrightarrow x-1 \longrightarrow (x-1)^2$

b. $-2 \leqslant x \leqslant 1 \underset{①}{\Leftrightarrow} -3 \leqslant x-1 \leqslant 0 \underset{②}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 9$.

c. $1 \leqslant x \leqslant 4 \underset{①}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant x-1 \leqslant 3 \underset{③}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 9$.

Justifications :

① Soustraire un nombre réel aux termes d'une inégalité ne change pas l'ordre.

② La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

③ La fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

d. Pour tous $x \in [-2 ; 4]$, $0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 9$. Cela signifie que f admet un minimum, 0, sur $[-2 ; 4]$, qui est atteint en $x = 1$.

49 **a.** $x \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} x^2 \xrightarrow[\text{par 4}]{\text{multiplier}} 4x^2 \xrightarrow[5]{\text{soustraire}} 4x^2 - 5$

b. $a \leqslant b \leqslant 0 \Rightarrow a^2 \geqslant b^2 \Rightarrow 4a^2 \geqslant 4b^2$

(la fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0[$; on multiplie par un nombre réel positif)

$4a^2 \geqslant 4b^2 \Rightarrow 4a^2 - 5 \geqslant 4b^2 - 5$.

(on soustrait 5)

c. Sur $[-2 ; 0]$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$, cela signifie que f est décroissante sur $[-2 ; 0]$.

d. Sur $[0 ; 3]$, $0 \leqslant a \leqslant b$, donc $a^2 \leqslant b^2$, donc $4a^2 \leqslant 4b^2$ donc $4a^2 - 5 \leqslant 4b^2 - 5$. Ainsi, sur $[0 ; 3]$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ donc f est croissante sur $[0 ; 3]$.

50 **a.** $x \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} x^2 \xrightarrow[\text{par } -1]{\text{multiplier}} -x^2 \xrightarrow[8]{\text{ajouter}} -x^2 + 8$

$2 \leqslant x \leqslant 5 \Leftrightarrow 4 \leqslant x^2 \leqslant 25 \Leftrightarrow -25 \leqslant -x^2 \leqslant -4$

$\Leftrightarrow -17 \leqslant -x^2 + 8 \leqslant 4$ donc $f(x) \in [-17 ; 4]$.

b. Non, puisque sur l'intervalle $[-2 ; 5]$, la fonction carré change de variation.

51 **a.** $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

b. Sur $]-\infty ; 0]$, $a \leqslant b$, donc $a - b \leqslant 0$ et $a + b \leqslant 0$.

Ainsi, sur $]-\infty ; 0]$, si $a \leqslant b$, alors $(a-b)(a+b) \geqslant 0$.

c. C'est-à-dire que $f(a) - f(b) \geqslant 0$, soit $f(b) \leqslant f(a)$.

Cela signifie que f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

d. Sur $[0, +\infty[$, avec $c \geqslant d$, $c - d \geqslant 0$ et $c + d \geqslant 0$, donc $f(c) - f(d) \geqslant 0$, soit $f(c) \leqslant f(d)$. Cela signifie que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

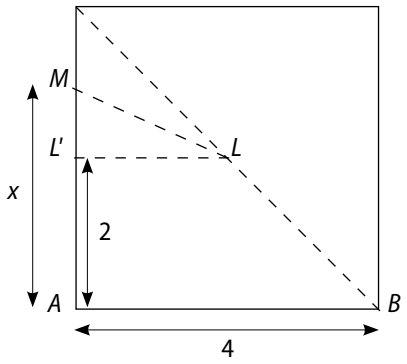
52 **a.** $1 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant x^2 \leqslant 4$ (la fonction carré est croissante sur $[1 ; 2]$).

b. $-3 < x < -2 \Leftrightarrow 4 < x^2 < 9$ (la fonction carré est décroissante sur $]-3 ; -2[$).

c. $-3 < x < 3 \Leftrightarrow -3 < x \leqslant 0$ ou $0 \leqslant x < 3$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 < 9$.

53 **a.**



Dans le triangle rectangle $LL'M$, on a :

$LM^2 = LL'^2 + L'M^2$

$= 2^2 + (x-2)^2 = (x-2)^2 + 4$.

b. On conjecture d'après la calculatrice que f semble décroissante sur $[0 ; 2]$, puis croissante sur $[2 ; 4]$.

Pour $0 \leqslant a < b \leqslant 2$

$-2 \leqslant a - 2 < b - 2 \leqslant 0$ ($x \mapsto x^2$ décroissante sur $]-\infty ; 0]$)

$(a-2)^2 > (b-2)^2$

$(a-2)^2 + 4 > (b-2)^2 + 4$

$f(a) > f(b)$.

Pour $2 \leqslant a < b \leqslant 4$

$0 \leqslant a - 2 < b - 2 \leqslant 0$ ($x \mapsto x^2$ croissante sur $]0 ; +\infty]$)

$(a-2)^2 < (b-2)^2$

$(a-2)^2 + 4 < (b-2)^2 + 4$

$f(a) < f(b)$.

f est décroissante sur $[0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; 4]$.

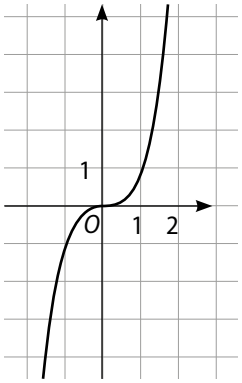
c. M doit se trouver au milieu du mur ($x = 2$).

54

x	-2		2
			8
x^3		↗	
	-8		

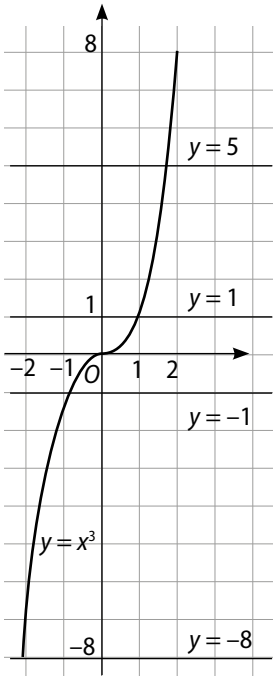
55 **a.** $(1,5)^3 > (1,33)^3$; b. $(\sqrt{2})^3 < (\sqrt{3})^3$; c. $(-\pi)^3 < (-3,1)^3$; **d.** $(-\sqrt{2})^3 < (1)^3$.

56 **1.**



2. a. $x = 3$;
b. $x < 1$;
c. $x = 1$;
d. $x > 2$;
e. $x \leqslant 0$;
f. $x = 0$.

57 **a.**



b. La solution de ces équations est l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = m$ et de la courbe représentant la fonction cube.

• $x = -2$; • $x = 1$; • $x = 0$; • $x = \sqrt[3]{5}$.

c. L'ensemble des solutions de ces inéquations est l'ensemble des abscisses des points de la courbe situés au-dessus ou en dessous de la droite d'équation $y = m$.

• $x \geqslant 2$; • $x > 1$; $x < 0$; • $x > -1$.

58 **a.** Si f est représentée par la courbe bleue, $f(x) = x^3$ et alors $g(x) = 3x + 2$.

b. Il semble qu'il y a une infinité de solutions.

c. $x = 2$; $x = -1$. (On utilise, par exemple, la touche TRACE.)

59

x	-3		3
			27
x^3		↗	
	-27		

b. Les extrema de la fonction cube sur [–3 ; 3] sont – 27 et 27.

60 **a.** $M(x\,;x^3)$ et $M'(-x\,;-x^3)$.

b. $x_{\text{milieu}} = \dfrac{x + (-x)}{2} = 0$ et $y_{\text{milieu}} = \dfrac{x^3 + (-x^3)}{2} = 0$.

Pour tous points $M(x\,;x^3)$ et $M'(-x\,;-x^3)$, O est le milieu de $[MM']$, donc $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport au centre du repère.

c. $f(a) - f(b) = a^3 - b^3$.

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3$
$= a^3 - b^3$.

Ainsi, pour tous réels a et b,
$f(a) - f(b) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

d. Si $a \leqslant b$ alors $a - b \leqslant 0$. Puis a^2 et b^2 sont des carrés, donc positifs et $a \times b$ est un produit de deux nombres positifs, donc $ab \geqslant 0$. Donc $f(a) - f(b) \leqslant 0$ soit $f(a) \leqslant f(b)$. Ainsi, pour tous nombres réels positifs a et b tels que $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$. Cela signifie que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

61 **a.**

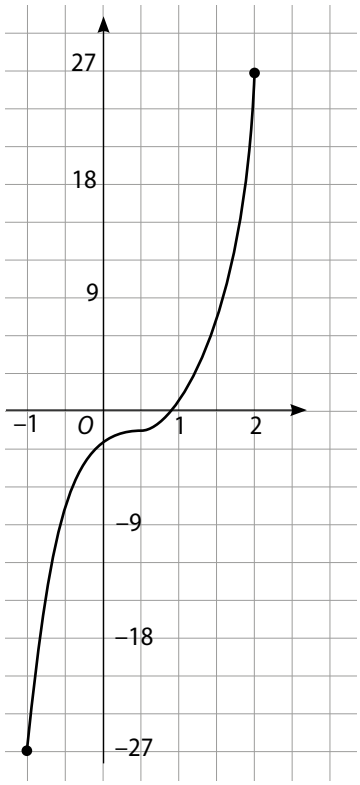


Tableau de variation de f sur [–1 ; 2] :

x	-1		2
			27
$f(x)$		↗	
	-27		

b. a et b sont deux nombres réels de [–1 ; 2] tel que $a \leqslant b \Leftrightarrow 2a \leqslant 2b \Leftrightarrow 2a - 1 \leqslant 2b - 1$
$\Leftrightarrow (2a-1)^3 \leqslant (2b-1)^3$.

Ainsi, sur [–1 ; 2], si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$. Cela signifie que f est croissante sur [–1 ; 2].

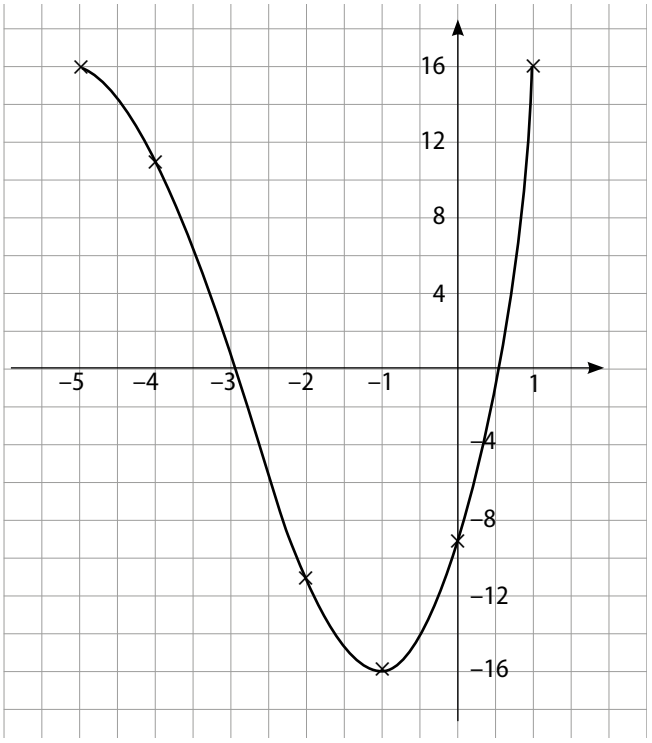
62 **a.** $f(-5) = 16$; $f(0) = -9$; $f(-3) = 0$; $f(1) = 16$.

b. Si f est croissante sur [–5 ; 1], comme $-5 < -3$, alors $f(-5) < f(-3)$, ce qui n'est pas vrai. Donc, par contraposée, f n'est pas croissante sur [–5 ; 1].

De même, 0 < 1, alors $f(0) < f(1)$, ce qui est faux, donc f n'est pas décroissante sur [–5 ; 1].

c. D'après le **a.**, $f(x) = 16$ admet au moins deux solutions, –5 et 1.

d.



e. Pour $K \in]-16 ; 16]$, $f(x) = K$ admet deux solutions.

Pour $K = -16$, $f(x) = K$ admet une unique solution.

Pour $K \in]-\infty ; -16[\cup]16 ; +\infty[$, $f(x) = K$ n'admet aucune solution.

63 **a.** $\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$; **b.** $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
c. $\sqrt{x} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{25}{9}$; **d.** $\sqrt{x} = -\frac{1}{4}$, aucune solution.

64 **a.** $\mathbb{R}^+$; **b.** $\sqrt{x+3}$ a un sens $\Leftrightarrow x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$.
$D_f = [-3 ; +\infty[$.

c. $\sqrt{2x+6}$ existe a un sens $\Leftrightarrow 2x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$.
$D_f = [-3 ; +\infty[$.

d. $\sqrt{x^2+1}$ a un sens $\Leftrightarrow$ i $x^2 + 1 \geqslant 0$, ce qui est toujours vrai sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

65 **a.** $f(-4)$ et $f(-2)$ n'ont pas de sens.
$f(0) = 0$; $f(12) = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$.

b. $f(-4) = 2$, $f(-2) = \sqrt{2}$, $f(0) = 0$, $f(12)$ n'a pas de sens.

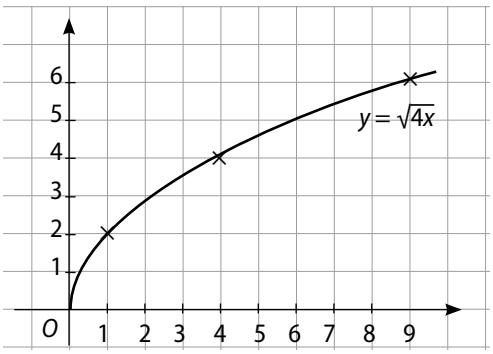
c. $f(-4)$ et $f(-2)$ n'ont pas de sens. $f(0) = 0$;
$f(12) = (\sqrt{12})^2 = 12$.

d. $f(-4) = 4$, $f(-2) = 2$, $f(0) = 0$ et $f(12) = 12$.

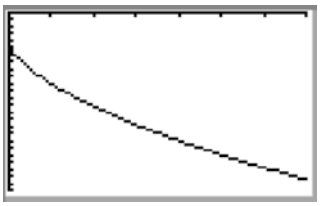
66 La fonction racine carrée est croissante sur [0 ; +∞[, donc : **a.** $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$; **b.** $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$; **c.** $\sqrt{x} > 4\sqrt{2}$; **d.** $\sqrt{x} \in [10^3 ; 10^4]$.

67 **a.** a et b deux nombres réels de [0 ; 9] tels que $a \leqslant b$, $0 \leqslant a \leqslant b \Leftrightarrow 0 \leqslant 4a \leqslant 4b \Leftrightarrow \sqrt{4a} \leqslant \sqrt{4b}$ (la fonction racine carrée est croissante sur [0 ; +∞[). Ainsi, sur [0 ; 9], si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$. Cela signifie que f est croissante sur [0 ; 9].

b.



68 **a.**



x	0		7
$f(x)$	–5	↘	$-5\sqrt{22}$

b. Pour tous nombres réels a et b de [0 ; 7] tels que $a \leqslant b$,
$0 \leqslant a \leqslant b \Leftrightarrow 1 \leqslant 3a + 1 \leqslant 3b + 1$
$\Leftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{3a+1} \leqslant \sqrt{3b+1}$ (la fonction racine carrée est croissante sur [1 ; +∞[).
$\Leftrightarrow -5 \geqslant -5\sqrt{3a+1} \geqslant -5\sqrt{3b+1}$ (multiplier par –5 change le sens des inégalités).
Ainsi, sur [0 ; 7], si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$. Cela signifie que f est décroissante sur [0 ; 7].

69 f est représentée par la courbe bleue ; g est représentée par la courbe rouge ; h est représentée par la courbe verte ; i est représentée par la courbe orange.

70 **a.** $g(f(x)) = \frac{1}{5x}$; **b.** $g(f(x)) = (5x)^2$;
c. $g(f(x)) = (5x)^3$; **b.** $g(f(x)) = \sqrt{5x}$.

71 **a.** $g \circ f(0) = -2 \times (0)^3 = 0$;
$g \circ f(-1) = -2 \times (-1)^3 = 2$; $g \circ f(2) = -2 \times (2)^3 = -16$.
b. $g \circ f(x) = -2 \times (x)^3 = -2x^3$. **c.** $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

72 **a.** $u(x) = \frac{1}{7}x$; $v(x) = \sqrt{x}$.

b. $u(x) = -3x$; $v(x) = \frac{1}{x}$.

c. $u(x) = -x$; $v(x) = x^2$.

d. $u(x) = \frac{1}{5}x$; $v(x) = x^3$.

73 Bleue : $x \mapsto \frac{1}{x}$ et coefficient < 0 ;

rouge : $x \mapsto \sqrt{x}$ et coefficient > 0 ;

verte : $x \mapsto x^2$ et coefficient < 0 ;

orange : $x \mapsto |x|$ et coefficient < 0.

Faire le point

74 $\mathcal{A} : x \mapsto |x|$; $\mathcal{B} : x \mapsto x^2$; $\mathcal{C} : x \mapsto \frac{1}{x}$; $\mathcal{D} : x \mapsto x^3$.

75 **a.** Fua : « Non, il y a aussi $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto 3x$. »

b. Non. $x \mapsto 1 - x$ est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction inverse, décroissante sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$; $x \mapsto 3x$ est une fonction linéaire croissante sur $\mathbb{R}$.

Sur $[1 ; +\infty[$, si $1 \leqslant a \leqslant b$ alors $0 \geqslant 1 - a \geqslant 1 - b$, donc $\frac{1}{1-a} \leqslant \frac{1}{1-b}$ et $\frac{3}{1-a} \leqslant \frac{3}{1-b}$. Cela signifie que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

76 f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ ou sur $]0 ; +\infty[$.

On peut utiliser la définition de la décroissance sur I, mais il faut comparer d'abord les antécédents.

$a > 1$ donc $\sqrt{a}$ existe et $1 \geqslant 0$ donc $1 - \sqrt{a} \geqslant 0 - \sqrt{a}$ soit $1 - \sqrt{a} \geqslant -\sqrt{a}$.

Puis $a > 1$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $\sqrt{a} > 1$ donc $1 - \sqrt{a} < 0$.

On peut utiliser la fonction inverse sur $]-\infty ; 0[$ où elle est décroissante

donc $0 > 1 - \sqrt{a} \geqslant -\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{1-\sqrt{a}} \leqslant -\frac{1}{\sqrt{a}}$.

77 **a.** $s_1 \in [-1 ; 0]$ et $s_2 \in [0 ; 1]$.

b. Oui, une autre, $s_3 \in [-8 ; -7]$.

c. Fenêtre pour $s_1 \begin{cases} x_{min} = -1 \\ x_{max} = 0 \end{cases}$, $s_2 \begin{cases} x_{min} = 0 \\ x_{max} = 1 \end{cases}$

et $s_3 \begin{cases} x_{min} = -8 \\ x_{max} = -7 \end{cases}$.

78 **a.** $x \in [3 ; 7]$:

$3 \leqslant x \leqslant 7 \Leftrightarrow -3 \geqslant -x \geqslant -7 \Leftrightarrow -1 \geqslant 2 - x \geqslant -5$

$\Rightarrow 1 \geqslant (2 - x)^2 \geqslant 25$.

b. $x \in [-1 ; 3]$:

$x \xrightarrow[\text{par } -1]{\text{multiplier}} -x \xrightarrow[2]{\text{ajouter}} 2 - x \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} (2 - x)^2$

$-1 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 \geqslant -x \geqslant -3 \Leftrightarrow 3 \geqslant 2 - x \geqslant -1$

$\Rightarrow 9 \geqslant (2 - x)^2 \geqslant 0$.

79 **a.** $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$.

b. $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

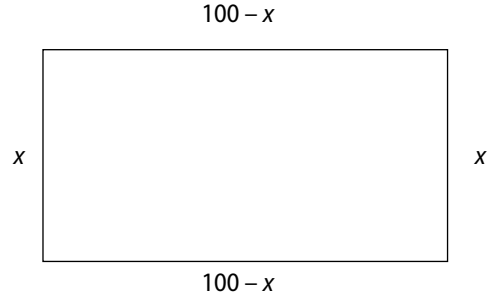
c. Sur $[-1 ; 0]$: $x \leqslant x^3 \leqslant x^2$; sur $]-\infty ; -1]$: $x^3 \leqslant x \leqslant x^2$.

Se tester

80 à **83** Voir Manuel de l'élève page 260.

Exercices d'approfondissement

84 **a.**



b. $\mathcal{A}(x) = x(100 - x) = -x^2 + 100x$.

c.

x	0		50		100
$\mathcal{A}(x)$	0	↗	2 500	↘	0

C'est un carré de 50 m de côté.

85 **1.** Pour tout $x \in]-1{,}5\ ;\ 6]$:

$$5 - \frac{7}{2x+3} = \frac{5(2x+3)}{2x+3} - \frac{7}{2x+3} = \frac{10x+15-7}{2x+3}$$
$$= \frac{10x+8}{2x+3} = f(x).$$

2. a. Sur $]-1{,}5\ ;\ 6]$, $-1{,}5 < a \leqslant b \leqslant 6$;

$$0 < 2a+3 \leqslant 2b+3 \leqslant 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2a+3} \geqslant \frac{1}{2b+3} \geqslant \frac{1}{15}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2a+3} \leqslant -\frac{7}{2b+3} \leqslant -\frac{7}{15}$$
$$\Leftrightarrow 5 - \frac{7}{2a+3} \leqslant 5 - \frac{7}{2b+3} \leqslant 5 - \frac{7}{15}.$$

b. Ainsi, sur $]-1{,}5\ ;\ 6]$, si $a \leqslant b$, $f(a) \leqslant f(b)$. Cela signifie que f est croissante sur $]-1{,}5\ ;\ 6]$.

c.

x	$-1{,}5$		6
$f(x)$	‖	↗	$\frac{68}{15}$

3. a. Sur $]-1{,}5\ ;\ 6]$, $f(x) - 5 = -\dfrac{7}{2x+3}$.

x	$-1{,}5$		6
$2x+3$	0	+	
-7		−	
$-\frac{7}{2x+3}$	‖	−	

Ainsi, $f(x) - 5 < 0$.

b. $(\mathcal{H})$ est située en-dessous de $(\mathcal{D})$.

86 **1. a.** $D_f = \mathbb{R}$. Pour tout réel x, $-(x-1)^2 \leqslant 0$, donc $-(x-1)^2 + 4 \leqslant 4$. De plus, $f(1) = -(1-1)^2 + 4 = 4$.
Donc 4 est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$, il est atteint en $x = 1$.

b. $D_g = \mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $x^2 + 3 \geqslant 3$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x^2+3} \leqslant \dfrac{1}{3}$, donc $0 \leqslant \dfrac{6}{x^2+3} \leqslant 2$, soit $0 \leqslant g(x) \leqslant 2$.
De plus, $g(0) = \dfrac{6}{3} = 2$. Donc 2 est le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

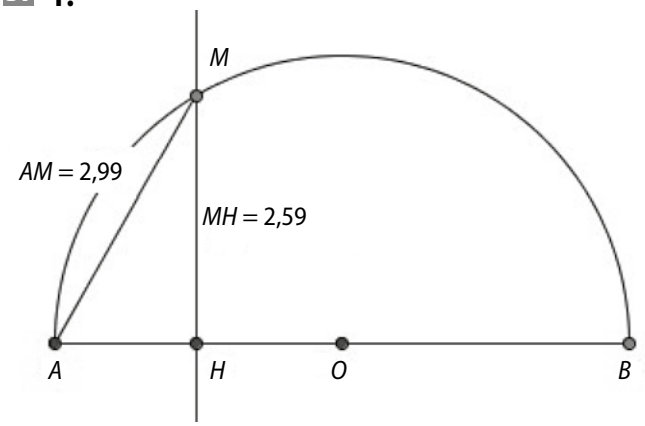
2. a. Sur $[1\ ;\ +\infty[$, $1 \leqslant a \leqslant b$ donc $1 \leqslant a - 1 \leqslant b - 1$, donc $(a-1)^2 \leqslant (b-1)^2$, donc $-(a-1)^2 \geqslant -(b-1)^2$, donc $-(a-1)^2 + 4 \geqslant -(b-1)^2 + 4$, soit $f(a) \geqslant f(b)$. Ainsi, f est décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Sur $]-\infty\ ;\ 1]$, $a \leqslant b \leqslant 1$ donc $a - 1 \leqslant b - 1 \leqslant 0$ donc $(a-1)^2 \geqslant (b-1)^2$, donc $-(a-1)^2 \leqslant -(b-1)^2$, donc $-(a-1)^2 + 4 \leqslant -(b-1)^2 + 4$, soit $f(a) \leqslant f(b)$. Ainsi, f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$.

b. Sur $]-\infty\ ;\ 0]$, $a \leqslant b \leqslant 0$, $a^2 \geqslant b^2 \geqslant 0$ ($x \mapsto x^2$ décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$), $a^2 + 3 \geqslant b^2 + 3 \geqslant 3$, $\dfrac{1}{a^2+3} \leqslant \dfrac{1}{b^2+3} \leqslant \dfrac{1}{3}$ ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $[3\ ;\ +\infty[$), donc $\dfrac{6}{a^2+3} \leqslant \dfrac{6}{b^2+3}$ soit $g(a) \leqslant g(b)$. Cela signifie que la fonction g est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

Sur $[0\ ;\ +\infty[$, $0 \leqslant a \leqslant b$, $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$ ($x \mapsto x^2$ croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$), $3 \leqslant a^2 + 3 \leqslant b^2 + 3$, $\dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{1}{a^2+3} \geqslant \dfrac{1}{b^2+3}$ donc $\dfrac{6}{a^2+3} \geqslant \dfrac{6}{b^2+3}$ soit $g(a) \geqslant g(b)$. Cela signifie que la fonction g est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

87 **1.**



2. a. Dans AHM rectangle en H, $AM^2 = AH^2 + HM^2$.
Dans BHM rectangle en H, $BM^2 = BH^2 + HM^2$.
Dans ABM rectangle en M, $AB^2 = AM^2 + MB^2$.

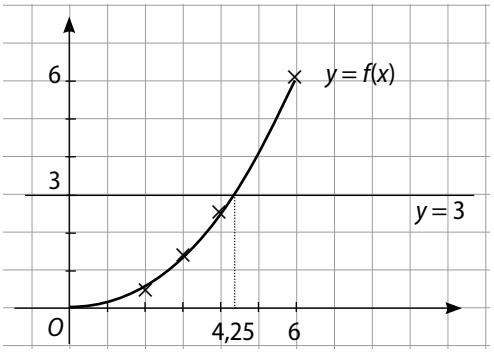
b. $AM = x$ et d'après le **2. a.**, $AH = \dfrac{AM^2}{AB} = \dfrac{x^2}{6} = \dfrac{1}{6} \times x^2$.

c. Pour $x \in [0 ; 6]$: $\boxed{x} \xrightarrow[\text{au carré}]{\text{élever}} \boxed{x^2} \xrightarrow[\text{par 1/6}]{\text{multiplier}} \boxed{\dfrac{1}{6}\,x^2}$

$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 6 \Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 \leqslant b^2 \leqslant 36$ (la fonction carré est croissante sur $[0 ; 6]$) $\Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{6}a^2 \leqslant \dfrac{1}{6}b^2 \leqslant 6$ ($\dfrac{1}{6} > 0$ donc la fonction linéaire est croissante sur $[0 ; 6]$).

Cela signifie que f est croissante sur $[0 ; 6]$.

3. a.



$f(x) = 3$ pour $x = 4{,}25$.

b. Si $AM = 3$, comme AMB est un triangle rectangle en M, $MB^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, soit $MB = 3\sqrt{3}$.

88 **a.** $\mathcal{A}$: $9 \times 9 = 81$; $6 \times 13{,}5 = 81$; $3 \times 27 = 81$.

$\mathcal{P}$: $4 \times 9 = 36$; $2(6 + 13{,}5) = 39$; $2(3 + 27) = 60$.

b. Si un côté de ce rectangle est x, l'autre est $\dfrac{81}{x}$.

Ainsi $\mathcal{P} = 2(x + \dfrac{81}{x}) = 2\left(\dfrac{x^2 + 81}{x}\right) = \dfrac{2}{x}(x^2 + 81)$.

$x \in]0 ; 8]$, $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}(x^2 + 81)$. D'après le graphique de f obtenu sur la calculatrice, $x \approx 8{,}8$.

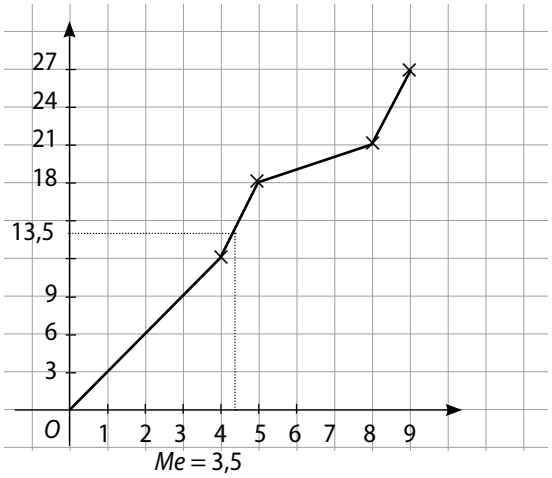
89 **a.** $x \in [0 ; 3]$: $\mathcal{A}(x) = 4 \times x = 4x$.

$x \in [3 ; 5]$: $\mathcal{A}(x) = 12 + 3 \times (x - 3) = 3x + 3$.

$x \in [5 ; 8]$: $\mathcal{A}(x) = 12 + 6 + 1 \times (x - 5) = x + 13$.

$x \in [8 ; 9]$: $\mathcal{A}(x) = 12 + 6 + 3 + 6 \times (x - 8) = 6x - 27$.

b.



c. On trace la droite d'équation $y = \dfrac{27}{2}$ soit $y = 13{,}5$ et l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe est 3,5, valeur de la médiane.

90 **1. a.** $0 \leqslant u \leqslant v \Rightarrow 0 \leqslant u^2 \leqslant v^2$ (fonction carré croissante sur $[0 ; +\infty[$) $\Rightarrow 0 \leqslant 2u^2 \leqslant 2v^2$.

b. $0 \leqslant u \leqslant v \Rightarrow 1 \leqslant u + 1 \leqslant v + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{u+1} \geqslant \dfrac{1}{v+1}$ (fonction inverse décroissante sur $[0 ; +\infty[$).

c. D'après **b.**, $-1 \leqslant -\dfrac{1}{u+1} \leqslant -\dfrac{1}{v+1}$ et $0 \leqslant u^2 \leqslant v^2$, donc $u^2 - \dfrac{1}{u+1} \leqslant v^2 - \dfrac{1}{v+1}$ soit $f(u) \leqslant f(v)$.

Ainsi, sur $[0 ; +\infty[$, si $u \leqslant v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$. Cela signifie que f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. Sur $]-\infty ; 0]$, $0 \geqslant a \geqslant b \Rightarrow 0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant 1 + a^2 \leqslant 1 + b^2 \Rightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{1 + a^2} \leqslant \sqrt{1 + b^2}$

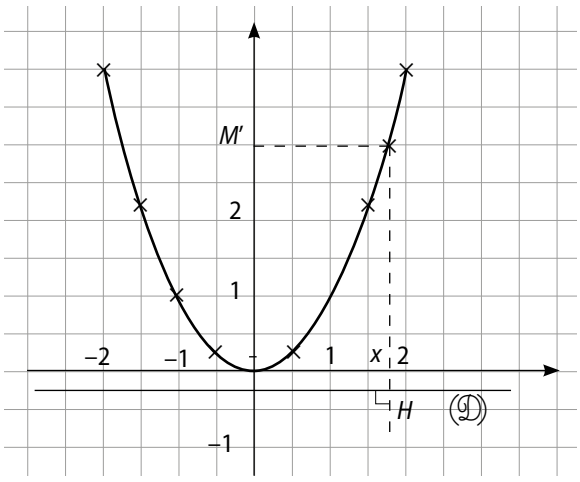
$\Leftrightarrow 1 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$.

Ainsi, sur $]-\infty ; 0]$, si $a \geqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$ et donc f est croissante et donc monotone.

De même, sur $[0 ; +\infty[$, $0 \leqslant a \leqslant b \Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 \leqslant b^2 \Rightarrow$ $1 \leqslant \sqrt{1 + a^2} \leqslant \sqrt{1 + b^2} \Leftrightarrow 1 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$.

Cette fois-ci, sur $[0 ; +\infty[$, f est décroissante et donc monotone.

91 **1.**



2. a. $HM^2 = \left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right)^2$.

b. $FM^2 = FM'^2 + M'M^2 = \left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right)^2 + x^2$.

c. $HM^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + x^2 = x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{16}$.

$FM^2 = (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + x^2 = x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{16}$.

Ainsi $HM^2 = FM^2$ et comme HM et FM sont des nombres réels strictement positifs, $HM = FM$.

92 **1.**

$x \in$	$\left[0 ; \frac{1}{5}\right[$	$\left[\frac{1}{5} ; \frac{2}{5}\right[$	$\left[\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right[$	$\left[\frac{3}{5} ; \frac{4}{5}\right[$	$\left[\frac{4}{5} ; 1\right[$
$E_1(x)$	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$
$E_2(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$	1

2. a. Sur $\left[\frac{a}{5} ; \frac{a+1}{5}\right[$, $\mathcal{P}_a = \frac{1}{5} \times f\left(\frac{a}{5}\right)$ et $\mathcal{T}_a = \frac{1}{5} \times f\left(\frac{a+1}{5}\right)$.

b. Sur $\left[\frac{a}{5} ; \frac{a+1}{5}\right[$, $\mathcal{P}_a \leqslant \mathcal{A} \leqslant \mathcal{T}_a$, c'est-à-dire :

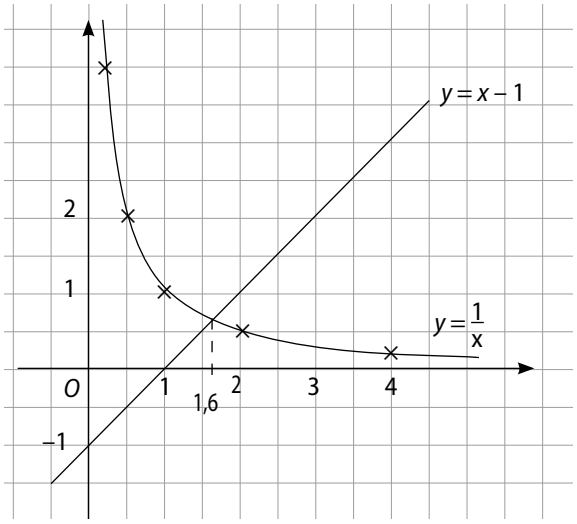
$\frac{1}{5} \times \frac{a^2}{5^2} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{1}{5} \times \frac{(a+1)^2}{5^2}$ soit $\frac{a^2}{125} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{(a+1)^2}{125}$.

93 **1.** *ABCD* est un rectangle d'or lorsque $\frac{AD}{AB} = \frac{FC}{EF}$.

$1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{AD}{AB} = 1 + \frac{FC}{EF} = \frac{EF - FC}{EF} = \frac{DF - FC}{EF}$

$= \frac{DC}{EF} = \frac{AB}{AD} = x$.

2. a.



L'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes est : 1,6.

b. c. Pour $x > 0$, $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

94 **1. a.** $1 \leqslant x \leqslant 4$ donc $1 \leqslant 3x - 2 \leqslant 10$

et $2 \leqslant x + 1 \leqslant 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Ainsi $\frac{2}{5} \leqslant \frac{3x-2}{x+1} \leqslant \frac{5}{2}$.

b. $1 \leqslant x \leqslant 4$ donc $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$

donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{3x-2}{x+1} \leqslant \frac{10}{5}$.

c. La qualité du **b.** est meilleure.

2. a. $-5 \leqslant x \leqslant -2$ donc $-17 \leqslant 3x - 2 \leqslant -8$

et $-4 \leqslant x + 1 \leqslant -1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant -\frac{1}{4}$.

Ainsi, comme $3x - 2$ et $\frac{1}{x+1}$ sont négatifs,

$2 \leqslant \frac{3x-2}{x+1} \leqslant 17$.

b. $-5 \leqslant x \leqslant -2$ donc $f(-5) \leqslant f(x) \leqslant f(-2)$

donc $\frac{-17}{-4} \leqslant f(x) \leqslant \frac{-8}{-3}$ soit $\frac{17}{4} \leqslant f(x) \leqslant \frac{8}{3}$.

Le second encadrement est meilleur.

95 **a.** $g(f(2)) = g(2^2) = g(4) = 4$.

Pour $x \in [-2 ; 2]$, $g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 - 4$.

b. $f(g(2)) = f(2 \times 2 - 4) = f(0) = 0$.

Pour $x \in [-2 ; 2]$, $f(g(x)) = f(2x - 4) = (2x - 4)^2$.

96 **1.** Pour tout nombre réel x,

$(x-2)^3 + 3 = (x-2)^2(x-2) + 3$

$= (x^2 - 4x + 4)(x - 2) + 3$

$= x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8 + 3$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = f(x)$.

2. a. $\overrightarrow{AM}(x - 2 ; y - 3)$.

b. Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$, $\overrightarrow{AM} = (x - 2)\vec{i} + (y - 3)\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, donc $M(X ; Y)$ dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.

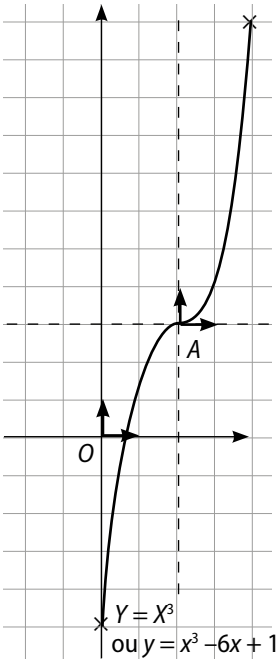
c. Si $M \in (\mathcal{C}_f)$ alors $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$; $y = (x-2)^3 + 3$

$\Leftrightarrow y - 3 = (x-2)^3 \Leftrightarrow Y = X^3$.

d. Si $M(X ; Y)$ est tel que $Y = X^3$, alors $y - 3 = (x-2)^3$

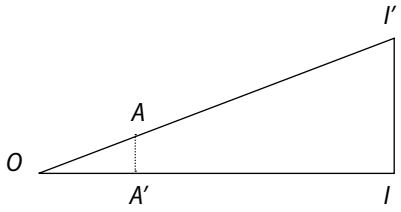
$\Leftrightarrow y = (x-2)^3 + 3$, alors $y = f(x)$, alors $M \in (\mathcal{C}_f)$.

3. a.



b. À partir de la courbe représentant la fonction cube et en la translatant par le vecteur $\overrightarrow{OA}(2 ; 3)$.

97 **a.**

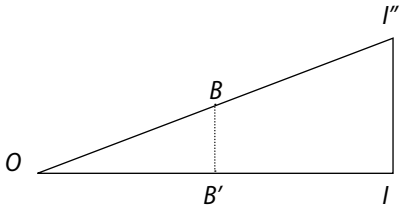


D'après le théorème de Thalès, comme (AA') // (II'),

$\frac{II'}{AA'} = \frac{OI}{OA'} = \frac{OI'}{OA}$ soit $\frac{\frac{1}{4}}{AA'} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{OI'}{OA}$.

Ainsi $AA' = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ soit $AA' = OA'^2$, donc $A \in (\mathcal{C})$.

b.



D'après le théorème Thalès, comme (BB') // (II''),

$\frac{II''}{BB'} = \frac{OI}{OB'}$ soit $\frac{\frac{1}{2}}{BB'} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$ donc $BB' = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Ainsi $BB' = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ soit $BB' = OB'^2$, donc $B \in (\mathcal{C})$.

On procède de même avec C et K.

98 **1.** Variations de f sur $\mathbb{R}$

Conjecture : f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, puis décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

2. a. Sur $[0\ ;+\infty[$, si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$ alors $4 \leqslant a^2 + 4 \leqslant b^2 + 4$ alors $2 \leqslant \sqrt{a^2+4} \leqslant \sqrt{b^2+4}$ alors $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{b^2+4}}$ alors $\frac{3}{2} \geqslant f(a) \geqslant f(b)$.

Cela signifie que f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

b. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{3}{\sqrt{(-x)^2+4}} = \frac{3}{\sqrt{x^2+4}} = f(x)$. Ainsi, comme f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$, alors f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

3. D'après les variations, $f(0)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et donc, pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant f(0)$.

Or $f(0) = \frac{3}{4}$ donc, pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant \frac{3}{4}$.

99 **1.** $f(x)$ est définie $\Leftrightarrow x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$.

Donc $I =]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

2. Pour tout nombre réel x de I :

$-2 + \frac{5}{x-1} = \frac{-2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = \frac{-2x+2+5}{x-1}$

$= \frac{-2x+7}{x-1} = f(x)$.

3. Sur $]-\infty\ ;\ 1[$, si $a \leqslant b < 1$ alors $a - 1 \leqslant b - 1 < 0$ alors $\frac{1}{a-1} \geqslant \frac{1}{b-1}$ (la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;0[$) alors $\frac{5}{a-1} \geqslant \frac{5}{b-1}$ alors $-2 + \frac{5}{a-1} \geqslant -2 + \frac{5}{b-1}$.

Cela signifie que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1[$.

De même sur $]1\ ;\ +\infty[$.

4. a. $(\mathcal{H})$ coupe $(\Delta) \Leftrightarrow -2 + \frac{5}{a-1} = -2 \Leftrightarrow \frac{5}{a-1} = 0$.

Comme $5 \neq 0$, ce quotient n'est jamais nul.

Ainsi $(\mathcal{H})$ et (Δ) ne se coupent jamais.

b. Pour $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $x > 1$ donc $x - 1 > 0$

donc $\frac{5}{x-1} > 0$ (quotient de deux nombres positifs non nuls) donc $-2 + \frac{5}{x-1} > -2$.

Ainsi, $(\mathcal{H})$ est située au-dessus de (Δ).

Pour $x \in]-\infty\ ;\ 1[$, $x < 1$ donc $x - 1 < 0$ donc $\frac{5}{x-1} < 0$ et donc $(\mathcal{H})$ est située en dessous de (Δ).

5. a. $MM' = \frac{5}{x-1} = d(x)$.

b. Sur $]1\ ;\ +\infty[$, si $1 < a \leqslant b$ alors $0 < a - 1 \leqslant b - 1$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors $\frac{1}{a-1} \geqslant \frac{1}{b-1}$ et $\frac{5}{a-1} \geqslant \frac{5}{b-1}$.

Cela signifie que d est décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.

c. L'écart, pour la même abscisse, d'un point $M \in (\mathcal{C})$ et d'un point $M' \in (\mathcal{H})$ se réduit plus x s'éloigne de 1.

d. Pour $x > 1$, $d(x) < 0{,}1$ $0 < \frac{5}{x-1} < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{5} > \frac{1}{0{,}1}$ $\Leftrightarrow x - 1 > 50 \Leftrightarrow x > 51$.

100 **a.** $B(40) = 9\,000 \Leftrightarrow 9\,000 = -40^2 + 160 \times 40 + c$

$\Leftrightarrow 9\,000 = 4\,800 + c \Leftrightarrow c = 4\,200$.

b. $B(x) = -x^2 + 160x + 4\,200$

$= -(x - 80)^2 + 6\,400 + 4\,200$

$= -(x - 80)^2 + 10\,600$.

c. Sur $[20\ ;\ 90]$, si $20 \leqslant a \leqslant b \leqslant 90$, donc

ou $\begin{matrix} -60 \leqslant a - 60 \leqslant b - 60 \leqslant 0 \\ 0 \leqslant a - 60 \leqslant b - 60 \leqslant 30 \end{matrix}$

c'est-à-dire ou $\begin{matrix} (a-60)^2 \geqslant (b-60)^2 \\ (a-60)^2 \leqslant (b-60)^2 \end{matrix}$

alors ou $\begin{matrix} -(a-60)^2 + 10\,600 \leqslant -(b-60)^2 + 10\,600 \\ -(a-60)^2 + 10\,600 \geqslant -(b-60)^2 + 10\,600. \end{matrix}$

Ainsi, sur $[20\ ;\ 60]$, B est croissante, puis décroissante sur $[60\ ;\ 90]$.

d. Dans ce cas, B admet un maximum en $x = 60$; il est de 10 600 F CFA.

101 Pour un nombre entier naturel non nul n :
• B_n a pour abscisse la solution positive de l'équation $x^2 = \frac{n}{x}$, c'est-à-dire $x^3 = n$ que l'on note s.
• L'aire $\mathcal{A}_n$ du triangle OA_MB_N est : $\frac{s \times s^2}{2} = \frac{s^3}{2}$.
D'après la 1re remarque, $s^3 = n$ donc $\mathcal{A}_n = \frac{n}{2}$.

102 **1.** Dans un repère orthonormé :
$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$. Ici, $AM^2 = (x - 6)^2 + (y - 2)^2$.
De plus, $M \in (\mathcal{D})$ donc $y = 3x + 2$ et ainsi :
$AM^2 = (x - 6)^2 + (3x + 2 - 2)^2 = (x - 6)^2 + (3x)^2$
$= x^2 - 12x + 36 + 9x^2$
$= 10x^2 - 12x + 36$.

2. Pour tout nombre réel x,
$(x - 0{,}6)^2 + 3{,}24 = x^2 - 1{,}2x + 0{,}36 + 3{,}24$
$= x^2 - 1{,}2x + 3{,}6$.

3. Pour tout nombre réel x,
$f(x) = 10(x^2 - 1{,}2x + 3{,}6) = 10[(x - 0{,}6)^2 + 3{,}24]$.
Sur $\mathbb{R}$, si $a < b$, alors $a - 0{,}6 < b - 0{,}6$.
Pour utiliser les variations de la fonction carré, il faut savoir si ces nombres réels sont positifs ou négatifs.
Ainsi, sur $]-\infty ; 0{,}6]$, $a - 0{,}6 < b - 0{,}6 \leqslant 0$,
alors $(a - 0{,}6)^2 > (b - 0{,}6)^2 \geqslant 0$
et $10[(a - 0{,}6)^2 + 3{,}24] > 10[(b - 0{,}6)^2 + 3{,}24 \geqslant 32{,}4$.
Cela signifie que f est décroissante sur $]-\infty ; 0{,}6]$. De même, on montre que f est croissante sur $[0{,}6 ; +\infty[$.

4. f admet donc un minimum quand $x = 0{,}6$ et il est de 32,4. Ainsi, pour $x = 0{,}6$, AM^2 est minimum, donc AM est minimum.
5. a. Pour le point $M(0{,}6 ; \sqrt{f(0{,}6)})$ soit $M(0{,}6 ; \sqrt{32{,}4})$.
b. $AM = \sqrt{32{,}4}$.

103 **1. a.** Le graphique $(\mathcal{C}_1)$ puisque pour l'autre, un antécédent a deux images. Ceci est impossible pour une fonction numérique (de Seconde).
b. $D_f = [-3 ; 3]$.

2. $M(x ; y) \in (\mathcal{C}_1) \Leftrightarrow x \in [-3 ; 3]$, $y > 0$ et $OM = 3$.
Or $OM = 3 \Leftrightarrow OM^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$.
Ainsi, $M(x ; y) \in (\mathcal{C}_1) \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$, $y \geqslant 0$ et $x^2 + y^2 = 9$.

3. Une équation de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ est $y = \sqrt{9 - x^2}$ pour $x \in [-3 ; 3]$. Ainsi, $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ pour $x \in [-3 ; 3]$.

4. Sur $[-3 ; 0]$, si $-3 \leqslant a \leqslant b \leqslant 0$ alors $9 \geqslant a^2 \geqslant b^2 \geqslant 0$ alors $-9 \leqslant -a^2 \leqslant -b^2 \leqslant 0$ alors $0 \leqslant 9 - a^2 \leqslant 9 - b^2 \leqslant 9$ et $\sqrt{9 - a^2} \leqslant \sqrt{9 - x^2}$. Cela signifie que f est croissante sur $[-3 ; 0]$.
Sur $[0 ; 3]$, de même :
si $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 3$ alors $\sqrt{9 - a^2} \geqslant \sqrt{9 - x^2}$. Cela signifie que f est décroissante sur $[0 ; 3]$.

5. Sur $[-3 ; 3]$, $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2} = f(x)$. L'axe (OJ) est un axe de symétrie puisque $M(-x ; f(x)) \in (\mathcal{C}_1)$ et $M'(x ; f(x)) \in (\mathcal{C}_1)$ et ces deux points sont symétriques par rapport à (OJ).

6. Pour tout $x \in [-3 ; 3]$, $g(x) = -f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.

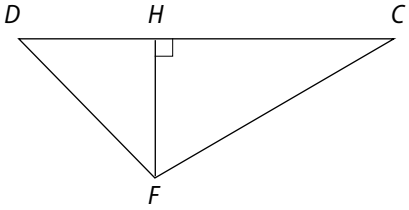
12 Polynômes et fractions rationnelles

Activités d'introduction

1 Un problème d'aires

1. On conjecture que le point E est le milieu du segment $[AB]$.

2. a. $AEFG$ est un carré de côté de longueur x. Ainsi l'aire de $\mathcal{T}_A$ est égale à x^2.



DCF est un triangle.

$HF = 12 - x$

(HF) est la hauteur du triangle DFC issue du sommet F.

Aire de $\mathcal{T}_N = \dfrac{DC \times HF}{2} = \dfrac{12(12-x)}{2} = 6(12-x)$.

L'aire de $\mathcal{T}_N$ est égale à $72 - 6x$.

b. On cherche $x \in [0\,;\,12]$ tel que $72 - 6x = x^2$, donc $x^2 + 6x - 72 = 0$.

c. $(x-6)(x+12) = x^2 + 12x - 6x - 72 = x^2 + 6x - 72$ donc $x^2 + 6x - 72 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+12) = 0$.

d. On résout : $(x^2 + 6x - 72 = 0$ et $x \in [0\,;\,12])$

$\Leftrightarrow ((x-6)(x+12) = 0$ et $x \in [0\,;\,12]) \Leftrightarrow ((x = 6$ ou $x = -12)$ et $x \in [0\,;\,12]) \Leftrightarrow x = 6$.

Il faut donc placer le point E sur le segment $[AB]$ de sorte que $AE = 6$ dam, c'est-à-dire au milieu du segment $[AB]$.

2 Forme canonique

1. a. $P(x) = 5\left[x^2 - \dfrac{2x}{5} - \dfrac{3}{5}\right] = 5\left[\left(x - \dfrac{1}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{3}{5}\right] = 5\left[\left(x - \dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{16}{25}\right]$.

b. • $P(x) = 5\left[\left(x - \dfrac{1}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2\right] = 5\left[\left(x - \dfrac{1}{5}\right) - \left(\dfrac{4}{5}\right)\right)\left(\left(x - \dfrac{1}{5}\right) - \left(\dfrac{4}{5}\right)\right)\right] = 5\left[(x-1)\left(x + \dfrac{3}{5}\right)\right]$.

• $P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + \dfrac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\dfrac{3}{5}$.

2. a. $Q(x) = 2\left[x^2 + 2x + \dfrac{3}{2}\right] = 2\left[(x+1)^2 - 1 + \dfrac{3}{2}\right] = 2\left[(x+1)^2 + \dfrac{1}{2}\right]$.

b. • Pour tout nombre réel x, $(x+1)^2 + \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{2} > 0$ donc $Q(x)$ ne peut être factorisé.

Q ne possède aucune racine. En effet : pour tout x de $\mathbb{R}$, $(x+1)^2 + \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{2} > 0$.

3 Signe de polynômes – Quotient de polynômes

1. a. $(x-1)(3x-1)(x+2) = (3x^2 - 4x + 1)(x+2) = 3x^3 + 6x^2 - 4x^2 - 8x + x + 2 = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

b. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \dfrac{1}{3}$ ou $x = -2$.

Les racines de P sont 1, $\dfrac{1}{3}$ et -2.

c.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a. $F(x)$ est défini si et seulement si $P(x) \neq 0$ si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 ; \frac{1}{3} ; 1\}$. Ainsi $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; \frac{1}{3} ; 1\}$.

b. $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$F(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Savoir-faire

3 **a.** $P(1) = 7 \times 1^2 - 5 \times 1 - 2 = 7 - 7 = 0$
donc 1 est une racine de P.
La seconde racine β de P est telle que :
$1 + \beta = -\frac{-5}{7} = \frac{5}{7}$ donc $\beta = \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}$.

b. $P(5) = 5^2 - 4 \times 5 = 0$ donc 5 est une racine de P.
La seconde racine β de P est telle que $5 \times \beta = \frac{-5}{1} = -5$ donc $\beta = -1$.

c. $P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$ donc 3 est une racine de P.
La seconde racine β de P est telle que $3 \times \beta = \frac{-6}{1} = -6$ donc $\beta = -2$.

d. $P(-1) = 2 \times (-1)^2 - 12 \times (-1) - 14 = 0$ donc -1 est une racine de P.
La seconde racine β de P est telle que :
$-1 \times \beta = -\frac{14}{2} = -7$ donc $\beta = 7$.

4 $P(x) = (x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ et $Q(x) = 3(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

5 **a.** $P_1(x) = x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10$
$= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{40}{4}$
$= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ (forme canonique).
Donc $P_1(x) = \left[\left(x - \frac{7}{2}\right) - \frac{3}{2}\right]\left[\left(x - \frac{7}{2}\right) + \frac{3}{2}\right]$
$= \left(x - \frac{10}{2}\right)\left(x - \frac{4}{2}\right)$
$= (x-5)(x-2)$ (forme factorisée).

b. $P_2(x) = 5x - 4x = 5\left(x^2 - \frac{4}{5}x\right) = 5\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right]$
$= 5\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right]$ (forme canonique).
$P_2(x) = x(5x-4)$ (forme factorisée).

c. $P_3(x) = 3x^2 + x + 1 = 3\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)$
$= 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\right]$
$= 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right]$ (forme canonique).
P_3 n'a pas de forme factorisée.

d. $P_4(x) = -2x^2 + x + 4 = -2\left(x^2 - \frac{x}{2} - 2\right)$
$= -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\right]$
$= -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}\right]$ (forme canonique)
donc $P_4(x) = -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2\right]$
$= -2\left[\left(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}\right)\right]$
$= -2\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{4}\right)$
(forme factorisée).

8 **a.** 5 est une racine de P_1 et $\deg(P_1) = 1$.
b. 1 est une racine de P_2 et $\deg(P_2) = 2$.
c. 2 est une racine de P_3 et $\deg(P_3) = 4$.
d. 2 est une racine de P_4 et $\deg(P_4) = 3$.

9 **a.** $(x^2-1)(2x-1) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = P(x)$
b. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ ou $2x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$.
Les racines de P sont 1 ; -1 et $\frac{1}{2}$.

10 **a.** $P(-1) = 5 \times (-1)^2 + (-1) - 4 = 5 - 1 - 4 = 0$ donc -1 est une racine de P.

b. $(x+1)(ax+b) = ax^2 + (b+a)x + b$. Donc par identification :

$$\begin{cases} a = 5 \\ b + a = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

Ainsi $P(x) = (x+1)(5x-4)$.

11 $(x+2)(x^2+ax+b) = x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b$
$= x^3 + (a+2)x^2 + (b+2a)x + 2b.$

Donc, par identification :

$$\begin{cases} a+2 = -1 \\ b+2a = -1 \\ 2b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $P(x) = (x+2)(x^2-3x+5)$.

14 a.

$2x^5 + x^4 + 1$	$x^3 + 1$
$-[2x^5 + 2x^2]$	$2x^2 + x$
$x^4 - 2x^2 + 1$	
$-[x^4 + x]$	
$-2x^2 - x + 1$	

Donc $2x^5 + x^4 + 1 = (x^3+1)(2x^2+x) - 2x^2 - x + 1$
$(\deg(-2x^2 - x + 1) < \deg(x^3+1))$.

b.

$2x^2 + 3x + 9$	$x + 3$
$-[2x^2 + 6x]$	$2x - 3$
$-3x + 9$	
$-[-3x - 9]$	
18	

Donc $2x^2 + 3x + 9 = (x+3)(2x-3) + 18$.

15 a. $F(x) = \dfrac{x}{5-x}$.

L'ensemble de définition F est $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

b. $F(x) = 3x(2x-5)$.

L'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. $F(x) = \dfrac{x+1}{x(3-x)}$.

L'ensemble de définition F est $\mathbb{R} \setminus \{0\,;\,3\}$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Exercices d'entraînement

16 **1.** Un polynôme P du second degré est de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c désignent trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

2. b. ; **c.** ; **d.** ; **e.** ; **f.**

17 **a.** $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x-4)(3x+4)$.

b. $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times 5x + 5^2 = (x+5)^2$.

c. $(5+x)^2 - 1 = (5+x-1)(5+x+1) = (4+x)(6+x)$.

d. $(x-1)^2 - 2x(x-1) = (x-1)[(x-1) - 2x)]$
$= (x-1)(-x-1)$.

e. $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times 2x + 1 = (2x+1)^2$.

f. $36 - 24x + 4x^2 = 6^2 - 2 \times 6 \times 2x + (2x)^2 = (6-2x)^2$.

18 **a.** 1 car $1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0$.

b. $\dfrac{1}{2}$ car $4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$.

c. -1 car $3 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 1 = 0$.

19 **a.** Canonique. **b.** Factorisée. **c.** Développée.

20 **a.** $x^2 + 5x + 2 = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} + 2 = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{17}{4}$.

b. $3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}\right) = 3\left[\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3}\right]$
$= 3\left[\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{9}\right]$.

c. $5x^2 + 16x + 3 = 5\left(x^2 + \dfrac{16}{5}x + \dfrac{3}{5}\right)$
$= 5\left[\left(x + \dfrac{8}{5}\right)^2 - \dfrac{64}{25} + \dfrac{3}{5}\right]$
$= 5\left[\left(x + \dfrac{8}{5}\right)^2 - \dfrac{49}{25}\right]$.

d. $-4x^2 + 7x - 3 = -4\left(x^2 - \dfrac{7}{4}x + \dfrac{3}{4}\right)$
$= -4\left[\left(x + \dfrac{7}{8}\right)^2 - \dfrac{49}{64} + \dfrac{3}{4}\right]$
$= -4\left[\left(x + \dfrac{7}{8}\right)^2 - \dfrac{1}{64}\right]$.

21 **a.** $-x^2 + x + 2 = (x + 1)(-x + 2)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $4x^2 - 3x - 1 = 4(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{1}{4}$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x^2-3x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. $7x^2 - 5x = x(7x - 5)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{7}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$7x-5$		$-$		$+$	0	$+$	
$7x^2-5x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

22 **1.** $P(x) = 16 - (1 - 2x + x^2) = -x^2 + 2x + 15$ (forme développée).

• $P(x) = 4^2 - (1 - x)^2 = [4 - (1 - x)][4 + (1 - x)]$
$= (3 + x)(5 - x)$.

2. a. • $P(x) = 16 \Leftrightarrow 16 - (1 - x)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

b. $P(x) = 15 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 15 = 15$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(-x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

c. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (3 + x)(5 - x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 5$.

23 **a.** $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$.

b. $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

c. $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}x)^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d. $-x^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -11$.

Donc pas de solution.

24 **a.** Comme x_1 et x_2 sont racines de P :

$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \ (L_1) \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \ (L_2) \end{cases}$

• En soustrayant (L_1) et (L_2), on a :
$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow [a(x_1 + x_2) + b](x_1 - x_2) = 0$.
Comme $x_1 \neq x_2$ et $a \neq 0$, $a(x_1 + x_2) = -b$
donc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

• En multipliant (L_1) par x_2 et (L_2) par x_1, puis en les additionnant, on a :
$ax_1x_2(x_1 + x_2) + 2bx_1x_2 + c(x_1 + x_2) = 0$
donc $x_1x_2(-b + 2b) + c \times -\frac{b}{a} = 0$
(en utilisant $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$).
On en déduit alors que $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

b. On cherche x_1 et x_2 tels que $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}$.

Donc P a pour racines 6 et -2.

On cherche x_1 et x_2 tels que $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc Q a pour racines 3 et $-\frac{1}{2}$.

25 **a.** $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$.

b. $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

c. $(x + 1)(x - \frac{1}{2}) = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.

d. $x(x - \sqrt{3}) = x^2 - \sqrt{3}x$. **e.** $x^2 + 1$. **f.** $x^2 - 7$.

26 **a.** Il semble que les racines de P soient -4 et 3.

b. $P(x) = a(x + 4)(x - 3)$ où a est un nombre réel.

Or $P(0) = -6$ donc $-6 = a \times 4 \times (-3)$ donc $a = \frac{1}{2}$.

Ainsi $P(x) = \frac{1}{2}(x + 4)(x - 3)$.

27 **a.** Il semble que les racines de P soient 7 et $-\frac{3}{5}$.

Il semble que les racines de Q soient 1 et $-\frac{5}{4}$.

b. $P(x) = (x - 7)(5x + 3)$.

$Q(x) = (x - 1)(4x + 5)$.

28 **1. a.** $C_M(x) = 0{,}02x^2 - 2x + 500$
$= 0{,}02[x^2 - 100x + 25\,000]$
$= 0{,}02[(x - 50)^2 - 2\,500 + 25\,000]$
$= 0{,}02[(x - 50)^2 + 22\,500]$

b. Comme $(x^2 - 50) + 22\,500 \geqslant 22\,500$, pour tout $x \geqslant 0$, le coût moyen annuel est minimum lorsque $x = 50$ et vaut alors 22 500 F CFA.

2. a. $B(x) = 650x - C(x)$ donc $B(x) = 150x - 0{,}02x^3 + 2x^2$.

b. $B_M(x) = \dfrac{B(x)}{x} = 150 - 0{,}02x^2 + 2x$
$= 150 - 0{,}02[x^2 - 100x]$
$= 150 - 0{,}02[(x - 50)^2 - 2500]$
$= 200 - 0{,}02x(x - 50)^2$.

29 **1. a.** $a_n \neq 0$. **2. b.** $P(\alpha) = 0$ et **c.** α a pour image 0 par P. **3. b.** deg P + deg Q.

30 **a.** Polynôme de degré 2.
b. Polynôme de degré 7.
d. Polynôme de degré 1.
f. Polynôme de degré 1.
g. Polynôme de degré 9.
i. Polynôme de degré 2.

31 **a.** Degré 5 et terme de degré 2 de coefficient 1.
b. Degré 11 et terme de degré 2 de coefficient 0.
c. Degré 3 et terme de degré 2 de coefficient 3.
d. Degré 4 et terme de degré 2 de coefficient 2.
e. Degré 3 et terme de degré 2 de coefficient –3.
f. Degré 4 et terme de degré 2 de coefficient $\sqrt{3}$.

32 **a.**

$5x^2 - 3x + 11$	$x - 1$
$-[5x^2 - 5x]$	$5x + 2$
$2x + 11$	
$-(2x - 2)$	
13	

Donc $5x^2 - 3x + 11 = (x - 1)(5x + 2) + 13$.

b.

$-7x^2 + x$	$3x - 1$
$-[7x^2 + \frac{7}{3}x]$	$-\frac{7}{3}x - \frac{4}{9}$
$-\frac{4}{3}x$	
$-[\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}]$	
$-\frac{4}{9}$	

Donc $-7x^2 + x = (3x - 1)(-7/3x - 4/9) - 4/9$

33 **a.** $(x - 5)^2 + (3x - 1)^2$
$= (x^2 - 10x + 25) + (9x^2 - 6x + 1)$
$= 10x^2 - 16x + 26$.

b. $\dfrac{9x - 18}{-3} = \dfrac{9x}{-3} - \dfrac{18}{-3} = -3x + 6$.

c. $(2x + 1)^3 = (2x + 1)^2(2x + 1)$
$= (4x^2 + 4x + 1)(2x + 1)$
$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1$
$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.

d. $(7 - x)(x + 1) + 3x^2 = 7x + 7 - x^2 - x + 3x^2$
$= 2x^2 + 6x + 7$.

e. $(5x - 1)^2 - x(x + 1)^2 = 25x^2 - 10x + 1 - x(x^2 + 2x + 1)$
$= 25x^2 - 10x + 1 - x^3 - 2x^2 - x$
$= -x^3 + 23x^2 - 11x + 1$.

f. $(x - 1)^4 = (x - 1)^2 \times (x - 1)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$
$= x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1$
$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

34 **a.**

$x^6 - 3x + 4$	$x + 2$
$-[x^6 + 2x^5]$	$x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 35$
$-2x^5 - 3x + 4$	
$-[-2x^5 - 4x^4]$	
$4x^4 - 3x + 4$	
$-[4x^4 + 8x^3]$	
$-8x^3 - 3x + 4$	
$-[-8x^3 - 16x^2]$	
$16x^2 - 3x + 4$	
$-[16x^2 + 32x]$	
$-35x + 4$	
$-[-35x - 70]$	
74	

$x^6 - 3x + 4 = (x + 2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 35 + 74$.

b.

$2x^3 - x^2 + 5x + 1$	$x^2 + 1$
$-[2x^3 + 2x]$	$2x - 1$
$-x^2 + 3x + 1$	
$-[-x^2 - 1]$	
$3x + 2$	

Donc $2x^3 - x^2 + 5x + 1 = (x^2 + 1)(2x - 1) + 3x + 2$.

c.

$x^4 + 3$	$x - 1$
$-[x^4 - x^3]$	$x^3 + x^2 + x + 1$
$x^3 + 3$	
$-[x^3 - x^2]$	
$x^2 + 3$	
$-[x^2 - x]$	
$x + 3$	
$-(x - 1)$	
4	

Donc $x^4 + 3 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) + 4$

d.

$x^5 + x^3 + 1$	$x^3 + x + 1$
$-[x^5 + x^3 + x^2]$	x^2
$-x^2 + 1$	

Donc $x^5 + x^3 + 1 = x^2(x^3 + x + 1) - x^2 + 1$.

35 **a.** 1 est une racine évidente donc il existe a et b deux nombres réels tels que :
$x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$.

On développe :
$x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b = x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b$.

On identifie et on trouve : $\begin{cases} a-1=-1 \\ b-a=2 \\ -b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases}$.

Donc $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2+2)$.

b. 1 est racine évidente
et $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

c. -1 est racine évidente $3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(ax+b)$ avec a et b deux nombres réels. On développe et on identifie. On trouve $a = 3$ et $b = -1$.

Donc $3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$.

d. 1 est racine évidente et $x^4 - 3x^2 + 2 = (x-1)P(x)$.

$x^4 - 3x^2 + 2$	$x - 1$
$-[x^4 - x^3]$	$x^3 + x^2 - 2x - 2$
$x^3 - 3x^2 + 2$	
$-[x^3 - x^2]$	
$-2x^2 + 2$	
$-[-2x^2 + 2x]$	
$-2x + 2$	
$-[-2x + 2]$	
0	

Donc $x^4 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - 2x - 2)$.

36 **a.** $P(2) = 2^3 + 6 \times 2^2 - 2 - 30 = 8 + 24 - 2 - 30 = 0$.

b. $(x-2)(x^2 + ax + b) = P(x)$
$\Leftrightarrow x^3 + (a-2)x^2 + (b-2a) - 2b = P(x)$.

Par identification : $\begin{cases} a-2=6 \\ b-2a=-1 \\ -2b=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=15 \end{cases}$.

Donc $Q(x) = x^2 + 8x + 15$.

c. $(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15 = Q(x)$

d. On a alors : $P(x) = (x-2)(x+3)(x+5)$ et les racines de P sont 2 ; -3 et -5.

37 **a.** $P(-1) = 0$ donc $P(x) = (x+1)(x+b)$ convient avec b un nombre réel.

Or $P(3) = 1$ donc $1 = 4 \times (1+b)$ donc $b = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.

D'où $P(x) = (x+1)(x - \frac{3}{4})$ convient.

b. $P(0) = 0$ donc $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$ convient avec a et b deux nombres réels.

Or $P(1) = 1$ et $P(-1) = 2$. Donc :

$\begin{cases} 1+a+b=1 \\ -1+a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ a=b+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}$

Ainsi, $P(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2}$ convient.

c. Comme $P(0) = P(1) = P(2) = 0$,
$P(x) = x(x-1)(x-2)(x+a)$ où a est un nombre réel convient. De plus $P(3) = 1$ donc $a = -\frac{17}{6}$
car $3 \times 2 \times 1 \times (3+a) = 1$.

38 On cherche a et b deux nombres réels tels que :
$q_1(x) = x^2 + ax + b$ avec $q_1(0) = \frac{1}{2}$ et $q_1(1) = \frac{1}{4}$.
On obtient le système :

$$\begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ 1+a+b=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

donc $q_1(x) = x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$ convient.

• On cherche a, b, c trois nombres réels tels que :
$q_2(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ avec $q_2(0) = 1$; $q_2(1) = 3/2$; $q_2(2) = 4$.
On obtient le système :

$$\begin{cases} c=1 \\ 1+a+b+c=\frac{3}{2} \\ 8+4a+2b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b=-\frac{1}{2} \\ 4a+2b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=-2 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$$

donc $q_2(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ convient.

39 **a.**

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$	

b.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$5-4x$		$+$	0	$-$	

c.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3(x-1)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d. $(x-1)^2$ est positif pour tout nombre réel x.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2(x-2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

e. $(x-1)^3$ est du signe de $(x-1)$ pour tout nombre réel x.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$(x-1)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$(x-1)^3(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f.

x	$-\infty$		0		4		7		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(x-4)(7-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

40 **a.** $x^3+4x^2=x^2(x+4)$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3+4x^2		$-$	0	$+$	0	$+$	

b. $P(x)=(x-3)^2+(x-3)(5-2x)$
$=(x-3)[(x-3)+(5-2x)]$
$=(x-3)(-x+2)$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. $P(x)=3x(x-5)-(x-5)$
$=(x-5)(3x-1)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d. $P(x)=2(x+1)^3-4x(x+1)^2$
$=2(x+1)^2[(x+1)-2x]$
$=2(x+1)^2(-x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$2(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

41 **a.** $P(-1)=(-1)^3+2\times(-1)^2-5\times(-1)-6$
$=-1+2+5-6=0$.

b. On développe :
$(x+1)(x^2+ax+b)=x^3+(a+1)x^2+(b+a)x+b$.

On identifie : $\begin{cases} a+1=2 \\ b+a=-5 \\ b=-6 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$

et $P(x)=(x+1)(x^2+x-6)$.

c. $Q(x)=x^2+x-6$.

Comme $Q(2)=0$ et $Q(-3)=0$, $Q(x)=(x-2)(x+3)$.

d. $P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$.

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

42 $P(-1)=0$ donc il existe deux nombres réels a et b tels que $P(x)=(x+1)(2x^2+ax+b)$.

On développe et on identifie :

$2x^3+(2+a)x^2+(a+b)x+b=P(x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+a=3 \\ a+b=0 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

donc $P(x)=(x+1)(2x^2+x-1)$.

On pose $Q(x)=2x^2+x-1$.

Comme $Q(-1)=0$, il existe un réel c tel que :

$Q(x)=(x+1)(2x+c)$ et on trouve $c=-1$.

Donc $Q(x)=(x+1)(2x-1)$.

Ainsi, $P(x)=(x+1)^2(2x-1)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

43 **a.** On pose $Q(X)=X^2-1$ et on a $P(x)=Q(x^2)$.

b. $Q(X)=(X-1)(X+1)$.

c. $P(x)=Q(x^2)=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

44 **1. a.** $Q(4)=4^2-3\times4-4=16-12-4=0$
et $Q(-1)=(-1)^2-3\times(-1)-4=1+3-4=0$
donc 4 et -1 sont les racines de Q.

b. On a alors $Q(x)=(x+1)(x-4)$.

2. $P(x)=Q(x^2)=(x^2+1)(x^2-4)=(x^2+1)(x-2)(x+2)$.

3. $P(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$ car x^2+1 est strictement positif pour tout nombre réel x.

45 **a.** $\begin{cases} P(2)=0 \\ P(-1)=0 \end{cases}$ donc $P(x)=(x-2)(x+1)$.

b. $x-\sqrt{x}-2=0$ et $x\geqslant 0 \Leftrightarrow X^2-X-2=0$ avec $X=\sqrt{x}$
et $x\geqslant 0 \Leftrightarrow X=2$ ou $X=-1$ avec $X=\sqrt{x}$ et $x\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x}=2$ et $x\geqslant 0 \Leftrightarrow x=4$.

L'équation $x-\sqrt{x}-2=0$ a une unique solution : $x=4$.

46 Aire triangle $=\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{2}$ $\left(\dfrac{\text{hauteur}\times\text{base}}{2}\right)$.

Aire trapèze $= \dfrac{(2+2x)(3x-4)}{2}$

$\left(\dfrac{\text{p}^{\text{te}}\text{ base} + \text{g}^{\text{de}}\text{ base}}{2} \times \text{hauteur}\right)$

On cherche $x \geqslant 2$ tel que $\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{2} = (1+x)(3x-4)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 2(x+1)(3x-4)$

$\Leftrightarrow (x+1)[x^2+1-2(3x-4)] = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-6x+9) = 0$

Comme $x+1 \neq 0$ ($x \geqslant 2$) on en déduit que :

$x^2-6x+9 = x^2-2\times 3x+3^2 = (x-3)^2$.

Ainsi, pour $x=3$, les deux aires sont égales, et c'est la seule valeur de x !

47 Aire croix $= 3\times(x+1) + x\times(6-(x+1))$

$= 3\times(x+1) + x(-x+5) = -x^2+8x+3$.

On cherche $x \in [0\,;3]$ tel que $-x^2+8x+3 = \dfrac{6\times 3}{2} = 9$

donc $-x^2+8x-6=0 \Leftrightarrow x^2-8x+6=0$.

De plus, $x^2-8x+6 = (x-4)^2-4^2+6 = (x-4)^2-10$

$= (x-4-\sqrt{10})(x-4+\sqrt{10})$.

Comme $4+\sqrt{10} > 3$ et $0 < 4-\sqrt{10} < 3$, il existe une seule valeur $x = 4-\sqrt{10}$.

48 **a.** On observe que $P(-2) = P(2) = 0$. Donc -2 et 2 sont deux racines de P.

b. On peut donc écrire : $P(x) = (x-2)(x+2)Q(x)$

$= (x^2-4)Q(x)$

où $Q(x) = ax+b$ (avec $a \neq 0$).

Or $(x^2-4)(ax+b) = ax^3+bx^2-4ax-4b$ donc, par identification : $\begin{cases} a=4 \\ b=5 \\ -4a=-16 \\ -4b=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$

Ainsi, $P(x) = (x-2)(x+2)(4x+5)$.

49 **a.** $\deg(H_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. Pour $k \neq 0$, $H_0(0) = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, tel que $k \neq 0$:

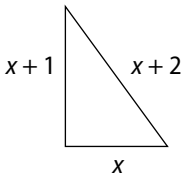
$H_k(k) = \dfrac{1}{k\times(k-1)\times\ldots\times 2\times 1} \times (k-0)(k-1)$

$\times\ldots\times 1 = 1$.

Ainsi, $H_k(k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c. Les racines de H_k sont les nombres entiers naturels compris entre 0 et $k-1$.

50 **a.** Le triangle est rectangle si et seulement si l'égalité de Pythagore est vérifiée.



$(x+2)^2 = x^2+(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4 = x^2+x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow 0 = x^2-2x-3$.

On remarque que -1 est une racine du polynôme x^2-2x-3.

Puis que $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$.

Ainsi : $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$.

On cherche une longueur, donc $x \geqslant 0$, donc il n'existe qu'une seule valeur pour laquelle le triangle est rectangle : $x=3$.

b. D'après la question, le triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 est rectangle et 3, 4, 5 sont trois nombres entiers naturels consécutifs. Et c'est l'unique possibilité.

51 **a.** $P(x) = (x^2-1)^2+(2x)^2 = x^4-2x^2+1+4x^2$

$= x^4+2x^2+1$.

b. $P(x) = x^4+2x^2+1 = (x^2)^2+2x^2+1 = (x^2+1)^2$.

c. Les questions **a.** et **b.** montrent que pour tout nombre réel x, $(x^2+1)^2 = (x^2-1)^2+(2x)^2$.

Pour $x=10$, on a :

$101^2 = (10^2+1)^2 = (10^2-1)^2+(2\times 10)^2 = 99^2+20^2$.

Donc en posant $p=99$ et $q=20$, on a $= 101^2 = p^2+q^2$.

52 **a. b.** Il semble que $x^4-(x^2+1)(x^2-1) = 1$ pour tout nombre réel x.

c. $x^4-(x^2+1)(x^2-1) = x^4-[(x^2)^2-1^2] = x^4-(x^4-1)$

$= x^4-x^4+1 = 1$.

53 **a.**

x^3-x^2+2x	x
$-[x^3]$	x^2-x+2
$-x^2+2x$	
$-[-x^2]$	
$2x$	
$-[2x]$	
0	

donc $P(x) = x\times(x^2-x+2)$.

b. $Q(x) = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2$

$= \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{4}$

$= \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

c. $Q(x) = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4} > 0$ pour tout nombre réel x donc $P(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

P a une unique racine (0).

54 **1. a.** –3 et 5; **b.** 1 et –2.

2. a. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; **b.** $x-\dfrac{x}{x+1}$.

55 **a.** $\mathbb{R}\setminus\{7\,;-4\}$; **b.** $\mathbb{R}$; **c.** $\mathbb{R}\setminus\{0\,;3\,;-3\}$.

56 **a.** 11 ; **b.** 0 et 1 ; **c.** 4 et –4.

57 **a.** $F(x)=\dfrac{x(x-3)}{(x-7)(x+3)}$.

b. $G(x)=\dfrac{(x^2-4)(x-1)}{x^2+1}$.

58 Les zéros de F sont 7, 2 et –3 et les pôles de F sont 3 et –1.

59 **a.** $\mathcal{D}_F=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

b. $a+\dfrac{b}{x+1}=F(x)$ et $x\in\mathcal{D}_F$

$\Leftrightarrow \dfrac{ax+a+b}{x+1}=\dfrac{3x+2}{x+1}$ et $x\in\mathcal{D}_F$

$\Leftrightarrow ax+a+b=3x+2$ et $x\in\mathcal{D}_F$.

On a, par identification :

$\begin{cases} a=3 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$

Ainsi : $F(x)=3-\dfrac{1}{x+1}$.

60 **a.**

x^2+x-3	$x-1$
$-[x^2-x]$	$x+2$
$2x-3$	
$-[2x-2]$	
-1	

Donc $x^2+x-3=(x-1)(x+2)-1$

b. On a donc pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$F(x)=x+2-\dfrac{1}{x-1}$ ($a=1$, $b=2$ et $c=-1$).

61 **1.** $F(x)$ est défini si et seulement si $x^4-81\neq 0$.

Or $x^4-81=(x^2)^2-9^2$

donc $x^4-81=0 \Leftrightarrow (x^2-9)(x^2+9)=0$

$\Leftrightarrow x^2-9=0$ (car $x^2+9\neq 0$)

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-3$.

Ainsi : $\mathcal{D}_F=\mathbb{R}\setminus\{-3\,;3\}$

2. a. $G(x)=a+b\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{cx+d}{x^2+9}\times(x-3)$.

Donc $G(3)=a$ et $G(3)=\dfrac{1}{(3^2+9)(3+3)}$ donc $a=\dfrac{1}{108}$.

b. On pose $H(x)=(x+3)\,F(x)$

On a : $H(-3)=b$ et $H(-3)=\dfrac{1}{(-3^2+9)(-3-3)}$

donc $b=-\dfrac{1}{108}$.

c. $F(0)=\dfrac{1}{-81}$ et $F(1)=\dfrac{1}{-80}$

donc $\begin{cases} -\dfrac{1}{81}=\dfrac{-1}{324}+\dfrac{-1}{324}+\dfrac{d}{9} \\ \dfrac{1}{-80}=\dfrac{-1}{216}+\dfrac{-1}{432}+\dfrac{c+d}{10} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} d=\dfrac{1}{18} \\ c=0. \end{cases}$

62 **a.** $2(x-7)(x-2)(x+1)(x+3)$

$=2[(x^2-9x+14)(x^2+4x+3]$

$=2[x^4+4x^3+3x^2-9x^3-36x^2-27x+14x^2+56x+42]$

$=2x^4-10x^3-38x^2+58x+84$

donc $F(x)=\dfrac{2(x-7)(x-2)(x+1)(x+3)}{x-6}$.

b.

x	$-\infty$		3		-1		2		6		7		$+\infty$
$x-7$		–		–		–		–		–	0	+	
$x-2$		–		–		–	0	+		+		+	
$x+1$		–		–	0	+		+		+		+	
$x+3$		–	0	+		+		+		+		+	
$x-6$		–		–		–		–	0	+		+	
$F(x)$		–	0	+	0	–	0	+	‖	–	0	+	

63 **1.** $F(x)$ existe $\Leftrightarrow x(x^2+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ (car $x^2+1\neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$). Ainsi, $\mathcal{D}_F=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. a. $G(x)=a+\dfrac{x(bx+c)}{x^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}$

donc $G(0)=a=\dfrac{1}{0^2+1}=1$.

b. $F(1)=\dfrac{1}{2}$, $F(-1)=-\dfrac{1}{2}$ donc $\begin{cases} a+\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{1}{2} \\ -a+\dfrac{-b+c}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b+c}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-b+c}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=-1. \end{cases}$

Ainsi : $F(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-x}{x^2+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

64 **1.** Pour tout nombre réel x, $x^2+7>0$. Donc $F(x)$ existe pour tout nombre réel x.

2. a. $Q(-1)=(-1)^2+2\times(-1)+3=-1-2+3=0$ donc –1 est une racine de Q.

b.

$-x^2+2x+3$	$x+1$
$-[-x^2-x]$	$-x+3$
$3x+3$	
$-[3x+3]$	
0	

Donc $-x^2+2x+3=(x+1)(-+3)$.

3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		–	0	+		+	
$-x+3$		+		+	0	–	
x^2+7		+		+		+	
$F(x)$		–	0	+	0	–	

Faire le point

65 **a.** Le degré de P est 2.

b. Le coefficient de degré 2 de Q est 2.

c. 2 est une racine de P.

d. 2 est un zéro de F.

e. –1 est une racine de Q et un pôle de F.

66 Sofi n'a trouvé qu'une seule solution . Il faut déterminer la seconde.

Atem conclut mal : comme $P(-1) = 0$, on peut factoriser P par $x + 1$

Correction :

On effectue la division euclidienne de P par $x + 1$:

$x^2 + 8x + 7$	$x + 1$
$-[x^2 + x]$	$x + 7$
$7x + 7$	
$-[7x + 7]$	
0	

Donc $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$.

Ainsi : $x^2 + 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -7$.

Les solutions de $x^2 + 8x + 7 = 0$ sont –1 et –7.

67 **1. a.** $P(-2) = 5 \times (-2)^2 + 11 \times (-2) + 2 = 0$ donc il existe un polynôme Q de degré égal à deg$P$ – 1 tel que $P(x) = (x + 2)\, Q(x)$.

b. $(x + 2)(ax + b) = ax^2 + bx + 2ax + 2b$

$= ax^2 + (b + 2a)\, x + 2b$.

Par identification : $\begin{cases} a = 5 \\ b + 2a = 11 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$

(on vérifie que $1 + 2 \times 5 = 11$).

Donc $Q(x) = 5x + 1$. Donc $P(x) = (x + 2)(5x + 1)$.

c.

$5x^2 + 11x + 2$	$x + 2$
$-[5x^2 + 10x]$	$5x + 1$
$x + 2$	
$-[x + 2]$	
0	

Donc $P(x) = (x + 2)(5x + 1)$.

2. a. $P(x) = 7x^2 - 6x - 1$. Comme $P(1) = 0$, on factorise P par $x - 1$. On cherche a et b deux nombres réels tels que $P(x) = (x - 1)(ax + b)$.

On développe : $(x - 1)(ax + b) = ax^2 + x(b - a) - b$.

On identifie : $\begin{cases} a = 7 \\ b - a = -6 \\ -b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases}$

(on vérifie que $1 - 7 = -6$).

On a donc : $P(x) = (x - 1)(7x + 1)$.

b. $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$P(-1) = 0$, on factorise P par $x + 1$. On effectue la division euclidienne de P par $x + 1$:

$x^3 + x^2 + x + 1$	$x + 1$
$-[x^3 + x^2]$	$x^2 + 1$
$x + 1$	
$-[x + 1]$	
0	

Ainsi, $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$.

c. $P(x) = 5x^4 + x^3 - 4$

$P(-1) = 0$, on factorise P par $x + 1$. On effectue la division euclidienne de P par $x + 1$:

$5x^4 + x^3 - 4$	$x + 1$
$-[5x^4 + 5x^3]$	$5x^3 - 4x^2 + 4x - 4$
$-4x^3 - 4$	
$-[-4x^3 - 4x^2]$	
$4x^2 - 4$	
$-[4x^2 + 4x]$	
$-4x - 4$	
$-[-4x - 4]$	
0	

Donc $P(x) = (x + 1)(5x^3 - 4x^2 + 4x - 4)$.

68 **a.** $P(-2) = 2 \times (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 - 11 \times (-2) + 6$

$= 2 \times (-8) - 3 \times 4 + 22 + 6 = 0$.

$P(3) = 2 \times 3^3 - 3 \times 3^2 - 11 \times 3 + 6$

$= 54 - 27 - 33 + 6 = 0$.

b. $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$.

c. On effectue la division euclidienne de P par $x^2 - x - 6$:

$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$	$x^2 - x - 6$
$-[2x^3 - 2x^2 - 12x]$	$2x - 1$
$-x^2 + x + 6$	
$-[-x^2 + x + 6]$	
0	

Ainsi : $P(x) = (x^2 - x - 6)(2x - 1) = (x + 2)(x - 3)(2x - 1)$.

La troisième racine de P est $\frac{1}{2}$.

69 **1.** • Le polynôme $x + 3$ s'annule pour $x = -3$.

Le polynôme $2 - x$ s'annule pour $x = 2$, il est positif pour $x < 2$ et négatif pour $x > 2$.

2. a

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+1	+		+		+		
$x+3$	−	0	+		+		
$2-x$	+		+	0	−		
$P(x)$	−	0	+	0	−		

L'inéquation $P(x) \geqslant 0$ a pour solutions les nombres réels x tels que $x \in [-3 ; 2]$.

b. L'inéquation $(x^2+1)(x+3)/(2-x) \leqslant 0$ est équivalente à ($P(x) \leqslant 0$ et $x \neq 2$).

Les solutions sont donc les nombres réels x tels que :

$x \in]-\infty ; -3] \cup]2 ; +\infty[$.

70 **1.** $\mathcal{D}_{F_1} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\mathcal{D}_{F_2} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\}$.

2. a.

x^3+x+1	$x-2$
$-[x^3-2x^2]$	x^2+2x+5
$2x^2+x+1$	
$-[2x^2-4x]$	
$5x+1$	
$-[5x-10]$	
11	

Donc :

$P_1(x) = (x^2+2x+5)Q_1(x) + 11$.

b. $F_1(x) = x^2 + 2x + 5 + \dfrac{11}{x-2}$.

3. $F_2(x) = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{1-x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{(x+2)(1-x)} = \dfrac{a(1-x)+b(x+2)}{(x+2)(1-x)}$.

Par identification, on en déduit que :

$3 = (b-a)x + a + 2b$.

Donc par identification : $\begin{cases} b-a=0 \\ a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a \\ a=1 \end{cases}$

Donc $F_2(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{1-x}$.

71 **1. a.** $P_1(x) = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

b. Comme $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, P_1 n'a pas de racine.

2. a. $P_2(x) = 2(x^2 + \dfrac{x}{2} - 5) = 2\left[\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 - 5\right]$

$= 2\left[\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{81}{16}\right] = \left[\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{9}{4}\right)^2\right]$

$= 2\left(x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{4}\right)\left(x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}\right) = 2(x-2)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$.

Se tester

72 à **75** Voir Manuel de l'élève page 261.

Exercices d'approfondissement

76 **1. a.** Comme $a \neq 0$, on peut écrire que :

$P(x) = a\left(x^3 + \dfrac{b}{a}x^2 + \dfrac{c}{a}x + \dfrac{d}{a}\right)$; $p = -\dfrac{b}{a}$; $q = \dfrac{c}{a}$ et $r = \dfrac{d}{a}$.

b. x racine de $P \Leftrightarrow a(x^3 + px^2 + qx + r) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ($a \neq 0$).

Comme α, β, γ sont trois racines de Q, on peut le factoriser par $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Comme de plus, le coefficient de Q de degré 3 est 1, on en déduit que :

$Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

• On développe :

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = (x-\alpha)[x^2 - (\beta+\gamma)x + \beta\gamma]$

$= x^3 - (\beta+\gamma)x^2 + \beta\gamma x - \alpha x^2 + (\beta+\gamma)x - \beta\gamma\alpha$

$= x^3 - (\beta+\gamma+\alpha)x^2 + (\beta\gamma + \beta\alpha + \gamma\alpha)x - \beta\gamma\alpha$.

Par identification, on a alors :

$$\begin{cases} \alpha+\gamma+\beta = -p = -\dfrac{b}{a} \\ \beta\gamma + \beta\alpha + \gamma\alpha = q = \dfrac{c}{a} \\ \beta\gamma\alpha = -r = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

2. a. $P(-1) = 2 \times (-1) + 7 + 2 \times (-1) - 3$

$= -2 + 7 - 2 - 3 = 0$.

b. Notons α et β les deux autres racines de P. On a alors :

$$\begin{cases} \alpha+\beta-1 = -\dfrac{7}{2} \\ \alpha\beta \times (-1) = -\dfrac{3}{2} \\ \alpha\beta + \alpha(-1) + \beta(-1) = \dfrac{2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{5}{2}\\ \alpha\beta=-\dfrac{3}{2}\\ \alpha\beta-\alpha-\beta=1 \text{ (vérifiée !)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{5}{2}\\ \alpha\beta=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Les racines de P sont donc : -1 ; $\dfrac{1}{2}$ et -3.

77 a, b, c sont solutions du système :

$$\begin{cases}a\times b\times c=990 & \text{(volume)}\\ (ac+cb+ab)\times 2=882 & \text{(aires des faces)}\\ (a+b+c)\times 4=160 & \text{(longueur des arêtes)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}abc=990\\ ac+cb+ab=441\\ a+b+c=40\end{cases}$$

(a, b, c) sont, d'après l'exercice **76**, les racines du polynôme : $P(x)=x^3+bx^2+cx+d$ avec $-b=40$; $-d=990$; $c=441$ en choisissant $a=1$.

Le polynôme P s'écrit : $P(x)=x^3-40x^2+441x-990$.

On remarque que $P(3)=0$. On effectue la division euclidienne de P par $(x-3)$:

$P(x)=(x-3)(x^2-37x+330)$.

On écrit ensuite :

$$x^2-37x+330=\left(x-\frac{37}{2}\right)^2-\frac{1\,369}{4}+330$$

$$=\left(x-\frac{37}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=\left(x-\frac{37}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=(x-15)(x-22).$$

Les dimensions du livre sont donc 3 cm, 15 cm et 22 cm.

78 α désigne une racine du polynôme $P_\lambda(x)=x^3-7x+\lambda$.

On suppose que 2α est aussi une racine de P_λ. Il existe donc un nombre réel de β tel que :

$P\lambda(x)=(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-\beta)$.

Développons :

$$P_\lambda(x)=(x^2-3\alpha x+2\alpha^2)(x-\beta)$$
$$=x^3-\beta x^2-3\alpha x^2+3\alpha\beta x+2\alpha^2x-2\alpha^2\beta$$
$$=x^3+x^2(-\beta-3\alpha)+x(3\alpha\beta+2\alpha^2)-2\alpha^2\beta.$$

Par identification :

$$\begin{cases}-\beta-3\alpha=0\\ 3\alpha\beta+2\alpha^2=-7\\ -2\alpha^2\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\alpha\\ -9\alpha^2+2\alpha^2=-7\\ \lambda=6\alpha^3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\alpha\\ \alpha^2=1\\ \lambda=6\alpha^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-3\\ \lambda=6\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=3\\ \lambda=-6\end{cases}$$

Il existe deux valeurs de λ pour lesquelles α et 2α sont racines de P_λ : $\lambda=6$ ou $\lambda=-6$.

79 Le polynôme $(x^2-1)(x-3)$ a pour racines -1, 1 et 3. Le polynôme P est factorisable par le polynôme $(x^2-1)(x-3)$ si et seulement si $P(-1)=P(1)=P(3)=0$.

Ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases}-7+a+b+c=0\\ 3+a-b+c=0\\ -81+9a+3b+c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-10+2b=0\\ 84-8a-4b=0\\ c=b-a-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\ a=\dfrac{84-20}{8}=8\\ c=5-8-3=-6\end{cases}$$

Le polynôme P est factorisable par $(x^2-1)(x-3)$ si et seulement si $(a=8, b=5, c=-6)$.

80 **1.** P désigne le polynôme $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec $a\neq 0$.

$P(0)=0\Leftrightarrow d=0$.

$P(x+1)-P(x)=x^2\Leftrightarrow 3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c=x^2$

$$\text{(par identification)}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=1\\ 3a+2b=0\\ a+b+c=0\end{cases}$$

donc $P(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x$ et il est unique.

2. a. On a : $P(2)-P(1)=1^2$
$P(3)-P(2)=2^2$
…
$P(n+1)-P(n)=n^2$.

En additionnant membre à membre ces *in*égalités, on obtient : $P(n+1)-P(1)=1^2+2^2+\ldots+n^2$.

b. Ainsi, comme $P(1)=0$, d'après la question 1. :

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=P(n+1)=P(n)+n^2$$
$$=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+n^2$$
$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. a. $0^2+1^2+\ldots+99^2=1^2+\ldots+99^2$

$$=\frac{99\times(99+1)\times(2\times99+1)}{6}=\frac{99\times100\times(198+1)}{3\times2}$$

$=33\times50\times199=328\,350$.

b. $1^2+\ldots+200^2=\dfrac{200\times201\times401}{6}$

$=100\times67\times401=2\,686\,700$.

Ainsi :

$S=100^2+\ldots+200^2$
$=(1^2+\ldots+200^2)-(1^2+\ldots+99^2)$
$=2\,686\,700-328\,350$
$=2\,358\,350$.

81 **1. a.** • En développant $(x - \alpha)\, Q_{n-1}(x)$ on remarque que le terme de degré n est égal à $b_{n-1}x^n$ donc, par identification : $a_n = b_{n-1}$. Et de la même façon, $-\alpha b_o = a_o$.

• Soit $k \in \{0, 1, \ldots\ldots, n-2\}$. De même, le terme de degré $k+1$ est égal à $b_k - \alpha\, b_{k+1}$; donc, par identification : $a_{k+1} = b_k - \alpha b_{k+1}$.

b.

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	…	x^1	x^0
P_n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	…	a_1	a_0
Q_n		a_n	$a_{n-1} + \alpha a_n$	$a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$	…	$a_1 + \alpha b_1$	$-\dfrac{a_0}{\alpha}$

2. Application

$P(5) = 2 \times 5^3 - 7 \times 5^2 - 17 \times 5 + 10 = 0$ donc $(x-5)(ax^2 + bx + c) = P(x)$ avec a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

	x^3	x^2	x^1	x^0
P	2	−7	−17	10
Q		2	$-7 + 5 \times 2 = 3$	−2

Donc $P(x) = (x-5)(2x^2 + 3x - 2)$.

82 **1. a.** Comme $n > m$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p + m$. On a alors :

$(P_n + Q_m)(m) = q_n x^n + \ldots + a_{n-p+1} x^{n-p+1} + (a_m + b_m)x^m + \ldots + (a_0 + b_0) x^0$

avec $a_n \neq 0$ donc $\deg(P_n + Q_m) = n$.

b. Si $n < m$, alors n et m jouant des rôles symétriques, $\deg(P_n + Q_m) = m$.

c. $P_n Q_m(x) = (a_n x^n + \ldots + a_o)(b_m x^m + \ldots + b_0)$
$= a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)\, x^{m+n-1} + \ldots + a_0 b_0$

or $a_n b_m \neq 0$ donc :

$\deg(P_n Q_m) = n + m = \deg(P_n) + \deg(Q_m)$.

2. a. On suppose que $a_n + b_n \neq 0$.

$(P_n + Q_m)(x) = (P_n + Q_n)(x)$
$= (a_n + b_n)\, x^n + (a_n + b_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$

or $a_n + b_n \neq 0$ donc $\deg(P_n + Q_n) = n$.

b. On suppose que $a_n + b_n = 0$.

Alors : $(P_n + Q_m)(x) = (a_{n-1} + b_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$ donc $\deg(P_n + Q_m) = \max\{i \in \{0 ; \ldots ; n-1\}$ tel que $a_i + b_i \neq 0\}$.

83 **a.**
$$\begin{cases} L_1(1) = \dfrac{1-2}{1-2} \times \dfrac{1-3}{1-3} = 1 \\ L_1(2) = \dfrac{2-2}{1-2} \times \dfrac{2-3}{1-3} = 0 \\ L_1(3) = \dfrac{3-2}{1-2} \times \dfrac{3-3}{1-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_2(1) = \dfrac{1-1}{2-1} \times \dfrac{1-3}{2-3} = 0 \\ L_2(2) = \dfrac{2-1}{2-1} \times \dfrac{2-3}{2-3} = 1 \\ L_2(3) = \dfrac{3-1}{2-1} \times \dfrac{3-3}{2-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_3(1) = \dfrac{1-1}{3-1} \times \dfrac{1-2}{3-2} = 0 \\ L_3(2) = \dfrac{2-1}{3-1} \times \dfrac{2-2}{3-2} = 0 \\ L_3(3) = \dfrac{3-1}{3-1} \times \dfrac{3-2}{3-2} = 1 \end{cases}$$

b. On cherche P tel que $\begin{cases} P(1) = f(1) \\ P(2) = f(2) \\ P(3) = f(3) \end{cases}$ et $\deg(P) = 2$.

P défini par $P(x) = f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x) + f(3)L_3(x)$ convient.

84 **1.** Soit $n \geqslant 1$. Comme $n + 2 \geqslant 2$, le polynôme $X^2 - 1$ divise le polynôme $aX^{n+1} + bX^n + 1$ si et seulement si $aX^{n+1} + bX^n + 1$ a pour racines 1 et −1, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a(-1)^{n+1} + b(-1)^n + 1 = 0. \end{cases}$

Deux cas sont à distinguer.

• n pair :

$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ -a + b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 0 \end{cases}$

donc $aX^{n+1} - bX^n + 1 = -X^n + 1$

• n impair :

$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a - b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

donc $aX^{n+1} + bX^n + 1 = -X^{n+1} + 1$.

2. Deux cas sont à distinguer.

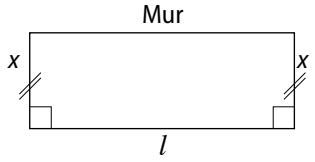
• n pair : $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$ et $p \neq 0$ $(n \geqslant 1)$

$-X^{2p} + 1 = (X^2 - 1)(-X^{2p-2} - X^{2p-4} - \ldots - 1)$

• n impair : $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 1)$

$-X^{2p+1} + 1 = (X^2 - 1)(-X^{2p-1} - X^{2p-3} - \ldots - 1)$.

85 **a.**



l désigne la seconde dimension. On a :

$l = 160 - 2x$ donc $\mathcal{A}(x) = x(160 - 2x) = -2x^2 + 160x$.

b. $\begin{cases} l \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 160 \geqslant 2x \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 80.$

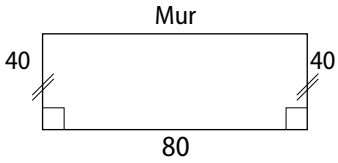
c. L'aire semble être maximale lorsque $x = 40$.

d. $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 160x = -2(x^2 - 80x)$

$= -2[(x - 40)^2 - 1600] = 2[1600 - (x - 40)^2]$.

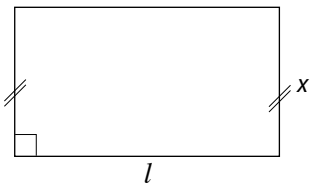
Comme pour tout nombre réel x, $-(x - 40)^2 \leqslant 0$, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est maximale pour $x = 40$.

e. $l = 160 - 2 \times 40 = 80$.



Les poteaux doivent être distants de 80 m.

86 **a.** Notons l la seconde dimension de la feuille rectangulaire.



Alors : $p = 2l + 2x$ donc $l = \dfrac{p - 2x}{2}$.

Ainsi, l'aire est égale à :

$\mathcal{A}(x) = x \times \dfrac{p - 2x}{2} = -x^2 + \dfrac{p}{2}x$.

b. $\mathcal{A}(x) = -\left(x^2 - \dfrac{p}{2}x\right) = -\left[\left(x - \dfrac{p}{4}\right)^2 - \dfrac{p^2}{16}\right]$

$= \dfrac{p^2}{16} - \left(x - \dfrac{p}{4}\right)^2$.

Ainsi, l'aire est maximale lorsque $x = \dfrac{p}{4}$.

87 **A. 1. a.** $P(0) = a \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de P.

b. Soit x un nombre réel non nul.

x racine de $P \Leftrightarrow ax^2 + bx + a = 0$ $(x \neq 0)$

$\Leftrightarrow x^2\left[a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{a}{x^2}\right] = 0$ $(x \neq 0)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}$ racine de P.

2. a. $P_1(x) = x^2 - 3x + 1$ avec $a = 1$ et $b = -3$.

$P_2(x) = 2x^2 + 5x + 2$ avec $a = 2$ et $b = 5$.

P_1 et P_2 sont symétriques.

b. $P_1\left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \left(\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3 \times \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} + 1$

$= \dfrac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{4} - \dfrac{9 - 3\sqrt{5}}{2} + 1$

$= \dfrac{9 - 6\sqrt{5} + 5 - 18 + 6\sqrt{5} + 4}{4} = \dfrac{0}{4} = 0$

donc $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ est une racine de P_1.

Ainsi $P_1(x) = \left(x - \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{2}{3 - \sqrt{5}}\right)$ car P_1 étant symétrique, d'après la question **1. b.**, $\dfrac{1}{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{3 - \sqrt{5}}$ est aussi une racine de P_1.

c. $P_2(-2) = 2 \times 4 - 10 + 2 = 0$ donc -2 est une racine de P_2. Et P_2 étant symétrique, $\dfrac{1}{-2}$ est l'autre racine de P_2 (deg 2). Donc $P_2(x) = 2(x + 2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

B. 1. a. $P(0) = a \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de P.

b. Soit x un nombre réel non nul.

x racine de $P \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + bx + c = 0$

$\Leftrightarrow x^3\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{b}{x^3}\right) = 0$ $(x \neq 0)$

$\Leftrightarrow a + b \times \dfrac{1}{x} + b \times \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + c \times \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 = 0$ $(x \neq 0)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}$ racine de P.

c. $P(-1) = a \times (-1) + b + b \times (-1) + a$

$= -a + b - b + a = 0$ donc -1 est une racine de P.

Ainsi $P(x) = a\,(x + 1)(x^2 + rx + p)$ où r et p sont deux nombres réels.

Développons $a(x + 1)(x^2 + rx + p)$:

$(ax + a)(x^2 + rx + p) = ax^3 + arx^2 + apx + ax^2 + arx + ap$

$= ax^3 + x^2\,(ar + a) + x\,(ap + ar) + ap$.

En identifiant :

$\begin{cases} ar + a = b \\ ap + ar = b \\ ap = a \end{cases} \Leftrightarrow (a \neq 0) \begin{cases} r = \dfrac{b - a}{a} \\ p = 1 \end{cases}$

Donc $P(x) = a(x + 1)\left(x^2 + \dfrac{b - a}{a}x + 1\right)$

$= (x + 1)(ax^2 + (b - a)\,x + a)$.

2. a. $P(x) = 3x^3 + 13x^2 + 13x + 3$ avec $a = 3$ et $b = 13$.

P est bien symétrique.

b. $3 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + 10 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 3$

$= \dfrac{3}{9} - \dfrac{10}{3} + \dfrac{9}{3} = \dfrac{1 - 10 + 9}{3} = 0$

donc $-\dfrac{1}{3}$ est racine de $Q(x) = 3x^2 + 10x + 3$.

c. On remarque que $Q(x) = 3x^2 + (13 - 3)\,x + 3$ et $P(x) = (x + 1)Q(x)$

De plus, Q étant de de degré 2 symétrique, $-\frac{1}{3}$ racine de Q implique que -3 est l'autre racine de Q.

Ainsi : $P(x) = (x + 1) \times 3 \times \left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 3)$.

Les racines de P sont : -1 ; -3 ; $-\frac{1}{3}$.

88 **A. 1.** Dans ce cas : $a = -8$ et $b = 20$.

2. a. L'aire de *DCFEGH* est égale à $x^2 + 8x$.

b. L'aire du carré *BEIG* est égale à 16 ou à $(x + 4)^2 - 20$.

x est donc solution de l'équation $(x + 4)^2 = 36$.

c. La valeur trouvée par Al Khwarizmi est la valeur positive x : $x = 6 - 4 = 2$.

3. a. $x^2 + 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 10) = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -10$.

b. Al Khwarizmi n'obtient pas la valeur négative -10.

B. 1. $x^2 = -12x + 85$.

De la même manière, l'aire de *BEIG* est égale à 36 et à $(x + 6)^2 - 85$. Donc $(x + 6)^2 - 85 = 36 \Leftrightarrow (x + 6)^2 = 121$.

Donc Al Khwarizmi trouvait $x + 6 = \sqrt{121} = 11$ donc $x = 5$.

2. $x^2 + 12x - 85 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 17) = 0$
$\Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -17$.

89 On cherche $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, tel que :

$(n + 3) = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$
$\Leftrightarrow (n + 3)(n^2 + 6 + 9)$
$= n^3 + (n + 1)(n^2 + 2n + 1) + (n + 2)(n^2 + 4n + 4)$
$\Leftrightarrow n^3 + 6n^2 + 9n + 3n^2 + 18n + 27$
$= n^3 + n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 4n^2 + 4n$
$+ 2n^2 + 8n + 8$
$\Leftrightarrow 2n^3 - 12n - 18 = 0 \Leftrightarrow n^3 - 6n - 9 = 0$.

$n^3 - 6n - 9$ a pour racine évidente 3 et
$n^3 - 6n - 9 = (n - 3)(n^2 + 3n + 3)$.

Pour $n = 3$, le contenu des trois premiers cubes remplit exactement celui du quatrième cube.

90 **1.** $0^4 - 3 \times 0^3 + 4 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas une solution de (E).

2. Soit x un nombre réel non nul.

a. x solution de $(E) \Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^4\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = 0$ $(x \neq 0)$
$\Leftrightarrow 1 - 3 \times \left(\frac{1}{x}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 0$ $(x \neq 0)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{x}$ solution de (E).

b. x solution de $(E) \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$
$(x \neq 0) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ $(x \neq 0)$
$\Leftrightarrow x$ solution de (E').

3. a. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$.

b. Posons $X = x + \frac{1}{x}$.

x solution de $(E') \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 3x - \frac{3}{x} = 0$
$\Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0$.

c. Résolvons l'équation : $X^2 - 3X + 2 = 0$.

1 est un racine évidente ; $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$

donc 1 et 2 sont les deux solutions.

Or $X = x + \frac{1}{x}$ donc :

$x + \frac{1}{x} = 1$	ou	$x + \frac{1}{x} = 2$
$\frac{x^2 - x + 1}{x} = 0$		$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x^2 - x + 1 = 0$		$x^2 - 2x + 1 = 0$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$		$(x - 1)^2 = 0$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$		$x = 1$
pas de solution.		

• Par conséquent (E') a pour seule solution 1.

Et son inverse est elle-même donc 1 est racine double de (E).

91 **1.** $P(m) = 0 \Leftrightarrow (a_3m^2 + a_2m + a_1)\,m + a_0 = 0$
$\Leftrightarrow a_0 = -(a_3m^2 + a_2m + a_1)\,m$.

Comme $a_3m^2 + a_2m + a_1 \in \mathbb{Z}$ et $a_0 \in \mathbb{Z}$, m divise a_0.

2. a. Les racines éventuelles de Q entières sont des diviseurs de 5.

Or 5 n'admet aucun diviseur pair donc il n'existe aucun entier pair qui soit racine de Q.

b. Q est un polynôme à coefficients positifs, donc une éventuelle racine de Q ne peut qu'être négative. De plus, d'après la question **1.**, une éventuelle racine entière de Q est un diviseur de 5.

On en déduit qu'une éventuelle racine entière de Q est -1 ou -5. Or $Q(-1) = 4 \neq 0$ et $Q(-5) = 0$.

Et on montre que $Q(x) = (x + 5)(x^2 + x + 5)$.

3. a. Les éventuelles racines entières de h sont les diviseurs négatifs de 9, à savoir : -1, -3 ou -9.
Or $R(-3) = 0$, donc $R(x) = (x + 3)(x^2 + 3x + 3)$.

b. Les éventuelles racines entières de S sont des diviseurs négatifs de 14, à savoir -1, -2, -7 ou -14.
Or $S(-7) = 0$, donc $S(x) = (x + 7)(x^2 + 2x + 2)$.

92 **a.** Le périmètre du demi-cercle de diamètre [*AM*] est égal à $\left(\pi \times \frac{x}{2}\right) \times \frac{1}{2}$.

Le périmètre du demi-cercle de diamètre [*MB*] est égal à $\left(\pi \times \frac{6-x}{2}\right) \times \frac{1}{2}$.

Le périmètre du demi-cercle de diamètre [*AB*] est égal à $\frac{\pi \times 3}{2}$.

Donc le périmètre de l'arbelos est égal à :

$\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi(6-x)}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{6\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{12\pi}{4} = 3\pi.$

Il est donc constant.

b. L'aire de l'arbelos est égale à :

$$\frac{\pi \times 3^2}{2} - \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \pi \times \left(\frac{6-x}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9\pi}{2} - \frac{x^2\pi}{8} - \frac{(6-x)^2\pi}{8} = \frac{[36 - x^2 - (6-x)^2]\pi}{8}$$

$$= \frac{36 - x^2 - 36 + 12x - x^2}{8}\pi = \frac{-2x^2 + 12x}{8}\pi$$

$$= \frac{\pi}{4}(6x - x^2).$$

c. Calcul de MN^2

Les triangles *AMN* et *NMB* sont rectangles en *M*.

Le triangle *ANB* est rectangle en *N* car *N* est un point du cercle de diamètre [*AB*].

Ainsi, l'égalité de Pythagore permet d'écrire que :

$$\begin{cases} AN^2 = AM^2 + NM^2 \\ BN^2 = BM^2 + NM^2 \\ AB^2 = AN^2 + BN^2. \end{cases}$$

Alors : $2NM^2 = AB^2 - AM^2 - BM^2$

donc $NM^2 = \frac{1}{2}[36 - x^2 - (6-x)^2]$

$$= \frac{1}{2}(36 + 12x - 36 - 2x^2) = 6x - x^2.$$

Détermination de l'aire du disque de diamètre [*MN*] :

$$\pi \times \left(\frac{NM}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \times NM^2 = \frac{\pi}{4}(6x - x^2).$$

93 **a.** $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2}$

$2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 2 \times \frac{2}{3}$

$3 - \frac{3}{4} = \frac{12}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 3 \times \frac{3}{4}$

$4 - \frac{4}{5} = \frac{20}{5} - \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 4 \times \frac{4}{5}.$

b. Il semble que pour tout nombre entier naturel *n* non nul : $n \times \frac{n}{n+1} = n - \frac{n}{n+1}$.

c. *n* désigne un nombre entier naturel non nul.

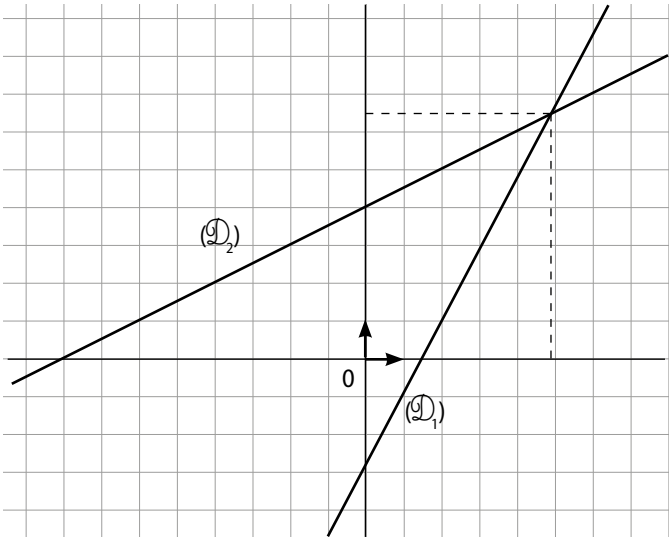
$n \times \frac{n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}$ et $n - \frac{n}{n+1} = \frac{n(n+1) - n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}$

d'où l'égalité.

13 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

Activités d'introduction

1 Les dimensions d'un rectangle



1. a. Non. en effet, on obtient un rectangle si et seulement si $2x - 3 > 0$ et $\frac{1}{2}x + 4 > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{3}{2}$ et $x > -8$, donc $x > \frac{3}{2}$.

2. a. $x \approx 4{,}7$.

b. Ce rectangle est un carré si et seulement si :

$2x - 3 = \frac{1}{2}x + 4 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{2}x = 7 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 7$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \times 7 \Leftrightarrow x = \frac{14}{3}$.

3. $2x + 4 = \frac{1}{3}x - 7 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{3}x = -7 - 4$

$\Leftrightarrow \frac{5}{3}x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{-33}{5}$. (Pour $x = \frac{-33}{5}$, on a $2x + 4 < 0$.)

4. a. $ax + b$ et $cx + d$ désignent les dimensions d'un rectangle si et seulement si $ax + b > 0$ et $cx + d > 0$.

b. Le rectangle est un carré si et seulement si $ax + b = cx + d$, c'est-à-dire $(a - c)x = d - b$.

• Si $a \neq c$, $x = \frac{d - b}{a - c}$ s'il vérifie **a.**

• Si $a = c$ et $d = b$, tout nombre x vérifiant le **a.** est une solution.

• Si $a = c$ et $d \neq b$, aucun nombre x n'est une solution.

2 Création d'un logo publicitaire

2. a. L'aire de la zone orange est égale à $\frac{2a \times 10a}{2} = 10a^2$.

Celle de la zone verte est égale à $\frac{20 \times 12a}{2} - 10a^2 = 120a - 10a^2$.

b. $10a^2 = 120a - 10a^2 \Leftrightarrow 20a^2 - 120a = 0 \Leftrightarrow a(20a - 120) = 0 \Leftrightarrow 20a - 120 = 0$ (car $a > 0$) $\Leftrightarrow a = 6$.

3. $120a - 10a^2 \geqslant 10a^2 \Leftrightarrow 120a - 20a^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a(120 - 20a) \geqslant 0 \Leftrightarrow 120 - 20a \geqslant 0$ (car $a > 0$)

$\Leftrightarrow 120 \geqslant 20a \Leftrightarrow 6 \geqslant a \Leftrightarrow a \in]0\,;\,6]$.

3 Bénéfice d'une entreprise

1. a. Le bénéfice est nul pour une quantité de 10 kg ou 100 kg.

b. Le bénéfice est maximal pour une quantité de 40 kg.

c. 30 kg et 60 kg.

d. Le bénéfice ne peut pas être égal à 2 000 000 F CFA.

2. a. Le bénéfice est positif pour une quantité comprise entre 10 kg et 100 kg.

b. Pour une quantité comprise entre 30 kg et 60 kg.

4 Inéquation produit, inéquation quotient

1. a. $(3x+4)(5-x)=0 \Leftrightarrow 3x+4=0$ ou $5-x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$ ou $x=5$.

c.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
signe de $3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(3x+4)(5-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a. $g(x)$ n'est pas définie lorsque $5-x=0$, c'est-à-dire $x=5$.

b.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
signe de $3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(3x+4)(5-x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Savoir-faire

3 **a.** $-5x+8=0 \Leftrightarrow -5x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{-8}{-5} \Leftrightarrow x=\frac{8}{5}$.

b. $x-1=3(1-2x) \Leftrightarrow x-1=3-6x$
$\Leftrightarrow 7x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{7}$.

c. $x(5x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $5x-1=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{1}{5}$.

d. $x^2-10=0 \Leftrightarrow x^2=10 \Leftrightarrow x=\sqrt{10}$ ou $x=-\sqrt{10}$.

e. $\frac{x+3}{x}=-4 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x}+4=0 \Leftrightarrow \frac{x+3+4x}{x}=0$
$\Leftrightarrow \frac{5x+3}{x}=0$
$\Leftrightarrow 5x+3=0$ et $x\neq 0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$.

f. $\frac{1}{x-3}=5 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-5=0 \Leftrightarrow \frac{1-5(x-3)}{x-3}=0$
$\Leftrightarrow \frac{16-5x}{x-3}=0$
$\Leftrightarrow 16-5x=0$ et $x-3\neq 0$
$\Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$ et $x\neq 3 \Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$.

4 **a.** Les solutions de l'équation sont -1 et 2.

b. Pour $x=-1$, on a $x^2-x-2=(-1)^2-(-1)-2$
$=1+1-2=0$.

Et pour $x=2$, on a $x^2-x-2=(2)^2-(2)-2$
$=4-2-2=0$.

7 **a.** $\frac{1}{3-x}\leqslant 0 \Leftrightarrow 3-x<0$ (car $1>0$) $\Leftrightarrow 3<x$.

b. $\frac{-3}{2x+5}\geqslant 0 \Leftrightarrow 2x+5<0$ (car $-3<0$) $\Leftrightarrow x<-\frac{5}{2}$.

c. $(2x+3)(2-x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2}\,;\,2\right]$, à l'aide d'un tableau des signes des facteurs $(2x+3)$, $(2-x)$ et leur produit.

d. $(2x-1)^2\geqslant 25 \Leftrightarrow (2x-1)^2-25\geqslant 0$
$\Leftrightarrow (2x-1-5)(2x-1+5)\geqslant 0$
$\Leftrightarrow (2x-6)(2x+4)\geqslant 0$
$\Leftrightarrow (2x-1-5)(2x-1+5)\geqslant 0$
$\Leftrightarrow x\in[-\infty\,;-2]\cup[3\,;+\infty[$,

à l'aide d'un tableau de signes.

e. $(2x-1)^2(x-5)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[5\,;+\infty[$ à l'aide d'un tableau de signes.

f. $\frac{x+3}{2-x}\leqslant 5 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2-x}-5\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2-x}-\frac{5(2-x)}{2-x}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{x+3-10+5x}{2-x}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{6x-7}{2-x}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty\,;\frac{7}{6}\right]\cup\,]2\,;+\infty[$.

g. $\frac{3x+2}{5x^2+2}\leqslant 0 \Leftrightarrow 3x+2\leqslant 0$ (car $5x^2+2>0$)
$\Leftrightarrow x\leqslant -\frac{2}{3}$.

h. $\frac{2x-1}{x^2-9}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-3)(x+3)}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;-3[\,\cup\left[\frac{1}{2}\,;3\right[$.

8 **a.** $x^2-x-2\leqslant 0$ pour $x\in[-1\,;2]$.

b. x^2-x-2 pour $x\in\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

Exercices d'entraînement

9 Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -1 et 4.
Les solutions de l'équation $f(x) = -1$ sont -3 et 5.
L'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solution.

10 **a.** $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.
b. $-x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = x$.
c. $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$.
d. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
e. $x^2 = -5$ n'admet pas de solution car $x^2 \geqslant 0$ et $-5 < 0$.
f. $(x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

11 **a.** $x - 3(2x + 1) = 2 + 3x \Leftrightarrow x - 6x - 3 = 2 + 3x$
$\Leftrightarrow -5x - 3 = 2 + 3x \Leftrightarrow -5x - 3x = 2 + 3$
$\Leftrightarrow -8x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}$.
b. $\frac{1}{3}x - 2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}x = 1 + 2 - \frac{5}{6}$
$\Leftrightarrow \frac{4}{12}x + \frac{9}{12}x = 3 - \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{13}{12}x = \frac{18 - 5}{6}$
$\Leftrightarrow \frac{13}{12}x = \frac{13}{6} \Leftrightarrow x = \frac{13}{6} \times \frac{12}{13} \Leftrightarrow x = 2$.

12 **a.** $(x - 3)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $2x + 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -\frac{5}{2}$.
b. $x(1 - x)(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $1 - x = 0$ ou $3x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = \frac{2}{3}$.
c. $(x - 3)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 3 - 5)(x - 3 + 5) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 8)(x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow x - 8 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 8$ ou $x = -2$.
d. $x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 9 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 9$.
e. $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x - 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$.

13 **a.** $\frac{x + 3}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$.
b. $\frac{x(x - 2)}{1 + 2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) = 0 \\ 1 + 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 2 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

c. $\frac{2x^2 + 3x}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(2x + 3)}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x + 3) = 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{3}{2}$

d. $\frac{9x^2 - 1}{x(3x + 1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(3x + 1)(3x - 1)}{x(3x + 1)} = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 1)(3x - 1) = 0 \\ x(3x + 1) \neq 0 \end{cases}$
or $(3x + 1)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{3}$
et $x(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$ donc $\frac{1}{3}$ est l'unique solution.

14 a. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$.
b. $4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.
c. $x^2 = -1$ n'admet pas de solution car $x^2 \geqslant 0$ et $-1 < 0$.
d. $x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -25$ qui n'admet pas de solution.
e. $(x + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 3 = 2$ ou $x + 3 = -2$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -5$.

15 **a.** Par lecture graphique les solutions de $f(x) = 0$ sont 0 et 2.
b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

16 $\frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 7x + 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 1)(3x + 4)} = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 2) = 0 \\ (x + 1)(3x + 4) \neq 0 \end{cases}$
or $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$
et $(x + 1)(3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -\frac{4}{3}$ donc les solutions de l'équation $\frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 7x + 4} = 0$ sont 1 et -2.

17 **a.** $f(x) = (3x - 1)^2 - 25(x - 1)^2$
$= 9x^2 - 6x + 1 - 25(x^2 - 2x + 1)$
$= 9x^2 - 6x + 1 - 25x^2 + 50x - 25$
$= -16x^2 + 44x - 24$.
$g(x) = (4x - 3)^2 - (3x - 2)(4x - 3)$
$= 16x^2 - 24x + 9 - (12x^2 - 9x - 8x + 6)$
$= 16x^2 - 24x + 9 - 12x^2 + 17x - 6 = 4x^2 - 7x + 3$.
b. $f(x) = -24 \Leftrightarrow -16x^2 + 44x - 24 = -24$
$\Leftrightarrow -16x^2 + 44x = 0 \Leftrightarrow x(-16x + 44) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{44}{16} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{11}{4}$.
$g(x) = 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 7x + 3 = 4x^2 \Leftrightarrow -7x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow -7x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$.

18 **a.**

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-3$		$-$	0	$+$	

b. Pour $x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$ on a $2x-3<0$
donc $|2x-3| = -2x+3$ et l'équation $|2x-3|=3$
$\Leftrightarrow -2x+3=3 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Pour $x \in \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ on a $2x-3 \geqslant 0$ donc $|2x-3| = 2x-3$
et l'équation $|2x-3|=3 \Leftrightarrow 2x-3=3$
$\Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$.

Les solutions de l'équation $|2x-3|=3$ sont 0 et 3.

19 **a.** $x^2-9=(x+3)(x-3)$.

Tableau de signe de x^2-9 :

x	∞		-3		3		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+3)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Pour $x \in]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$ on a $x^2-9 \geqslant 0$
donc l'équation $|x^2-9|=5 \Leftrightarrow x^2=14 \Leftrightarrow x=\sqrt{14}$ ou $x=-\sqrt{14}$, or $-\sqrt{14} \in]-\infty ; -3]$ et $\sqrt{14} \in [3 ; +\infty[$ donc les solutions de l'équation $|x^2-9|=5$
sur $]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$ sont $-\sqrt{14}$ et $\sqrt{14}$.
Pour $x \in]-3 ; 3[$, on a $x^2-9<0$
donc l'équation $|x^2-9|=5 \Leftrightarrow -x^2+9=5 \Leftrightarrow 4=x^2$
$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$; or $2 \in]-3 ; 3[$ et $-2 \in]-3 ; 3[$
donc les solutions de l'équation $|x^2-9|=5$ sur $]-3 ; 3[$ sont -2 et 2.
Les solutions de l'équation $|x^2-9|=5$ sur $\mathbb{R}$ sont $-\sqrt{14}$; -2 ; 2 et $\sqrt{14}$.

20 **a.** $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-9x=0 \Leftrightarrow x(x^2-9)=0$
$\Leftrightarrow x(x+3)(x-3)=0$ donc les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont 0, -3 et 3.

21 **a.** Par lecture graphique, les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -2 et 4.

b. $f(x)=x^2-2x-8=(x-1)^2-1-8$.
$f(x)=(x-1)^2-9=(x-1-3)(x-1+3)=(x-4)(x+2)$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=4$ ou $x=-2$.
Les résultats sont cohérents avec ceux du **a.**

22 **a.** Contraintes : $3x+2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -\frac{2}{3}$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-25=0$ et $x \neq -\frac{2}{3}$
$4x^2-25=0 \Leftrightarrow (2x+5)(2x-5)=0$
$\Leftrightarrow 2x+5=0$ ou $2x-5=0$
$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}$.

• L'ensemble des solutions de $f(x)=0$ est $\left\{-\frac{5}{2} ; \frac{5}{2}\right\}$.

23 **a.** $-3x<2 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{3}$.

b. $x^2 \geqslant 0$ pour tout nombre réel x.

c. $(x-3)^2>0 \Leftrightarrow x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

d. $(x^2+3)(x-1)>0 \Leftrightarrow x-1>0$ (car $x^2+3>0$) $\Leftrightarrow x>1$.

e. $(x-5)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x-5=0$ (car $(x-5)^2 \geqslant 0$) $\Leftrightarrow x=5$

f. $-\frac{-3}{x+5}>0 \Leftrightarrow x+5<0$ (car $-3<0$) $\Leftrightarrow x<-5$.

24 Par lecture graphique :

• l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) \leqslant 0$ est $[-1 ; 0] \cup [1 ; 2]$;

• l'ensemble des solutions de $g(x)>0$ est $[-1 ; 2[$;

• l'ensemble des solutions de $f(x) \leqslant g(x)$ est $[-1 ; 2]$.

25 **a.** $3x-1-(3-x)>x+3 \Leftrightarrow 3x-1-3+x>x+3$
$\Leftrightarrow 3x>7 \Leftrightarrow x>\frac{7}{3}$.

b. $\frac{1}{9}x-3<\frac{1}{6}x-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{9}x-\frac{1}{6}x<-\frac{1}{3}+3$
$\Leftrightarrow \frac{2}{18}x-\frac{3}{18}x<-\frac{1}{3}+\frac{9}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{18}x<\frac{8}{3}$
$\Leftrightarrow x>\frac{8}{3}\times(-18) \Leftrightarrow x>-48$.

26 **a.**

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $1-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(2x-3)(1-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de $(2x-3)(1-5x) \geqslant 0$ est $\left[\frac{1}{5} ; \frac{3}{2}\right]$.

b. $x^2-5<0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})<0$ et, à l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble des solutions $]-\sqrt{5} ; \sqrt{5}[$.

c. $(2x-1)^2 \leqslant 9x^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2-9x^2 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (2x-1+3x)(2x-1-3x) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (5x-1)(-x-1) \leqslant 0$
et, à l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble de solutions : $]-\infty ; -1] \cup \left[\frac{1}{5} ; +\infty\right[$.

d. $(x+3)^2 \leqslant -1$ n'admet pas de solution car $(x+3)^2 \geqslant 0$ et $-1 < 0$.

27 **a.** Par lecture graphique, le solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sont les nombres de l'intervalle $[0 ; 2]$.

b. $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leqslant x(x-2) \leqslant 0$.

x	∞		0		2		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de $f(x) \leqslant 0$ est $[0 ; 2]$.

28 **a.**

x	∞		-5		2		$+\infty$
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{x+5}{2-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

L'ensemble des solutions de $\dfrac{x+5}{2-x} \geqslant 0$ est $[-5 ; 2[$.

b. À l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble de solutions $\left]0 ; \dfrac{1}{3}\right[$.

c. $\dfrac{5}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+2 > 0$ (car $5 > 0$) $\Leftrightarrow x > -2$.

d. $\dfrac{x^2-25}{3-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-5)(x+5)}{3-x} \geqslant 0$.

x	∞		-5		3		5		$+\infty$
Signe de $x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $\dfrac{(x-5)(x+5)}{3-x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de $\dfrac{x^2-25}{3-x} \geqslant 0$ est :
$]-\infty ; -5] \cup [3 ; 5]$.

e. $\dfrac{x+2}{3-x} > 5 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{3-x} - 5 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{3-x} - \dfrac{5(3-x)}{3-x} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2-15+5x}{3-x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{6x-13}{3-x} > 0$ et, à l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble des solutions $\left]\dfrac{13}{6} ; 3\right[$.

f. $\dfrac{3x-2}{x^2-1} < \dfrac{3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{x^2-1} - \dfrac{3}{x+2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x-2)(x+2) - 3(x^2-1)}{(x^2-1)(x+2)} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+6x-2x-4-3x^2+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)} < 0$

et, à l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble des solutions $]-2 ; -1[\cup \left]\dfrac{1}{4} ; 1\right[$.

g. $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+3} \leqslant \dfrac{2x-1}{x^2-9}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)} \leqslant \dfrac{2x-1}{(x-3)(x+3)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+3-x+3-2x+1}{(x-3)(x+3)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x+7}{(x-3)(x+3)} \leqslant 0$

et, à l'aide d'un tableau de signe, on obtient l'ensemble des solutions $\left]-3 ; \dfrac{7}{2}\right[\cup]3 ; +\infty[$.

29 **1. a.** Par lecture graphique, l'ensemble des solutions de $f(x) > 0$ est $]-2 ; 0[\cup]2 ; +\infty[$.

b. Par lecture graphique, l'ensemble des solutions de $f(x) > g(x)$ est $]-2 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

2. $f(x) = x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x+2)(x-2)$.

a. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-2) > 0$; à l'aide d'un tableau de signes, on obtient l'ensemble des solutions :
$]-2 ; 0[\cup]2 +\infty[$.

b. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$
$\Leftrightarrow x(x+2)(x-2) + x + 2 > 0$
$\Leftrightarrow (x+2)[x(x-2)+1] > 0$
$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+1) > 0$
$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)2 > 0$ or 1 n'est pas une solution et pour $x \neq 1$ on a $(x-1)^2 > 0$ et l'inéquation $f(x > g(x) \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ donc l'ensemble des solutions est $]-2 ; 1[\cup 1 ; +\infty[$.

Les résultats du **2.** sont compatibles avec ceux de la question **1**.

30 **a.**

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-3$		$-$	0	$+$	

b. Pour $x \in \left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right[$ on a $2x - 3 < 0$
donc $|2x-3| \leqslant 1 \Leftrightarrow -(2x-3) \leqslant 1 \Leftrightarrow -2x + 3 \leqslant 1$
$\Leftrightarrow -2x \leqslant -2 \Leftrightarrow x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \in \left[1 ; \dfrac{3}{2}\right[$.
Pour $x \in \left[\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$ on a $2x - 3 \geqslant 0$
donc $|2x-3| \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x - 3 \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x \leqslant 4$
$\Leftrightarrow x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{3}{2} ; 2\right]$.

c. L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1 ; 2]$.

31 **a.**

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2-x\rvert =$		x^2-x	0	$-x^2+x$	0	x^2-x	

b. Pour $x \in]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$:

$|x^2 - x| \leqslant x \Leftrightarrow x^2 - x \leqslant x \Leftrightarrow x^2 - 2x \leqslant 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \leqslant 0$ or l'ensemble des solutions de $x(x - 2) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, à l'aide d'un tableau de signes, est $[0 ; 2]$; donc l'ensemble des solutions de $|x^2 - x| \leqslant x$ sur $]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$ est $]1 ; 2]$.

Pour $x \in [0 ; 1]$, $|x^2 - x| \leqslant x \Leftrightarrow -x^2 + x \leqslant x$

$\Leftrightarrow -x^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0 ; 1]$ car $x^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $|x^2 - x| \leqslant x \Leftrightarrow x \in [0 ; 1] \cup]1 ; 2]$

$\Leftrightarrow x \in [0 ; 2]$.

32 **a.** $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b. $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ donc $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} > 0$.

Par conséquent $x^2 + x + 1 > 0$.

d. $x^3 < 1 \Leftrightarrow x^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) < 0$

$\Leftrightarrow x - 1 < 0$ car $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$.

33 **a.** $-(x - 1)^2 - 1 = -(x^2 - 2x + 1) - 1 = -x^2 + 2x - 1 - 1$

$= -x^2 + 2x - 2$.

b. $(x + 2)(-x^2 + 2x - 2) = -x^3 + 2x^2 - 2x - 2x^2 + 4x - 4$

$= -x^3 + 2x - 4$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x - 1)^2 \geqslant 0$, $-(x - 1)^2 \leqslant 0$, $-(x - 1)^2 - 1 \leqslant -1 < 0$ donc $-x^2 + 2x - 2 < 0$.

d. $-x^3 + 2x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x + 2)(-x^2 + 2x - 2) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x + 2 \leqslant 0$ car $-x^2 + 2x - 2 < 0$

donc $-x^3 + 2x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2$.

34 $(x - 3)^4 < 1 \Leftrightarrow (x - 3)^4 - 1 < 0$

$\Leftrightarrow [(x - 3)^2 + 1][(x - 3)^2 - 1] < 0$

$\Leftrightarrow [(x - 3)^2 + 1](x - 3 + 1)(x - 3 - 1) < 0$

$\Leftrightarrow [(x - 3)^2 + 1](x - 2)(x - 4) < 0$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x - 3)^2 \geqslant 0$,

donc $(x - 3)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$.

Par conséquent, $(x - 3)^4 < 1 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) < 0$

$\Leftrightarrow x \in [2 ; 4]$ à l'aide d'un tableau de signes.

35 **Par lecture graphique**

a. $f(x = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$.

b. $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

c. $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x = 3$.

d. $g(x) > f(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 3[$.

Résolutions algébriques

a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$.

b. $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

c. $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 9 \Leftrightarrow -6x = -18$

$\Leftrightarrow x = 3$.

d. $g(x) > f(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 > x^2 - 9 \Leftrightarrow -6x > -18$

$\Leftrightarrow x < 3$.

36 **1.** Les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (d) sont les solutions de l'équation $f(x) = 3$

$\Leftrightarrow 5(x - 3)^2 - 2 = 3 \Leftrightarrow 5(x - 3)^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 5[(x - 3)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow 5(x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$

donc les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (d) sont $A(2 ; 3)$ et $B(4 ; 3)$.

2. a. $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow 5(x - 2)(x - 4) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [2 ; 4]$ à l'aide d'un tableau de signes.

b. $(\mathscr{C}_f)$ est au dessous de (d) pour $x \in [2 ; 4]$.

37 **1. a.** $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0[\cup \{1\}$.

b. $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leqslant -x + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + x - 2 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 + x^2 - 2x}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{x} \leqslant 0$.

Pour $x > 0$, $\frac{(x - 1)^2}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ car $(x - 1)^2 \geqslant 0$ or $(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc 1 est l'unique solution de $f(x) \leqslant g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Pour $x < 0$, $\frac{(x - 1)^2}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geqslant 0$ or $(x - 1)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc l'ensemble de solutions de $f(x) \leqslant g(x)$ sur $]-\infty ; 0[$ est $]-\infty ; 0[$.

Conclusion : $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0[\cup \{1\}$.

2. a. $\frac{1}{x} > -3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 + 3x}{x} > 0$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right[\cup]0 ; +\infty[$ à l'aide d'un tableau de signes.

b. $(\mathscr{C}_f)$ est strictement au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$

pour $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right[\cup]0 ; +\infty[$.

38 **a.** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0$ ou $\sqrt{x} = 1$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$.

b. $x \leqslant \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \leqslant 0$ or 0 est une solution et pour $x > 0$, $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \leqslant 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leqslant \sqrt{1} \Leftrightarrow x \leqslant 1$ donc l'ensemble des solutions de $x \leqslant \sqrt{x}$ est $[0 ; 1]$.

c. $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{x}$ donc d'après **a.** et **b.** on a :

• $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au-dessous de $(\mathscr{C}_g)$ pour $x \in]0 ; 1[$.

• $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont confondues pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

• $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$ pour $x \in]1 ; +\infty[$.

39 **a.** $(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} - x - \sqrt{x} - 1$
$= x\sqrt{x} - 1$.

b. $f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)$
$= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$.

c. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = 0$

or 0 est une solution et pour $x > 0$ on a $\sqrt{x} > 0$ donc $x + \sqrt{x} > 0$ et $x + \sqrt{x} + 1 > 1 > 0$.

Par conséquent, $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = 0$ équivaut à $\sqrt{x} - 1 = 0$ pour $x > 0$.

40 **a.** Conjecture : la solution de l'équation $f(x) = 2$ est comprise entre 1 et 2.

b. $f(1) = 1^3 = 1$ et $f(2) = 2^3 = 8$, $f(1) < 2$ et $f(2) > 2$ donc la solution de l'équation $f(x) = 2$ est comprise entre 1 et 2, ce qui justifie la conjecture du **a.**

c. $f(1{,}5) = 2{,}25 > 2$ et $f(1) < 2$ donc la solution de l'équation $f(x) = 2$ est entre 1 et 1,5.

41 **1.** $f(x) = 3x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0$
$\Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - \sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

donc les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et (d) sont $A(0 ; 2)$, $B(-\sqrt{3} ; -3\sqrt{3} + 2)$ et $C(\sqrt{3} ; 3\sqrt{3} + 2)$.

2. a. $f(x) \leqslant 3x + 2 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -\sqrt{3}] \cup [0 ; \sqrt{3}]$ à l'aide d'un tableau de signes.

b. $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessous de (d) pour $x \in]-\infty ; \sqrt{3}] \cup [0 ; \sqrt{3}]$.

42 **a.** $(x - 1)(2x^2 + 1) = 2x^3 + x - 2x^2 - 1$
$= 2x^3 - 2x^2 + x - 1$.

b. $f(x) = 2x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = 2x^2 - x + 1$
$\Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ car $2x^2 + 1 > 0$ donc $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{P})$ ont un seul point commun $A(1 ; 2)$.

c. $f(x) - (2x^2 - x + 1) = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$
$= (x - 1)(2x^2 + 1)$ or $2x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f(x) - (2x^2 - x + 1)$ a le signe de $x - 1$.

• $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au-dessous de $(\mathscr{P})$ pour $x < 1$.

• $(\mathscr{C}_f)$ coupe $(\mathscr{P})$ en $x = 1$.

• $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au-dessus de $(\mathscr{P})$ pour $x > 1$.

43 $\sqrt{2x - 3} - 5 \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 3} \leqslant 5$ or $\sqrt{2x - 3}$ est définie et positive pour $2x - 3 \geqslant 0$, donc $\sqrt{2x - 3} \leqslant 5$ $\Leftrightarrow 0 \leqslant 2x - 3 \leqslant 25$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$0 \leqslant 2x - 3 \leqslant 25 \Leftrightarrow 3 \leqslant 2x \leqslant 28 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{28}{2}$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 14$.

44 **b.** $x = -1$ ou $x = 1$.

c. $(\mathscr{C})$ est située au-dessous de (d) pour $x \in [-1 ; 0[\cup [1 ; +\infty[$.

2. a. $\dfrac{1}{x} = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - x^2}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{(1 - x)(1 + x)}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + x)(1 - x) = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

b. $\dfrac{1}{x} \geqslant x \Leftrightarrow \dfrac{(1 - x)(1 + x)}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1] \cup]0 ; 1]$ à l'aide d'un tableau de signes.

c. Les ensembles de solutions sont en accord avec les conjectures émises.

45 **a.** $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1 ; 1]$.

b. $(x^2 - 1)(x^2 + 6) = x^4 + 6x^2 - x^2 - 6 = x^4 + 5x^2 - 6 = f(x)$.

c. $f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 6) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \leqslant 0$ car $x^2 + 6 > 0$

or $(x+1)(x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1\,;\,1]$ à l'aide d'un tableau de signes donc $f(x) \leqslant 0$ $x \in [-1\,;\,1]$.

46 **a.** Pour $x \in]0\,;\,1[$ on a $x^3 < x^2 < \sqrt{x} < \dfrac{1}{x}$.
Pour $x \in]1\,;\,+\infty[$ on a $\dfrac{1}{x} < \sqrt{x} < x^2 < x^3$.
Pour $x = 1$ il y a égalité des cinq expressions.
b. Comparaison de x et $\sqrt{x}$:
$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$.
Pour $x > 0$ $\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$ a le même signe que $x - 1$.

47 $f(x = 2x^3 - 4x = 2x(x^2-2) = 2x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.
• $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.
• $f(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) > 0$
$\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{2}\,;0[\cup]\sqrt{2}\,;+\infty[$ à l'aide d'un tableau de signes.
Conclusion :
• $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in]-\sqrt{2}\,;0[\cup]\sqrt{2}\,;+\infty[$.
• $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses pour $x \in \{-\sqrt{2}\,;0\,;\sqrt{2}\}$.
• $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au-dessous de l'axe des abscisses pour $x \in]-\infty\,;-\sqrt{2}[\cup]0\,;\sqrt{2}[$.

48 Notons x le plus petit des trois nombres entiers recherchés.
$x + (x+1) + (x+2) = 504 \Leftrightarrow 3x + 3 = 504 \Leftrightarrow 3x = 501$ $\Leftrightarrow x = 167$ donc les trois nombres entiers consécutifs de somme 504 sont 167, 168 et 169.

49 Notons x le plus petit des deux nombres entiers recherchés. $5 < 7$ donc le problème se traduit par l'équation $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{5}{7} \Leftrightarrow 7x = 5(x+1)$ car $x + 1 \neq 0$ $(x \geqslant 0 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant 1 > 0)$
$7x = 5(x+1) \Leftrightarrow 7x = 5x + 5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$
or $\dfrac{5}{2}$ n'est pas un nombre entier, donc le problème n'admet pas de solution.

50 Notons x le côté d'un tel carré.
$x^2 \leqslant 625 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 25^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 25$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

51 Notons x un tel nombre.
$x^3 < x \Leftrightarrow x^3 - x < 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) < 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) < 0$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$ à l'aide d'un tableau de signes.

52 Notons x la note que doit obtenir Binto.
$\dfrac{2 \times 14 + 3 \times x}{2+3} \geqslant 17 \Leftrightarrow \dfrac{28 + 3x}{5} \geqslant 17$
$\Leftrightarrow 28 + 3x \geqslant 85 \Leftrightarrow 3x \geqslant 57 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{57}{3} \Leftrightarrow x \geqslant 19$.

53 **a.** Notons y la longueur en m. de la maison. On a $x \leqslant y$ et $x > 0$ donc $x^2 \leqslant xy$.
Par conséquent $x^2 \leqslant 32$ et $x \leqslant \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
L'ensemble des valeurs possibles de x est $]0\,;4\sqrt{2}]$.
b. L'aire de la partie du toit qui déborde est égale à 32 m² si et seulement si :
$2(y+2) \times 1 + 2x \times 1 = 32 \Leftrightarrow 2y + 4 + 2x = 32$
$\Leftrightarrow 2y + 2x = 28 \Leftrightarrow y + x = 14 \Leftrightarrow y + x - 14 = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{32}{x} + x - 14 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{32 + x^2 - 14x}{x} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 32 = 0$ car $x \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-7)^2 - 49 + 32 = 0 \Leftrightarrow (x-7)^2 - 17 = 0$.
c. $(x-7)^2 - 17 = 0 \Leftrightarrow (x - 7 + \sqrt{17})(x - 7 - \sqrt{17}) = 0$
$\Leftrightarrow x = 7 - \sqrt{17}$ ou $x = 7 + \sqrt{17}$ or, seul $7 - \sqrt{17}$ appartient à $]0\,;4\sqrt{2}]$ donc la valeur de x qui convient est $7 - \sqrt{17}$.

Faire le point

54 **a.** 3 est solution de l'équation $f(x) = 0$ signifie $f(3) = 0$ et $3 \in D$.

b. 7 est solution de l'inéquation $f(x) < 0$ signifie $f(7) < 0$ et $7 \in D$.

c. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont les abscisses des points de $(\mathcal{C}_f)$ qui ont une ordonnée égale à 2.

d. Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sont les abscisses des points de $(\mathcal{C}_f)$ qui sont sous l'axe des abscisses.

55 Si $x^2 = 9$ alors $x = 3$. Si $x^2 \geqslant 25$ alors $x \geqslant 5$.

L'erreur commise est de résoudre l'équation et l'inéquation dans $[0 ; +\infty[$ et non dans $\mathbb{R}$.

• Si $\frac{3}{x+1} > 2$ alors $\frac{x+1}{3} < \frac{1}{2}$. L'erreur commise est de ne pas tenir compte du signe de $\frac{3}{x+1}$ et de la valeur de x qui annule $x + 1$.

• Si $\frac{a}{b} \leqslant 1$ alors $a \leqslant b$. L'erreur commise est de ne pas tenir compte du signe de b (et le cas où $b = 0$). La proposition n'est vraie que pour $b > 0$.

• $\sqrt{6 - 5x} = x \Leftrightarrow 6 - 5x = x^2$. L'équivalence est fausse dans le cas où $x < 0$ et où -6 est une solution de l'équation $6 - 5x = x^2$.

Réponses correctes :

• $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$.

• $x^2 \geqslant 25 \Leftrightarrow x^2 - 25 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 5) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -5] \cup [5 ; +\infty[$ à l'aide d'un tableau de signes.

• $\frac{3}{x+1} > 2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3 - 2(x+1)}{x+1} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 - 2x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1 ; \frac{1}{2}[$

à l'aide d'un tableau de signes.

• Si $\frac{a}{b} \leqslant 1$ et $b > 0$ alors $a \leqslant b$.

Si $\frac{a}{b} \leqslant 1$ et $b < 0$ alors $a \geqslant b$.

• $\sqrt{6 - 5x} = x$.

Condition d'existence de $\sqrt{6 - 5x}$:

$6 - 5x \geqslant 0 \Leftrightarrow -5x \geqslant -6 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{6}{5}$.

Par ailleurs si x est solution de l'équation $\sqrt{6 - 5x} = x$ alors $x \geqslant 0$ car $\sqrt{6 - 5x} \geqslant 0$ donc l'équation $\sqrt{6 - 5x} = x$ est à résoudre dans l'intervalle $[0 ; \frac{6}{5}]$.

Pour $x \in [0 ; \frac{6}{5}]$ on a $x \geqslant 0$ donc :

$\sqrt{6 - 5x} = x \Leftrightarrow 6 - 5x = x^2$.

56 Pour résoudre l'inéquation $ax \geqslant 0$ on a besoin de connaître le signe de a.

Il y a trois cas possibles selon que a soit strictement positif, strictement négatif ou nul.

• Si $a > 0$, alors $ax \geqslant 0$ équivaut à $x \geqslant 0$.

• Si $a < 0$, alors $ax \geqslant 0$ équivaut à $x \leqslant 0$.

• Si $a = 0$, alors $ax \geqslant 0$ équivaut à $0x \leqslant 0$ qui est vérifiée pour tout nombre réel x.

57 **1.**

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x + 1)(2 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a. $(x + 1)(2 - x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$.

b. $\frac{x+1}{2-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1 ; 2[$.

c. $\frac{2-x}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup [2 ; +\infty[$.

d. $\frac{x^2(2-x)}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2-x}{x+1} \leqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup \{0\} \cup [2 ; +\infty[$.

e. $\frac{2-x}{x^2(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2-x}{x+1} \leqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup [2 ; +\infty[$.

f. $\frac{(2-x)(x^2+3)}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+1} \leqslant 0$ car $x^2 + 3 > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup [2 ; +\infty[$.

58 **a.** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ par lecture graphique.

b. $f(1) = 2 \times 1^2 + 1 + 1 = 4$ et

$g(1) = 1^2 + \frac{11}{12} + \frac{23}{12} = 1 + \frac{34}{12} = 1 + \frac{17}{6} = \frac{23}{6}$

donc $f(1) \neq g(1)$ et la conjecture du **a.** est fausse.

On peut vérifier que $f(-1) = g(-1)$.

c. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 = x^2 + \frac{11}{12}x + \frac{23}{12}$

$\Leftrightarrow x^2 + x - \frac{11}{12}x + 1 - \frac{23}{12} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{11}{12} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{24}\right)^2 - \left(\frac{1}{24}\right)^2 - \frac{11}{12} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{24}\right)^2 - \frac{529}{(24)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{24}\right)^2 - \left(\frac{23}{24}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{24} - \frac{23}{24}\right)\left(x + \frac{1}{24} + \frac{23}{24}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{22}{24}\right)\left(x + \frac{24}{24}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{11}{12}\right)(x + 1) = 0.$

d. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - \frac{11}{12} = 0$ ou $x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{11}{12}$ ou $x = -1$.

Commentaire : -1 est une solution exacte tandis que 1 n'est qu'une valeur approchée de la solution exacte qui est 11/12.

59 $3(x+1)^2 = 0$ pour $x = -1$; $3(x+1)^2 > 0$ pour $x \neq -1$.

$-4\sqrt{x^2+3} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$17|2 - 5x| = 0$ pour $x = \frac{2}{5}$; $17|2 - 5x| > 0$ pour $x \neq \frac{2}{5}$.

• $3 + 4x = 0$ pour $x = -\frac{3}{4}$; $3 + 4x > 0$ pour $x > -\frac{3}{4}$, $3 + 4x < 0$ pour $x < -\frac{3}{4}$.

• $-2x + 5 = 0$ pour $x = \frac{5}{2}$, $-2x + 5 > 0$ pour $x < \frac{5}{2}$, $-2x + 5 < 0$ pour $x > \frac{5}{2}$.

• $\frac{3}{-x^2 - 2} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• $\frac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$; $\frac{1}{x} < 0$ pour $x < 0$.

• $-\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+5} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• $(x-1)^2(2-x)^6(2x^4+3) = 0$ pour $x = 1$ et $x = 2$.
$(x-1)^2(2-x)^6(2x^4+3) > 0$ pour $x \neq 1$ et $x \neq 2$.

• $x^3(2x^2+3)(-x^2-2) = 0$ pour $x = 0$

$x^3(2x^2+3)(-x^2-2) > 0$ pour $x < 0$

$x^3(2x^2+3)(-x^2-2) < 0$ pour $x > 0$.

60 **1.** ① J'étudie le signe de $ax + b$ suivant les valeurs de x.

② J'en déduis, suivant les valeurs de x, une expression de $|ax + b|$, sans valeur absolue.

③ Je résous chacune des équations suivant les valeurs de x.

2. a.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		$-$	0	$+$	
$\lvert 2x-3\rvert =$	$-2x+3$			$2x-3$	

• Sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$, $|2x - 3| = 4 \Leftrightarrow -2x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

• Sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$, $|2x - 3| = 4 \Leftrightarrow 2x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

or $-\frac{1}{2} \in]-\infty ; \frac{3}{2}[$ et $\frac{7}{2} \in [\frac{3}{2} ; +\infty[$

donc $|2x - 3| = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{7}{2}$.

b.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x + 1$		$+$	0	$-$	
$\lvert -x+1\rvert =$	$-x+1$			$x-1$	

• Sur $]-\infty ; 1[$, $|-x + 1| > 5 \Leftrightarrow -x + 1 > 5 \Leftrightarrow -4 > x$.

• Sur $[1 ; +\infty[$, $|-x + 1| > 5 \Leftrightarrow x - 1 > 5 \Leftrightarrow x > 6$

donc $|-x + 1| > 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -4[\cup]6 ; +\infty[$.

Se tester

61 à **64** Voir Manuel de l'élève page 261.

Exercices d'approfondissement

65 **a.** Par lecture graphique l'équation $x^2-6x+\frac{181}{20}=0$ admet une seule solution 3.

b. $f(x)=x^2-6x+\frac{181}{20}=(x-3)^2-9+\frac{181}{20}$

$=(x-3)^2-\frac{180}{20}+\frac{181}{20}=(x-3)^2+\frac{1}{20}$.

c. Pour tout nombre réel x on a $(x-3)^2\geqslant 0$

donc $(x-3)^2+\frac{1}{20}\geqslant\frac{1}{20}>0$.

Par conséquent, l'équation $x^2-6x+181/20=0$ n'admet pas de solution et la conjecture du **a.** est fausse.

66 **1.** Par lecture graphique :

• $f(x)=0\Leftrightarrow x=-0{,}3$ ou $x=1$.

• $f(x)=-1\Leftrightarrow x=0$ ou $x=0{,}6$.

• $f(x)=-2$ n'admet pas de solution.

2. $(x-1)(3x+1)=3x^2+x-3x-1=3x^2-2x-1=f(x)$.

• $3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)-\frac{4}{3}=3x^2-2x+\frac{3}{9}-\frac{4}{3}$

$=3x^2-2x-\frac{3}{3}$

$=3x^2-2x-1=f(x)$.

3. $f(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(3x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\frac{1}{3}$.

• $f(x)=-1\Leftrightarrow 3x^2-2x-1=-1\Leftrightarrow 3x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow x(3x-2)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{2}{3}$.

• $f(x)>0\Leftrightarrow(x-1)(3x+1)>0$

$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;-1/3[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ à l'aide d'un tableau de signes.

• $f(x)\geqslant-\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}\geqslant-\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\geqslant 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\right.$.

4. $f(x)=k\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=k\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=k+\frac{4}{3}$

donc :

a. pour $k=-1{,}3$ l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique ;

pour $k>-1{,}3$ l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions ;

pour $k<-1{,}3$ l'équation $f(x)=k$ n'admet pas de solution.

b. $f(x)=k\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=k\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=k+\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{k+\frac{4}{3}}{3}$.

• Pour $k=-\frac{4}{3}$, $\frac{k+\frac{4}{3}}{3}=0$ et $f(x)=k$ admet une seule solution.

• Pour $k>-4/3$, $\frac{k+\frac{4}{3}}{3}>0$ et $f(x)=k$ admet deux solutions.

• Pour $k<-4/3$, $\frac{k+\frac{4}{3}}{3}<0$ et $f(x)=k$ n'admet pas de solution.

67 **a.** $f(x)=1\Leftrightarrow(x-1)^4=1\Leftrightarrow(x-1)^4-1=0$

$\Leftrightarrow[(x-1)^2-1][(x-1)^2+1]=0$

$\Leftrightarrow[(x-1)+1][(x-1)-1][(x-1)^2+1]=0$

$\Leftrightarrow x(x-2)[(x-1)^2+1]=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x-2=0$ car $(x-1)^2+1>0$ puisque $(x-1)^2\geqslant 0$.

b. $f(x)\geqslant 1\Leftrightarrow x(x-2)[x-1)^2+1]\geqslant 0\Leftrightarrow x(x-2)\geqslant 0$ car $(x-1)^2+1>0$

$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;0]\cup[2\,;+\infty[$ à l'aide d'un tableau de signes.

• Pour tout nombre réel x on a $(x-1)^2\geqslant 0$ donc $(x-1)^4\geqslant 0$. Par conséquent $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

68 **a.** Pa lecture graphique, on a :

• $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au-dessous de $(\mathscr{C}_g)$ pour $x<0$.

• $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont confondues pour $x=0$.

• $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$ pour $x>0$.

b. $f(0)=0^3+0=0=g(0)$.

• Pour $x>0$ $f(x)-g(x)=x^3+x-|x|=x^3+x-x=x^3>0$.

• Pour $x<0$ $f(x)-g(x)=x^3+x-(-x)=x^3+2x$

$=x(x^2+2)<0$ car $x^2+2>0$ puisque $x^2\geqslant 0$.

69 **a.** Conjecture graphique : $(\mathscr{C}_f)$ est située au-dessous de $(\mathscr{C}_g)$ pour $x\in\,]0\,;1[\,\cup\,[1{,}5\,;+\infty[$.

b. $f(x)-g(x)=\frac{x}{x-1}-2x=\frac{x}{x-1}-\frac{2x(x-1)}{x-1}$

$=\frac{x-2x^2+2x}{x-1}=\frac{3x-2x^2}{x-1}=\frac{x(3-2x)}{x-1}$.

À l'aide d'un tableau de signes, on a :

$\frac{x(3-2x)}{x-1}\leqslant 0\Leftrightarrow x\in\,]0\,;1[\,\cup\,[\frac{3}{2}\,;+\infty[$.

70 **a.** $AE^2 = AF^2 = DF^2 + AD^2 = x^2 + 10^2 = x^2 + 100$.
$EF^2 = CE^2 + CF^2 = (10 - x)^2 + (10 - x)^2 = 2(10 - x)^2$
$= 2(100 - 20x + x^2) = 200 - 40x + 2x^2$
$= 2x^2 - 40x + 200$.

Le triangle AEF est équilatéral si et seulement si :

$EF^2 = AE^2 = AF^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 200 = x^2 + 100$
$\Leftrightarrow x^2 - 40x + 100 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 20)^2 - 400 + 100 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 20)^2 - 300 = 0$.

b. $(x-20)^2 - 300 = 0 \Leftrightarrow (x - 20 + \sqrt{300})(x - 20 - \sqrt{300}) = 0$
$\Leftrightarrow x = 20 - \sqrt{300}$ ou $x = 20 + \sqrt{300}$ or $x \in [0 ; 10]$ donc l'unique solution est $20 - \sqrt{300} = 20 - 10\sqrt{3}$.

71 Notons x la longueur en km du segment $[CM]$. On a $IM = CM = x$ donc :

• Aire $(IAB) = \frac{1}{2} AB \times MB = \frac{1}{2} \times 1 \times (1 - x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.

• Aire $(IMCD) = CM \times \frac{CD + IM}{2} = x \frac{10 + x}{2} = x\left(5 + \frac{x}{2}\right)$
$= 5x + \frac{1}{2}x^2$.

Aire $(IMCD)$ = Aire $(IAB) \Leftrightarrow 5x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 11x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{125}{4} = 0$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{2} + \sqrt{\frac{125}{4}}\right)\left(x + \frac{11}{2} - \sqrt{\frac{125}{4}}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{11}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2}\right) = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{11}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2}$ ou $x = -\frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2}$ or $x \in [0 ; 1]$ donc $-\frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution du problème.

72 Pour tout nombre réel x on a $x^2 \geqslant 0$, $x^4 \geqslant 0$ et $x^6 \geqslant 0$ donc $x^6 + 3x^4 + x^2 + 2 \geqslant 2$ par conséquent l'équation $x^6 + 3x^4 + x^2 + 2 = 0$ n'admet pas de solution.

73 **1.** $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. $(a - 1)^3 = (x + (-1))^3 = x^3 + 3x^2(-1) + 3x(-1)^2 + (-1)^3$
$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

3. a. $(I) \Leftrightarrow X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow (X - 1)^3 \leqslant 0$.

b. $(I) \Leftrightarrow (X - 1)^3 \leqslant 0 \Leftrightarrow X - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1 ; 1]$ à l'aide d'un tableau de signes.

74 **1.** Notons O le centre de la sphère, C le centre de la surface colorée et M un point de la périphérie de cette dernière. Le triangle OCM est rectangle en C et on a $OC = |R - h|$.

$CM^2 = OM^2 - OC^2 = R^2 - |R - h|^2 = R^2 - (R - h)^2$
$= R^2 - (R^2 - 2Rh + h^2) = 2Rh - h^2$.

2. L'aire de la surface colorée est égale à :
$\pi CM^2 = \pi (2Rh - h^2)$.

a. Elle est égale à πR^2 si et seulement si :
$\pi R^2 = \pi (2Rh - h^2) \Leftrightarrow R^2 = 2Rh - h^2 \Leftrightarrow R^2 - 2Rh + h^2 = 0$
$\Leftrightarrow (R - h)^2 = 0 \Leftrightarrow R - h = 0 \Leftrightarrow R = h$.
(Le résultat était prévisible).

b. Elle est égale à 0 si et seulement si $\pi(2Rh - h^2) = 0$
$\Leftrightarrow 2Rh - h^2 = 0 \Leftrightarrow h(2R - h) = 0 \Leftrightarrow h = 0$ ou $h = 2R$.
Les résultats étaient prévisibles puisque pour $h = 0$ et $h = 2R$, la surface colorée est réduite à un point.

3. Pour $R = 1$, l'aire de la surface colorée est égale à $\pi(2h - h^2)$ donc elle est supérieure ou égale à 1 si et seulement si :

$\pi(2h - h^2) \geqslant 1 \Leftrightarrow 2h - h^2 \geqslant \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow 2h - h^2 - \frac{1}{\pi} \geqslant 0$
$\Leftrightarrow h^2 - 2h + \frac{1}{\pi} \leqslant 0 \Leftrightarrow (h - 1)^2 - 1 + \frac{1}{\pi} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (h - 1)^2 - \frac{\pi - 1}{\pi} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \left(h - 1 + \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}}\right)\left(h - 1 - \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}}\right) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow x \in \left[1 - \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}} ; 1 + \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}}\right]$ à l'aide d'un tableau de signes.

75 **a.** Par lecture graphique, 1 est solution de (E).

b. $1^3 - 2 \times 1^2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 - 2 + 1 = 0$.

c. $x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ c - b = \frac{3}{4} \\ -c = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$

d. $(E) \Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 - x - \frac{1}{4}\right) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right] = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{4}\right] = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

76 **a.** $x^3-2x^2=x^2(x-2)$.

b. $f(x)=x^3-2x^3-x+2=x^2(x-2)-(x-2)$

$=(x-2)(x^2-1)=(x-2)(x-1)(x+1)$.

d. $f(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow x\in\ ]-\infty\ ;\ -1]\cup[1\ ;\ 2]$ à l'aide d'un tableau de signes.

77 **a.** $f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2-9+10=(x-3)^2+1$.

b. $f(x)=k \Leftrightarrow (x-3)^2+1=k \Leftrightarrow (x-3)^2=k-1$ donc :

• pour $k=1$, $(\mathscr{C}_f)$ et (dk) ont un seul point d'intersection ;

• pour $k>1$ on a $k-1>0$ donc $(\mathscr{C}_f)$ et (dk) ont deux points d'intersection ;

• pour $k<1$ on a $k-1<0$ donc $(\mathscr{C}_f)$ et (dk) n'ont aucun point d'intersection.

c. Pour $k>1$ on a $f(x)-k=(x-3)^2-(k-1)$

$=(x-3)^2-(\sqrt{k-1})^2=(x-3-\sqrt{k-1})(x-3+\sqrt{k-1})$.

À l'aide d'un tableau du signes, on obtient :

$f(x-k<0$ pour $x\in]3-\sqrt{k-1}\ ;\ 3+\sqrt{k-1}[$;

$f(x)-k=0$ pour $x=3-\sqrt{k-1}$ et pour $x=3+\sqrt{k-1}$;

$f(x)-k>0$ pour $x\in]-\infty\ ;\ 3-\sqrt{k-1}[\cup]3+\sqrt{k-1}\ ;\ +\infty[$.

78 On suppose que les trajectoires du bus, du cycliste et du passager potentiel sont en ligne droite.

1. La vitesse du cycliste est 18 km/h, c'est-à-dire 5 m/s.

Soit t le temps mis par le cycliste pour rattraper le bus.

Pour $0\leqslant t\leqslant 30$, les distances parcourues par le bus et le cycliste sont respectivement : $\frac{t^2}{10}$ et $5t$.

a. Le cycliste rattrape le bus équivaut à :

$\begin{cases}\frac{t^2}{10}+22{,}5=5t\\ 0\leqslant t\leqslant 30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t^2-50t+225=0\\ 0\leqslant t\leqslant 30\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(t-45)(t-5)=0\\ 0\leqslant t\leqslant 30\end{cases}$ donc le cycliste rattrapera le bus au bout de 5 secondes, c'est-à-dire à $\frac{5^2}{10}=2{,}5$ mètres de l'arrêt de bus.

b. Le temps mis par le bus pour rattraper à son tour le cycliste, qui doit vérifier le même système, ne peut être que de 45 secondes. Avec les données de l'énoncé ($0\leqslant t\leqslant 30$) cela ne peut être assuré.

2. Pour $0\leqslant t\leqslant 30$, les distances parcourues par le bus et le passager potentiel sont respectivement : $\frac{t^2}{10}$ et vt.

Dire que le passager rattrape le bus équivaut à dire que le système (S) $\begin{cases}\frac{t^2}{10}+22{,}5=5t\\ 0\leqslant t\leqslant 30\end{cases}$ a au moins une solution.

a. Lorsque $v=9$ km/h ou $v=2{,}5$ m/s, on obtient :

$\begin{cases}\frac{t^2}{10}+22{,}5=2{,}5t\\ 0\leqslant t\leqslant 30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t^2-25t+225=0\\ 0\leqslant t\leqslant 30\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(t-\frac{25}{2}\right)^2+\frac{275}{4}=0\\ 0\leqslant t\leqslant 30\end{cases}$;

ce système n'ayant pas de solution, le passager ne peut pas rattraper le bus.

b. $\frac{t^2}{10}+22{,}5=vt \Leftrightarrow t^2-10vt+225=0$

$\Leftrightarrow (t-5v)^2-25v^2+225=0$;

cette équation a au moins une solution équivaut à :

$-25v^2+225\leqslant 0 \Leftrightarrow v^2\geqslant\frac{225}{25} \Leftrightarrow v^2\geqslant 9 \Leftrightarrow v\geqslant 3$;

de plus, pour $v=3$ l'équation précédente, qui s'écrit « $(t-15)^2=0$ », a pour solution 15 et $0\leqslant 15\leqslant 30$;

donc la valeur minimale de v pour que le passager puisse rattraper le bus est : 3 m/s ou 10,8 km/h.

79 **a.** Par lecture graphique $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=3$.

$f(x)=-(x+2)(x-3)$.

b. $\frac{x}{-x^2+x+6}=\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x-3}$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{(x+2)(x-3)}=\frac{-x+3}{(x+2)(x-3)}+\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-3)}$

$\Leftrightarrow \frac{2x+7}{(x+2)(x-3)}=0$

$\Leftrightarrow 2x+7=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}$.

80 **1. a.** $(E) \Leftrightarrow X^2+3X-4=0$

b. $X^2+3X-4=\left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4=\left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$.

$X^2+3X-4=0 \Leftrightarrow \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(X+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)\left(X+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (X+4)(X-1)=0 \Leftrightarrow X=-4$ ou $X=1$.

c. $(E) \Leftrightarrow \begin{cases}X=-4\\ \text{ou } X=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=-4\\ \text{ou } x^2=1\end{cases} \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

puisque l'équation $x^2 = -4$ n'admet pas de solution car $x^2 \geqslant 0$ et $-4 < 0$.

2. a. On pose $X = \sqrt{x}$.

$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -4 \\ \text{ou } \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

b. On pose $X = 2x - 1$.

$(2x-1)^2 + 3(2x-1) - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -4 \\ \text{ou } 2x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = 1.$

c. On pose $X = \frac{1}{x}$.

$\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -4 \\ \text{ou } \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ ou } x = 1.$

81 $\dfrac{1 + \dfrac{1+x}{1+\frac{1}{x}}}{1 - \dfrac{1-x}{1-\frac{1}{x}}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1 + \dfrac{1+x}{\frac{x+1}{x}}}{1 - \dfrac{1-x}{\frac{x-1}{x}}} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 + \dfrac{(1+x)x}{1+x}}{1 - \dfrac{(1-x)x}{x-1}} = 1 \text{ et } x \neq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1+x} = 1 \text{ et } x \neq 0, x \neq -1 \text{ et } x \neq 1.$

Donc : $S = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0 ; 1\}$.

82 Soit x la somme d'argent qu'avait initialement le marchand.

La 1re année, la somme est : $(x - 100) \times \frac{4}{3} = \frac{4(x-100)}{3}$

La 2e année, la somme est : $\left[\frac{4(x-100)}{3} - 100\right] \times \frac{4}{3}$

La 3e année, la somme est :

$\left[\frac{16}{9}(x - 100) - \frac{4}{3} \times 100\right] \times \frac{4}{3}$;

donc : $\frac{64}{27}x - \frac{11\,200}{27} = 2x \Leftrightarrow x = 560$ F CFA.

83 (I) $\dfrac{(2+x)^2 + (2-x)^2}{(2+x)^2 - (2-x)^2} < -\dfrac{3}{5}$.

Contraintes sur l'inconnue :

$(2+x)^2 - (2-x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow [(2+x)+(2-x)][(2+x)-(2-x)] \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$.

(I) $\Leftrightarrow \dfrac{5[(2+x)^2 + (2-x)^2] + 3[(2+x)^2 - (2-x)^2]}{(2+x)^2 - (2-x)^2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{8(2+x)^2 + 2(2-x)^2}{8x} < 0.$

Donc l'ensemble des solutions de (I) est $]-\infty ; 0[$.

84 **a.** $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.

b. $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$.

c. $x^3 - x2 + x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x - 1 \leqslant 0$ car $x^2 + 1 > 0$ donc (I) $\Leftrightarrow x \leqslant 1$.

85 • $\dfrac{x-2}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x-2} \leqslant 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2} \leqslant 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]2 ; 3].$

• $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{x-1}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{-x+2}{x-2} - \dfrac{1}{x-1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow -1 - \dfrac{1}{x-1} \leqslant 0 \text{ et } x \neq 2 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{x-1} \leqslant 0 \text{ et } x \neq 2.$

$x \in]-\infty ; 0] \cup]1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

• L'ensemble des solutions est $]2 ; 3]$.

86 **a.** $MA^2 = MB^2 + BA^2 = (10 - x)^2 + 3^2$

$= 100 - 20x + x^2 + 9 = x^2 - 20x + 109.$

$MD^2 = MC^2 + CD^2 = x^2 + 4^2 = x^2 + 16.$

$MA = \frac{3}{4}MD \Leftrightarrow MA^2 = \frac{9}{16}MD^2$ car $MA \geqslant 0$ et $MD \geqslant 0$.

$\Leftrightarrow 16MA^2 = 9MD^2$

$\Leftrightarrow 16(x^2 - 20x + 109) = 9(x^2 + 16).$

$\Leftrightarrow 16x^2 - 320x + 1744 = 9x^2 + 144$

$\Leftrightarrow 7x^2 - 320x + 1\,600 = 0$

or $1\,600 - 320x = (40 - 4x)^2 - 16x^2$ donc :

$7x^2 - 320x + 1\,600 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + (40 - 4x)^2 - 16x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (40 - 4x)^2 - 9x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (40 - 4x + 3x)(40 - 4x - 3x) = 0$

$\Leftrightarrow (40 - x)(40 - 7x) = 0$

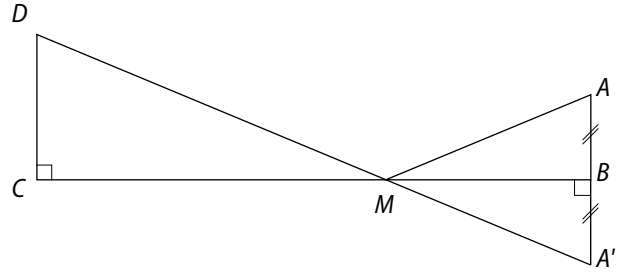
$\Leftrightarrow x = 40 \text{ ou } x = \frac{40}{7} \Leftrightarrow x = \frac{40}{7}$ car $x \in [0 ; 10]$.

b. $MA + MD = \sqrt{x^2 - 20x + 109} + \sqrt{x^2 + 16}$.

Par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par :

$f(x) = \sqrt{x^2 - 20x + 109} + \sqrt{x^2 + 16}$, on trouve que f admet un minimum $m \approx 12{,}2$ pour $x \approx 5{,}2$.

• Justification :



$MD + MA$ est minimum si et seulement si MD + MA' est minimum donc si et seulement si les points D, M et A' sont alignés. Or $(A'B)$ // (CD) donc $MD + MA$ est minimum si et seulement si :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{BA'}{CD} \Leftrightarrow 4MB = 3MC \Leftrightarrow 4(10 - x) = 3x$$
$$\Leftrightarrow 40 - 4x = 3x \Leftrightarrow 40 = 7x \Leftrightarrow x = \frac{40}{7}.$$

87 **1.** $\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v} = \frac{2d}{v_2} \Leftrightarrow \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v} = \frac{2}{v_2}$ car $d \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{2}{v_2} - \frac{1}{v_1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{2v_1 - v_2}{v_1 v_2} \Leftrightarrow v = \frac{v_1 v_2}{2v_1 - v_2}$$

(car $2v_1 - v_2 \neq 0$).

2. a. Pour $v_1 = 18$ et $v_2 = 15$ on a :

$$v = \frac{18 \times 15}{36 - 15} = \frac{18 \times 15}{21} = \frac{18 \times 5}{7} = \frac{90}{7}.$$

b. Pour $v_1 = 2v_2$ on a $v = \frac{2v_2^2}{3v_2} = \frac{2}{3}v_2$.

c. Pour $v_1 = v_2$ on a $v = \frac{v_2^2}{v_2} = v_2$.

14 Équations, inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activités d'introduction

1 Masse d'une bille et d'un dé

1. $5x + 3y = 30$(1) et $10x + 2y = 40$(2).

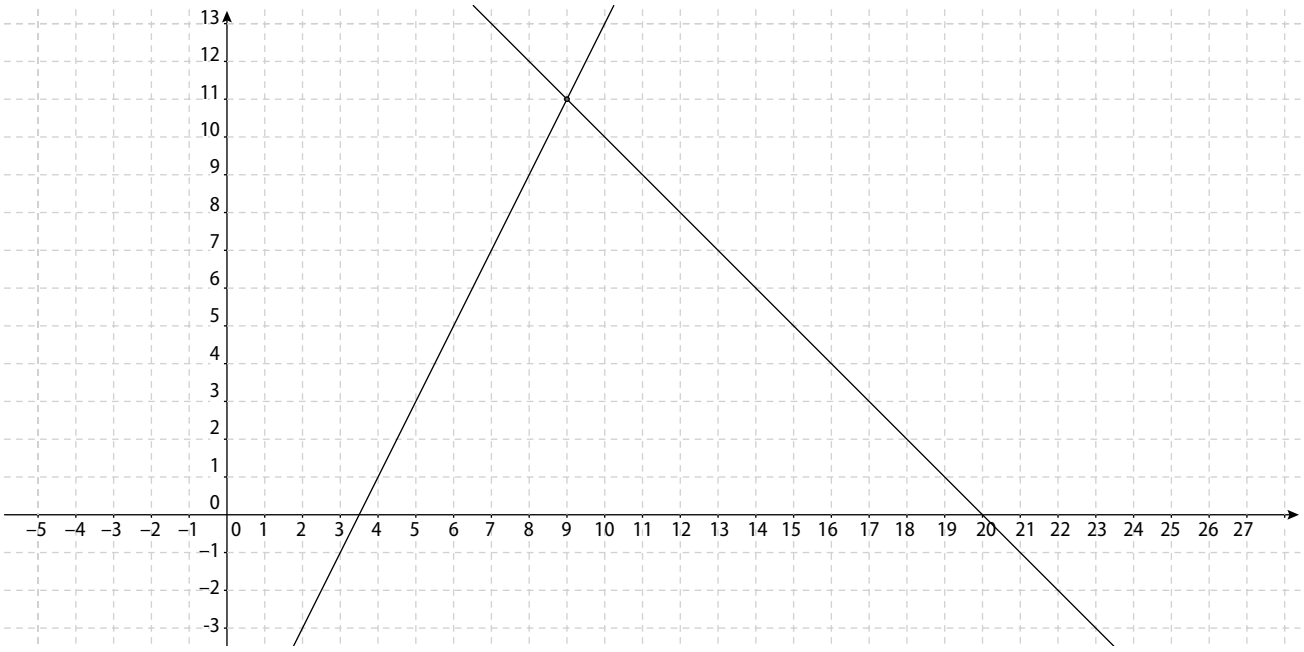
2. a. Il faut rajouter 3 dés. Le poids dans le plateau de droite est alors de 60kg. **b.** $10x + 6y = 60$ (3).

c. $(10x + 6y) - (10x + 2y) = 60 - 40$. Ce qui donne $4y = 20$ et donc $y = 5$.

d. On remplace y par 5 dans l'équation (2) : $10x + 10 = 40$ qui donne $x = 3$.

2 Nombre de DVD

2. a.



b. Le point d'intersection a pour coordonnées (9 ; 11). **c.** Mambo a donc 9 DVD et Gana en a 11.

3. a. $2x - 7 = -x + 20$. **b.** $3x = 27 \Leftrightarrow x = 9$. Par conséquent, $y = 2 \times 9 - 7 = 11$. **c.** Les résultats obtenus par le calcul sont identiques à ceux obtenus par lecture graphique.

3 Une ou plusieurs solutions ?

1. Les deux affirmations sont valides.

2. a. Voir ci-contre.

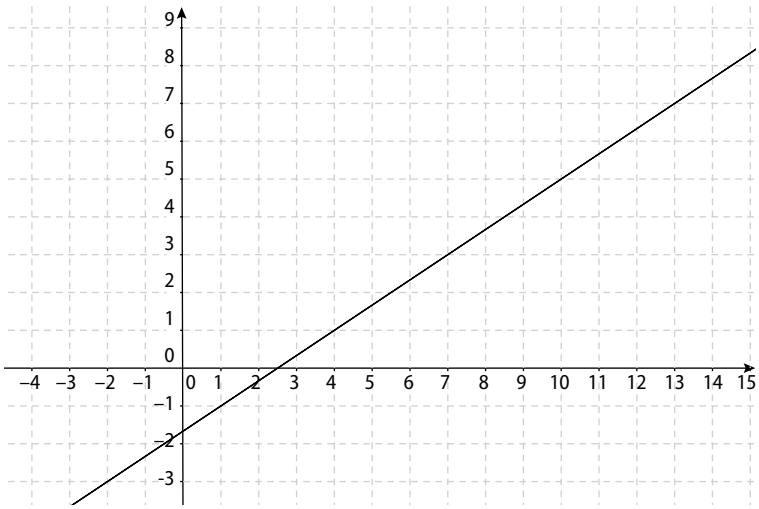
b. Les deux droites sont confondues.

On a une infinité de solutions.

3. a. $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ et $y = \frac{4}{6}x - \frac{10}{6}$.

b. Après simplification par 2 des fractions, la deuxième équation est identique à la première.

c. On a bien $y = \frac{2x - 5}{3}$.



4. a. Graphiquement : voir ci-contre.

b. Les deux droites sont strictement parallèles. On n'a pas de solution.

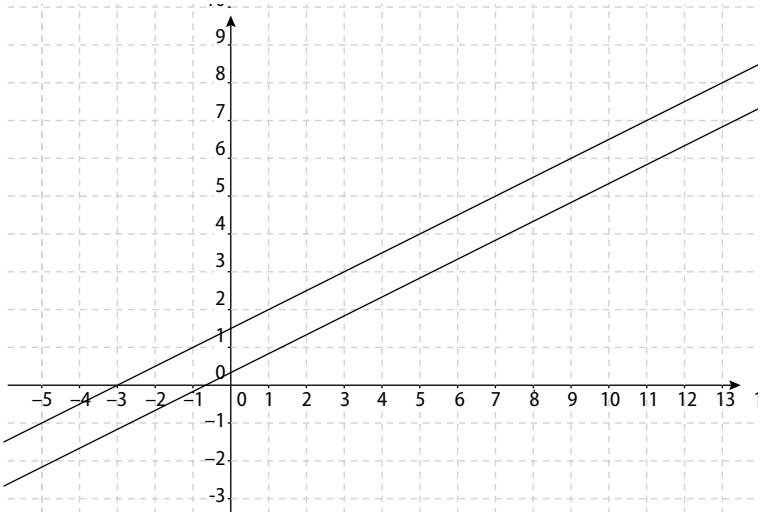
Par le calcul :

a. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ et $y = \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}$.

b. Après simplification des fractions, la deuxième équation devient $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

On en déduit que $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

Et donc que $\frac{3}{2} = \frac{1}{3}$, ce qui est impossible.



4 Fabrication de jouets

1. a. Cette inéquation est la traduction de la contrainte sur le temps de travail journalier.

b. Contrainte sur le stock de bois : $2x + y \leqslant 24$.

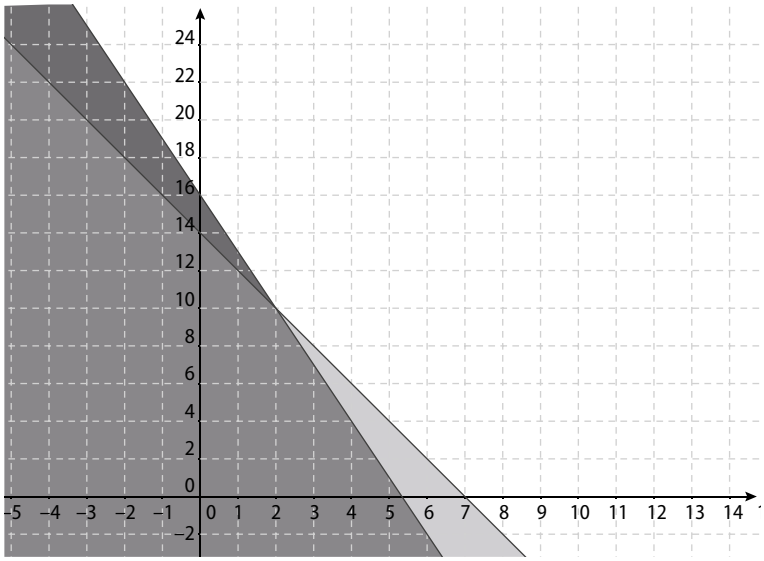
2. Voir ci-contre.

3. a. Les nombres de jouets fabriqués doivent être des nombres entiers naturels.

b. Oui. Le couple (4 ; 3) est solution.

Non. Le couple (5 ; 4) n'est pas solution.

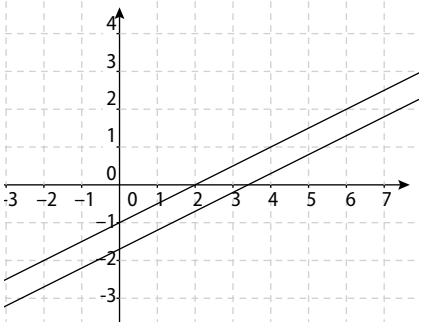
c. L'artisan peut fabriquer au maximum 5 marionnettes, ou 14 voitures.



Savoir-faire

3 Les couples solutions sont : **a.** (3 ; –2) ; **b.** (2 ; 2) ; **c.** (3 ; 0) ; **d.** (–2 ; 3) ; **e.** (15 ; 4) ; **f.** $\left(\frac{4}{3} ; 1\right)$.

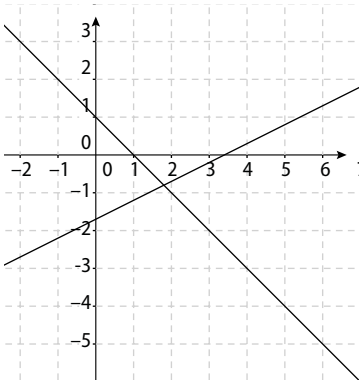
4 **a.** dét = 5 × (– 2) – 1 × (– 10) = 0.



Le système n'a donc pas une solution unique.

Les deux droites sont strictement parallèles, le système n'a donc pas de solution.

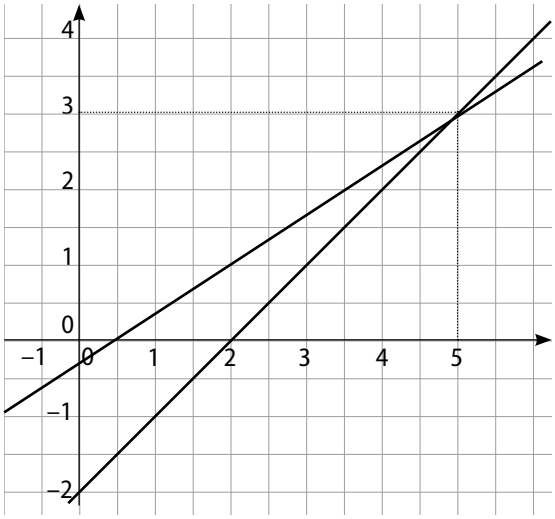
b. dét = 5 × 2 – 2 × (– 1) = 12. 12 ≠ 0 donc le système a une solution unique.



Graphiquement, le couple solution est (1,8; 0,8).

c. dét = 1 × (–3) – 2 × (– 1) = –1. –1 ≠ 0 donc le système a une solution unique.

5 Graphiquement, le couple de solutions est (5 ; 3).



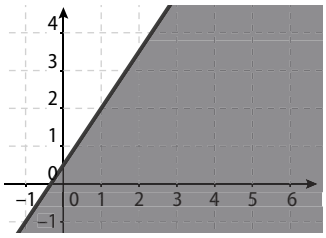
6 dét = $3 \times 10 - 2 \times (15) = 0$.

Graphiquement, on obtient deux droites strictement parallèles. Par combinaisons linéaires, on a :

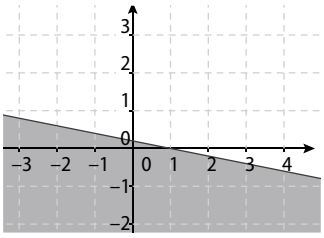
$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 30y = 34 \\ 6x + 30y = 27 \end{cases}$ qui n'a pas de solution.

8 Les solutions sont les demi-plans grisés frontières comprises pour **b.** et **d.**

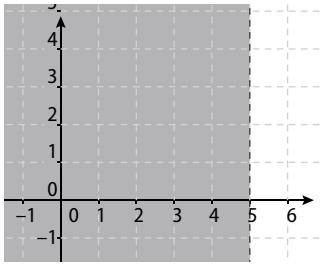
a.



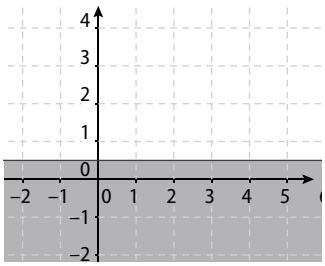
b.



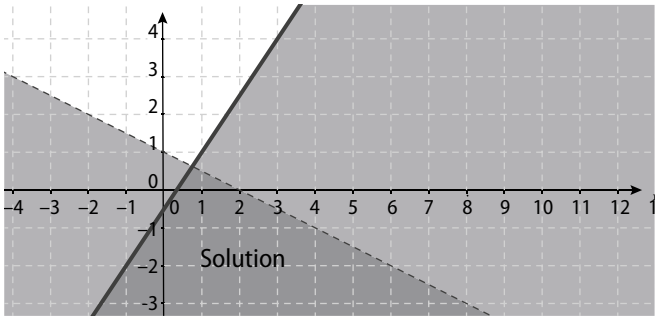
c.



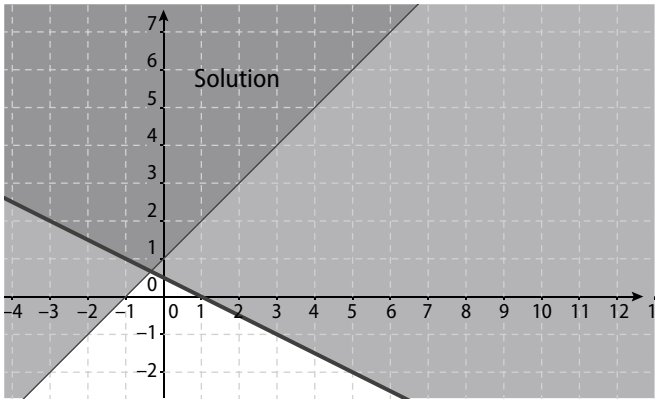
d.



9 **a.**



b.



10 $\begin{cases} y < 2x + 2 \\ y < -x + 3 \end{cases}$.

Exercices d'entraînement

11 Le couple solution est (1 ; –1).

12 $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2y + 1 + y = 7 \end{cases}$

qui donne pour solution le couple (5 ; 2).

13 Par addition des deux équations, on obtient :

$2x = 1$. Le couple solution est : $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

14 (S_1) a pour solution (–1 ; 3),

(S_2) a pour solution (2 ; –2),

(S_3) n'a pas de solution,

(S_4) a pour solution (1 ; 2),

15 Les couples solutions sont :

a. (–1 ; –3) ; **b.** $\left(\frac{12}{13} ; -\frac{5}{13}\right)$; **c.** (2,6 ; –3,4) ; **d.** (1 ; 1).

16 Les couples solutions sont :

a. (2 ; –1) ; **b.** (2; 2) ; **c.** (4 ; –3) ; **d.** (0 ; 2).

17 **a.** $k = -4$; **b.** $k = -1$.

18 L'écran donne la résolution du système :

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases}$ qui a pour solution (2 ; 1).

19 **a.** $\begin{cases} 2x + 3y = 2475 \\ 3x + y = 1825 \end{cases}$ **b.** x = 450 ; y = 525.

c. Il a commandé deux sodas et deux jus de fruit.

20 Les deux nombres entiers naturels x et y sont solution du système : $\begin{cases} x+y=32 \\ x-y=10 \end{cases}$.
Par addition, on trouve $x = 21$ et $y = 11$.

21 Les deux nombres entiers naturels x et y sont solution du système : $\begin{cases} x+y=27 \\ 2x-3y=14 \end{cases}$.
Par substitution, on trouve $x = 19$ et $y = 8$.

22 Les deux nombres entiers naturels x et y, s'ils existent, sont solution du système : $\begin{cases} x+2y=17 \\ 4x+2y=30 \end{cases}$.
Ce système a pour solution $\left(\frac{13}{3} ; \frac{19}{3}\right)$.

23 Les dimensions du rectangle, l et L, sont solution du système : $\begin{cases} 2l+2L=50 \\ l=\frac{L}{3} \end{cases}$.
Par substitution, on trouve $l = 6{,}25$ et $L = 18{,}75$.

24 **a.** x désigne le nombre de victoires et y le nombre de matchs nuls. Le couple $(x ; y)$ est solution du système : $\begin{cases} x+y=18 \\ 3x+y=40 \end{cases}$.
Par addition , on trouve $x = 11$ et $y = 7$.
b. On cherche, par exemple graphiquement, les couples de nombres entiers naturels solutions de l'inéquation $3x + y \geqslant 30$ et de l'inéquation $x + y \leqslant 36$.

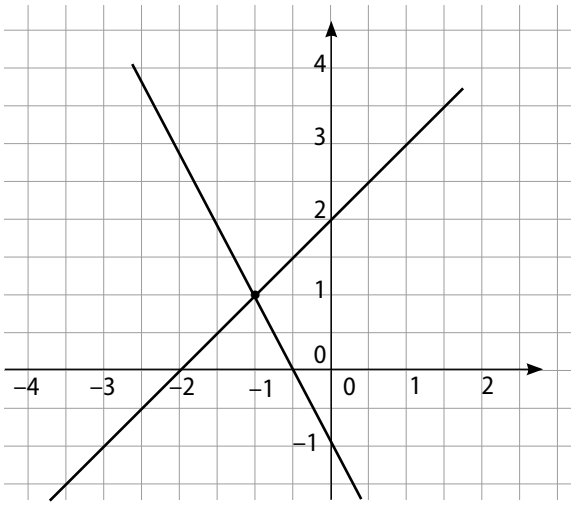
25
$$\begin{cases} \dfrac{15x+12y+80}{x+y+5}=14{,}9 \\ \dfrac{13x+10y+85}{x+y+5}=14{,}4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x+12y+80=(x+y+5)\times 14{,}9 \\ 13x+10y+85=(x+y+5)\times 14{,}4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}1x-2{,}9y=-5{,}5 \\ -1{,}4x-4{,}4y=-13 \end{cases}$$
La solution est le couple (3 ; 2).

26 x désigne le nombre de places debout et y le nombre de places assises. Le couple $(x ; y)$ est solution du système :
$\begin{cases} x+y=3\,550 \\ 950x+1\,900y=4\,664\,500 \end{cases}$
Par substitution, on trouve $x = 2\,190$ et $y = 1\,360$.

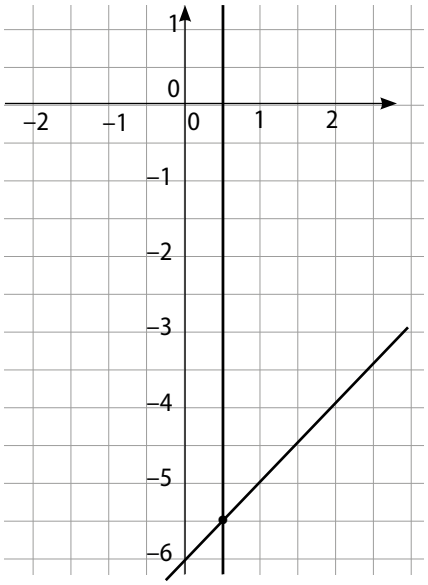
27 **1. a.** (D_3) ; **b.** (D_1) ; **c.** (D_2).
2. a. (1 ; 3) ; **b.** Pas de solution ; **c.** (2,3 ; 1,7).

28 $\begin{cases} y=2x-2 \\ y=-\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$. Solution : (2 ; 2).

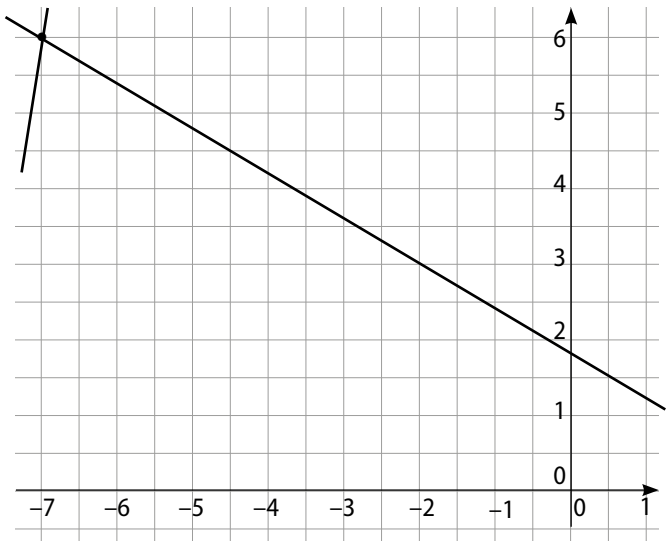
29 **a.** Solution : (–1 ; 1).



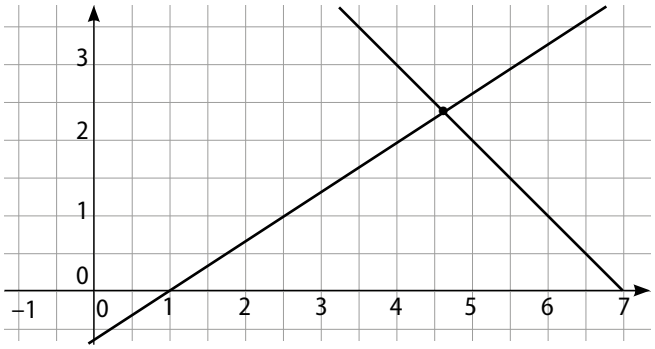
b. Solution : (0,5 ; –5,5).



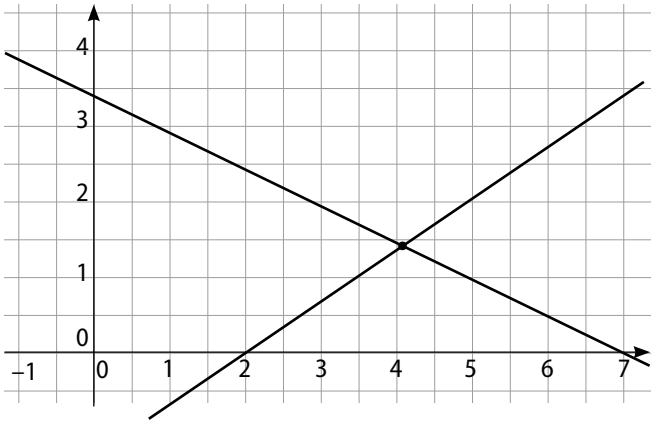
c. Solution : (–7 ; 6).



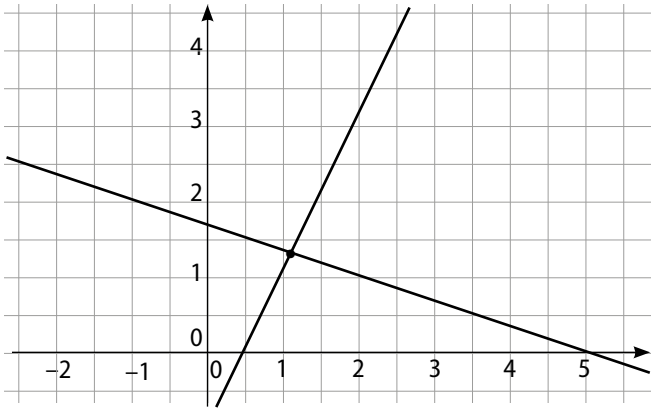
d. Solution : (4,6 ; 2,4).



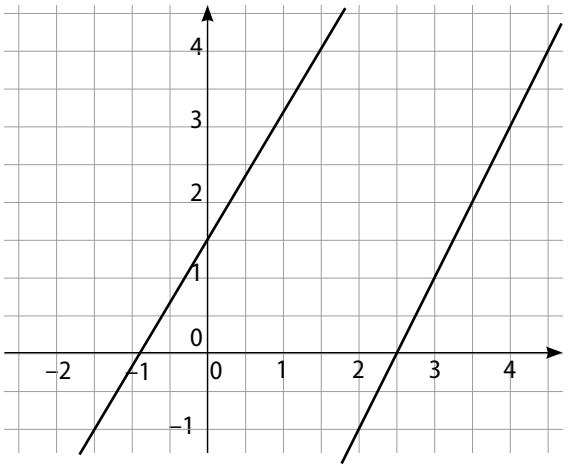
e. Solution : (4,1; 1,4).



f. Solution : (1,1 ; 1,3).



30 Les droites semblent sécantes.

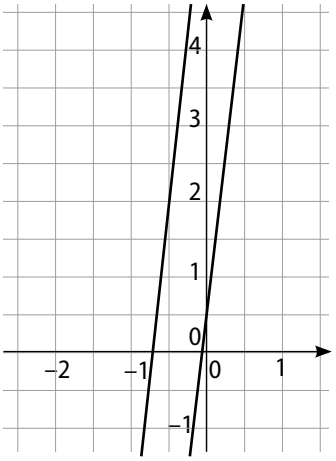


Par le calcul, le couple solution est : (32,5 ; 60).

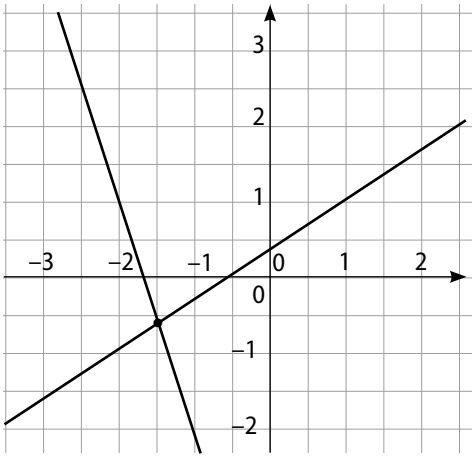
31 Les droites semblent parallèles.

Par le calcul, le couple solution est : $\left(\frac{130}{3} ; 304\right)$.

Donc ces deux droites ne sont pas parallèles.



32 Les droites sont sécantes.



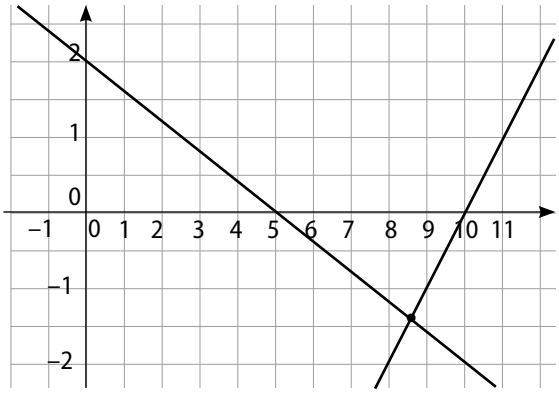
Par lecture graphique, le couple solution semble être : (–1,5 ; – 0,6).

Par le calcul, le couple solution est : $\left(-\frac{16}{11} ; -\frac{7}{11}\right)$.

33 **a.** Les deux droites ont des coefficients directeurs de signes opposés. Elles sont donc sécantes.

b. $(D_1) : y = -\frac{2}{5}x + 2$; $(D_2) : y = x - 10$.

c. Graphiquement, le couple solution est : (8,6 ; –1,4).



d. Par le calcul, $\left(\frac{60}{7} ; -\frac{10}{7}\right)$.

34 **a.** Graphiquement, le couple solution semble être : (1 ; 2).

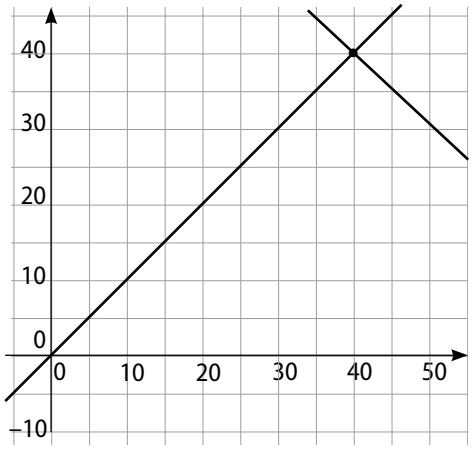
b. Par le calcul, on trouve (1 ; 1,9).

35 **a.** Graphiquement, le couple solution semble être : (0,7 ; 1,7).

b. Par le calcul, on trouve $\left(\frac{2}{3} ; \frac{5}{3}\right)$.

36 **a.** Dans le repère choisi, $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $I(10 ; 10)$ et $J(70 ; 10)$. Les droites (AI) et (BJ) ont pour équations respectives : $y = x$ et $y = -x + 80$.

b. Le couple solution est : (40 ; 40).

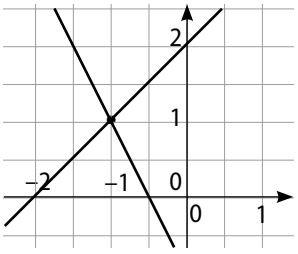


37 **a.** $\vec{u}(1 ; 1)$ et $\vec{v}(1 ; -2)$.

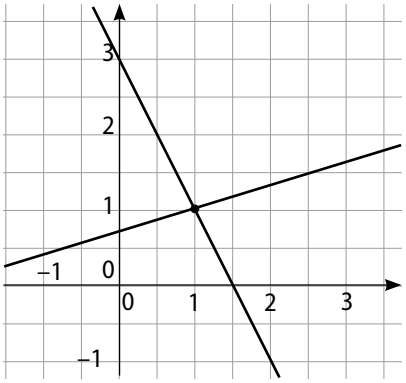
b. dét $(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3$.

Le déterminant n'est pas nul, les vecteurs ne sont pas colinéaires et les deux droites sont sécantes.

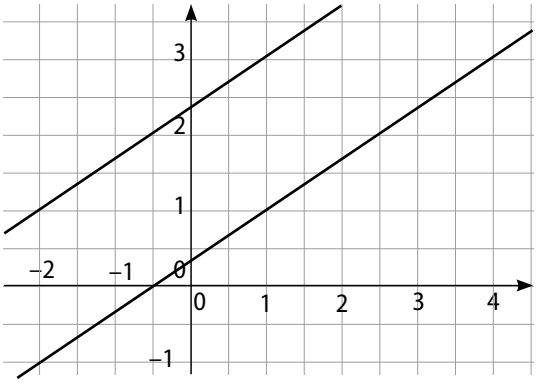
c. Le couple solution est : (–1 ; 1).



38 **a.** dét $(S) = 7$ et $7 \neq 0$. Une solution unique.
Le couple solution est : (1 ; 1).

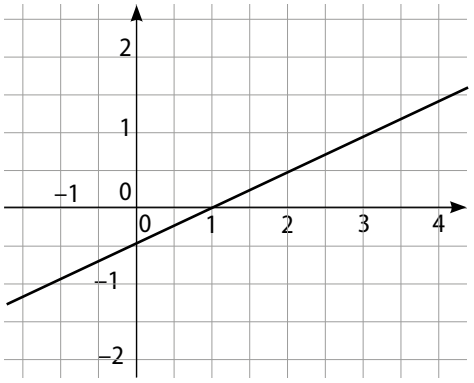


b. dét $(S) = 0$. Infinité ou pas de solution.



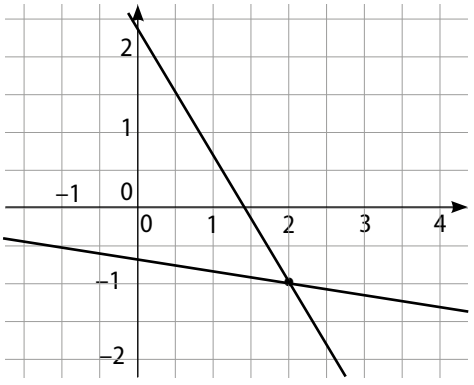
Pas de solution.

c. dét $(S) = 0$. Infinité ou pas de solution.



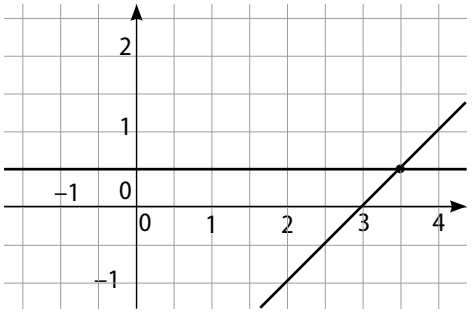
Infinité de solutions : tous les couples de la forme : $(2y + 1; y)$, y étant un nombre réel.

d. dét $(S) = -9$ et $-9 \neq 0$. Une solution unique.



Le couple solution est : (2 ; –1).

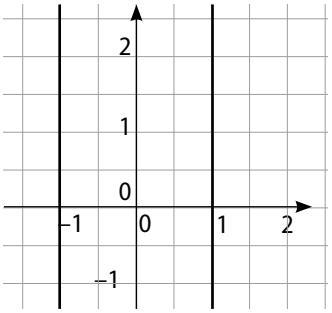
e. dét $(S) = 2$ et $2 \neq 0$. Une solution unique.



Le couple solution est : (3,5 ; 0,5).

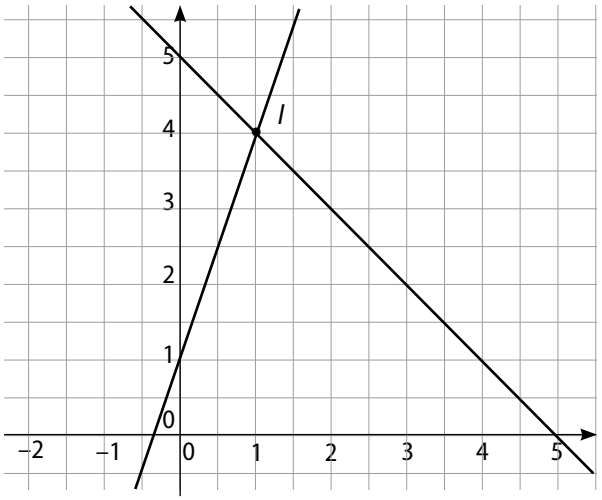
f. dét $(S) = 0$. Infinité ou pas de solution.

Pas de solution.



39 **a.** Les coefficients directeurs des deux droites sont différents, elles sont donc sécantes.

b.



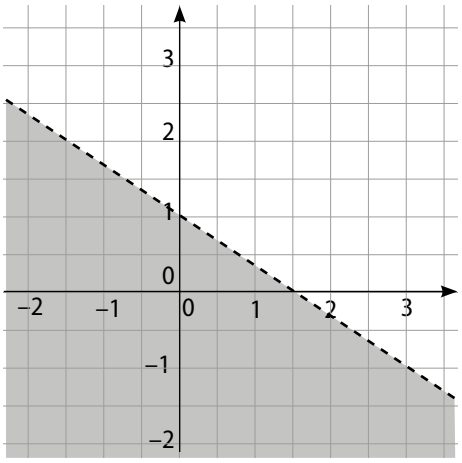
Le point d'intersection est le point $I(1 ; 4)$.

40 A : $x + 2y - 2 > 0$; B : $x + 2y - 2 < 0$;
C : $x + 2y - 2 = 0$.

41 $(P_1) : 3x + 2y \leqslant 5$; $(P_2) : 3x + 2y \geqslant 5$.

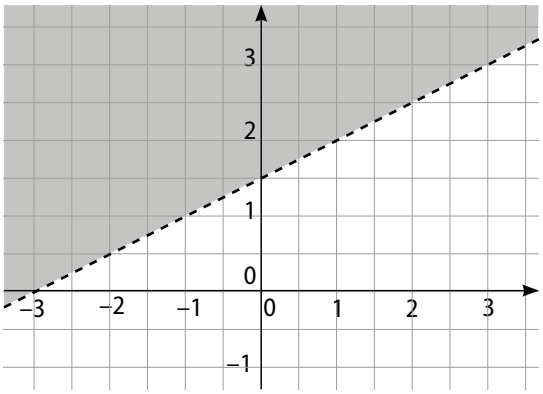
42 $y < -0{,}5x + 5$.

43

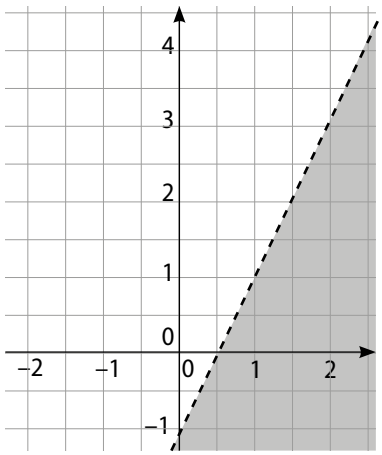


44 **1.** $y \leqslant x + 3$.
2. (–2 ; 1) et (4 ; 2) sont solutions.
3. (2; 2) et (1; 4).

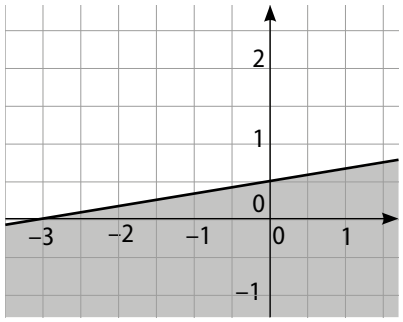
45 **a.**



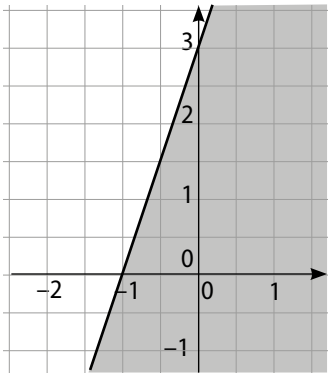
b.



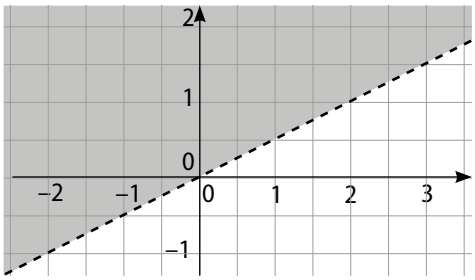
c.



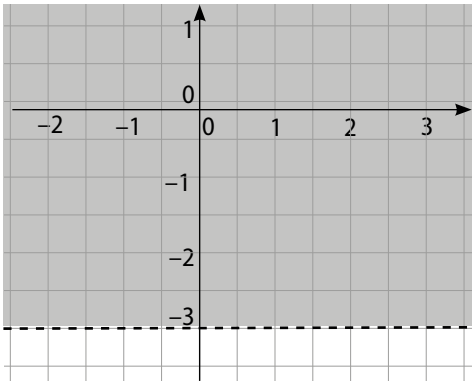
d.



e.

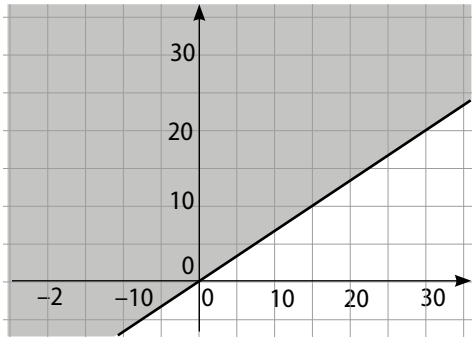


f.



46 **1.** $y \geqslant \frac{2}{3}x$.

2.



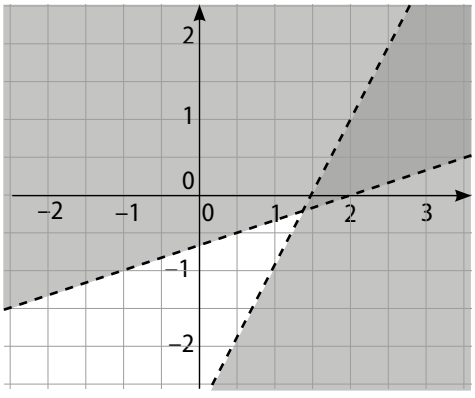
3. a. (10 ; 20), (30 ; 20), (20 ; 30). **b.** Oui.

c. On doit avoir $x + y = 50$ et donc $50 \geqslant \frac{5}{3}x$.
Donc $x \leqslant 30$. Le nombre maximal d'informaticiens est donc de 30.

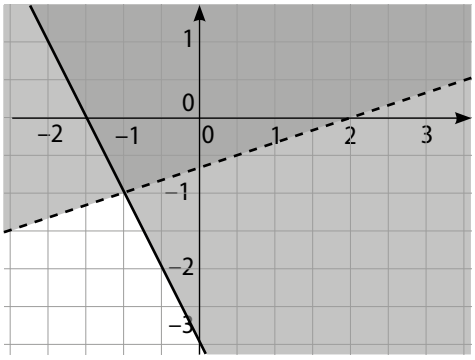
47 $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ y \geqslant 3. \end{cases}$

48 (S_2).

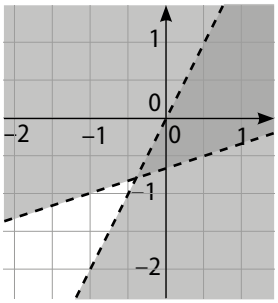
49



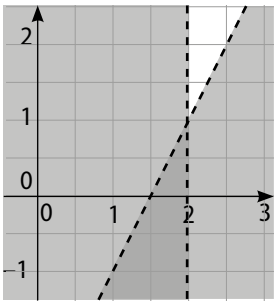
50



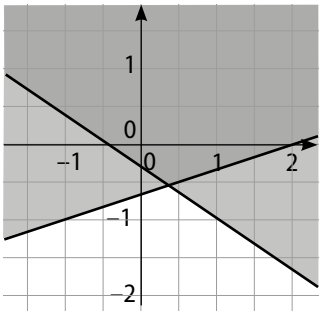
51



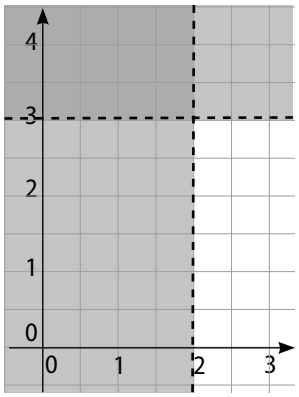
52



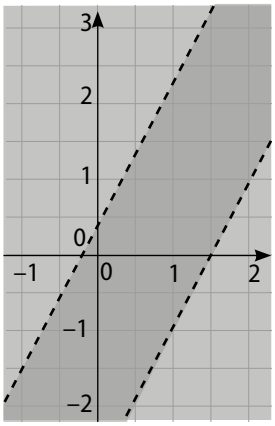
53



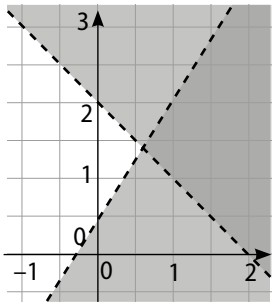
54



55

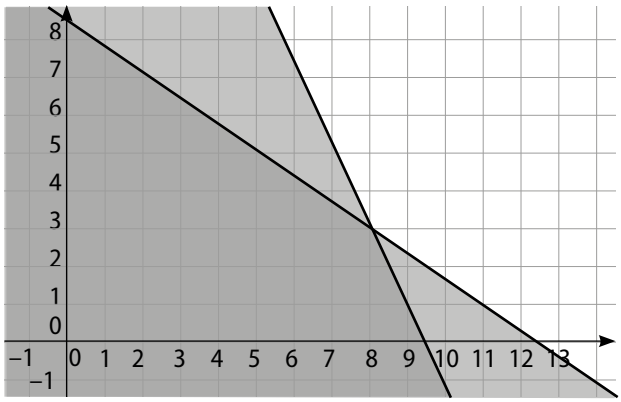


56



57 **a.** $\begin{cases} 0{,}2\,x + 0{,}3\,y \leqslant 2{,}5 \\ 45\,x + 20\,y \leqslant 420. \end{cases}$

b.



c. Il faut lire les coordonnées des points de la droite d'équation $45\,x + 20\,y = 420$ qui sont des nombres entiers : (0 ; 21), (4 ; 12), etc.

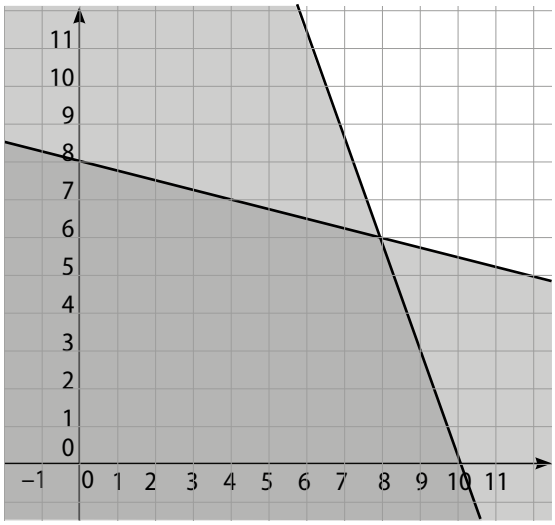
d. (8 ; 3). Ce sont les quantités de gâteaux de chaque sorte lorsque l'on utilise tout le temps et toute la farine.

e. Il faut résoudre le système : $\begin{cases} 0{,}2\,x + 0{,}3\,y = 2{,}5 \\ 45\,x + 20\,y = 420. \end{cases}$

58 x désigne le nombre de petits jouets et y le nombre de grands jouets.

1. $\begin{cases} x + 4\,y \leqslant 32 \\ 3\,x + y \leqslant 30. \end{cases}$

2.



3. a. Oui ; **b.** Non ; **c.** Non.

59 $\begin{cases} -3x + y \leqslant -1 \\ -x + 4y \geqslant 7 \\ 2x + 3y \leqslant 19. \end{cases}$

60 $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x \leqslant 8 \\ y \geqslant 3 \\ y \leqslant 6. \end{cases}$

61 $\begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \leqslant 2 \\ y \geqslant -2 \\ y \leqslant 2. \end{cases}$

Faire le point

62 (S_1) Combinaison linéaire car les coefficients de x sont les mêmes ; (S_2) Substitution car on peut isoler facilement x ou y ; (S_3) Combinaison linéaire ou substitution ; (S_4) Représentation graphique car les deux équations sont des équations réduites de droites.

63 **a.** Les coordonnées de A ne vérifient pas la deuxième inéquation.

Les coordonnées de D vérifient les deux inéquations. La solution est donc la zone qui le contient.

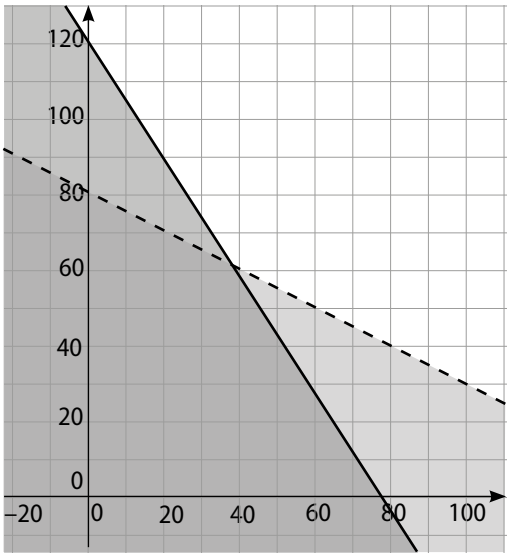
b. $\begin{cases} y < 2\,x + 1 \\ y > -x + 3. \end{cases}$

64 x désigne le nombre de paquets de type A et y le nombre de paquets de type B.

Les contraintes de l'énoncé se traduisent par le système : $\begin{cases} 200\,x + 125\,y \leqslant 15\,000 \\ 50\,x + 125\,y \leqslant 10\,000 \end{cases}$

qui se simplifie en : $\begin{cases} 8\,x + 5\,y \leqslant 600 \\ 2\,x + 5\,y \leqslant 400. \end{cases}$

Une résolution graphique donne l'ensemble des solutions dans la partie foncée. Tous les points à coordonnées entières de cette partie sont valables.



65 **1.** $y = 2\,x + 4$ et $y = 2\,x - 5$.

2. On conjecture que les droites sont parallèles.

3. a. Les coefficients directeurs sont différents les droites sont donc sécantes.

b. Par substitution, on détermine les coordonnées du point d'intersection : (180 ; 355).

66 **a.** $D = 5$, $D_x = -2$ et $D_y = 9$. Le couple solution est : $(-0{,}4\ ;\ 1{,}8)$.

b. $D = -5$, $D_x = 5$ et $D_y = 10$. Le couple solution est : $(-1 ; -2)$.

c. $D = -2$, $D_x = -6$ et $D_y = -4$. Le couple solution est : $(3 ; 2)$.

d. $D = 7$, $D_x = -4$ et $D_y = -5$. Le couple solution est : $\left(-\frac{4}{7} ; -\frac{5}{7}\right)$.

67 **a.** $\det(S) = 2 \times 6 - (-4) \times (-3) = 0$.

b. Les deux équations de (S') sont vérifiées par le couple $\left(\frac{1}{4} ; 0\right)$.

c. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}. \end{cases}$

Se tester

68 à **71** Voir Manuel de l'élève page 261.

Exercices d'approfondissement

72 x désigne le nombre de boules bleues et y le nombre de boules rouges.

a. $\begin{cases} x + y = 10 \\ (x + 3) = 2(y + 2) \end{cases}$

. b. $x = 7$ et $y = 3$.

73 **a.** $\begin{cases} x + y = 9 \\ \overline{yx} = \overline{xy} + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ 10y + x = 10x + y + 27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ -x + y = 3. \end{cases}$

b. $x = 3$ et $y = 6$. Le nombre cherché est donc : 36.

74 $\begin{cases} x + y = 7 \\ \overline{yx} = \overline{xy} + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ 10y + x = 10x + y + 30 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ -x + y = \frac{10}{3}. \end{cases}$

Ce système n'a pas de solution entière. Le nombre n'existe pas.

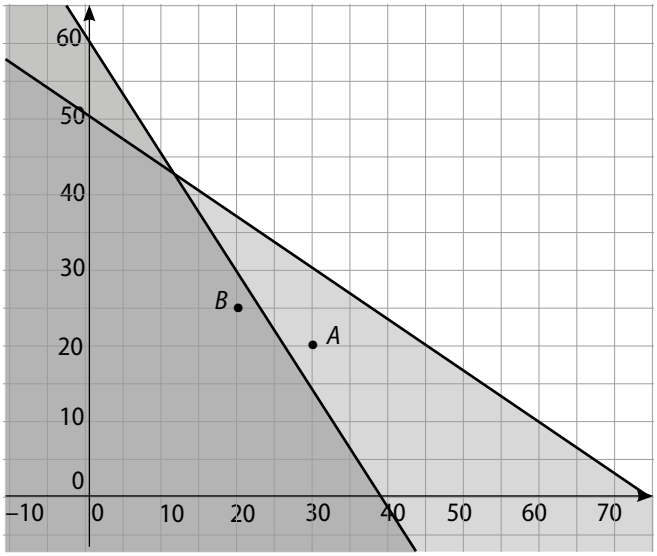
75 $\begin{cases} a + b = 21 \\ a^2 - b^2 = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 21 \\ (a - b)(a + b) = 105 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 21 \\ a - b = 5. \end{cases}$

Les nombres cherchés sont donc $a = 13$ et $b = 8$.

76 **a.** La première inéquation est la traduction de la contrainte horaire, la deuxième de la contrainte sur la quantité de panneaux.

b.



c. $A(30 ; 20)$ n'est pas solution. $B(20 ; 25)$ est solution.

77 $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ z = \frac{5}{3}y \\ \frac{2}{3}y + y + \frac{5}{3}y = 10\,000 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\,000 \\ z = 5\,000 \\ y = 3\,000. \end{cases}$

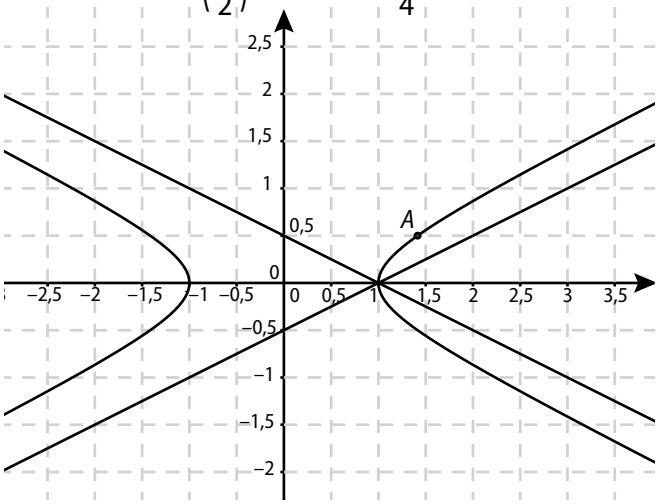
78 **a.** $(S') \begin{cases} 2x + Y = 1 \\ x + 3Y = 11. \end{cases}$

b. Le couple solution est : $(-1,6 ; 4,2)$.

c. $Y = 4{,}2 \Leftrightarrow y = -\sqrt{4{,}2}$ ou $y = \sqrt{4{,}2}$.
Les solutions de (S) sont donc :
$(-1{,}6; -\sqrt{4{,}2})$ et $(-1{,}6; \sqrt{4{,}2})$.

79 **1.** En multipliant membre à membre les deux équations on obtient :
$(x + 2y)(x - 2y) = 1 \times 1 \Leftrightarrow (E)$.

2. On a $(\sqrt{2})^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 - 4 \times \frac{1}{4} = 1$.



3. C'est Acha qui a raison.

4. $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$, ...

80 **a.** Le couple solution est : (2 ; 1).

b. Le couple solution est : $\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$.

c. On pose : $X = x^2$ et $Y = y^2$. On obtient :

(S'_1) $\begin{cases} 2X - Y = -5 \\ X + Y = 17 \end{cases}$

qui a pour solution le couple : (4 ; 13).
Les solutions de (S_1) sont donc :
$(-2; -\sqrt{13})$, $(-2 ; \sqrt{13})$, $(2 ; -\sqrt{13})$ et $(2 ; \sqrt{13})$.
On pose : $X = \sqrt{x}$ et $Y = \sqrt{y}$. On obtient :

(S'_2) $\begin{cases} 2X - Y = -5 \\ X + Y = 17. \end{cases}$

La solution de (S_2) est donc : (16; 169).

81 **a.** (S') a pour solution : (–1 ; 3).

b. $(-1) + 3 = 2$ donc la troisième équation est vérifiée, par conséquent le couple (–1 ; 3) est la solution de (S).

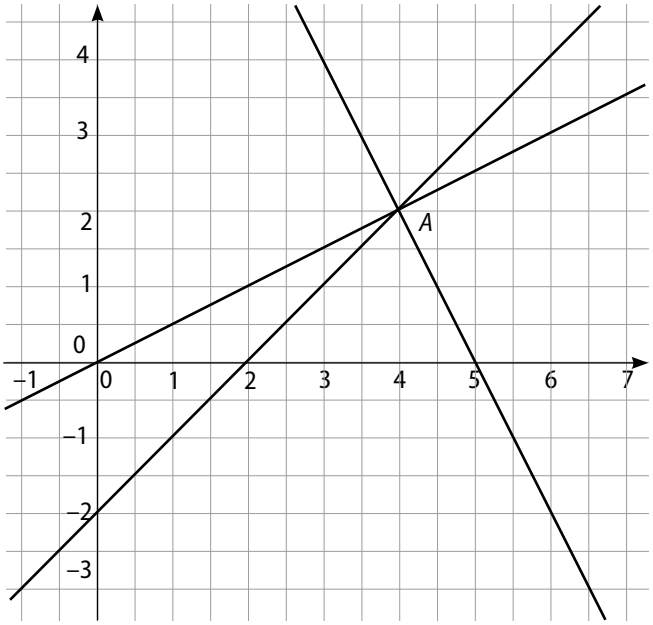
c. (S'_1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 3y = 10 \end{cases}$ a pour solution : (–1 ; 3).

$-2(-1) - 3 = -1$ donc la troisième équation est vérifiée, par conséquent le couple (–1 ; 3) est la solution de (S_1).

(S'_2) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$ a pour solution : (–3 ; 8).

$-3 - 2 \times 8 \neq 6$ donc la troisième équation n'est pas vérifiée, par conséquent (S_2) n'a pas de solution.

82 **a.** Les trois droites sont concourantes au point $A(4 ; 2)$. Le couple solution de (S) est donc (4 ; 2).



b. On vérifie que $x = 4$, $y = 2$ est solution des trois équations.

83 $(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 8 \\ 4x + 2y = -10 \end{cases}$ a pour solution : (–1 ; –3).
$2(-1) - 6(-3) + 4z = 24 \Leftrightarrow z = 2$.
(S) a pour solution le triplet : (–1 ; –3 ; 2).

84 Il est conseillé d'utiliser GeoGebra pour la figure.

a. $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$ solution : $\left(\frac{53}{23} ; \frac{5}{23}\right)$.

b. $\begin{cases} 4x + 9y = 13 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ solution : $\left(\frac{29}{11} ; \frac{3}{11}\right)$.

$\begin{cases} 6x + 7y = 39 \\ -7x - y = -40 \end{cases}$ solution : $\left(\frac{241}{43} ; \frac{33}{43}\right)$.

c. Il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.

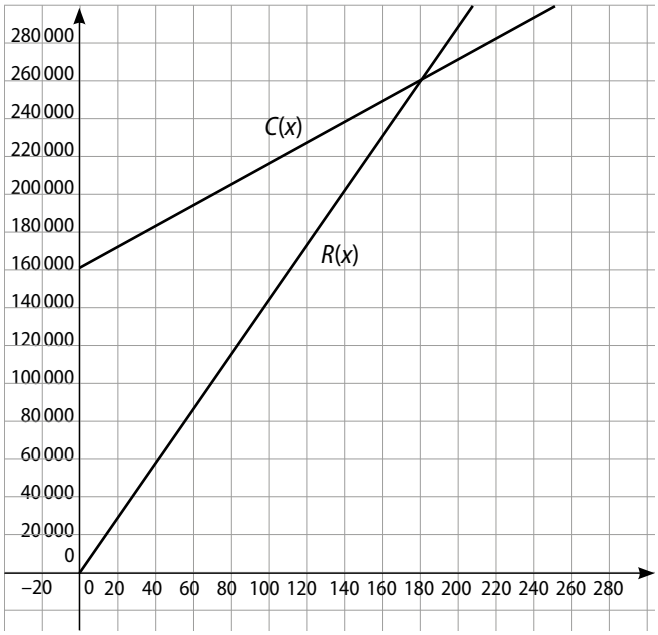
85 **a.** Il suffit de soustraire membre à membre les deux équations du système.

b. En remplaçant x par y dans la première équation, on obtient : $y + 2y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$.

(S) a pour solution le couple : $\left(\frac{4}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

86 **1.** $R(x) = 1\,300\,x$ et $C(x) = 500\,x + 160\,000$.

2. a.



b. Le nombre minimal est de 201 seaux (un de plus que la position d'équilibre).

c. Il faut résoudre l'inéquation :

$R(x) > C(x) \Leftrightarrow 1\,300\,x > 500\,x + 160\,000 \Leftrightarrow x > 200$.

87 x désigne le nombre de bocaux de 250 mL et y le nombre de bocaux de 500 mL.

Les contraintes de l'énoncé se traduisent par le système : $(S)\begin{cases} x + y = 14 \\ 250\,x + 500\,y = 4\,500 \end{cases}$

qui a pour solution (10 ; 4).

88 **a.** $y = \frac{2}{3}x$ et $y = -\frac{1}{2}x + 10$.

b. Point d'intersection : $I(8{,}3\ ;\ 5{,}7)$ par lecture.

Par le calcul : $I\left(\frac{60}{7}\ ;\ \frac{40}{7}\right)$.

c. Il y a équilibre entre offre et demande.

89 Les nombres a et b vérifient le système :

$\begin{cases} a + b = 4\,933 \\ a = 6b + 19 \end{cases}$ qui a pour solution (par substitution) :

$a = 4231$ et $b = 702$.

90 **a.** $\begin{cases} l + 92 = h + L \\ L + 78 = h + l. \end{cases}$

b. Par addition membre à membre, on obtient :

$l + L + 170 = 2\,h + l + L$ qui donne $h = 85$.

c. En remplaçant dans le système, on obtient :

$\begin{cases} l + 92 = 85 + L \\ L + 78 = 85 + l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l + 7 = L \\ L = 7 + l \end{cases}$

Ce système a une infinité de solutions : tous les couples $(l\ ;\ l + 7)$ avec l nombre réel strictement positif.

91 h désigne la hauteur et c le côté du carré de base.

Ces deux nombres vérifient le système :

$\begin{cases} 2\,h + 6\,c + 30 = 320 \\ 4\,h + 4\,c + 30 = 390 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h + 3\,c = 145 \\ h + c = 90. \end{cases}$

La solution est : $c = 27{,}5$ et $h = 62{,}5$.

92 **1.** $(S)\begin{cases} a + b = 30 \\ ab = 221. \end{cases}$

2. a. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 - b \\ (30 - b)b = 221. \end{cases}$

La deuxième équation donne : $b^2 - 30b + 221 = 0$.

b. $(b - 15)^2 - 4 = b^2 - 30b + 225 - 4 = b^2 - 30b + 221$

c. $(b - 15)^2 - 4 = [(b - 15) - 2][(b - 15) + 2\,]$

$= (b - 17)(b - 13)$.

d. $b = 13$ ou $b = 17$.

3. Les deux nombres cherchés sont donc 13 et 17.

93 x et y désignent les côtés de l'angle droit et z l'hypoténuse.

a. $\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 16 \\ x^2 + 64 = z^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 - z \\ (16 - z)^2 + 64 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 - z \\ -32\,z + 300 = 0. \end{cases}$

Donc $y = 8$, $z = 9{,}375$ et $x = 6{,}625$.

b. $\begin{cases} x + y + z = p \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = p - m \\ x^2 + m^2 = z^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p - m - z \\ (p - m - z)^2 + m^2 = z^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p - m - z \\ p^2 + m^2 + z^2 - 2\,pm - 2\,pz + 2mz + m^2 = z^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p - m - z \\ (-2\,p + 2m)\,z + 2m^2 + p^2 = 0\,. \end{cases}$

On obtient finalement :

$z = \frac{2m^2 + p^2}{2(p - m)}$ et $x = \frac{p^2 - 4\,pm}{2(p - m)}$.

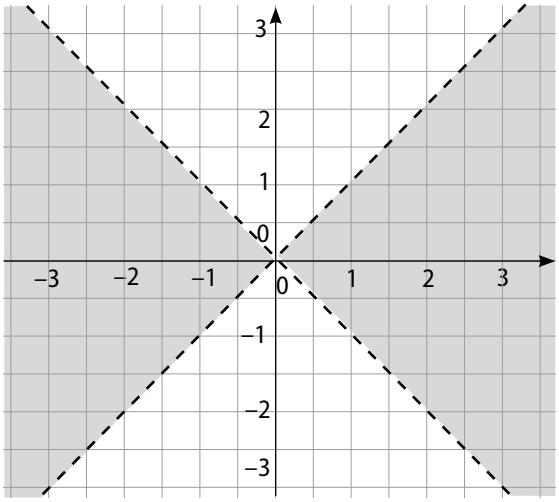
94 **a.** $2 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \neq 2$ donc l'équation ne convient pas.

b. $2\,x - y = 0$.

c. Graphiquement, ce sont toutes les droites passant par le point $A\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

95 **a.** $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

b.



96 **1. a.** $60 \leqslant g + 2h \leqslant 64 \Leftrightarrow 60 \leqslant g + 34 \leqslant 64$
$\Leftrightarrow 26 \leqslant g \leqslant 30$.

b. n désigne le nombre de marches. On a :
$n = \frac{300}{g}$ et $26 \leqslant g \leqslant 30 \Leftrightarrow \frac{1}{30} \leqslant \frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{26}$.

Par conséquent, $10 \leqslant n \leqslant \frac{150}{13}$. Le nombre maximal de marches sera donc 11.

c. $g = \frac{300}{11}$ donc $g \approx 27{,}3$.

$60 \leqslant g + 2h \leqslant 64 \Leftrightarrow 60 \leqslant 27{,}3 + 2h \leqslant 64$

$\Leftrightarrow 16{,}35 \leqslant h \leqslant 17{,}35$

d. Hauteur H atteinte : $180 \leqslant H \leqslant 201$.

2. a. Les deux premières équations du système sont les traductions des contraintes sur la hauteur et la profondeur de l'escalier.

b. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{250}{n} \\ g = \frac{360}{n} \\ 60 \leqslant \frac{360}{n} + 2\,\frac{250}{n} \leqslant 64 \end{cases}$

c. $60 \leqslant \frac{860}{n} \leqslant 64 \Leftrightarrow \frac{860}{64} \leqslant n \leqslant \frac{860}{60}$.

Donc $13{,}4 \leqslant n \leqslant 14{,}3$. Comme n est un nombre entier naturel, on prendra $n = 14$.

Ainsi $h = 17{,}9$ et $g = 25{,}7$.