CARGO

Collection de Mathématiques

2nde S

LIVRE DU PROFESSEUR

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

ISBN : 978.2.7531.0755.7
© Hachette Livre International, 2016

Suivi éditorial et mise en page : Acquansù

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
L'article L. 122-4 du Code de la propriété intellectuelle dispose que « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite, il en est de même pour la traduction, l'adaptation ou la transformation ».
Ne sont autorisées aux termes de l'article L. 122-5 du Code que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et « les analyses et les courtes citations notamment dans un but d'exemple et d'illustration ». Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle français. Le Centre Français de l'exploitation de la Copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris France) est, conformément à l'article L.122-10 du Code de la propriété intellectuelle, le seul habilité à délivrer des autorisations de reproduction par reprographie, sous réserve en cas d'utilisation aux fins de vente, de location, de publicité ou de promotion de l'accord de l'auteur ou des ayants droit.

Sommaire

1 Angle inscrit et polygones inscriptibles **5**
Activités d'introduction 5
Savoir-faire 6
Exercices d'entraînement 7
Faire le point 12
Exercices d'approfondissement 13

2 Angles orientés et trigonométrie **19**
Activités d'introduction 19
Savoir-faire 20
Exercices d'entraînement 21
Faire le point 26
Exercices d'approfondissement 28

3 Vecteurs **32**
Activités d'introduction 32
Savoir-faire 33
Exercices d'entraînement 34
Faire le point 40
Exercices d'approfondissement 41

4 Produit scalaire **46**
Activités d'introduction 46
Savoir-faire 48
Exercices d'entraînement 49
Faire le point 55
Exercices d'approfondissement 57

5 Équations de droites et de cercles **65**
Activités d'introduction 65
Savoir-faire 65
Exercices d'entraînement 66
Faire le point 73
Exercices d'approfondissement 74

6 Transformations du plan **80**
Activités d'introduction 80
Savoir-faire 83
Exercices d'entraînement 84
Faire le point 91
Exercices d'approfondissement 93

7 Géométrie dans l'espace **100**
Activités d'introduction 100
Savoir-faire 102
Exercices d'entraînement 103
Faire le point 109
Exercices d'approfondissement 110

8 Statistiques **118**
Activités d'introduction 118
Savoir-faire 120
Exercices d'entraînement 121
Faire le point 124
Exercices d'approfondissement 126

9 Calculs dans $\mathbb{R}$ **129**
Activités d'introduction 129
Savoir-faire 131
Exercices d'entraînement 132
Faire le point 139
Exercices d'approfondissement 140

10 Fonctions – Généralités **146**
Activités d'introduction 146
Savoir-faire 147
Exercices d'entraînement 149
Faire le point 153
Exercices d'approfondissement 154

11 Fonctions usuelles 160

Activités d'introduction 160
Savoir-faire 162
Exercices d'entraînement 164
Faire le point 170
Exercices d'approfondissement 171

12 Polynômes et fractions rationnelles 176

Activités d'introduction 176
Savoir-faire 177
Exercices d'entraînement 178
Faire le point 185
Exercices d'approfondissement 186

13 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ 192

Activités d'introduction 192
Savoir-faire 193
Exercices d'entraînement 194
Faire le point 200
Exercices d'approfondissement 202

14 Fonctions usuelles 207

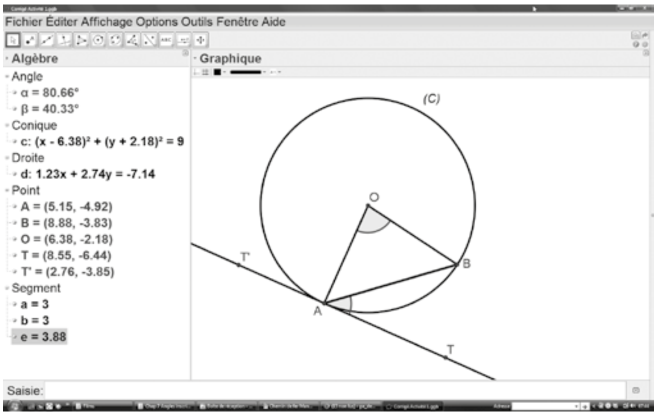
Activités d'introduction 207
Savoir-faire 208
Exercices d'entraînement 209
Faire le point 215
Exercices d'approfondissement 216

1 Angles inscrits et polygones inscriptibles

Activités d'introduction

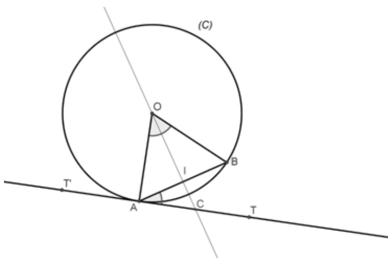
1 Angle inscrit et demi-tangente

1. a. Voir figure ci-dessous.



b. On conjecture que mes $\widehat{TAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

2. a.



b. Le triangle *OAB* est isocèle en *O* et *I* est le milieu de [*AB*], donc (*OI*) ⊥ (*AB*) ; de plus mes $\widehat{TAB} \neq 90°$; donc les droites (*OI*) et (*AT*) ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point *C*.

c. Puisque (*OI*) ⊥ (*AT*) :

• dans le triangle *AIC*, on a : mes $\widehat{AOI}$ + mes $\widehat{OAB} = 90°$ et ;

• dans le triangle *AOC* rectangle en *A* (puisque (*AT*) est tangente au cercle), on a :
mes $\widehat{CAB}$ + mes $\widehat{OAB} = 90°$ d'où l'égalité.

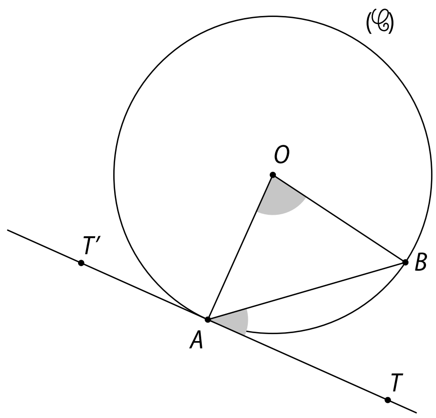
d. mes $\widehat{CAB}$ = mes $\widehat{TAB}$ donc :
mes $\widehat{TAB}$ = mes $\widehat{AOI}$ + mes $\widehat{OAB}$ – mes $\widehat{OAB}$ = mes $\widehat{AOI}$.

Or, puisque le triangle *AOB* est isocèle en *O*, (*OI*) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Ainsi, mes $\widehat{AOB} = 2 \times$ mes $\widehat{AOI}$ et mes $\widehat{TAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.

2 À l'entraînement

1. a.



b. On observe que mes $\widehat{BAD}$ + mes $\widehat{DCB} = 180°$ et et que mes $\widehat{CBA}$ + mes $\widehat{ADC} = 180°$.

2. a. L'angle inscrit $\widehat{BAD}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{BD}$; tandis que l'angle inscrit $\widehat{DCB}$ intercepte l'arc *BD*.
On en déduit que mes $\widehat{DAB}$ + mes $\widehat{DCB} = 180°$.

b. Puisque mes $\widehat{B}$ + mes $\widehat{D} \neq 180°$, c'est que le ploynôme *ABCD* n'est plus inscriptible dans le cercle ($\mathscr{C}$) ; un joueur est sorti du cercle : le jeu s'arrête.

3. a. mes $\widehat{C} = 180°$ – mes $\widehat{A}$, or l'angle inscrit $\widehat{A}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{BD}$, donc l'angle $\widehat{C}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{BD}$ et est situé sur le même cercle que *A*, *B* et *D*.

b. Les points *A*, *B*, *C*, *D* sont donc tous situés sur le même cercle. On en déduit que le quadrilatère *ABCD* est inscriptible.

3 Sinus d'un angle

1. a. $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \dfrac{BC}{AC}$.

b. $\mathscr{A} = \dfrac{AC \times BH}{2}$; $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BH}{AB}$.

c. $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times CK}{2}$; $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{CK}{AC}$.

d. De l'égalité $\dfrac{AC \times BH}{2} = \dfrac{AB \times CK}{2}$, on déduit que

$CK = \dfrac{AC \times BH}{AB}$.

Ainsi $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{CK}{AC} = \dfrac{\dfrac{AC \times BH}{AB}}{AC} = \dfrac{AC \times BH}{AB \times AC} = \dfrac{BH}{AC}$, d'où l'égalité.

2. a. $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times BH}{2} = \dfrac{AB \times CK}{2}$

d'où $2\,\mathcal{A} = AC \times BH = AB \times CK$.

b. On en déduit que $\dfrac{AC}{CK} = \dfrac{AB}{BH}$.

4 Relations métriques dans un triangle

1. a. $\widehat{A}$: angle aigu $\rightarrow \sin \widehat{A} = \dfrac{CK}{AC} = \dfrac{CK}{b}$;

$\widehat{A}$: angle droit $\rightarrow \sin \widehat{A} = \dfrac{CA}{AC} = 1$;

$\widehat{A}$: angle obtus $\rightarrow \sin \widehat{A} = \dfrac{CK}{AC} = \dfrac{CK}{b}$.

b. Dans chacun des cas :

$\mathcal{A} = \dfrac{AB \times CK}{2} = \dfrac{AB \times AC \sin \widehat{A}}{2} = \dfrac{BC \sin \widehat{A}}{2}$.

c. $\mathcal{A} = \dfrac{BC \times AB \sin \widehat{B}}{2} = \dfrac{ac \sin \widehat{B}}{2}$

et $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times BC \sin \widehat{C}}{2} = \dfrac{ab \sin \widehat{C}}{2}$.

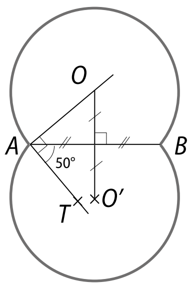
2. a. $\dfrac{abc}{2\,\mathcal{A}} = \dfrac{abc}{BC \sin \widehat{A}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$.

b. En procédant de même avec les expressions obtenues au **1. c.**, on en déduit que :

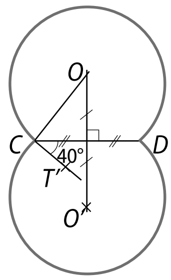
$\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$.

Savoir-faire

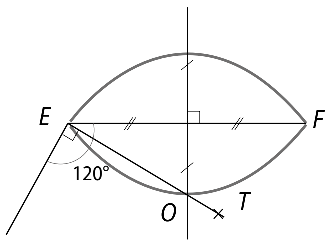
2



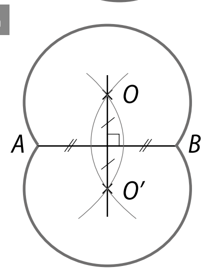
3



4



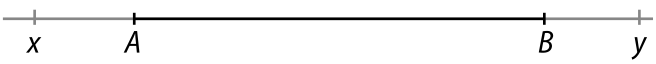
5



6 a. Les points M vérifient mes $\widehat{AMB} \approx 130°$.

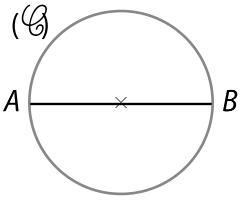
b. Les points M vérifient mes $\widehat{AMB} \approx 50°$.

7 a. mes $\widehat{AMB} = 0°$.



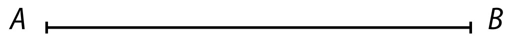
L'ensemble des points M est constitué des demi-droites $]Ax)$ et $]By)$.

b. mes $\widehat{AMB} = 90°$.



L'ensemble des points M est constitué du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ à l'exception des points A et B.

c. mes $\widehat{AMB} = 180°$



L'ensemble des points M est constitué du segment $[AB]$ à l'exception des points A et B.

10 a. Les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$ sont de même longueur, donc mes $\widehat{ADB}$ = mes $\widehat{CDB}$.

Ainsi, (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.

b. Puisque l'angle $\widehat{ADB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et l'angle $\widehat{ACB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$, mes $\widehat{ADB}$ = mes $\widehat{ACB}$.

Or le triangle ABC est équilatéral, donc mes $\widehat{ABC} = 60°$.

Ainsi mes $\widehat{ADB} = 60°$.

11 On utilise les propriétés du paragraphe **3. b**.

• $\dfrac{e}{\sin \widehat{E}} = 2R$ d'où $\sin \widehat{E} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2 \times 8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

donc mes $\widehat{E} = 45°$.

• Puisque le triangle EFG est isocèle en $\widehat{E}$:

mes $\widehat{F}$ = mes $\widehat{G} = \dfrac{180° - \text{mes } \widehat{E}}{2} = 67{,}5°$.

Exercices d'entraînement

12 **a.** $\widehat{BD}$; **b.** $\overset{\smile}{BD}$; **c.** $\widehat{DC}$.

13 $\widehat{BFD}$ et $\widehat{BED}$.

14 **a.** Le triangle ABC est isocèle en A.

b. Les arcs $\widehat{BA}$ et $\widehat{AC}$ sont de même longueur.

c. Les arcs $\overset{\smile}{BA}$ et $\overset{\smile}{AC}$ sont de même longueur.

15 **a.** $\widehat{ADC}$ et $\widehat{AOC}$.

b. $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$.

16 **a.** (AA') est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

b. Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes donc (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

17 **a.** Les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{ACB}$ sont correspondants et (OA) // (BC), donc mes $\widehat{DAE}$ = mes $\widehat{ACB} = 30°$.

Or, mes $\widehat{AOB} = 2$ mes $\widehat{ACB}$, donc mes $\widehat{AOB} = 60°$.

b. mes $\widehat{AOB} = 60°$ et $OA = OB$, donc le triangle AOB est équilatéral.

18 **a.** $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AEB}$.

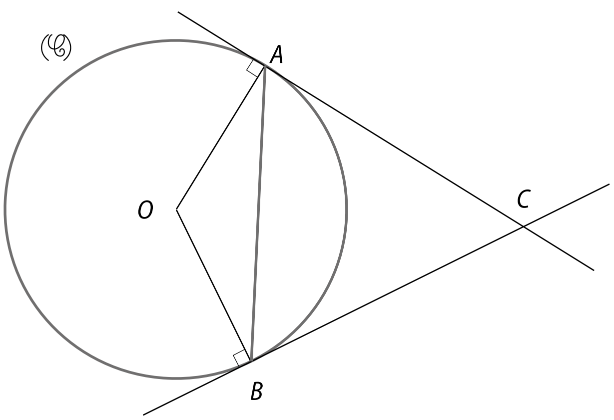
b. $\widehat{AFB}$ et $\widehat{ADB}$.

19 $\widehat{ACB}$ et $\widehat{TBA}$.

20 **a.** l'angle $\widehat{NOP}$ est complémentaire à $\widehat{NMP}$ puisque mes $\widehat{NOP} = 2$ mes $\widehat{NMP} = 60°$.

b. L'angle $\widehat{QST'}$ est supplémentaire à $\widehat{NMP}$ puisque mes $\widehat{NMP}$ = mes $\widehat{RQS}$ = mes $\widehat{TSR} = 30°$,
donc mes $\widehat{QST'} = 150°$.

21 **a.**



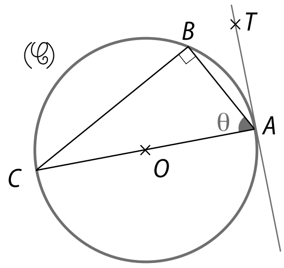
b. mes $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{BOC}$

et mes $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{BOC}$, donc mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{BAC}$.

Le triangle ABC est donc isocèle en C.

22 Puisque le triangle ABC est rectangle en B :
mes $\widehat{BCA} = 90°$ – mes $\widehat{BAC} = 90° - \theta$.

• Premier cas : mes $\widehat{TAB}$ = mes $\widehat{BCA} = 90° - \theta$.

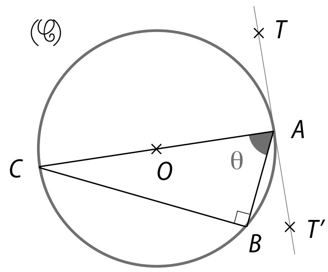


• Deuxième cas :

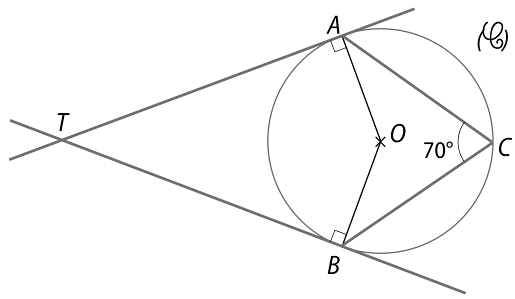
mes $\widehat{TAB} = 180°$ – mes $\widehat{T'AB}$, or mes $\widehat{T'AB}$ = mes $\widehat{BCA}$,

donc mes $\widehat{TAB} = 180° - (90° - \theta)$

mes $TAB = 90° + \theta$.



23



• Le triangle ABC est isocèle en C, donc mes $\widehat{CAB}$ =
mes $\widehat{ABC} = \dfrac{180° - 70°}{2} = 55°$.

• (OC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ car (OC) est la médiatrice de $[AB]$ et que le triangle ABC est isocèle en C, donc mes $\widehat{OCB} = 35°$.

• Le triangle OBC est isocèle en O car $OB = OC$, donc mes $\widehat{OCB} = 35°$.

• Puisque (TB) est tangente à $(\mathscr{C})$ en B, mes $\widehat{OBT} = 90°$.

• Ainsi mes $\widehat{CBT}$ = mes $\widehat{OBC}$ + mes $\widehat{OBT} = 125°$.

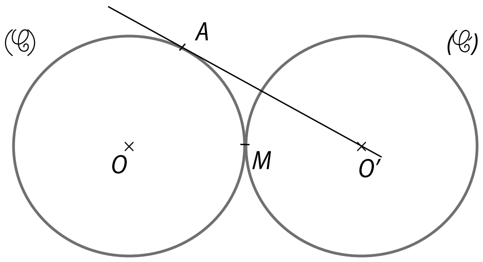
• De même, mes $\widehat{CAT} = 125°$.

• Dans le quadrilatère $ATBC$:

mes $\widehat{ATB} = 360°$ – (mes $\widehat{CBT}$ + mes $\widehat{CAT}$ + mes $\widehat{ACB}$)

mes $\widehat{ATB} = 360° - (125° + 125° + 70°) = 40°$.

24



a. • Puisque (AO') est tangente à $(\mathscr{C})$ en A, $(OA) \perp (AO')$, donc le triangle OAO' est rectangle en A.

• Le triangle OAO' est rectangle en A donc il est inscrit dans un cercle dont le diamètre est $[OO']$. M est le milieu de $[OO']$ et donc le centre de ce cercle. Ainsi $MA = MO'$.

D'où on en déduit que le triangle MAO' est isocèle en M.

• Puisque $MO' = MA = MO = OA$, on en déduit que le triangle OAM est équilatéral.

b. mes $\widehat{AMO'} = 180° -$ mes $\widehat{AMO} = 120°$.

• mes $\widehat{AO'M} =$ mes $\widehat{MAO'}$ puisque le triangle AMO' est isocèle en M.

De plus, puisque (AO') est tangente à $(\mathscr{C})$ en A :

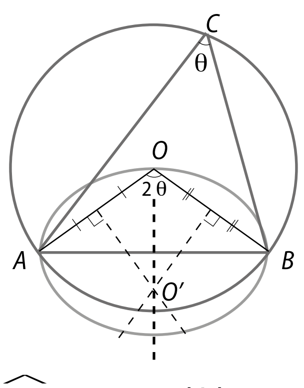
mes $\widehat{MAO'} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{AOM} = 30°$.

Ainsi, mes $\widehat{AO'M} = 30°$.

25 Il s'agit du cercle de diamètre $[AB]$ à l'exception des points A et B.

26 Oui, tous les autres points situés sur l'arc de cercle symétrique de $\overset{\frown}{AB}$ par rapport à (AB).

27



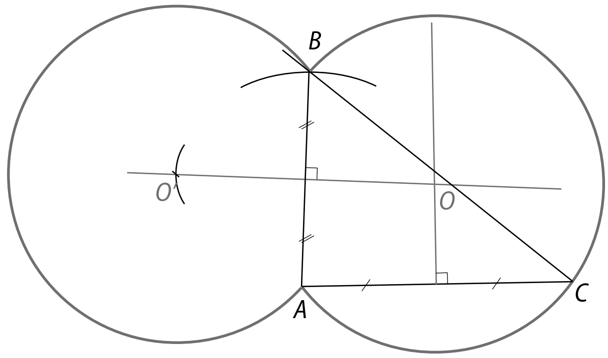
• Puisque mes $\widehat{ACB} = \theta$, on en déduit que mes $\widehat{AOB} = 2\theta$.

• On trace alors le point O', centre du cercle circonscrit au triangle AOB.

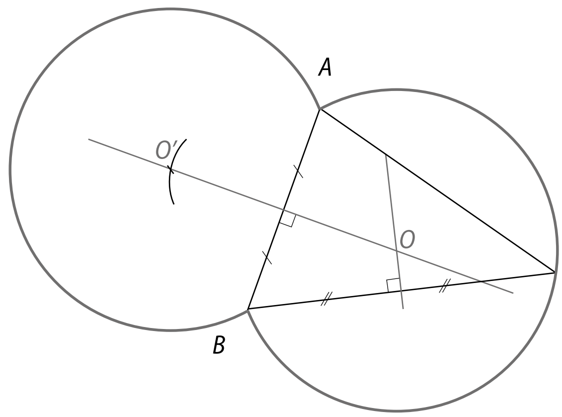
• L'arc de cercle vert passant par O et d'extrémités A et B est l'un des arcs capables cherchés.

• Le deuxième arc capable vert est obtenu par symétrie par rapport à (AB).

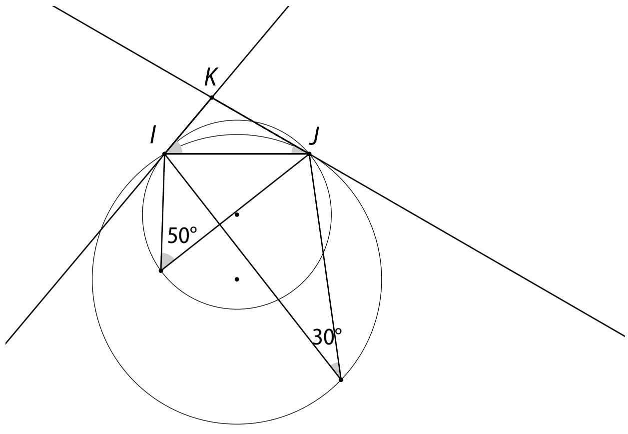
28 **a., b., c.**



29



30 L'ensemble des points M tels que mes $\widehat{IMJ} = 30°$ est situé sur le (l'un des) cercle(s) tangent(s) à (JK) en J et l'ensemble des points M tels que mes $\widehat{JMK} = 50°$ est situé sur le (l'un des) cercle(s) tangent(s) à (IK) en I.



31 mes $\widehat{AKB} = 60°$.

Le triangle ABK est isocèle en K, donc :

mes $\widehat{KAB} =$ mes $\widehat{KBA} = \dfrac{180 - 60}{2} = 60°$.

Donc le triangle ABK est équilatéral.

Ainsi $AB = BK = AK = 2$ et, d'après la propriété de Pythagore :

$OK^2 = BK^2 - OB^2$

$OK^2 = 2^2 - 1^2$

$OK^2 = 3$ d'où $OK = \sqrt{3}$ et $MK = \sqrt{3} - 1$.

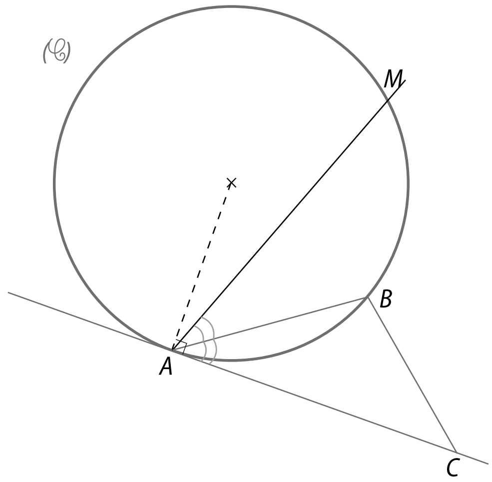
32 mes $\widehat{BMC}$ = mes $\widehat{BMA}$ + mes $\widehat{AMC}$

mes $\widehat{BMC} = 115° + 65°$

mes $\widehat{BMC} = 180°$.

Donc les points B, M et C sont alignés.

33



• [AC) est la demi-tangente en A au cercle (𝒞) passant par A et B, donc tout point M du cercle (𝒞) vérifie : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{BAC}$.

• Il suffit alors de choisir le point M de (𝒞) tel que : mes $\widehat{CAB}$ = mes $\widehat{MAB}$.

34 **a.** Les arcs rouges sont les arcs capables d'extrémités A et B et de mesure 135°.
b. Les arcs verts sont les arcs capables d'extrémités A et B et de mesure 45°.

35 **a.** Oui car deux de ses angles opposés sont supplémentaires (mes $\widehat{B}$ + mes $\widehat{D} = 180°$).
b. Oui car deux de ses angles opposés ont même mesure (mes $\widehat{E}$ = mes $\widehat{H} = 30°$).

c. Oui car deux de ses angles opposés sont supplémentaires (mes $\widehat{I}$ + mes $\widehat{K} = 180°$).

d. Oui car deux de ses angles opposés sont de même mesure (mes $\widehat{M}$ = mes $\widehat{O} = 90°$).

36 **a.** $\alpha = 50°$; **b.** $\alpha = 70°$; **c.** $\alpha = 90°$; **d.** $\alpha = 20°$.

37 $ABCD$ désigne un parallélogramme.
• Si $ABCD$ est un rectangle, alors il est inscriptible car mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{C} = 90° + 90° = 180°$.

• Si $ABCD$ est un parallélogramme inscriptible alors, d'une part mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{C}$ (car c'est un parallélogramme) et d'autre part mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{C} = 180°$ (car il est inscriptible), donc mes $\widehat{A} = 90°$.

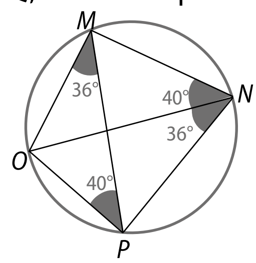
Ainsi $ABCD$ est un rectangle.

38 $ABCD$ désigne un losange.
• Si $ABCD$ est un carré, alors il est inscriptible car :
mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{C} = 90° + 90° = 180°$.

• Si $ABCD$ est un losange inscriptible alors, d'une part mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{C}$ (car c'est un losange et que le triangle ABC est isocèle en B) et d'autre part mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{C} = 180°$ (car il est inscriptible), donc mes $\widehat{A} = 90°$.

Ainsi $ABCD$ est un carré.

39 **a.** • Dans le quadrilatère $MPNQ$, on déduit que : mes $\widehat{QMP}$ = mes $\widehat{QNP} = 36°$.



• Dans le quadrilatère croisé $MNQP$, on déduit que :

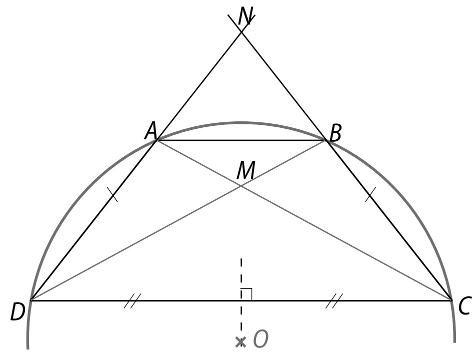
mes $\widehat{MNQ}$ = mes $\widehat{MPQ} = 40°$.

• Dans le quadrilatère $MNPQ$, on déduit que :

mes $\widehat{MQP} = 180°$ – mes $\widehat{MNP} = 104°$.

b. mes $\widehat{MNP} = 76°$.

40



a. Puisque le trapèze $ABCD$ est isocèle, on a :
mes $\widehat{D}$ = mes $\widehat{C}$ et mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{B}$.
Or mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{B}$ + mes $\widehat{C}$ + mes $\widehat{D} = 360°$, donc :
mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{C} = 180°$, donc $ABCD$ est inscriptible.

b. mes $\widehat{DOM}$ = mes $\widehat{DOA}$ + mes $\widehat{AOM}$

$= 2$ mes $\widehat{DCA} + \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$

$= 2$ mes $\widehat{DCA}$ + mes $\widehat{ACB}$

= mes $\widehat{BDC}$ + mes $\widehat{BDC}$ + mes $\widehat{ADB}$

= mes $\widehat{BDC}$ + mes $\widehat{ADC}$

= mes $\widehat{DCA}$ + mes $\widehat{ADC}$

$= 180°$ – mes $\widehat{DAC}$

$= 180°$ – mes $\widehat{DAM}$.

Ainsi, mes $\widehat{DOM}$ + mes $\widehat{DAM} = 180°$, donc le quadrilatère $AMOD$ est inscriptible.

41 Triangle équilatéral : $\alpha = 60°$, $\theta = 120°$

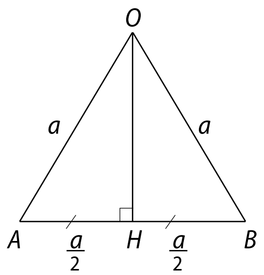
Carré : $\alpha = 45°$, $\theta = 90°$

Pentagone régulier : $\alpha = 36°$, $\theta = 72°$

Hexagone régulier : $\alpha = 30°$, $\theta = 60°$

42 **a.** On note *ABCDEF* cet hexagone régulier de centre *O* et d'aire $\mathcal{A} = 24\sqrt{3}$ dm².

Il est constitué de six triangles équilatéraux de côté *a* et d'aire $\mathcal{A}'$.



Or, d'une part, $\mathcal{A}' = \dfrac{\mathcal{A}}{6} = 4\sqrt{3}$ cm² et, d'autre part, $\mathcal{A}' = \dfrac{OH \times AB}{2}$

où $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$ dm.

donc $\mathcal{A}' = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{3} \times a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Ainsi, $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ d'où $a^2 = 16$ et $a = 4$ dm.

b. Le rayon de son cercle inscrit est $OH = 2\sqrt{3}$ dm.

43 On note *ABCDE* ce pentagone régulier de centre *O* et d'aire $\mathcal{A} = 5$ cm².

Or *ABCDE* est constitué de cinq triangles isocèles identiques à *OAB*, donc $\mathcal{A}(OAB) = \dfrac{5}{5} = 1$ cm².

Or, $\mathcal{A}(OAB) = \dfrac{1}{2} \times a \times a \times \sin 72°$

$\mathcal{A}(OAB) = \dfrac{a^2}{8} \times \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

Ainsi, $a^2 = \dfrac{8}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ et $a = \sqrt{\dfrac{8}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}$.

44 Puisque *ABCDEFGH* est un octogone régulier,

mes $\widehat{AOB} = \dfrac{360}{8} = 45°$.

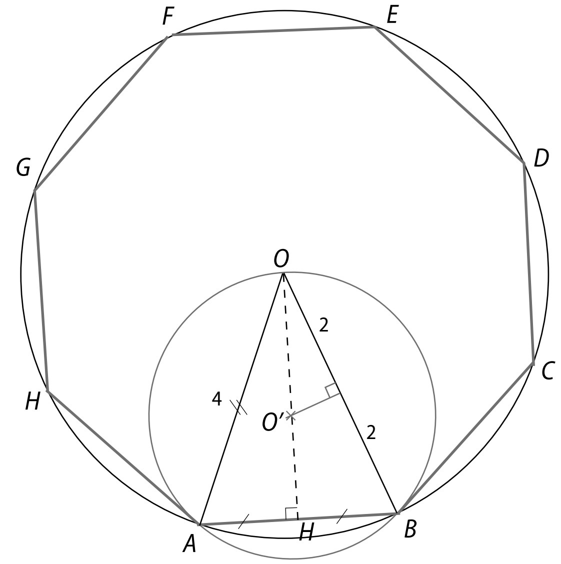
Dans le triangle *OAB*, on note *H* le pied de la hauteur issue de *O* et *O'* le point d'intersection de la médiatrice de [*OB*] et [*OH*].

O' est le centre du cercle circonscrit au triangle *OAB*.

Or, $\cos 22{,}5 = \dfrac{2}{OO'}$ donc $OO' = \dfrac{2}{\cos 22{,}5} \approx 2{,}17$.

Ainsi, $\dfrac{AB}{\sin \widehat{AOB}} = 2 \times OO'$ donc $AB \approx 2 \times 2{,}17 \times \sin 45°$.

$AB \approx 3{,}07$.



45 L'hexagone régulier est constitué de six triangles équilatéraux d'aire $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} R \times R \times \sin 60°$, c'est-à-dire $\mathcal{A} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Donc l'aire de l'hexagone est : $\mathcal{A}' = 6 \times \mathcal{A} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Or l'aire du disque de rayon *R* est $\pi \times R^2$.

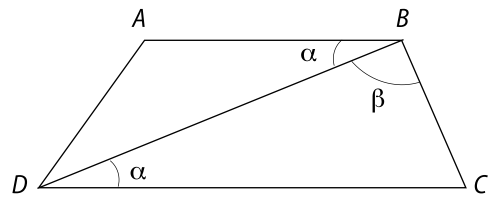
Ainsi l'aire en rouge est $\pi R^2 - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

46 *ABCD* désigne un trapèze.

Si *ABCD* est isocèle, alors mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{D}$ et mes $\widehat{B}$ = mes $\widehat{C}$. Or, mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{B}$ + mes $\widehat{C}$ + mes $\widehat{D} = 360°$.

Donc mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{C} = 180°$. Ainsi, il est inscriptible.

Si *ABCD* est inscriptible, alors mes $\widehat{A}$ + mes $\widehat{C} = 180°$.



Puisque (*AB*) // (*CD*) :

mes $\widehat{ABD}$ = mes $\widehat{BDC} = \alpha$ et mes $\widehat{C} = 180° - \alpha - B$.

De plus, mes $\widehat{A} = 180°$ – mes $\widehat{C}$, donc dans le triangle *ABD*, mes $\widehat{ABD} = 180° - (180° -$ mes $\widehat{C}) - \alpha$.

mes $\widehat{ADB}$ = mes $\widehat{C} - \alpha$.

Ainsi mes $\widehat{D} = \text{mes}\ \widehat{ADB} + \text{mes}\ \widehat{BDC}$

$= \text{mes}\ \widehat{C} - \alpha + \alpha$

$= \text{mes}\ \widehat{C}$.

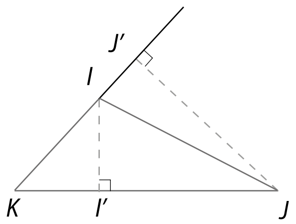
Ce qui prouve que le trapèze *ABCD* est isocèle.

47 **a.** $\sin \widehat{A} = \dfrac{BH}{AB}$; **b.** $\sin \widehat{A} = \dfrac{BK}{AB}$; **c.** $\sin \widehat{A} = \dfrac{CK}{AC}$;

d. $\sin \widehat{A} = \dfrac{BH}{AB}$.

48 Le projeté orthogonal de *N* sur (*MP*) ou le projeté orthogonal de *P* sur (*MN*).

49 On note *I'* (resp. *J'*) le projeté orthogonal de *I* sur (*KJ*) (resp. de *J* sur (*IK*)).



• $\sin \widehat{I} = \dfrac{JJ'}{IJ}$; • $\sin \widehat{J} = \dfrac{II'}{IJ}$; $\sin \widehat{K} = \dfrac{II'}{KI}$.

50 Il s'agit de triangles isocèles rectangles en *A*.

51 **a.** $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 30° = 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\dfrac{10 \times 9{,}5 \times 8{,}5}{2\mathcal{A}} = 2 \times 5$ d'où $\mathcal{A} = 40{,}375$.

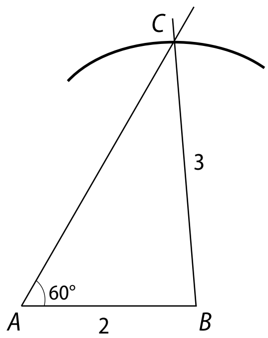
52 **a.** De $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$, on déduit que :

$\dfrac{(1+\sqrt{6})\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \times (1+\sqrt{6}) \times 2 \times \sin \widehat{A}$

donc $\sin \widehat{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc mes $\widehat{A} = 60°$.

b. $2R = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$, donc $R = \dfrac{3}{2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$.

c.



53 **1. a.** $\mathcal{A} = \dfrac{AB \times CH}{2}$ où *H* est le projeté orthogonal de *C* sur (*AB*)

or $\sin \widehat{A} = \dfrac{CH}{AC}$ donc $CH = AC \times \sin \widehat{A}$

Ainsi, $\mathcal{A} = \dfrac{bc \sin \widehat{A}}{2}$.

b. $\dfrac{abc}{2\mathcal{A}} = \dfrac{abc}{2 \times \dfrac{bc \sin \widehat{A}}{2}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$.

2. Puisque la somme des trois mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, un triangle possède toujours au moins un angle aigu.

3. a. $\sin \widehat{BOH} = \dfrac{BH}{OB} = \dfrac{\frac{a}{2}}{R} = \dfrac{a}{2R}$.

b. mes $\widehat{BOH} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{BOC} = $ mes $\widehat{A}$.

c. Du **3. a.**, on déduit que $\sin \widehat{A} = \dfrac{a}{2R}$ donc $2R = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$.

54 $\sin \widehat{A} = \dfrac{a}{2R}$, de même $\sin \widehat{B} = \dfrac{b}{2R}$ et $\sin \widehat{C} = \dfrac{c}{2R}$.

Donc, $\sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} = \dfrac{a+b+c}{2R}$.

Or $2R = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}}$, donc $\sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} = 2\mathcal{A} \times \dfrac{a+b+c}{abc}$.

55 **a.** $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

b. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} ab \sin \widehat{C} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4}$.

56 **a.** mes $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{BOC} = 50°$.

De plus, mes $\widehat{BAD} = $ mes $\widehat{DAC}$, donc mes $\widehat{BAD} = 25°$.

b. Dans le triangle *ABD*, $\dfrac{AB}{\sin \widehat{BDA}} = 2 \times R$, donc

$\sin \widehat{BDA} = \dfrac{10}{14}$ d'où mes $\widehat{BDA} \approx 45{,}6°$.

Donc mes $\widehat{ABD} = 180° - 25° - 45{,}6° \approx 109{,}4°$.

De même, $\dfrac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = 2 \times R$,

donc $AD = 2 \times 7 \times \sin \widehat{ABD} \approx 13{,}2$ cm.

57 mes $\widehat{ABP} = 120°$ donc mes $\widehat{ABP} = 30°$.

Ainsi, le triangle *ABP* est isocèle en *B* et $BP = 700$ m.

Or, $\dfrac{AP}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{BP}{\sin \widehat{A}}$ donc $AP = \dfrac{BP}{\sin \widehat{A}} \times \sin \widehat{B}$

$AP = \dfrac{700}{\sin 30°} \times \sin 120° = \dfrac{700}{\frac{1}{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 700\sqrt{3}$.

58 **a.** mes $\widehat{HB_1C} = 53°$; mes $\widehat{CB_1B_2} = 127°$;
mes $\widehat{B_1B_2C} = 180° - (137° + 22°) = 31°$.

b. D'après la propriété de Pythagore, dans le triangle B_1HC rectangle en H, on a $B_1C = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Ainsi, $\dfrac{B_1B_2}{\sin 22°} = \dfrac{10}{\sin 31°}$.

donc $B_1B_2 = \dfrac{10}{\sin 31°} \times \sin 22° \approx 10/0{,}52 \times 0{,}38 \approx 7{,}3$.

La largeur d'un but de football est environ 7,3 m.

Faire le point

59 • L'arc rouge est noté $\overset{\frown}{AC}$ et l'arc vert $\overset{\smile}{AC}$.

• L'angle $\widehat{EHD}$ est un angle inscrit et l'angle $\widehat{IOC}$ est au centre.

• Le polygone *ABCDEFGHI* est un octogone régulier et inscrit.

60 **a.** Fodje : « mes $\widehat{AMB} = 63°$ »

Fodje : « Non, dans ce cas, $\widehat{AMB}$ n'a pas de sens ».

b. Non, les arcs capables sont les arcs rouges à l'exception des points *A* et *B*.

61 Le rayon calculé ici est le rayon du cercle circonscrit au triangle *AOB*, tandis que *R* est le rayon du cercle circonscrit au pentagone *ABCDE*.

Dans le triangle *AOB*, on note *I* le milieu de [*AB*] qui est également le projeté orthogonal de *O* sur (*AB*) puisque le triangle *AOB* est isocèle en *O*.

mes $\widehat{IOB} = 36°$

$\sin \widehat{IOB} = \dfrac{IB}{OB}$ donc $\sin 36° = \dfrac{2{,}5}{R}$.

ainsi $R = \dfrac{2{,}5}{\sin 36°} \approx 4{,}25$.

62 **1.** Tracer le segment [*AB*].

2. Tracer la demi-droite [*AT*) telle que mes $\widehat{BAT} = \theta$.

3. Tracer la droite (Δ) perpendiculaire à [*AT*) passant par *A*.

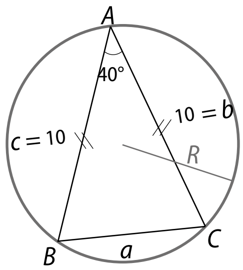
4. Tracer la médiatrice de [*AB*], elle coupe (Δ) au point *O*.

5. L'arc de cercle, de centre *O*, passant par les points *A* et *B* et situé dans le demi-plan délimité par (*AB*) ne contenant pas *O*, est l'un des arcs capables.

6. Le deuxième arc capable est obtenu par symétrie par rapport à (*AB*).

Remarque : ne pas oublier de préciser que les points *A* et *B* ne font pas partie des solutions.

63



a. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 40° = 50 \times \sin 40°$.

$\mathcal{A} \approx 32{,}1$.

b. mes $\widehat{B}$ = mes $\widehat{C} = 70°$. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times a \times b \times \sin \widehat{C}$.

$32{,}1 \approx \dfrac{1}{2} \times a \times 10 \times \sin 70°$. $a \approx \dfrac{32{,}1}{5 \times \sin 70°} \approx 6{,}8$.

c. $\dfrac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$ c'est-à-dire $\dfrac{10 \times 10 \times 6{,}8}{2 \times 32{,}1} \approx 2R$.

donc $R \approx 5{,}3$.

64 • D'après la propriété de Pythagore, $BC^2 = AC^2 - AB^2$.

$BC^2 = 144 - 36$ donc $BC = 6\sqrt{3}$.

Dans le triangle *ABC* rectangle en $\widehat{B}$:

$\sin \widehat{A} = \dfrac{BC}{AC}$ donc $BC = AC \times \sin \widehat{A}$.

ainsi $BC = 12 \times \sin 60° = 6\sqrt{3}$.

• Les points *C*, *B*, *B'* sont alignés ; les points *C*, *A*, *A'* sont alignés et (*AB*) // (*A'B'*).

D'après la propriété de Thalès :

$\dfrac{CA}{CA'} = \dfrac{CB}{CB'} = \dfrac{AB}{AB'}$ donc $\dfrac{CB}{7\sqrt{3}} = \dfrac{6}{7}$.

ainsi $CB = 6\sqrt{3}$.

• L'aire du triangle *ABC* est : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60°$.

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$.

Or $\mathcal{A} = \dfrac{AB \times BC}{2} = 3 \times BC$, donc $BC = 6\sqrt{3}$.

Se tester

65 **1.** vrai ; **2.** faux ; **3.** vrai ; **4.** faux.

66 **1.** vrai. Le quadrilatère *EHFG* est un quadrilatère croisé inscriptible, donc mes $\widehat{EHF}$ = mes $\widehat{EGF}$; puisque mes $\widehat{EHF} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{EOF} = 45°$; ces deux angles sont complémentaires.

2. vrai. Le triangle *OEF* est isocèle rectangle en *E*, donc mes $\widehat{OEF} = 45°$. De plus, mes $\widehat{EGF}$ = mes $\widehat{JEF} = 45°$.

Donc (*EF*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{JEF}$.

3. faux. mes $\widehat{EOF} \neq$ mes $\widehat{EJF}$ donc le quadrilatère *EOFJ* n'est pas inscriptible.

4. faux.

L'aire du triangle *EFJ* est égale à $\dfrac{OE \times EJ}{2} = \dfrac{4 \times 1{,}5}{2} = 3$.

67 **1.** a. ; **2.** b. ; **3.** a.

68 **1.** b. En effet, tous les angles au centre entre deux sommets consécutifs ont même mesure puisque ce polygone est régulier, donc $7 \times$ mes $\widehat{COD} = 360°$, ainsi, mes $\widehat{COD} \approx 51°$.

2. b. En effet :

mes $\widehat{EAC} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{EOC}$ et mes $\widehat{EOC} = 2$ mes $\widehat{COD}$.

Donc mes $\widehat{EAC} \approx 51°$

3. c. En effet, le triangle *OAB* est isocèle en *O*, donc le milieu *I* de [*AB*] est également le pied de la hauteur issue de *O*.

Ainsi, dans le triangle *OIB* rectangle en *I*, $\sin \widehat{IOB} = \dfrac{IB}{OB}$

donc $\sin 25{,}5 = \dfrac{5}{R}$, donc $R = \dfrac{5}{\sin 25{,}5} \approx \dfrac{5}{0{,}43} \approx 11{,}6$.

4. a. En effet, l'aire de cet heptagone régulier est égale à sept fois l'aire $\mathcal{A}$ du triangle *OAB*.

Or $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \widehat{AOB}$,

c'est-à-dire $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times R^2 \times \sin 51°$,

donc $\mathcal{A} \approx \frac{1}{2} \times 11{,}6^2 \times 0{,}78 \approx 52{,}47$.

Donc, l'aire de l'heptagone est environ :

$7 \times 52{,}47 \approx 367$.

Exercices d'approfondissement

69 **1.** Supposons que mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{B} = 45°$.

Dans ce cas, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin 45° = \dfrac{bc\sqrt{2}}{2}$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ac \sin 45° = \dfrac{ac\sqrt{2}}{2}$.

Or, d'après l'énoncé, $\mathcal{A} = 3\sqrt{2}$, ainsi $bc = 12$ et $ac = 12$.

• Puisque mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{B}$, le triangle *ABC* est isocèle en *C*, donc $a = b$.

• Les différents cas possibles avec *a*, *b*, *c* des nombres entiers naturels sont donc :

1er cas : $a = 1$, $b = 1$, $c = 12$;

2e cas : $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$.

1er cas : puisque $\dfrac{abc}{2\mathcal{A}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$, on a $\sin \widehat{C} = 2\mathcal{A} = 2 \times 3\sqrt{2}$, ce qui est impossible car $0 \leq \sin \widehat{C} \leq 1$.

Donc un tel triangle n'existe pas.

2. Supposons que mes $\widehat{A} = 30°$

Dans ce cas, $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$.

$\dfrac{a}{\sin 30°} = 2 \times 2\sqrt{3}$

donc $a = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$.

Donc, il n'existe pas de tel triangle.

70 **a.** On considère les aires de chacun des triangles du quadrilatère :

$\mathcal{A}(AOD) = \frac{1}{2} OA \times OD \times \sin \widehat{AOD}$;

$\mathcal{A}(BOC) = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin \widehat{BOC}$;

$\mathcal{A}(AOB) = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin \widehat{AOB}$;

$\mathcal{A}(COD) = \frac{1}{2} OC \times OD \times \sin \widehat{COD}$.

Or, mes $\widehat{AOD}$ = mes $\widehat{BOC}$ donc $\sin \widehat{AOD} = \sin \widehat{BOC}$;

de plus, les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires, donc ils ont le même sinus : $\sin \widehat{AOD} = \sin \widehat{COD}$.

De même, $\sin \widehat{AOB} = \sin \widehat{COD}$.

Ainsi :

$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(AOD) + \mathcal{A}(BOC) + \mathcal{A}(AOB) + \mathcal{A}(COD)$

$= \frac{1}{2} \sin \widehat{AOD}\,(OA \times OD + OB \times OC + OA \times OB + OC \times OD)$

$= \frac{1}{2} \sin \widehat{AOD}\,[OA\,(OD + OB) + OC\,(OB + OD)]$

$= \frac{1}{2} \sin \widehat{AOD}\,(OA \times BD + OC \times BD)$

$= \frac{1}{2} \sin \widehat{AOD}\,(AC \times BD)$

$= \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \widehat{AOD}$.

b. $\mathcal{A}(ABCD) = 1 \times 56 \times 32 \times \sin 110° \approx 842 \text{ m}^2$.

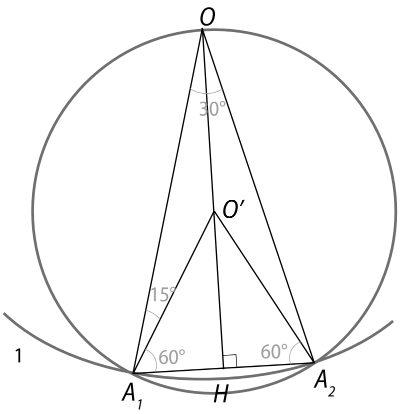
71 **1.** $\sin \widehat{C} = \frac{AH}{b}$ donc $b = \frac{AH}{\sin \widehat{C}}$. Ainsi, puisque $2R = \frac{b}{\sin \widehat{B}}$, on obtient : $R = \frac{b}{2\sin \widehat{B}} = \frac{AH}{2\sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}$.

2. D'après le **1.**, $AH = 2R \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}$. De même, on obtient $BH = 2R \sin \widehat{A} \sin \widehat{C}$ et $CH = 2R \sin \widehat{A} \sin \widehat{B}$.

a. $AH + BH + CH$
$= 2R\,(\sin \widehat{B} \sin \widehat{C} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{C} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B})$.

b. $AH \times BH \times CH = 8R^3 \sin^2 \widehat{A} \sin^2 \widehat{B} \sin^2 \widehat{C}$.

72



1. mes $\widehat{AOA} = \frac{360}{12} = 30°$.

2. a. Les triangle $O'A_1O$ est isocèle en O', donc mes $\widehat{OA_1O'} = 15°$, ainsi, mes $\widehat{O'A_1A_2} = 60°$.

De même, mes $\widehat{O'A_1A_2} = 60°$.

Dans le triangle $O'HA_1$ rectangle en $\widehat{H}$, $O'A_1 = A_1A_2 = OO'$.

$\sin 60° = \frac{OH'}{O'A_1}$ donc $O'H = O'A_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = A_1A_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $OH = OO' + O'H$.

$OH = A_1A_2 + O'H$.

$OH = A_1A_2 + A_1A_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$OH = A_1A_2\,(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

b. $\mathcal{A}(OA_1A_2) = \frac{1}{2} OA_1 \times OA_2 \times \sin \widehat{A_1OA_2}$.

$\mathcal{A}(OA_1A_2) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2}$.

$\mathcal{A}(OA_1A_2) = \frac{1}{4}$.

• De plus, $\mathcal{A}(OA_1A_2) = \frac{OH \times A_1A_2}{2}$

$\mathcal{A}(OA_1A_2) = \frac{A_1A_2(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})\,A_1A_2}{2}$

$\mathcal{A}(OA_1A_2) = A_1A_2{}^2 \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

• D'où, $A_1A_2{}^2 \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}$

et $A_1A_2 = \sqrt{\frac{1}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

c. Dans le triangle OA_1H_1, $\cos 15° = \frac{OH}{OA_1}$, donc $\cos 15° = OH$.

Ainsi, $\cos 15° = \sqrt{2 - \sqrt{3}}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

et $\sin 15° = \frac{A_2H}{OA_1}$, donc $\sin 15° = A_1H = \frac{A_1A_2}{2}$;

ainsi, $\sin 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

73 **1.** Puisque $OA = 1$ et que le triangle AOB est isocèle rectangle en B, on en déduit, d'après la propriété de Pythagore, que $C_0 = \sqrt{2}$.

2. Dans le triangle OAH rectangle en $\widehat{H}$, d'après la propriété de Pythagore :

$OH = \sqrt{1 - \left(\frac{C_0}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{C_0{}^2}{4}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{C_0{}^2}{4}}$.

• Ainsi, $HA_1 = = 1 - \sqrt{1 - \frac{C_0{}^2}{4}}$.

• Dans le triangle AHA_1, rectangle en H, d'après la propriété de Pythagore :

$AA_1 = \sqrt{\left(\frac{C_0}{2}\right)^2 + (1 - \sqrt{1 - \frac{C_0{}^2}{4}}}$

$AA_1 = \sqrt{\frac{C_0{}^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{C_0{}^2}{4}} + 1 - \frac{C_0{}^2}{4}}$

$$AA_1 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_0^{\ 2}}{4}}}.$$

$$C_1 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_0^{\ 2}}{4}}}.$$

3. On procède de même en notant H' le pied de la médiatrice du segment $[AA_1]$.

Ainsi, $OH' = \sqrt{1 - \frac{C_1^{\ 2}}{4}}$, $H'A_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{C_1^{\ 2}}{4}}$

et $AA_2 = C_2 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_1^{\ 2}}{4}}}$.

4. a. Le n^2 polygone possède 4×2^n côtés.

b. En tenant le même raisonnement qu'aux questions **2** et **3** :

$C_n = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_{n-1}^{\ 2}}{4}}}$. Donc $P_n = 2 \times 2^n \times C_n$.

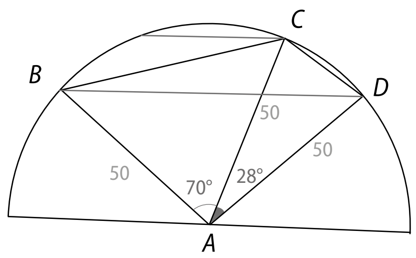
c. • $C_1 \approx 0{,}765$; $C_2 \approx 0{,}39$; $C_3 \approx 0{,}196$; $C_4 \approx 0{,}098$; $C_5 \approx 0{,}049$; $C_6 \approx 0{,}0245$; $C_7 \approx 0{,}01225$; $C_8 \approx 0{,}006$.

• $P_1 \approx 3{,}06$; $P_2 \approx 3{,}12$; $P_3 \approx 3{,}14$; $P_4 \approx 3{,}14$; $P_5 \approx 3{,}14$; $P_6 \approx 3{,}14$; $P_7 \approx 3{,}14$; $P_8 \approx 3{,}14$.

Plus le nombre de côtés du polygone augmente, plus le polygone se rapproche du demi-cercle.

Le périmètre du demi-cercle étant π, le demi-périmètre du polygone se rapproche de π lorsque le nombre de côtés devient grand.

74



• Pour le triangle ABC : le triangle ABC est isocèle en A,

donc mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{ACB} = \frac{180 - 70}{2} = 55°$.

Ainsi, $\frac{BC}{\sin 70°} = \frac{AB}{\sin 55°}$

d'où $BC = \frac{50}{\sin 55°} \times \sin 70° \approx 57{,}35$ m.

• Pour le triangle ACD, on procède de la même façon et on obtient :

mes $\widehat{CDA} = 76°$ et $CD = \frac{50}{\sin 76°} \times \sin 28° \approx 24{,}2$ m.

• Pour le triangle ABD, on procède de la même façon et on obtient :

mes $\widehat{ABD} = 41°$ et $BD = \frac{50}{\sin 41°} \times \sin 98° \approx 75{,}5$ m.

• Pour le triangle BCD :

mes $\widehat{BCD}$ = mes $\widehat{BCA}$ + mes $\widehat{ACD} = 55° + 76° = 131°$.

A est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD, donc :

$\frac{BD}{\sin \widehat{BCD}} = 2AC$ d'où $BD = 2 \times 50 \times \sin 131° \approx 75{,}5$ m.

b. On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BCD.

• D'une part, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} BC \times BD \times \sin \widehat{BCD}$

$\mathcal{A} \approx \frac{1}{2} \times 57{,}35 \times 75{,}5 \times \sin 131°$

$\mathcal{A} \approx 1\,634$ m^2.

D'autre part, $\mathcal{A} = BD \times \frac{CH}{2}$ où H est le pied de la hauteur issue de C.

Ainsi, $BD \times \frac{CH}{2} = 1\,634$, donc $CH \approx \frac{1\,634 \times 2}{75{,}5} \approx 43{,}3$ m.

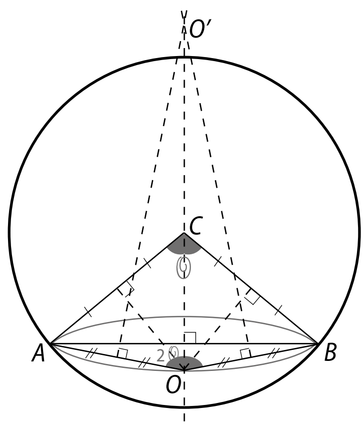
La rivière est large d'environ 43 m.

75 On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Dès lors, mes $\widehat{AOB} = 2\theta$.

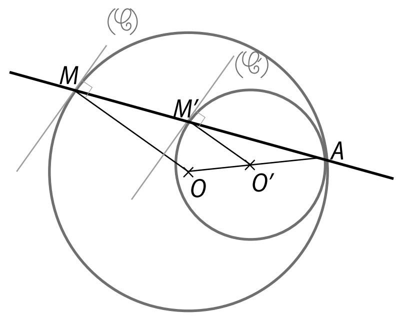
• On trace alors le point O', centre du cercle circonscrit au triangle AOB.

• l'arc de cercle vert passant par O et d'extrémités A et B est l'un des arcs capables cherchés.

• le deuxième arc capable vert est obtenu par symétrie par rapport à (AB).



76 **1. a.**

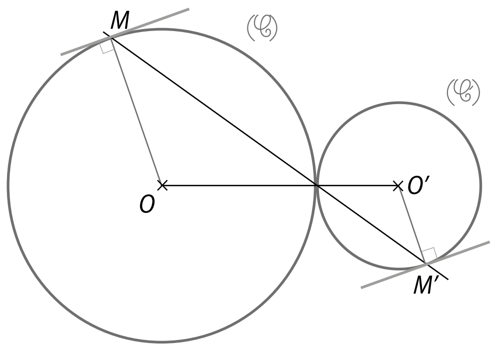


b. Le triangle OAM est isocèle en O et le triangle $O'AM'$ est isocèle en O'.

c. Puisque les triangles *OAM* et *O'AM'* sont isocèles et que mes $\widehat{OAM}$ = mes $\widehat{O'AM'}$, on en déduit que mes $\widehat{AMO}$ = mes $\widehat{AM'O'}$ et enfin que mes $\widehat{AOM}$ = mes $\widehat{AO'M'}$.
Ainsi, les droites (*OM*) et (*O'M'*) sont parallèles.

Or, la tangente en *M* à ($\mathscr{C}$) est perpendiculaire à (*OM*) et la tangente en *M'* à ($\mathscr{C}'$) est perpendiculaire à (*O'M'*), donc ces deux tangentes sont perpendiculaires.

2. a.



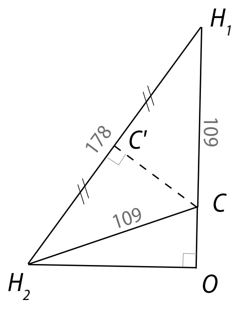
b. et **c.** Réponses identiques au **1. b.** et **c**.

3. On note *R* (resp. *R'*) le rayon de cercle ($\mathscr{C}$) (resp. ($\mathscr{C}'$)). Les points *A*, *O*, *O'* sont alignés ; les points *A*, *M*, *M'* sont alignés dans le même ordre ; de plus, $\frac{AO}{AO'} = \frac{R}{R'}$ et $\frac{AM}{AM'} = \frac{R}{R'}$ donc $\frac{AO}{AO'} = \frac{AM}{AM'}$.
Ainsi, d'après la propriété de Thalès, (*OM*) // (*O'M'*).

Or, la tangente à ($\mathscr{C}$) (resp. à ($\mathscr{C}'$)) en *M* (resp. en *M'*) est perpendiculaire à (*OM*) (resp. à (*O'M'*)).

Donc ces deux tangentes sont perpendiculaires.

77 **a.** On considère un triangle H_1CH_2, où *C* représente l'atome de carbone et H_1, H_2 deux atomes d'hydrogène. Le triangle H_1CH_2 est isocèle en *C*, donc le projeté orthogonal *C'* de *C* sur $[H_1H_2]$ est aussi le milieu de $[H_1H_2]$.



Dans le triangle H_1CC', rectangle en *C'* :

$\cos \widehat{CH_1C'} = \frac{H_1C'}{H_1C'} = \frac{89}{109'}$ d'où mes $\widehat{CH_1C'} \approx 35°$.

De même, mes $\widehat{CH_2C'} \approx 35°$.

Ainsi, mes $\widehat{H_1CH_2} = 180° - ($mes $\widehat{CH_1C'}$ + mes $\widehat{CH_2C'})$

mes $\widehat{H_1CH_2} \approx 110°$.

b. Sur le schéma précédent, on note *O* le point d'intersection de (H_1C) et de la perpendiculaire à (H_1C) passant par H_2.

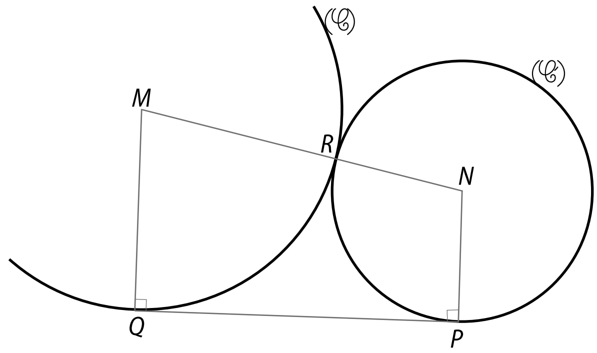
mes $\widehat{OCH_2} = 180°$ – mes $\widehat{H_1CH_2} \approx 70°$.
Dans le triangle OCH_2 rectangle en *O*,

$\cos \widehat{OCH_2} = \frac{OC}{H_2C}$, d'où $OC = H_2C \times \cos \widehat{OCH}$,
$OC = 109 \times \cos 70° \approx 37$ pm.

Finalement, $OH_2 = OC + CH_2 \approx 109 + 37 \approx 146$ pm.

78 Puisque *EF* = *FG*, les arcs de cercle $\overset{\frown}{EF}$ et $\overset{\frown}{FG}$ sont de même longueur, donc mes $\widehat{EHF}$ = mes $\widehat{FHG}$.
Or, il faut que mes $\widehat{FHG} = 32°$ donc que mes $\widehat{EHG} = 64°$.
Le quadrilatère étant inscriptible, les angles $\widehat{EHG}$ et $\widehat{EFG}$ sont supplémentaires.
La condition cherchée est donc mes $\widehat{EFG} = 180° - 64°$ c'est-à-dire mes $\widehat{EFG} = \alpha = 116°$.

79 **1. a.**



b. La droite (*QP*) est une tangente commune aux cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

2. a. La somme des mesures des quatre angles d'un quadrilatère est égale à 360°, or mes $\widehat{MQP}$ = mes $\widehat{QPN} = 90°$, donc mes $\widehat{QMN}$ + mes $\widehat{MNP} = 180°$.
Les angles $\widehat{QMN}$ et $\widehat{MNP}$ sont supplémentaires.

b. (*QP*) est la demi-tangente à ($\mathscr{C}$) en *Q*, donc :
mes $\widehat{RQP} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{QMR} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{QMN}$.

c. (*PQ*) est la demi-tangente à ($\mathscr{C}'$) en *P*, donc :
mes $\widehat{RPQ} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{RNP} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{MNP}$.

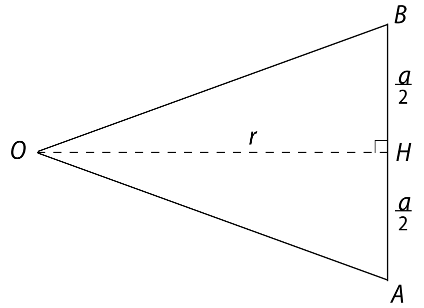
d. mes $\widehat{RPQ}$ + mes $\widehat{RQP} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{MNP}$ + mes $\widehat{QMN}$

$= \frac{1}{2}$ (mes $\widehat{MNP}$ + mes $\widehat{QMN}$)

$= \frac{1}{2} \times 180° = 90°$.

Les angles $\widehat{RPQ}$ et $\widehat{RQP}$ du triangle *PQR* sont complémentaires, donc mes $\widehat{PRQ} = 90°$, c'est-à-dire que le triangle *PQR* est rectangle en $\widehat{R}$.

80 **a.** • Ce nonagone régulier est constitué de neuf triangles isocèles identiques au triangle OAB.



mes $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{90} = 40°$, donc mes $\widehat{HOB} = 20°$.

$\tan \widehat{HOB} = \dfrac{BH}{OH}$ d'où $\tan 20° = \dfrac{\frac{a}{2}}{r}$,

ainsi $r = \dfrac{a}{2\tan 20°} \approx \dfrac{a}{0{,}72}$.

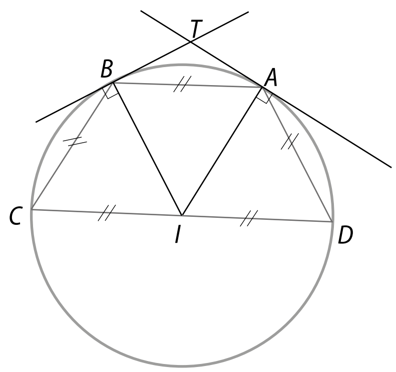
• $\mathcal{A}(OAB) = AB \times \dfrac{BH}{2} = a \times \dfrac{r}{2} = \dfrac{a \times \frac{a}{0{,}72}}{2} = \dfrac{a^2}{1{,}44}$.

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du polygone est : $\mathcal{A} = 9\,\dfrac{a^2}{1{,}44}$.

b. L'aire de la partie colorée en rouge est égale à l'aire du polygone à laquelle on soustrait l'aire du disque de rayon r, c'est-à-dire :

$$9\,\frac{a^2}{1{,}44} - \pi r^2 = 9\,\frac{a^2}{1{,}44} - \pi\left(\frac{a}{0{,}72}\right)^2 = a^2\left(\frac{9}{1{,}44} - \frac{\pi}{0{,}72^2}\right)$$
$$\approx 0{,}189a^2$$

81



On note E le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

D'après le théorème des milieux, le triangle CDE est équilatéral donc mes $\widehat{CDE} = 60°$.

Or, pour I milieu de $[CD]$, $ID = DA$ et mes $\widehat{IDA} = 60°$, donc le triangle IDA est équilatéral.

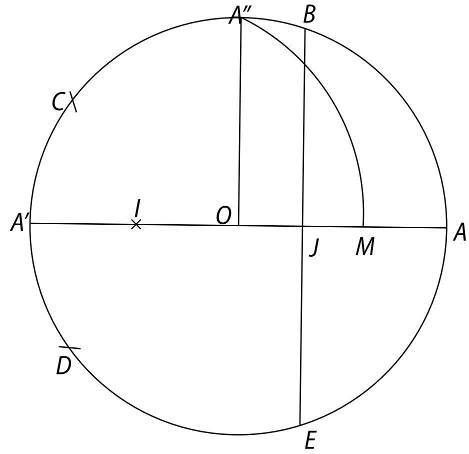
Il en est de même pour les triangles IBC et IAB ; et I est le centre du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit à $ABCD$.

Ainsi, mes $\widehat{TAB} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{AIB} = 30°$.

De même, mes $\widehat{TBA} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{AIB} = 30°$.

D'où, mes $\widehat{ATB} = 180° - 30° - 30° = 120°$.

82 **1.**



2. a. Dans le triangle OJB rectangle en J, $\cos \widehat{JOB} = \dfrac{OJ}{OB}$;

or $\widehat{JOB} = \widehat{AOB}$ et $OB = 1$, d'où l'égalité : $OJ = \cos \widehat{JOB}$.

b. • D'après la propriété de Pythagore dans le triangle IOA'' rectangle en O :

$IA'' = \sqrt{IO^2 + OA''^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

• $IM = IA'' = \sqrt{5}/2$,

donc $OM = OM - OI = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

et $OJ = \dfrac{OM}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ car J est le milieu de $[OM]$.

c. D'après **b.**, **c.** et le fait que $\cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, on en déduit que mes $\widehat{AOB} = 72°$.

D'après la construction :

mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{AOE}$ = mes $\widehat{BOC}$ = mes $\widehat{COD}$

= mes $\widehat{DOE} = 72°$, donc le polygone $ABCDE$ est un polygone régulier.

83 **1. a.** Le triangle OA_0A_1 est isocèle en O (puisque $OA_0 = OA_1$), donc mes $\widehat{OA_0A_1}$ = mes $\widehat{OA_1A_0} = \theta$.

b. α = mes $\widehat{PA_1M} = 180° -$ (mes $\widehat{MA_1O}$ + mes $\widehat{OA_1A_0}$)

donc $\alpha = 180° - 2\theta$.

2. a. Tous les triangles OA_nA_{n+1} sont isocèles en O et identiques car $OA_0 = OA_1 = \ldots = OA_n = OA_{n+1}$, donc $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_nA_{n+1}$.

La ligne brisée constituée des points A_0, A_1, …, A_{n+1} est formée de segments de même longueur.

b. Si $\theta = 54°$, alors mes $\widehat{A_0OA_1} = 180° - (54° + 54°) = 72°$.

De même, mes $\widehat{A_1OA_2}$ = mes $\widehat{A_2OA_3}$ = mes $\widehat{A_3OA_4}$ = mes $\widehat{A_4OA_0} = 72°$,

et $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_0$.

Ainsi, $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.

c. Si $\theta = 18°$, alors mes $\widehat{A_0OA_1} = 180° - (18° - 18°) = 144°$.

De même, mes $\widehat{A_1OA_2}$ = mes $\widehat{A_2OA_3}$ = mes $\widehat{A_3OA_4}$ = mes $\widehat{A_4OA_0} = 144°$, et $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_0$.

Ainsi, $A_0A_1A_2A_3A_4$ est le pentagone décrit, appelé pentagone régulier étoilé.

3. Le rayon lumineux fait une fois le tour lorsque :

mes $\widehat{A_0OA_1} + \ldots + \widehat{A_nOA_0} = 360°$,

c'est-à-dire lorsque $n \times$ mes $\widehat{A_0OA_1} = 360°$.

Ainsi mes $\widehat{A_0OA_1} = \dfrac{360°}{n}$.

Or, mes $\widehat{A_0OA_1} + 2\theta = 180°$,

donc $\theta = \dfrac{180° - \text{mes } \widehat{A_0OA_1}}{2} = 90° - \dfrac{180°}{n}$.

4. • Supposons que n est pair : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Le rayon lumineux fait deux fois le tour lorsque :

mes $\widehat{A_0OA_1} + \ldots +$ mes $\widehat{A_n\,OA_0} = 720°$, c'est-à-dire :

$n \times$ mes $\widehat{A_0OA_1} = 720°$ et qu'il n'est pas ressorti au bout d'un tour, c'est-à-dire :

mes $\widehat{A_0OA_1} + \ldots +$ mes $\widehat{A_kOA_0} \neq 360°$,

soit $k \times$ mes $\widehat{A_0OA_1} \neq 360°$.

Or, si $n = 2k$ et que $n \times$ mes $\widehat{A_0OA_1} = 720°$, alors, on a nécessairement $k \times$ mes $\widehat{A_0OA_1} = 360°$, donc il faut prendre n impair.

Dans ce cas, mes $\widehat{A_0OA_1} + 2\theta = 180°$,

donc $\theta = \dfrac{180° - \text{mes } \widehat{A_0OA_1}}{2} = 90° - \dfrac{360°}{n}$.

84 **a.** On note J le point d'intersection des droites (BI_1) et (AI_2).

• Dans le triangle ABJ,

mes $\widehat{AJB} = 180° -$ (mes $\widehat{JAB}$ + mes $\widehat{JBA}$)

mes $\widehat{AJB} = 75°$.

$$\frac{AJ}{\sin 42°} = \frac{BJ}{\sin 63°} = \frac{AB}{\sin 75°}$$

donc $AJ = \dfrac{900}{\sin 75°} \times \sin 42° \approx 623{,}5$ m.

$BJ = \dfrac{900}{\sin 75°} \times \sin 63° \approx 830{,}2$ m.

• Dans le triangle AI_1J,

mes $\widehat{AJI_1} = 180° -$ mes $\widehat{AJB} = 105°$;

mes $\widehat{AI_1J} = 180° -$ (mes $\widehat{AJI_1}$ + mes $\widehat{JAI_1}$)

mes $\widehat{AI_1J} = 51°$

$$\frac{I_1J}{\sin 24°} = \frac{AI_1}{\sin 105°} = \frac{AJ}{\sin 51°}$$

donc $I_1J \approx \dfrac{623{,}5}{\sin 51°} \times \sin 24° \approx 326{,}3$ m ;

$AI_1 \approx \dfrac{623{,}5}{\sin 51°} \times \sin 105° \approx 775$ m.

• Dans le triangle BI_2J, mes $\widehat{BJI_2}$ = mes $\widehat{AJI_1} = 105°$;

mes $\widehat{BI_2J} = 180° -$ (mes $\widehat{BJI_2}$ + mes $\widehat{JBI_2}$) $= 36°$.

$$\frac{JI_2}{\sin 39°} = \frac{BI_2}{\sin 105°} = \frac{BJ}{\sin 36°}$$

donc $JI_2 \approx \dfrac{BJ}{\sin 36°} \times \sin 39° \approx 888{,}9$ m ;

$BI_2 \approx \dfrac{830{,}2}{\sin 36°} \times \sin 105° \approx 1\,364{,}3$ m.

• Ainsi, $AI_1 \approx 775$ m

et $AI_2 = AJ + JI_2 \approx 623{,}5 + 888{,}9 \approx 1512$ m.

b. En utilisant OBI_2, on déduit que :

mes $\widehat{BI_2O} = 180° - (42° + 42° + 39°) = 59°$

donc mes $\widehat{JI_2I_1} = 21°$.

Dans le triangle JI_1I_2, $\dfrac{I_1I_2}{\sin \widehat{I_1JI_2}} = \dfrac{JI_1}{\sin \widehat{JI_2I_1}}$

d'où $I_1I_2 = \dfrac{326{,}5}{\sin 21°} \times \sin 75° \approx 880$.

La distance entre les deux îlots est d'environ 880 m.

c. La longueur du trajet A-I_1-I_2-B est d'environ :

$775 + 880 + 1\,364 = 3\,019$ m.

85 Les quadrilatères $ADME$, $CEMF$ et $BDFM$ sont tous les trois non croisés et inscriptibles dans les cercles ($\mathscr{C}1$), ($\mathscr{C}3$) et ($\mathscr{C}2$).

Ainsi, mes $\widehat{MDA}$ + mes $\widehat{MEA} = 180°$;

mes $\widehat{MFC}$+ mes $\widehat{MEC} = 180°$;

mes $\widehat{MFB}$ + mes $\widehat{MDB} = 180°$.

Or :

mes $\widehat{MFB}$ + mes $\widehat{MFC} = 180° -$ mes $\widehat{MDB} + 180° -$ mes $\widehat{MEC}$

$= 180° - (180° -$ mes $\widehat{MDA}) + 180° - (180° -$ mes $\widehat{MEA})$

$=$ mes $\widehat{MDA}$ + mes $\widehat{MEA} = 180°$.

Ainsi, mes $\widehat{MFB}$ + mes $\widehat{MFC} = 180°$, donc les points B, F, C sont alignés.

2 Angles orientés et trigonométrie

Activités d'introduction

1 Une nouvelle unité de mesure d'un angle

1. a. • La longueur du cercle ($\mathscr{C}$) est égale à 2π.

• La longueur de l'arc $\overset{\frown}{II'}$ est égale à π.

• La longueur de l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ est égale à $\frac{\pi}{2}$.

b. Ainsi, mes $(\widehat{IOI'}) = \pi$ rad et mes $(\widehat{IOJ}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

2. a. • (EF) étant la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IE}$ est égale à $\frac{\pi}{4}$.

• Les points E, O, F étant alignés, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{EF}$ est π et celle de $\overset{\frown}{IF}$ est égale à $\frac{3\pi}{4}$.

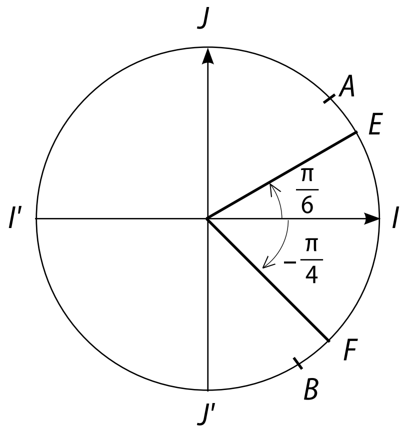
• Ainsi, mes $(\widehat{IOE}) = \frac{\pi}{4}$ rad, mes $(\widehat{IOF}) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ rad et mes $(\widehat{EOF}) = \pi$ rad.

b. • Comme par construction $IA = OI$ et comme $OA = OI$, le triangle OAI est équilatéral.

• Ainsi, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IA}$ est égale à $\frac{\pi}{3}$ et celle de $\overset{\frown}{AB}$ est égale à $\frac{2\pi}{3}$.

2 Angles orientés et mesure principale

1. a. b.



c. mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

2. b.

	« longueur » de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$	mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$	« longueur » de l'arc orienté $\overset{\frown}{IN}$	mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$
Départ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$
2e passage	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi$	$-\frac{\pi}{4} - 2\pi$	$-\frac{\pi}{4} - 2\pi$

c. La mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est $\frac{\pi}{6}$ car $\frac{\pi}{6} \in]-\pi, \pi]$.

La mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$ est $-\frac{\pi}{4}$ car $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi, \pi]$.

3 Cosinus et sinus

1.

Point M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	I	J	I'
Abscisse	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	–1
Ordonnée	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0
Mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π

2.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
cos (α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
sin (α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

3. Les abscisses coïncident avec les cosinus, et les ordonnées coïncident avec les cosinus. En effet, si $\alpha = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$, alors l'abscisse de M est cos(α) et l'ordonnée de M est sin(α).

4 Tangente

a. Les points O, T, M d'une part et les points O, I, M' d'autre part sont alignés. Les droites (IT) et (MM') sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{OT}{OM} = \frac{OI}{OM'} = \frac{IT}{MM'}$.

De la relation $\frac{OI}{OM'} = \frac{IT}{MM'}$ on déduit que $MM' = OM' \times \frac{IT}{OI}$. Or $OI = 1$, donc $MM' = IT \times OM'$.

b. Dans le triangle OMM' rectangle en M', comme le segment [MM'] est le côté opposé à l'angle $\widehat{MOM'}$ et le segment [OM'] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{MOM'}$, on a : tan (α) = tan ($\widehat{MOM'}$) $= \frac{MM'}{OM'}$.

c. On a alors : tan (α) $= \frac{MM'}{OM'} = IT \times \frac{OM'}{OM'} = IT$.

Savoir Faire

4 **a.** $36° \times \frac{\pi}{180} = \frac{18 \times 2}{18 \times 10} \times \pi = \frac{\pi}{5}$. 36° correspond à $\frac{\pi}{5}$ rad. **b.** $105° \times \frac{\pi}{180} = \frac{15 \times 7}{15 \times 12} \times \pi = \frac{7\pi}{12}$.

105° correspond à $\frac{7\pi}{12}$ rad. **c.** $-\frac{4\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = -144$.

$-\frac{4\pi}{5}$ rad correspond à –144°.

d. $\frac{5\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 225$. $\frac{5\pi}{4}$ rad correspond à 225°.

5 **a.** $47 = 3 \times 12 + 11$

donc $\frac{47\pi}{6} = 3 \times \frac{12\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ [2π].

b. $-\frac{22\pi}{3} = -\frac{24\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -8\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ [2π].

c. $\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4}$ [2π].

d. $\frac{20\pi}{8} = \frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ [2π]

6 • mes $(\widehat{\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FG}}) = -\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

• mes $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA}}) = -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

• mes $(\widehat{\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}}) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

En effet, la somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à π et chacun des trois angles d'un triangle équilatéral mesure $\frac{\pi}{3}$ rad.

10 $A(x) = 5\cos(x - 2\pi) + \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

$A(x) = 5\cos(x) + \cos(x) - 6\cos(x)$.

11 $B(x) = 3\cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2\sin(\pi - x)$.

$B(x) = -3\sin(x) - 2\sin(x)$. $B(x) = -5\sin(x)$.

12 $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$

donc $\sin(x) = -\sqrt{\frac{40}{49}}$ ou $\sin(x) = -\sqrt{\frac{40}{49}}$

donc $\sin(x) = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ ou $\sin(x) = \frac{2\sqrt{10}}{7}$.

Comme $x \in]\frac{\pi}{2} ; \pi[$, $\sin(x) > 0$, on en déduit :

$\sin(x) = \frac{2\sqrt{10}}{7}$.

Exercices d'entraînement

13 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai.

14 Une. **b.** 2π. **c.** $-\frac{\pi}{3}$.

15

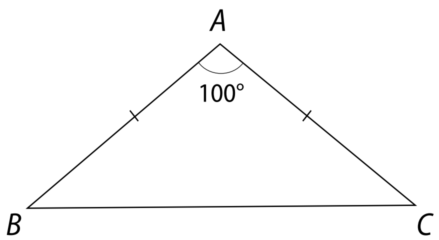
$\times \frac{\pi}{180}$

Degrés	25	$\frac{180}{7}$	$\frac{135}{2}$	80	120	480	240
Radians	$\frac{5\pi}{38}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

$25 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{36}$; $\frac{\pi}{7} \times \frac{180}{\pi} = \frac{180}{7}$; $\frac{3\pi}{8} \times \frac{180}{\pi} = \frac{135}{2}$;

$\frac{80 \times \pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$; $120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 480$.

16



ABC est nécessairement isocèle en A car 100° < 180°.

Ainsi : mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{ACB} = \frac{180 - 100}{2} = \frac{80}{2} = 40°$ (la somme des mesures des trois angles non orientés d'un triangle étant égale à 180°).

Par conséquent :

• mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$
$= 100° + (-40°) + (-40°) = 20°$.

• mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$
$= 100° + 40° + 40° = 180°$.

17 • mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

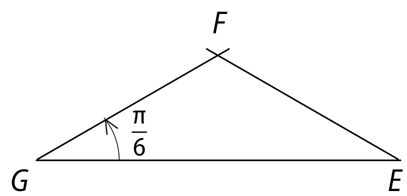
• mes $(\widehat{\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

Comme $\begin{cases} 20° \text{ est égal à } 20 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9} \text{ rad} \\ BCE \text{ est rectangle en } C, \end{cases}$

on a : mes $(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}}) = -\left(\pi - \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi}{18}$.

• mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}}) = 0$ rad.

18 **a.**



b. Comme mes $(\widehat{\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GF}}) = \frac{\pi}{6}$ rad et comme EFG est isocèle en F, on a : mes $(\widehat{\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}}) = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ rad et mes $(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}}) = \frac{\pi}{6}$ rad ; mes $(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}}) = -\frac{2\pi}{3}$ rad.

19 **a.** $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OR}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OU}}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ rad.

b. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OS}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OR}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{9\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ rad.

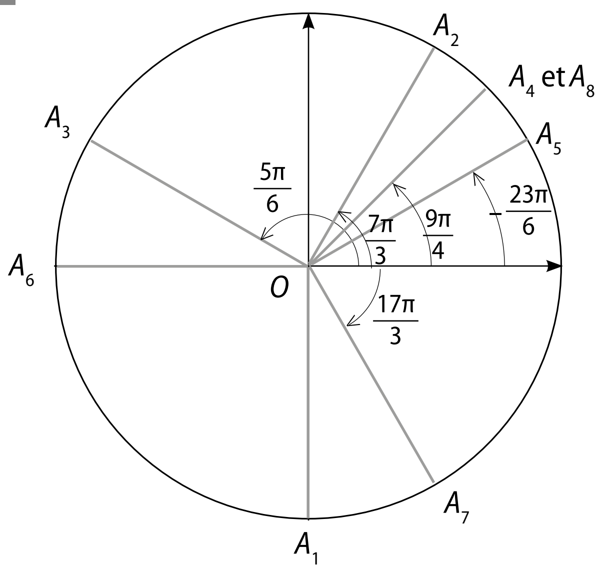
c. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OT}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OR}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OT}}) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ rad.

d. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OT}}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

20 **a.** $]-\pi\ ;\ \pi]$. **b.** Complémentaires.

c. $\pi - \text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \text{mes}(\widehat{\vec{v}, -\vec{u}})\ [2\pi]$.

21



22 **a.** $\frac{43\pi}{2} = \frac{44\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 11 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$ donc $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $\frac{43\pi}{2}$.

b. $-\frac{15\pi}{2} = -\frac{16\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -4 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $-\frac{15\pi}{2}$.

c. $\frac{109\pi}{2} = \frac{108\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 54 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $\frac{109\pi}{2}$.

d. $\frac{51\pi}{2} = \frac{52\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 26 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$ donc $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $\frac{51\pi}{2}$.

23 **a.** $-\frac{49\pi}{4} = -\frac{48\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -3 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}$ donc $-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $-\frac{49\pi}{4}$.

b. $\frac{23\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 3 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}$ donc $-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $\frac{23\pi}{4}$.

c. $\frac{75\pi}{4} = \frac{72\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 9 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ donc $\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de $\frac{75\pi}{4}$.

d. $-\frac{36\pi}{4} = -9\pi = -10\pi + \pi$ donc π est la mesure principale de $-\frac{36\pi}{4}$.

24 **a.** $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$ donc $\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale de $\frac{19\pi}{3}$.

b. $\frac{62\pi}{3} = \frac{60\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 10 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ donc $\frac{2\pi}{3}$ est la mesure principale de $\frac{62\pi}{3}$.

c. $-\frac{35\pi}{3} = -\frac{36\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -6 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$ donc $\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale de $-\frac{35\pi}{3}$.

d. $-\frac{50\pi}{3} = -\frac{48\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -8 \times 2\pi - \frac{2\pi}{3}$ donc $-\frac{2\pi}{3}$ est la mesure principale de $-\frac{50\pi}{3}$.

25 **a.** $\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}$ donc $\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de $\frac{25\pi}{6}$.

b. $-\frac{37\pi}{6} = -\frac{36\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -3 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}$ donc $-\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de $-\frac{37\pi}{6}$.

c. $\frac{41\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 3 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}$ donc $\frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale de $\frac{41\pi}{6}$.

d. $-\frac{14\pi}{6} = -\frac{12\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{3}$ donc $-\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale de $-\frac{14\pi}{6}$.

26 • Le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

Donc $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$ rad et

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ rad.

• Le triangle CBD est équilatéral donc :

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{3}$ rad.

27 • Comme l'hexagone $ABCDEF$ est régulier, de centre O, chaque angle au centre, de sommet O, mesure $\frac{360}{6} = 60°$ soit $\frac{\pi}{3}$ rad.

Par conséquent : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}$ rad.

• Le triangle *OAB* est équilatéral donc :

mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{3}$ rad.

• mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}})$ (Chasles)

$$= \frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

• [*AD*] est un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$) et *B* est un point du cercle ($\mathscr{C}$) donc mes $(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

• mes $(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EF}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}})$ (Chasles)

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

• mes $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{ED}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{ED}})$ (Chasles)

$$= \frac{2\pi}{3} - [\pi - \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED}})] = \frac{2\pi}{3} - (\pi - \frac{2\pi}{3})$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

28 • Le triangle *ABC* est isocèle en *A* donc :

mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \pi - 2 \times \frac{\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ rad et

mes $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{8}$ rad.

• Les points *A*, *C*, *D* étant alignés :

mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = [\pi - \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})] = -(\pi - \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$ rad.

• Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure.

Ainsi, mes $(\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}}) = \frac{\pi}{4}$ rad.

29 Comme *AB* = *AO* = *OB*, le triangle *AOB* est équilatéral.

Ainsi, mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}$ rad.

• mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ (Chasles)

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}$$

$$= \frac{13\pi}{12} - 2\pi\ [2\pi] = -\frac{11\pi}{12}\ [2\pi].$$

• mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}})$ – mes $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}})$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$$

(le triangle *OCA* est équilatéral).

• mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}})$ – mes $(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}})$

$$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

(le triangle *ODC* est équilatéral).

30 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Faux.

31 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Vrai.

32 **a.** $\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2 \times 2\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

b. $-\frac{21\pi}{4} = -\frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

c. $\frac{27\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} 4\ [2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{27\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

33 **a.** $\frac{31\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(\frac{31\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{31\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

b. $-\frac{51\pi}{6} = -\frac{48\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}\ [2\pi] = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

donc $\begin{cases} \cos\left(-\frac{51\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\frac{51\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$

c. $\frac{45\pi}{6} = \frac{48\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}\ [2\pi] = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{45\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{45\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{cases}$

34 **a.** $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

b. $\frac{112\pi}{3} = \frac{108\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\ [2\pi] = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(\frac{112\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{112\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

c. $\dfrac{70\pi}{3} = \dfrac{66\pi}{3} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}\ [2\pi] = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{70\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\left(\dfrac{70\pi}{3}\right) = \sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

35 **a.** $\dfrac{11\pi}{2} = \dfrac{12\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{11\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\dfrac{11\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$

b. $\dfrac{81\pi}{2} = \dfrac{80\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

et $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{81\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\dfrac{81\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

c. $-\dfrac{501\pi}{2} = -\dfrac{500\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

et $\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{501\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\dfrac{501\pi}{2}\right) = -1. \end{cases}$

36 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = -\pi + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}$ rad

b. mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = -\dfrac{\pi}{3}$ rad

d. mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = \pi$ rad

37 Les coordonnées du point M sont $\cos(x)$ et $\sin(x)$ avec $x = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$.

a. $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{8\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{-25\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{-24\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

et $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{-25\pi}{3}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

c. $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{24\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}.$

d. $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{-17\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{-12\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}.$

38 **a.** $x \approx 1{,}3$ rad ; **b.** $x \approx 0{,}6$ rad ;
c. $x \approx 2{,}3$ rad ; **d.** $x \approx -1$ rad.

39 **a.** $x \approx 1{,}718$ rad ; **b.** $x \approx -0{,}047$ rad ;
c. $x \approx 1{,}896$ rad ; **d.** $x \approx 0{,}277$ rad ;
e. $x \approx -0{,}381$ rad ; **f.** $x \approx 0{,}333$ rad.

40 **a.** Le pentagone $ABCDE$ étant un pentagone régulier de centre O, chaque angle au centre, de sommet O, mesure $\dfrac{360}{5} = 72°$, soit $\dfrac{2\pi}{5}$ radians.

- mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \dfrac{2\pi}{5}$ rad ;
- mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = 2 \times \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{4\pi}{5}$ rad ;
- mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}) = 3 \times \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{6\pi}{5} = \dfrac{10\pi}{5} - \dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{4\pi}{5}\ [2\pi]$;
- mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}}) = -\dfrac{2\pi}{5}$ rad.

b. Pour tout point M du cercle de centre O et de rayon a :

$\begin{cases} x_M = a \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) \\ y_M = a \times \sin(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) \end{cases}$

On en déduit que :

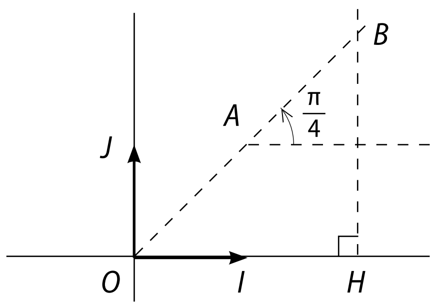
B a pour coordonnées $\left(a\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) ; a\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)$;

C a pour coordonnées $\left(a\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) ; a\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\right)$;

D a pour coordonnées $\left(a\cos\left(\dfrac{-4\pi}{5}\right) ; a\sin\left(\dfrac{-4\pi}{5}\right)\right)$;

E a pour coordonnées $\left(a\cos\left(\dfrac{-2\pi}{5}\right) ; a\sin\left(\dfrac{-2\pi}{5}\right)\right)$.

41



• Les points A, B, O sont alignés. En effet :

mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}})$ + mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}})$ (Chasles)

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0\ [2\pi].$$

Ainsi, mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

• Dans le triangle OBH rectangle en H, on a :

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{OH}{OB} = \frac{2}{OB}$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{OB}$

donc $OB = \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

• Des égalités $OB = 2\sqrt{2}$ et mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, on déduit que l'ordonnée de B est égale à :

$2\sqrt{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$

• Les coordonnées de K sont donc,

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_k = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

42 **a.** $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow$ Vrai. **b.** $\frac{5\pi}{6} = \pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$ Vrai.

c. $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5} \rightarrow$ Vrai.

d. $\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \rightarrow$ Faux.

43 **a.** $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = 0.$

b. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

44 **a.** $\cos(\pi - x) + \cos(-x) = -\cos(x) + \cos(x) = 0.$
b. $\sin(-x) + \sin(\pi - x) = -\sin(x) + \sin(x) = 0.$

45 **a.** $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{1}{2}.$

b. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sqrt{48}}{7} \times \frac{7}{1} = -\sqrt{48}.$

46 **a.** $\cos(2\pi - x) + 2\cos(\pi + x) + 3\cos(-x)$
$= \cos(-x) + 2(-\cos(x)) + 3\cos(x) = 2\cos(x).$
b. $\sin(3\pi - x) - \sin(\pi + x) + 5\sin(16\pi + x)$
$= \sin(\pi - x) - (-\sin(x)) + 5\sin(x)$
$= \sin(x) + \sin(x) + 5\sin(x) = 7\sin(x).$
c. $\sin(x + 7\pi) - 3\cos(x + 5\pi) - 4\cos(x - 4\pi)$
$= \sin(x + \pi) - 3\cos(x + \pi) - 4\cos(x)$
$= -\sin(x) + 3\cos(x) - 4\cos(x) = -\sin(x) - \cos(x).$

47 **a.** $3\cos(x) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x)$
$= 3\cos(x) + 2\cos(x) - \cos(x) = 4\cos(x).$

b. $2\sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$

$= -2\sin(x) - \sin(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$= -3\sin(x) + \sin(x) = -2\sin(x).$

48 **a.** $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{9}\right)$

$= 0 + 0 = 0.$

b. $\sin\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{21\pi}{11}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) + \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{11}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right)$

$= 0 + 2\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) - 2\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right).$

c. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$
$= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right)$
$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right).$

49 **a.** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

b. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$= -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$

c. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1.$

50 **a.** $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

b. $\tan(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x)$.

c. $\tan(\pi + x) = \dfrac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$.

51 **a.** $\cos(2n\pi) = 1$ et $\sin(2n\pi) = 0$.
b. $\cos((2n+1)\pi) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$ et $\sin((2n+1)\pi) = 0$.
c. $\cos(n\pi) = 1$ si n pair ou -1 si n impair et $\sin(n\pi) = 0$.

d. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

e. $\cos\left(\dfrac{-\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 0$

et $\sin\left(\dfrac{-\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = -1$.

f. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

g. $\cos\left(\dfrac{-\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \cos\left(\dfrac{-\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 0$

et $\sin\left(\dfrac{-\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \sin\left(\dfrac{-\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 1$.

52 **a.** Comme $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pi - \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = -\pi + \dfrac{\pi}{6}$

c'est-à-dire $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6}$.

De plus, $\sin(x) < 0$, donc $x = -\dfrac{5\pi}{6}$.

b. Comme $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$ ou $x = -(\pi - \dfrac{\pi}{4})$

c'est-à-dire $x = -\dfrac{\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4}$.

De plus, $\cos(x) > 0$, donc $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

53 **a.** $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$ donc :

$\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$. Ainsi, $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

donc $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ ou $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Comme $x \in [-\pi ; 0]$, $\sin(x) \leqslant 0$ donc $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$.

54 **a.** $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$
donc $\sin(x) = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ ou $\sin(x) = -0{,}8$.

b. $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$
donc $\cos(x) = \sqrt{0{,}96}$ ou $\cos(x) = -\sqrt{0{,}96}$.

c. $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(-\dfrac{4}{9}\right)^2 = 1 - \dfrac{16}{81} = \dfrac{65}{81}$

donc $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{65}}{9}$ ou $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

55 $\dfrac{\pi}{10} \in \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right) > 0$

or $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = 1 - \dfrac{2\sqrt{5} + 10}{16} = \dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{8}$

donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \dfrac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Ainsi, $\tan\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)} = \dfrac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \times \dfrac{4}{\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}$

$= \dfrac{2\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{4\sqrt{5} + 20}}$.

Faire le point

56 • Mesure principale de $\dfrac{107\pi}{6}$

Méthode 1 – On cherche $\alpha \in]-\pi ; \pi]$ et $k \in \mathbf{Z}$ tels que $\alpha = \dfrac{107\pi}{6} + 2k\pi$.

On a : $-\pi \leqslant \dfrac{107\pi}{6} + 2k\pi \leqslant \pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{113}{6}\pi \leqslant 2k\pi \leqslant -\dfrac{101}{6}\pi \Leftrightarrow -\dfrac{113}{12} \leqslant k \leqslant -\dfrac{101}{12}$.

Donc $k = -9$. Ainsi : $\alpha = \dfrac{107\pi}{6} - 18\pi = -\dfrac{\pi}{6}$.

Méthode 2 – On effectue la division euclidienne de 107 par 12 :
$107 = 12 \times 8 + 11$,

donc $\dfrac{107\pi}{6} = 16\pi + \dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}\ [2\pi] = \dfrac{11\pi}{6} - 2\pi\ \ [2\pi]$

$= -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

• Mesure principale de $-\dfrac{83\pi}{4}$

Méthode 1 – On cherche $\alpha \in]-\pi\,;\pi]$ et $k \in \mathbf{Z}$ tels que

$\alpha = -\dfrac{83\pi}{4} + 2k\pi$. On a : $-\pi \leqslant -\dfrac{83\pi}{4} + 2k\pi \leqslant \pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{79\pi}{4} \leqslant 2k\pi \leqslant \dfrac{87\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{79}{8} \leqslant k \leqslant \dfrac{87}{8}$

$\Leftrightarrow 9{,}875 \leqslant k \leqslant 10{,}875$.

Donc $k = 10$. Ainsi : $\alpha = -\dfrac{83\pi}{4} + 20\pi = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Méthode 2 – On effectue la division euclidienne de 83 par 8 ; $83 = 8 \times 10 + 3$ donc $-\dfrac{83\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

57 • $\cos\left(\dfrac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

• $\sin\left(\dfrac{-5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• On a : $-\dfrac{19\pi}{6} = \dfrac{-24\pi + 5\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

donc $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

et $\tan\left(-\dfrac{19\pi}{6}\right) = \tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)}{\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{-\sqrt{3}}{2}}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

58 mes$(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ($ACDE$ carré).

• mes$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (ABC équilatéral).

• Mais mes$(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BA}})$ = mes$(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CA}})$ + mes$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}})$

$= \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{-3\pi}{6} + \dfrac{-2\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Joseph n'a pas tenu compte de l'orientation.

59 **a.** mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}$ rad ; le décagone est régulier, donc chaque angle au centre (de sommet O) mesure $\dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}$.

b. mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}}) = 4 \times$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \dfrac{4\pi}{5}$ rad.

c. mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}}) = 6 \times$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \dfrac{6\pi}{5}$ rad.

d. mes$(\widehat{\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FE}})$ = mes$(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{EF}}) = -\dfrac{\pi}{5}$ rad.

60 **1. a.** L'abscisse de M est égale à $r \times \cos(\alpha)$.

b. L'ordonnée de M est égale à $r \times \sin(\alpha)$.

2. a. • L'abscisse de P est égale à $3\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$;

• l'ordonnée de P est égale à $3\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

b. L'abscisse de Q est égale à $0{,}2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$;

• l'ordonnée de Q est égale à $0{,}2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

c. On note α = mes$(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OR}})$

Des égalités : $\begin{cases} \dfrac{1}{7} = \cos(\alpha) \\ \dfrac{4\sqrt{3}}{7} = \sin(\alpha), \end{cases}$

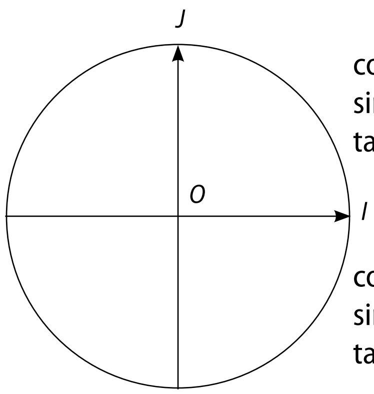
il vient que $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{7}\right) \approx 1{,}4$ rad

(ou $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right) \approx 1{,}4$ rad).

61

$\cos(x) < 0$
$\sin(x) > 0$
$\tan(x) < 0$

$\cos(x) > 0$
$\sin(x) > 0$
$\tan(x) > 0$



$\cos(x) < 0$
$\sin(x) < 0$
$\tan(x) > 0$

$\cos(x) > 0$
$\sin(x) < 0$
$\tan(x) < 0$

62 • Ali est parti de la bonne égalité : $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, mais ne discute pas selon le signe de cos (x). De plus, $\sqrt{25} = 5$ et non 25.

• Namandou se trompe d'égalité ! On écrit :

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ et non pas $\cos(x) = 1 - \sin(x)$!

• Correction

$\cos^2(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$ donc $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{24}}{5}$ ou

$\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{24}}{5}$. Comme $x \in \left]-\pi\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) < 0$, donc

$\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{24}}{5} = -\dfrac{\sqrt{4 \times 6}}{5} = -2\,\dfrac{\sqrt{6}}{5}$.

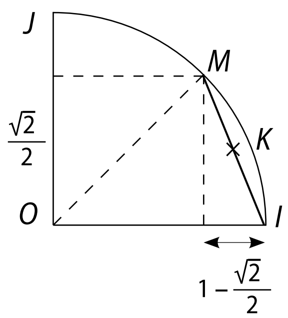
Se tester

63 à **66** Voir Manuel de l'élève page 257.

Exercices d'approfondissement

67 **1. a.** Les coordonnées de *M* sont $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car le point *M* appartient au cercle trigonométrique.

b.



$IM = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\sqrt{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}$

$= \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

c. *K* désigne le milieu du segment [*MI*].
Dans le triangle *OIK* rectangle en *K*, on a :

$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{IK}{IO} = IK$. Ainsi, $IM = 2 \times IK = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a alors : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Puis $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, donc :

$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Et enfin, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

2. *N* désigne le point du cercle ($\mathscr{C}$) tels que :

$\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

• Ses coordonnées sont $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

• $IN = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

• Soit *K′* le milieu de [*IN*]. Dans le triangle *OIK′* rectangle en *K′*, on a : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{IK'}{IO} = IK'$.

Ainsi, $IN = 2 \times IK' = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

• On conclut que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

• Puis, $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ donc :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, et enfin, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

68 **a.** Dans le triangle *ABH* rectangle en *H* :

$\sin(x) = \frac{BH}{AB}$ donc $BH = a\sin(x)$.

Donc $BC = 2BH = 2a\sin(x)$

b. • Dans le triangle *AHC* rectangle en *C* :

$\text{mes}\,(\widehat{HCA}) = \frac{\pi}{2} - x$ rad.

• Dans le triangle *BCI* rectangle en *I* :

$\text{mes}\,(\widehat{IBC}) = \frac{\pi}{2} - \text{mes}\,(\widehat{HCA}) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x$ rad

• Dans le triangle *BCI* rectangle en *I*, $\cos(x) = \frac{BI}{BC}$ donc $BI = BC\cos(x)$

c. Dans le triangle *ABI* rectangle en *I*, $\sin(2x) = \frac{BI}{AB}$ donc $BI = a\sin(2x)$

d. On a donc : $a\sin(2x) = BC\cos(x) = 2a\sin(x)\cos(x)$ or $a > 0$ donc $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

69 **a.** *AIB* est équilatéral donc $AI = AB$.

• Ainsi : $AI = AB = AD$ donc *AID* est isocèle en *A*.

b. • $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

• $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

• $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}}) = -\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

c. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DH}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH}}) - \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DI}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$
$= \frac{6\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi].$

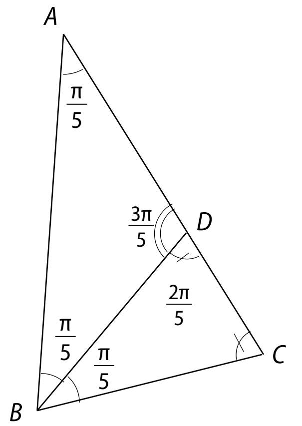
d. • Calcul de IK : dans le triangle AIK rectangle en K, on a : $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{IK}{AI} = IK$ donc $IK = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $IH = KH - IK = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Dans le triangle DIH rectangle en H, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{ID}{IH} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

70 **a.**



b. • Le triangle ABC étant isocèle en A :

$\text{mes}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \times (\pi - \frac{\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5}$ rad.

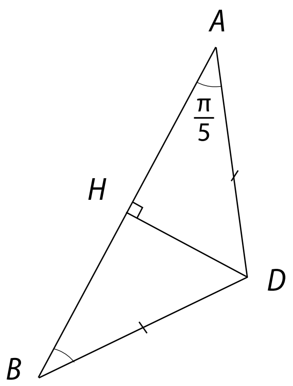
• (BD) étant la bissectrice de l'angle ABC :

$\text{mes}(\widehat{ABD}) = \text{mes}(\widehat{DBC}) = \frac{\pi}{5}$ rad.

• Dans ce triangle ABD, $\text{mes}(\widehat{ADB}) = \frac{3\pi}{5}$, et dans le triangle BDC, $\text{mes}(\widehat{BDC}) = \frac{2\pi}{5}$ car la somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à π.

c.

•



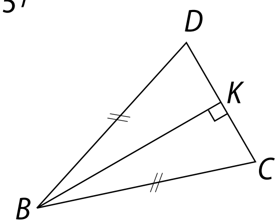
H désigne le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ABD.

Comme ABD est isocèle en D, $AB = 2 \times AH$.

De plus, dans le triangle AHD est rectangle en H : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{AH}{AD}$.

Donc $AB = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times AD$.

•

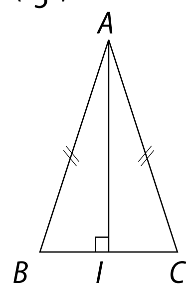


K désigne le pied de la hauteur issue de B dans le triangle BDC.

Comme BDC est isocèle en B, $CD = 2 \times CK$. De plus, dans le triangle BKC rectangle en K, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{CK}{BC}$.

Donc $CD = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times BC$.

•



I désigne le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Comme ABC est isocèle en A, $BC = 2 \times BI$. De plus, dans le triangle BAI rectangle en I, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{BI}{BA}$.

Donc $BC = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times AB = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times AD$

• En outre, comme $\text{mes}(BAD) = \text{mes}(\widehat{ABD})$ le triangle ABD est isocèle en D, donc $AD = BD$.

Comme $\text{mes}(\widehat{BDC}) = \text{mes}(\widehat{DCB})$, le triangle BDC est isocèle en B donc $BC = BD$

• Ainsi, on a : $\begin{cases} AB = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) BC \\ CD = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) BC \\ BC = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) BC \end{cases}$

d. • Comme $BC > 0$, on a $1 = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

• Comme $AC = AD + DC$ et $AB = AC$:

$2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times BC = BC + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times BC.$

Donc $BC = BC\left(2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$.

Or $BC > 0$ donc $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

• On obtient le système :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

e. De plus, $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

Donc en posant $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $b = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$,

on a : $(a+b)^2 = 4 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{2\pi}{5} \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, $a > 0$ et $b > 0$, donc $a + b > 0$.

• Ainsi, $a + b = \frac{\sqrt{5}}{2}$. De plus, $a - \mathrm{b} = \frac{1}{2}$.

Donc $a = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\mathrm{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

71 D'après la relation de Chasles :

mes $(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}})$

$= \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}})$

$= \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}$

$= \frac{12\pi}{12} = \pi$ rad.

Donc les points A, E, C sont alignés.

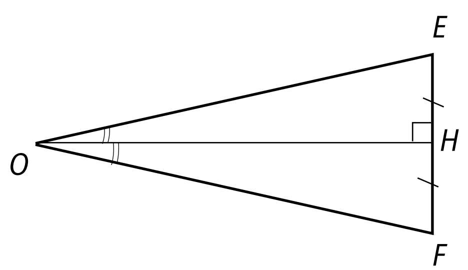
72 D'après la relation de Chasles :

mes $(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}})$

$= \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BA}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}})$

$= \pi + \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{5} = \frac{15\pi - 10\pi + 3\pi}{15} = \frac{8\pi}{15}$ $[2\pi]$.

73



Dans le triangle OEH rectangle en H :

$\sin\left(\frac{3}{2\pi}\right) = \frac{EH}{OE}$ donc $EH = 6\sin\left(\frac{3}{2\pi}\right)$.

Donc $EF = 12\sin\left(\frac{3}{2\pi}\right) \approx 5{,}51$ m.

74 **a.** Comme le cercle a pour rayon 100 m :

mes $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = \frac{\overset{\frown}{MN}}{100}$ rad où $\overset{\frown}{MN}$ est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$.

De plus, $\overset{\frown}{MN} = 100 - (d_M - d_N)$ où d_M et d_N désignent les distances parcourues respectivement par le coureur M et le coureur N.

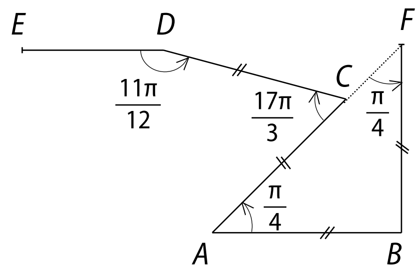
De la relation : $d = v \times t$, on déduit que :

mes $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = \frac{100 - t(v_M - v_N)}{100} = 1 - \frac{t}{100}(v_M - v_N)$

b. On a : $\begin{cases} 100 = 12{,}5 \times v_M \\ 100 = 50\,(v_M - v_N) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} v_M = \frac{100}{12{,}5} = 8 \text{ m. s.} \\ v_N = \frac{-100 + 50 \times v_M}{50} = 6 \text{ m. s.} \end{cases}$

75 **1. 2. 3.**



4. D'après la relation de Chasles :

mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}})$

$= \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}})$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{17\pi}{3} + \left(-\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{12}$

$= \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} - \frac{11\pi}{12} = -\pi$ $[2\pi]$

donc les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

6. D'après la relation de Chasles :

mes $(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AB}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AF}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}})$

$= -\frac{\pi}{4} + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$

$= -\frac{\pi}{4} + -\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ rad

Donc les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

76 Étant donnés trois points A, B et C alignés, on construit le cercle circonscrit au triangle ABC. Pour cela, on construit les médiatrices de deux segments, par ex. $[AB]$ et $[AC]$; ils se coupent en le centre du cercle circonscrit.

a. Les points M tels que mes $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$ = mes $((\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ sont les points de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ contenant le point C.
b. Les points M tels que :
mes $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = -$ mes $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ sont les points de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas le point C.

77 **a.** Les points B, I, A et B, O, C étant alignés, les droites (OI) et (AC) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{BI}{BA} = \frac{BO}{CC} = \frac{OI}{AC}$.

Donc $\frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}$ donc I est le milieu de [AB].
b. Dans le triangle ABC rectangle en A (car [BC] est un diamètre du cercle et A un point de ce cercle), on a :
$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC}$, donc $AB = 2\cos(\alpha)$
c. • Dans le triangle ABH rectangle en H, $\cos(\alpha) = \frac{BH}{AB}$
donc $BH = AB\cos(\alpha) = 2\cos^2(\alpha)$.
• Ainsi, $OH = BH - OB = 2\cos^2(\alpha) - 1$
d. L'angle $\widehat{ABC}$ inscrit et l'angle $\widehat{AOC}$ au centre interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$ de cercle. Donc mes $(\widehat{AOC}) = 2\alpha$.

• Dans le triangle OAH rectangle en H, $\cos(2\alpha) = \frac{OH}{OA}$
donc $OH = \cos(2\alpha)$
• Par conséquent : $OH = \cos(2\alpha)$ et $OH = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

Donc $\cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2}$

puis $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$.

e. • $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) + 1}{2} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\right) \times \frac{1}{2}$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$

et $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ $\left(\frac{\pi}{8} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\right)$,

$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

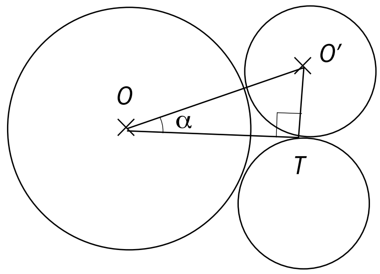
• $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$

et $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, $\left(\frac{\pi}{12} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\right)$,

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

78 **1.** Huit sphères de dimension identique sont tangentes à la neuvième. Ainsi, l'angle α représenté ci-dessous est tel que $8 \times 2\alpha = 2\pi$, donc $\alpha = \frac{\pi}{8}$.



$O'T = r$

Dans le triangle $CO'T$ rectangle en T, $\sin\alpha = \frac{O'T}{O'C}$ donc $O'T = O'C\sin\alpha$; donc $r = O'C\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. Dans le triangle $OO'C$ rectangle en C, l'égalité de Pythagore s'écrit : $OO'^2 = OC^2 + O'C^2$
donc $(R + r)^2 = (R - r)^2 + O'C^2$
donc $O'C^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$

3. a.
On a : $\begin{cases} r^2 = O'C^2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ O'C^2 = 4rR \end{cases}$

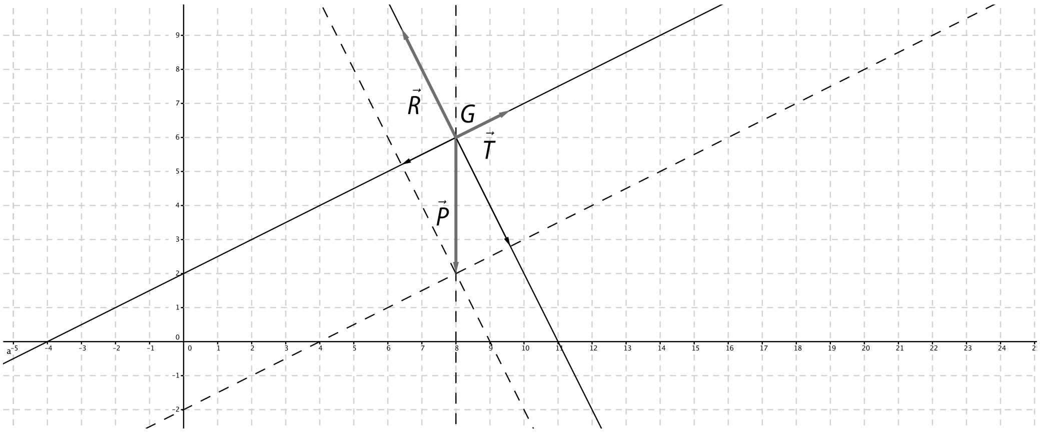
donc $\frac{r^2}{\sin^2\frac{\pi}{8}} = 4rR$; donc $\frac{r}{R} = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

b. $\frac{r}{R} \approx 0{,}59$.

3 Vecteurs

Activités d'introduction

1 En équilibre



2 Comète

1. $\vec{h}_1 = 2,8(0,5\,\vec{i} + 0,25\vec{j}) - 0,4\,(-\,0,25\,\vec{i} + 0,5\vec{j}) = 1,4\,\vec{i} + 0,7\,\vec{j} + 0,1\,\vec{i} - 0,2\vec{j} = 1,5\,\vec{i} + 0,5\,\vec{j}$.

Dans le repère terrien, on a $\vec{h}_1(1,5\,;0,5)$.

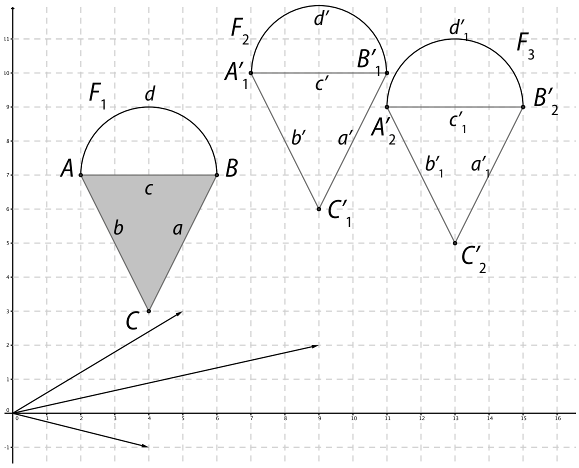
2. a. $\begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\vec{j} \\ \vec{v} = -\,0,25\vec{i} + 0,5\,\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\,\vec{j} \\ 2\vec{v} = -\,0,5\vec{i} + \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\vec{j} \\ \vec{u} + 2\vec{v} = 1,25\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\vec{j} \\ \vec{j} = 0,8\vec{u} + 1,6\,\vec{v} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\vec{i} + 0,25\,(0,8\,\vec{u} + 1,6\,\vec{v}) \\ \vec{j} = 0,8\,\vec{u} + 1,6\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = 0,5\,\vec{i} + 0,2\,\vec{u} + 0,4\,\vec{v} \\ \vec{j} = 0,8\,\vec{u} + 1,6\,\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8\,\vec{u} - 0,4\vec{v} = 0,5\,\vec{i} \\ \vec{j} = 0,8\,\vec{u} + 1,6\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = 1,6\,\vec{u} - 0,8\,\vec{v} \\ \vec{j} = 0,8\,\vec{u} + 1,6\,\vec{v} \end{cases}$

b. $\vec{h}_2 = 1,25(1,6\,\vec{u} - 0,8\,\vec{v}) + 1,25(0,8\,\vec{u} + 1,6\,\vec{v}) = 2\,\vec{u} - \vec{v} + \vec{u} + 2\,\vec{v} = 3\vec{u} + \vec{v}$. Dans le repère de la station, on a $\vec{h}_2(3\,;1)$.

3 Montgolfière

1. 2. 3. a.

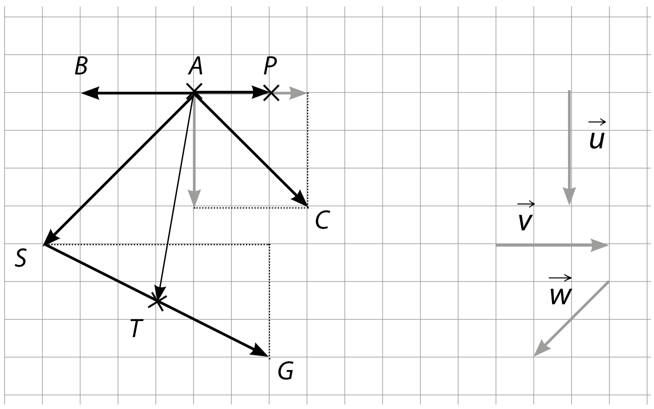


b. On remarque que F_3 est la translatée de F_2 par la translation de vecteur $\vec{v}$.

c. Appliquer successivement deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

4 Carte au trésor

a. b.



c. $\overrightarrow{ST} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{SG} = \dfrac{1}{2}(2\,\vec{v} + \vec{u}) = \dfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$.

d. $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{ST} = 2\,\vec{w} + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{SG} = 2\,\vec{w} + \dfrac{1}{2}(2\,\vec{v} + \vec{u})$

$= \dfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + 2\,\vec{w}$.

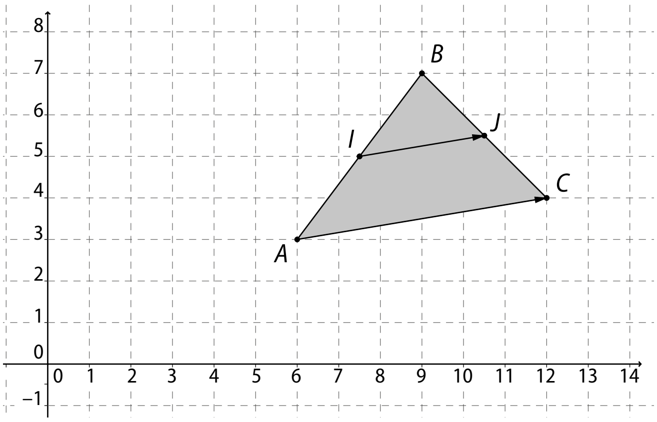
Savoir Faire

3 **c**. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$= -(2\vec{u} - 3\vec{v}) + (\vec{u} + 2\vec{v})$
$= -\vec{u} + 5\vec{v}$.

4 $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $CDEF$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$.
On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ et donc, que $ABFE$ est un parallélogramme.

5 **a**. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$ (Relation de Chasles).
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ car E est le milieu de $[AC]$.
D'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$.
b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ($ABCD$ parallélogramme).
$= \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles).
$= 2\overrightarrow{EC}$ (E milieu de $[AC]$).

6



$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$ (Relation de Chasles) (1).

$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (I milieu de $[AB]$).

$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (J milieu de $[BC]$).
En remplaçant dans (1), on obtient :

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

9 $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$ (Relation de Chasles)
$= \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC}$ (énoncé)
$= 3(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
$= 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$ (énoncé)
$= 3\overrightarrow{MC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires.
Les droites (BN) et (MC) sont donc parallèles.

10 $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP}$ (Relation de Chasles).
$\overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{MB}$ (énoncé).
$\overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB}$ ($ABCD$ parallélogramme).
$\overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BP} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = 2\overrightarrow{AP}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{DP}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires.
Les points D, A et P sont donc alignés.

13 **a**. dét $(\vec{u}, \vec{v}) = (-2) \times (-4,5) - 3 \times 3 = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b. dét $(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 4 - (-2) \times 6 = 24$ et $24 \neq 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

14 **a.** $\overrightarrow{AB}(4 ; 2)$, $\overrightarrow{CD}(6 ; 3)$.
dét $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ donc $(AB) // (CD)$.
b. $\overrightarrow{AC}(4 ; -5)$, $\overrightarrow{BD}(6 ; -4)$.
dét $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \neq 0$ donc (AB) et (CD) ne sont pa parallèles.

15 **a.** $\vec{u}(2 ; 0)$, $\vec{v}(2 ; 2)$.
b. dét $(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Ils constituent donc une base.

c. $\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{j} \\ \vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} \\ \vec{i} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \end{cases}$.

16 **a**. Les droites (AB) et (AD) ne sont pas parallèles.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et constituent donc une base.

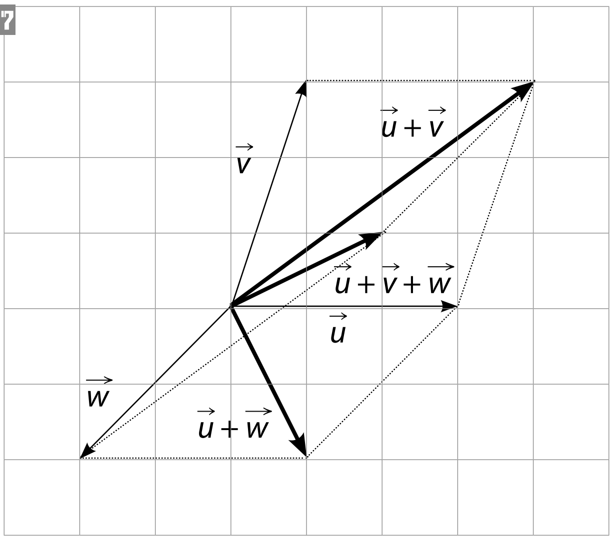
b. $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $C(1 ; 1)$, $D(0 ; 1)$ et $O\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

c. $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ y_E = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right). \end{cases}$

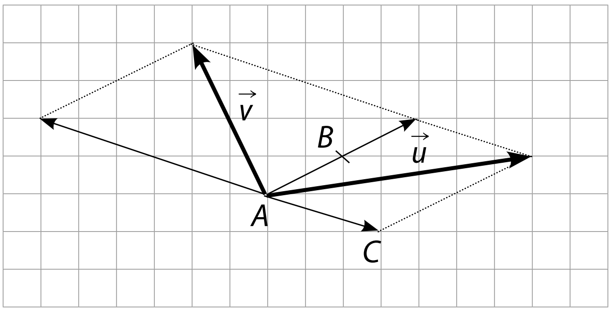
D'où : $E(1 ; 2)$.

Exercices d'entraînement

17



18



19 **a**. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;
b. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$;
c. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}$;
d. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

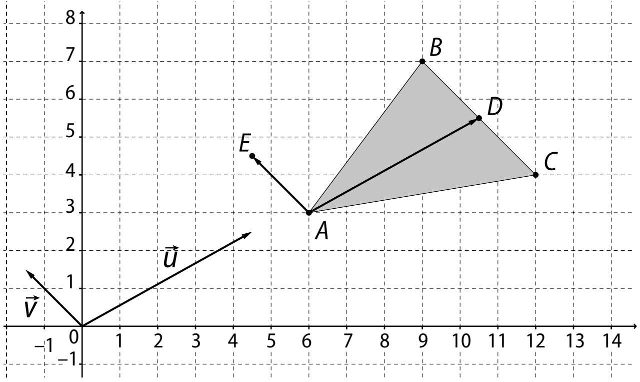
20 **a**. $\vec{c}=\vec{f}$; **b.** $\vec{a}=-\vec{e}$ ou $\vec{d}=-\vec{g}$;
c. $\vec{b}$, $\vec{d}$ et $\vec{g}$ ont même direction.

21 **a.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$; **b**. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$;
c. $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC}$; **d.** $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EF}$;
e. $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$; **f.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$.

22 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ 2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\\ \overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}).\end{cases}$

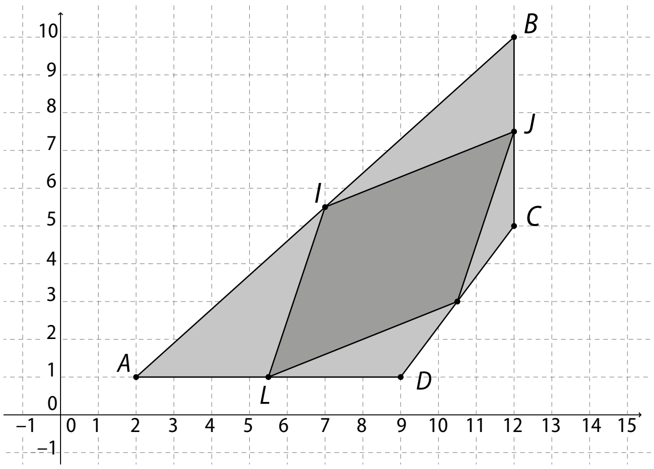
D'où la construction des points D et E.



23 **a.** $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}$;
b. $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$;
b. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AC}$;
d. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$;
e. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$;
f. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}$.

24 • I est le milieu de [AB], donc $\overrightarrow{IA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$;
• J est le milieu de [AC], donc $\overrightarrow{JA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$;
• $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$ d'après la relation de Chasles ;
• $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

25 **a.**



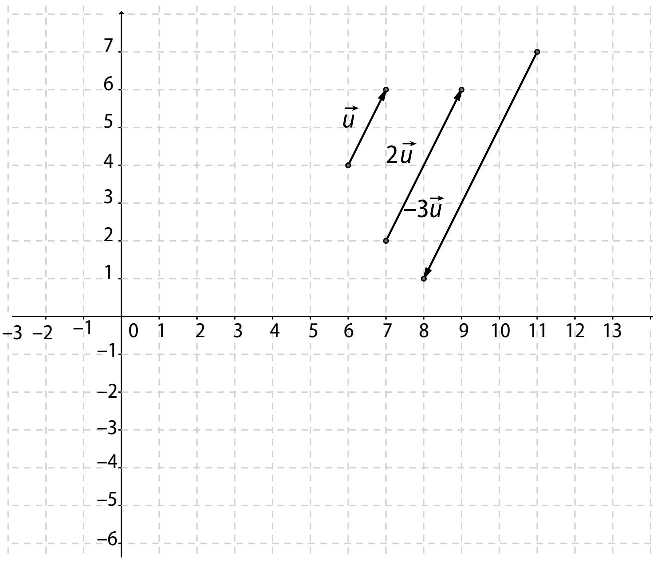
IJKL est un parallélogramme.

b. $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{LK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D'où $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ et *IJKL* est un parallélogramme.

26 **1.**



2. $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

3. $\vec{v} = -\dfrac{2}{3}\vec{w}$.

27 $k = -\dfrac{3}{2}$; $m = \dfrac{2}{3}$.

28 **a.** L'addition des deux égalités vectorielles de l'énoncé donne : $2\vec{u} - 4\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = 2\vec{w}$.
La soustraction des deux égalités vectorielles de l'énoncé donne : $4\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \dfrac{1}{2}\vec{w}$.

b. $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

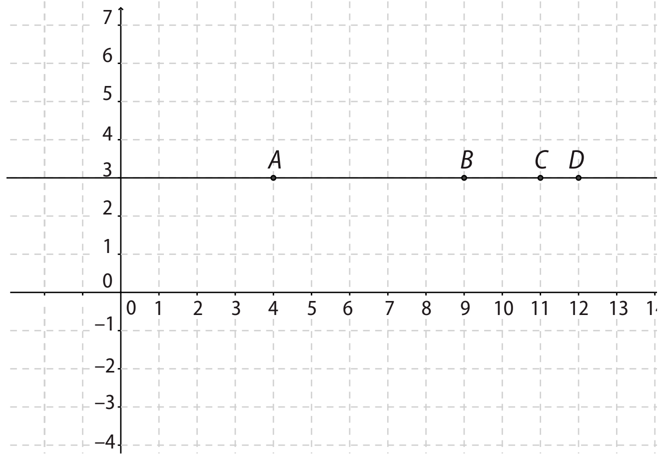
29 **1. a.** Les quatre points A, B, M et I sont alignés.
Les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ sont colinéaires.
b. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ (relation de Chasles).
$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$ (relation de Chasles).
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$ (I milieu de [AB]).
Donc $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$ et $k = \dfrac{1}{2}$.

2. Les égalités vectorielles du **1. b.** ne dépendent pas de la position du point M et restent valables.

3. Pour tout point M, on a $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.

30 **a.** Oui ; **b.** Oui ; **c.** Oui ; **d.** Oui.

31



a. A, B, C et D sont alignés.

b. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, donc A, B et C sont alignés.
$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ colinéaires, donc B, C et D sont alignés.
Les quatre points sont donc bien alignés.

32 **a.** $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{CD}$.
$ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
On déduit de ces trois égalités que : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ND}$, autrement dit $MBND$ est un parallélogramme.

b. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC} \Leftrightarrow AMCN$ parallélogramme ;
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD$ parallélogramme ;
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ND} \Leftrightarrow MBND$ parallélogramme.

33 $\vec{a} = -3\vec{d} = 5\vec{e}$ donc $\vec{a}$, $\vec{d}$ et $\vec{e}$ sont colinéaires.
$\vec{c} = -2\vec{b} = -4\vec{f}$ donc $\vec{c}$, $\vec{b}$ et $\vec{f}$ sont colinéaires.

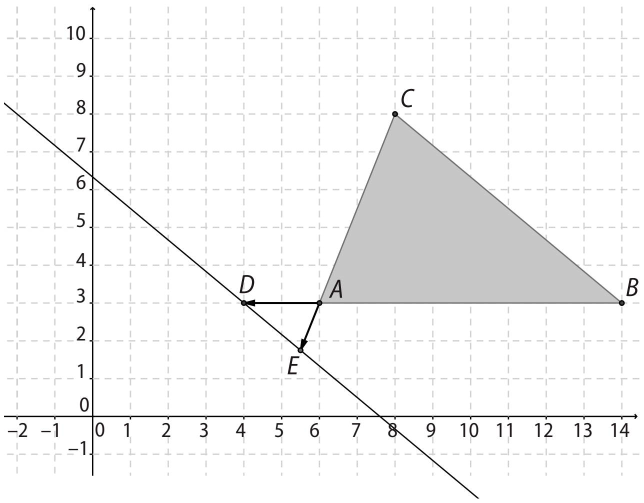
34 **a.** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$.
Or I milieu de [BC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
Donc, on a bien : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

d. On a démontré que : $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
Donc $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

e. Les points A, G et I sont donc alignés.

35 **a.**



b. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ (Relation de Chasles)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

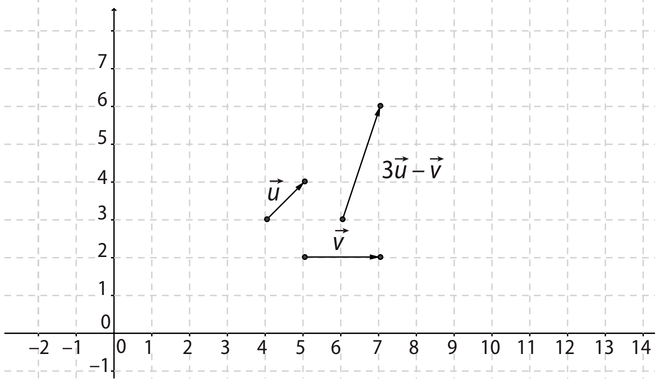
Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent, $(DE) \parallel (BC)$.

36 $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 2$; $\|\vec{w}\| = \sqrt{13}$.

37 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ donc $BC \leqslant AB + AC \Leftrightarrow BC \leqslant 5$.

Donc on a $0 \leqslant BC \leqslant 5$.

38 **a.**



b. $\|3\vec{u} - \vec{v}\| \leqslant \|3\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \leqslant 3 \times 4 + 3$.

D'où : $\|3\vec{u} - \vec{v}\| \leqslant 15$.

39 $\|(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}\| \leqslant \|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{w}\|$
$\leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

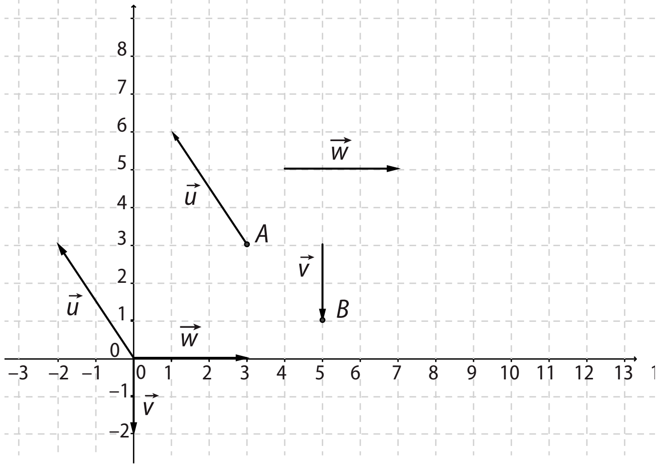
40 **a.** Possible car $\|\overrightarrow{AB}\| \leqslant \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$ ainsi que $\|\overrightarrow{AC}\| \leqslant \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\| \leqslant \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{AB}\|$.

b. Impossible car $\|\overrightarrow{BC}\| \geqslant \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{AB}\|$.

c. Possible, mais triangle aplati. Les trois points A, B et C sont alignés.

41 **a.** $\vec{u}(-4\,;-1)$; **b.** $\vec{v}(0\,;-3)$; **c.** $\overrightarrow{AB}(2\,;2)$;
d. $\overrightarrow{AD}(3\,;0)$; **e.** $\overrightarrow{CB}(0\,;6)$; $\overrightarrow{CD}(1\,;4)$.

42 **1. a. b. c.**



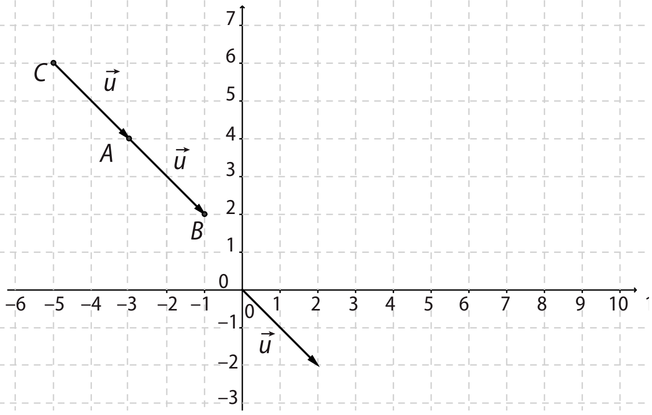
2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$;

$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$;

$\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$.

43 **a.** $\vec{u} + \vec{v}(1\,;-1)$; **b.** $-3\vec{v}(3\,;-6)$;
c. $\vec{u} - 2\vec{v}(4\,;-7)$.

44 **a.**



b. $B(-1\,;2)$; $C(-5\,;6)$.

c. $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - (-3) = 2 \\ y_B - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 2. \end{cases}$

$\overrightarrow{CA} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x_C = 2 \\ 4 - y_C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_C = 5 \\ -y_C = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -5 \\ y_C = 6 \end{cases}$

d. Le point A est le milieu de $[BC]$ car :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow AB = CA$ et A, B et C alignés.

45 **a.** Conjecture : $D(-2\,;-4)$.

b. $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-1=-1-2 \\ y_D-(-3)=2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-2 \\ y_D=-4. \end{cases}$

46 $\|\vec{u}\|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$.

$\vec{v}=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ donc $\vec{v}(45\,;\dfrac{3}{5})$.

47 **a.** $\overrightarrow{AB}(-2-(-1)\,;-1-2)$ donc $\overrightarrow{AB}(-1\,;-3)$ d'où :

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$;

$\overrightarrow{AC}(-1-2\,;3-2)$ donc $\overrightarrow{AC}(-3\,;1)$ d'où :

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$.

b. Le triangle ABC est isocèle de sommet A.

48 **1. a.** $\overrightarrow{AB}(3\,;4)$; $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$;

b. $\overrightarrow{AC}(5\,;-1)$; $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$;

c. $\overrightarrow{BC}(2\,;-5)$; $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$.

2. Si le triangle ABC est rectangle, son hypoténuse est le côté le plus long $[BC]$.

$BC^2\neq AB^2+AC^2$. Donc ABC n'est pas rectangle.

49 **a.** $\overrightarrow{AB}(5-(-1)\,;2-1)=(6\,;1)$;

$\overrightarrow{DC}(4-(-2)\,;-2-(-3))=(6\,;1)$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme.

b. I et J désignent les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

$I\left(-1+\dfrac{4}{2}\,;1+\dfrac{(-2)}{2}\right)$ donc $I\left(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$;

$J\left(5+\dfrac{(-2)}{2}\,;2+\dfrac{(-3)}{2}\right)$ donc $J\left(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Les milieux des diagonales étant confondus, $ABCD$ est un parallélogramme.

50 **b.** $E(-2\,;2)$; $F(3\,;4)$; $G(1\,;0)$; $H(-4\,;-2)$.

$\overrightarrow{EF}(3-(-2)\,;4-2)=(5\,;2)$;

$\overrightarrow{HG}(1-(-4)\,;0-(-2))=(5\,;2)$.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}\Leftrightarrow EFGH$ est un parallélogramme.

d. $\overrightarrow{EG}(3\,;-2)$; $\overrightarrow{EH}(-2\,;-4)$

$\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EH}\Leftrightarrow \begin{cases} x_I-(-2)=3+(-2) \\ y_I-2=-2+(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=-1 \\ y_I=-4 \end{cases}.$

e. $\overrightarrow{HI}(-1-(-4)\,;-4-(-2))=(3\,;-2)$;

$\overrightarrow{EG}(1-(-2)\,;0-2)=(3\,;-2)$.

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{HI}\Leftrightarrow EGIH$ est un parallélogramme.

51 **a.** $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \begin{cases} x_E-0=2-(-2) \\ y_E-4=-1-(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E=4 \\ y_E=4 \end{cases}$

donc $E(4\,;4)$.

$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \begin{cases} 0-x_F=2-(-2) \\ 4-y_F=-1-(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_F=4 \\ -y_F=-4 \end{cases}$

donc $F(-4\,;4)$.

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow \begin{cases} -2-x_G=0-2 \\ -1-y_G=4-(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_G=0 \\ -y_G=4 \end{cases}$

donc $G(0\,;-4)$.

b. $AB=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$;

$AC=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$.

$AB=AC$ donc ABC isocèle en A.

$GF=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{80}$;

$EG=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2}=\sqrt{80}$.

$GF=EG$ donc FGE isocèle en G.

52 **1.** $\vec{F_1}(-2\,;1)$; $\vec{F_2}(2\,;3)$.

2. $\vec{F_3}(-2+2\,;1+3)$ donc $\vec{F_3}(0\,;4)$.

3. a. Verticale de haut en bas.

b. $P=\|\vec{F_3}\|=\sqrt{0^2+4^2}=4$.

D'où $mg=4\Leftrightarrow 9,81m=4\Leftrightarrow m=\dfrac{4}{9,81}\approx 0,4$ kg.

53 dét $(\vec{a}\,,\vec{b})=2\times2-4\times(-1)=8$, $8\neq0$ donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

dét $(\vec{b}\,,\vec{c})=(-1)\times1-2\times(-0,5)=0$, donc $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont colinéaires.

On en déduit que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ ne sont pas colinéaires.

54 **a.** dét $(\vec{u},\vec{v})=1\times6-(-2)\times(-3)=0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b. $\vec{v}=-3\vec{u}$.

55 $\overrightarrow{AB}(2\,;2)$; $\overrightarrow{AC}(4\,;5)$.

dét $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})=2\times5-2\times4=2$, $2\neq0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont pas alignés.

56 $\overrightarrow{EF}(3\,;-1)$; $\overrightarrow{GH}(6\,;-2)$.

dét $(\overrightarrow{EF}\,,\overrightarrow{GH})=3\times(-2)-(-1)\times6=0$, donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires. Les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

57 **a.** $\overrightarrow{AB}(2\,;3)$; $\overrightarrow{CD}(-2\,;-3)$.

dét $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD})=2\times(-3)-3\times(-2)=0$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b. $\overrightarrow{AB}(4\ ;2)\ ;\overrightarrow{CD}(-2\ ;1)$.
dét $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 4\times 1 - 2\times(-2) = 8$, $8 \neq 0$, les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

c. $\overrightarrow{AB}(-3\ ;-3\sqrt{3})\ ;\overrightarrow{CD}(3\ ;3\sqrt{3})$.
dét $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = -3\times 3\sqrt{3} - (-3\sqrt{3})\times 3 = 0$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

58 $\overrightarrow{AB}(3\ ;1)\ ;\overrightarrow{CD}(6\ ;-1)$.
dét $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 3\times(-1) - 1\times 6 = -9$, $-9 \neq 0$ donc les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

59 $\overrightarrow{AB}(-4\ ;3)\ ;\overrightarrow{CD}(12\ ;-9)$.
dét $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = -4\times(-9) - 3\times 12 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Ainsi les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $ABCD$ est un trapèze.

60 **a.** $\overrightarrow{AD}(4\ ;-2)\ ;\overrightarrow{BC}(8\ ;-4)$.
dét $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}) = 4\times(-4) - (-2)\times 8 = 0$ donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Ainsi les droites (AD) et (BC) sont parallèles et $ABCD$ est un trapèze.
b. $\overrightarrow{AC}(8\ ;0)\ ;\overrightarrow{BD}(4\ ;-6)$.
dét $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = 8\times(-6) - 0\times 4 = -48$, $-48 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi les droites (AC) et (BD) sont sécantes.

c. $M\,(0{,}7\ ;3)$. **d.** $I\left(\dfrac{-2+2}{2}\ ;\dfrac{3+1}{2}\right) = (0\ ;2)\ ;$
$J\left(\dfrac{-2+6}{2}\ ;\dfrac{7+3}{2}\right) = (2\ ;5)$.
e. La lecture des coordonnées étant approximative, on ne peut que faire une conjecture.
$\overrightarrow{MI}(-0{,}7\ ;-1)\ ;\overrightarrow{IJ}(2\ ;3)$.
dét $(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{IJ}) = -0{,}7\times 3 - (-1)\times 2 = -0{,}1$.
Avec la valeur exacte de $x_M = \dfrac{2}{3}$, on trouverait 0, donc les points I, J et M sont alignés.

61 **a.** dét $(\vec{u},\vec{v}) = 2\times 9 - 3\times x = 18 - 3x$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow 18 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 6$.
b. dét $(\vec{u},\vec{v}) = -1\times x - 3\times 2 = -x - 6$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow -x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$.
c. dét $(\vec{u},\vec{v}) = -2\times(1+x) - 4\times 1 = -6 - 2x$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow -6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

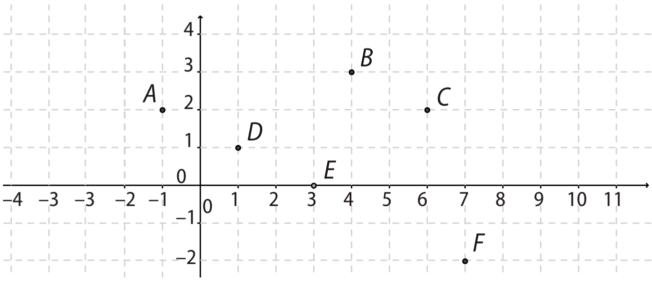
62 **a.** $I\left(\dfrac{3+5}{2}\ ;\dfrac{4-1}{2}\right) = \left(4\ ;\dfrac{3}{2}\right)$.
b. $G\left(\dfrac{1+3+5}{3}\ ;\dfrac{3+4-1}{3}\right)$ donc $G\,(3\ ;2)$.
c. $\overrightarrow{AG}(2\ ;-1)\ ;\overrightarrow{AI}\left(3\ ;-\dfrac{3}{2}\right)$.
dét $(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AI}) = 2\times -\dfrac{3}{2} - (-1)\times 3 = 0$ donc les points A, G et I sont alignés.

63 D est sur l'axe des ordonnées donc $x_D = 0$.
(AB) // (CD) donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{AB}(2\ ;-4)\ ;\overrightarrow{CD}(-2\ ;y_D)$.
dét $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow 2\times y_D - (-4)\times(-2) = 0$
$\Leftrightarrow 2\,y_D - 8 = 0 \Leftrightarrow y_D = 4$.

64 **1.** $\overrightarrow{AB}(6\ ;0) = \overrightarrow{DC}\,(6\ ;0)$ donc $ABCD$ est un parallélogramme. $AB = 6\ ;AD = 3\ ;BD = \sqrt{45}$, la réciproque du théorème de Pythagore assure que le triangle ABD est rectangle en A. $ABCD$ est donc un rectangle.
2. a. $I\left(\dfrac{7+1}{2}\ ;\dfrac{4+4}{2}\right)$ donc $I\,(4\ ;4)$.
b. $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J - 7 = 3 \\ y_J - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 10 \\ y_J = 4\,. \end{cases}$
c. $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K - 1 = 3\times 0 \\ y_K - 4 = 3\times(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 \\ y_K = -5 \end{cases}.$
d. $\overrightarrow{KC}\,(6\ ;6)\ ;\overrightarrow{CJ}\,(3\ ;-3)$.
dét $(\overrightarrow{KC},\overrightarrow{CJ}) = -6\times -3 - 6\times 3 = 0$ donc les points K, C et J sont alignés.

65 **1. a.** $\overrightarrow{AB}(1\ ;1)\ ;\overrightarrow{AC}(-4\ ;-4)$.
dét $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 1\times -4 - 1\times(-4) = 0$ donc les points A, B et C sont alignés.
b. $-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\,(1\ ;1)$ donc $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{BE} = 5\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 3 = 5\times 1 \\ y_E - 2 = 5\times(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 8 \\ y_E = -3 \end{cases}.$
3. $\overrightarrow{AD}(2\ ;0)\ ;\overrightarrow{CE}(10\ ;0)$.
dét $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CE}) = 2\times 0 - 0\times 10 = 0$ donc les droites (AD) et (CE) sont parallèles.

66 **1. a. b.**



c. $D(1\ ;1)$.

2. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-(-1)=2 \\ y_D-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=1 \\ y_D=1 \end{cases}.$

4. $\overrightarrow{ED}(-2\,;1)\,;\,\overrightarrow{EF}(4\,;-2)$.

dét $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = -2\times(-2)-1\times 4 = 0$ donc les points E, D et F sont alignés.

67 **a.** dét $(\vec{u}, \vec{v}) = 3\times 2-(-1)\times 3,5 = 9,5$.

$9,5 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les trajectoires ne sont pas parallèles.

b. dét $(\overrightarrow{AC}, \vec{u}) = 0$, l'archer placé en A atteindra la cible.

68 **a.** dét $(\vec{u}, \vec{v}) = 2\times(-1)-0\times 0 = -2$ et $-1 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan.

b. $\begin{cases} \vec{u}=2\vec{\imath} \\ \vec{v}=-\vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\imath}=\frac{1}{2}\vec{u} \\ \vec{\jmath}=-\vec{v} \end{cases}$

donc $\vec{\imath}(\frac{1}{2}\,;0)$ et $\vec{\jmath}(0\,;-1)$.

69 **a.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

b. $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;1)$ et $D(0\,;1)$.

c. $\overrightarrow{AC}(1\,;1)\,;\,\overrightarrow{BC}(0\,;1)$.

70 **1. a.** $\vec{u}=11\vec{\imath}-9\vec{\jmath}$; **b.** $\vec{v}=-4\vec{\imath}-7\vec{\jmath}$; **c.** $\vec{w}=\vec{0}$.

2. $\vec{u}(11\,;-9)\,;\,\vec{v}(4\,;-7)\,;\,\vec{w}(0\,;0)$.

71 **a.** dét $(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ et $-1 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan. Dans cette base, $\vec{\imath}(0\,;1)$ et $\vec{\jmath}(1\,;0)$.

b. dét $(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et $1 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan. Dans cette base, $\vec{\imath}(1\,;0)$ et $\vec{\jmath}(-1\,;1)$.

c. dét $(\vec{u}, \vec{v}) = 2$ et $2 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan. Dans cette base, $\vec{\imath}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{\jmath}\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

71 **a.** dét $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = 1$; **b.** dét $(2\vec{\imath}, 3\vec{\jmath}) = 6$;
c. dét $(\vec{\imath}, \vec{\imath}+\vec{\jmath}) = 1$; **d.** dét $(\vec{\imath}+\vec{\jmath}, \vec{\imath}-\vec{\jmath}) = -2$.

73 **1.** $A(0\,;0)\,;\,B(1\,;0)\,;\,C(0\,;1)$.

$A'\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)\,;\,B'\left(0\,;\frac{1}{2}\right)\,;\,C'\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$. $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

a. $\overrightarrow{BC}(-1\,;1)$; **b.** $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$;

c. $\overrightarrow{AG}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)\,;\,\overrightarrow{GA'}\left(\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6}\right)$.

2. $G(0\,;0)\,;\,B(1\,;0)\,;\,C(0\,;1)\,;\,A(-1\,;-1)$.

$A'\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)\,;\,B'\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)\,;\,C'\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$.

a. $\overrightarrow{BC}\left(1\,;-1\right)$; **b.** $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$;

c. $\overrightarrow{AG}(1\,;1)\,;\,\overrightarrow{GA'}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

74 **b.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

$D(0\,;1)\,;\,E\left(\frac{1}{2}\,;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\,;\,F\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2}\,;\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)\,;\,\overrightarrow{DF}\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\,;-\frac{1}{2}\right)$.

c. $\text{dét}\,(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)\times\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$$= -\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}-1\right) = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires, donc les points D, E et F sont alignés.

75 **a.** $A(1\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(0\,;1)$ et $D(0\,;1)$.

b. $A(0\,;0)$, $B(1\,;1)$, $C(1\,;1)$ et $D(0\,;0)$.

c. $A(0\,;0)$, $B(0\,;1)$, $C(1\,;0)$ et $D(-1\,;1)$.

76 **a.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$.

b. $A(0\,;0)\,;\,B(1\,;0)\,;\,C(0\,;1)\,;\,D(1\,;1)\,;\,E(1\,;2)\,;\,F(0\,;3)$.

Faire le point

77 **a.** On prend comme repère : $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

b. $I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$; $C(1 ; 1)$; $P(x ; 1-x)$.

c. $\overrightarrow{IP}\left(x-\frac{1}{2} ; 1-x\right)$; $\overrightarrow{IC}\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$.

$\text{dét}\,(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IC}) = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right) \times 1 - (1-x) \times \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Le point M est donc situé aux $\frac{2}{3}$ de $[AB]$.

78 **1.** ligne 1 : coordonnées
ligne 2 : déterminant
ligne 4 : $k\overrightarrow{AC}$
ligne 6 : nul — non nul
colinéaires — non colinéaires.

2. a. $\overrightarrow{AB}(3 ; -2)$; $\overrightarrow{AC}(6 ; -4)$.
$\text{dét}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
a. $\overrightarrow{AB}(4 ; -3)$; $\overrightarrow{AC}(6 ; -4)$.
$\text{dét}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2$ et $2 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

79 **a.** $\vec{u}(1 ; 1)$.

b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

c. La mesure donne 2,2 cm. L'erreur est que le repère n'est pas orthonormé, l'unité sur l'axe des ordonnées étant deux fois plus grande que celle sur l'axe des abscisses.

80 **1.** $\text{dét}\,(\vec{u}, \vec{v}) = 2$ et $2 \neq 0$ donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.

2. $\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \\ \vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \end{cases}$.

3.a. $\overrightarrow{AM}(x-3 ; y-2)$

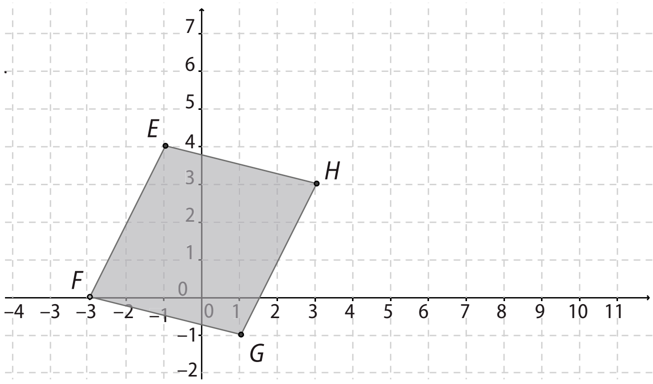
b. $\overrightarrow{AM} = (x-3)\vec{i} + (y-2)\vec{j}$

$= (x-3)\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) + (y-2)\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

$= \frac{x+y-5}{2}\vec{u} + \frac{-x+y+1}{2}\vec{v}$

c. $\begin{cases} x' = \frac{x+y-5}{2} \\ y' = \frac{-x+y+1}{2} \end{cases}$.

81 **1.**



$H(3 ; 3)$.

2. b. L'erreur porte sur les coordonnées de $\overrightarrow{FG}$.

$\begin{cases} x_D + 1 = 1 - (-3) \\ y_D - 4 = -1 - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 3 \end{cases}$.

82 **a.** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$
$= \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$.

b. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IB}$.
D'où $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$.

83 **a.** Les points semblent alignés.

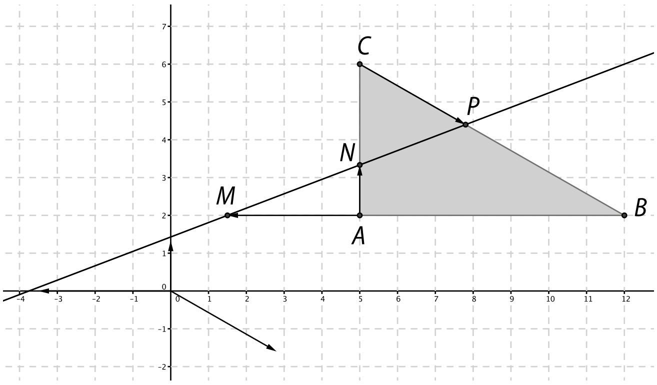
b. $\overrightarrow{AB}(7 ; -5)$; $\overrightarrow{AC}(4 ; -2,9)$.
$\text{dét}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 7 \times (-2,9) - (-5) \times 4 = -0,3$ et $-0,3 \neq 0$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Se tester

84 à **87** Voir Manuel de l'élève pages 257-258.

Exercices d'approfondissement

88 Piste 1



Piste 2. **a.**

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.$

b. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.$

c. $\overrightarrow{MP} = \frac{9}{5}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) = \frac{9}{5}\overrightarrow{MN}.$

Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires. Les points M, P et N sont donc alignés.

Piste 3

a. ABC est un triangle rectangle en A, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

b. $M\left(-\frac{1}{2};0\right)$; $N\left(0;\frac{1}{3}\right)$;

$\begin{cases} x_P - 0 = \frac{2}{5}(1-0) \\ y_P - 1 = \frac{2}{5}(0-1) \end{cases}$ donc $P\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$.

c. $\overrightarrow{MP}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{5}\right)$; $\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$; dét$(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires. Les points M, P et N sont donc alignés.

89 On se place dans le repère d'origine A et de base les vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{d}$ et $\overrightarrow{AB}$.

a. $\vec{d}\,(3\,;0)$; $\vec{u}\,(0\,;10)$.

Le déplacement réel du bac est donné par le vecteur $\vec{u} + \vec{d}\,(3\,;10)$.

dét$(\overrightarrow{AB'}, \vec{u} + \vec{d}) = 0 \iff x_{B'} \times 10 - 3 \times y_{B'} = 0.$

Comme $y_{B'} = 40$, on en déduit que $x_{B'} = 12$.

b. Le bac aurait dû donc partir 12 m avant A.

c. $\vec{u}\,(a\,;b)$.

dét$(\overrightarrow{AB}, \vec{u} + \vec{d}) = 0 \iff 0 \times b - 40 \times (3 + a) = 0$

entraîne que $a = -3$.

La valeur de b est un nombre réel positif quelconque.

90 **1.** $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$

$\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{BC} + (-1+x)\overrightarrow{AB}$

$= (x - \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{BC}.$

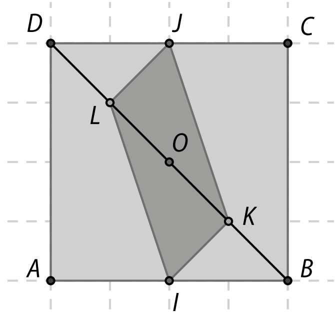
2. $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \\ 1 - x = k. \end{cases}$

3. a. $x = \frac{2}{3}$; $k = \frac{1}{3}$.

b. Le système a une solution unique, donc le nombre k existe. Par conséquent les points I, P et C sont alignés.

4. Le point M est situé aux $\frac{2}{3}$ de [AB].

91 **a.**



b. $ABCD$ est un carré, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

$I\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; $J\left(\frac{1}{2};1\right)$; $K(x\,;1-x)$; $L(1-x\,;\ x)$.

c. $\overrightarrow{IK}\,(x - \frac{1}{2}\,;1-x)$ et $\overrightarrow{LJ}\,(x - \frac{1}{2}\,;1-x)$.

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ}$; donc $IKJL$ est un parallélogramme.

d. Deux positions possibles : milieu de [OD] et de [OB].

92 **a.** $I\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$; $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $F(0\,;m+1)$; $E(1+k\,;0)$.

b. $\overrightarrow{IE}\,(1+k\,;-\frac{1}{2})$; $\overrightarrow{JF}(-\frac{1}{2}\,;m+\frac{1}{2})$.

dét$(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{JF}) = (1+k)(m+\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) = 0$ (1)

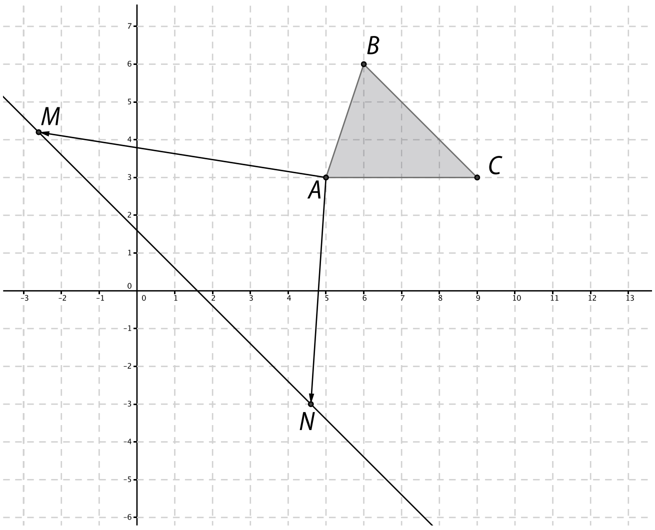
c. (1) $\iff 2(m+\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = 0 \iff m = -38.$

d. (1) $\iff -\frac{1}{4} = 0$ impossible.

Le point E est confondu avec A donc $(IE) = (AC)$ et comme $J \notin (AC)$, (JE) et (AC) sont sécantes.

93 **1.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ donc $M = N$. La droite (MN) n'existe pas.

2. a.



b. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$= -(x+2)\overrightarrow{AB} + (x+2)\overrightarrow{AC}$

$= (x+2)(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (x+2)\overrightarrow{BC}.$

Donc, si $x \neq 2$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et $(MN$ // (BC).

94 **1. a.** dét $(\overrightarrow{OR}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow x_R \times 2 - y_R \times 1 = 0.$

Or $y_R = 10$ on a donc $x_R = 5$.

b. dét $(\overrightarrow{RI}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (x_I - 5) \times (-1) - (y_I - 10) \times 2 = 0$

Or $x_I = 10$ on a donc $y_I = 7,5$.

2. a. dét $(\overrightarrow{OR}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow x_R \times b - y_R \times a = 0.$

Or $y_R = 10$ on a donc $x_R = \dfrac{10a}{b}$.

b. $0 \leqslant x_R \leqslant 10 \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{10a}{b} \Leftrightarrow 0 \leqslant 10a \leqslant 10b$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant a \leqslant b.$

c. dét $(\overrightarrow{RI}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (x_I - \dfrac{10a}{b}) \times (-a) - (y_I - 10) \times b = 0.$

Or $x_I = 10$ on a donc :

$\left(10 - \dfrac{10a}{b}\right)(-a) - (y_I - 10) \times b = 0$

$y_I = 10 - \dfrac{a}{b}\left(10 - \dfrac{10a}{b}\right).$

3. La balle touche le bord si $0 \leqslant y_I \leqslant 10$.

$0 \leqslant a \leqslant b \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{a}{b} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{10a}{b} \leqslant 10$;

$0 \leqslant 10 - \dfrac{10a}{b} \leqslant 10$ et donc $0 \leqslant y_I \leqslant 10$.

95 **a.** $M\overrightarrow{SA} + m\overrightarrow{SB} = \vec{0} \Leftrightarrow M\overrightarrow{SA} + m(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = \dfrac{m}{m+M}\overrightarrow{AB}.$

b. $AS = \dfrac{60}{300}AB = \dfrac{1}{2}AB.$

c. $0,2 = \dfrac{60}{60+M} \times 3 \Leftrightarrow 0,2(60+M) = 180$

$\Leftrightarrow 60 + M = 900 \Leftrightarrow M = 840.$

96 On doit vérifier que $||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|| \leqslant ||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{AC}||$.

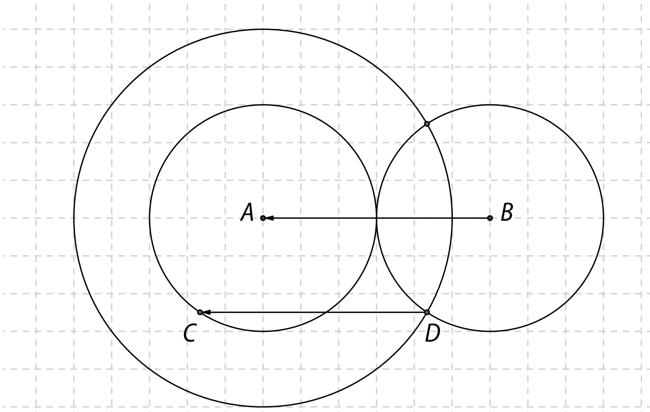
Vrai pour **a.**, mais faux pour **b**.

Tracer le cercle de centre A et de rayon $AC = 3$ et le cercle de centre A et de rayon 5.

Tracer le cercle de centre B et de rayon 3.

Les deux derniers cercles se coupent en D.

Tracer le représentant du vecteur $\overrightarrow{BA}$ d'origine D.



Ce protocole de construction n'est pas unique.

97 **a.** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

b. $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{ED} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}.$

c. $\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{LK}.$

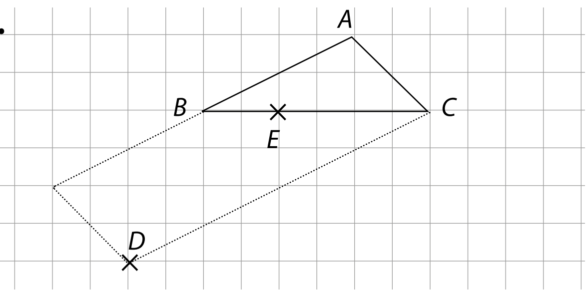
d. Construire le point A en premier en utilisant le résultat du **c**. Ensuite, par symétries par rapport aux milieux, construire B, E et enfin C et D.

98 **a.** Aire du carré : 64 ; aire du rectangle : 65.

b. On prend un repère orthonormé d'origine A et de base les vecteurs unitaires portés par les côtés du rectangle. $A(0 ; 0)$; $B(8 ; 3)$ et $C(13; 5)$.

c. $\overrightarrow{AB}(8; 3)$; $\overrightarrow{BC}(5; 2)$. dét $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 1$; $1 \neq 0$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Il y a donc un trou dans cette figure entre les pièces.

99 **a.**



b. Méthode 1

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$

• Méthode 2

On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(0;1)$; $D(2;1)$.

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E-1=-\frac{1}{3}\\ y_E=\frac{1}{3}\end{cases}$; $E\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AE}\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$; $\overrightarrow{AD}(2\,;1)$; dét$(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})=0$.

100 **1.** $AB=\sqrt{(-1+3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$.

2. a. $AD^2=(1+3)^2+(y-1)^2=16+(y-1)^2$.

b. $16+(y-1)^2=20\Leftrightarrow(y-1)^2=4$.

c. $(y-1)^2=4\Leftrightarrow y-1=-2$ ou $y-1=2$.

D'où $D_1(1\,;-1)$ et $D_2(1\,;3)$.

3. $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{C_1}+1=1+3\\ y_{C_1}-5=-1-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{C_1}=3\\ y_{C_1}=3\end{cases}$;

$\overrightarrow{BC_2}=\overrightarrow{AD_2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{C_2}+1=1+3\\ y_{C_2}-5=3-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{C_2}=3\\ y_{C_2}=7\end{cases}$.

4. $AC_1=\sqrt{(3+3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{40}$.

$BD_1=\sqrt{(1+1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{40}$.

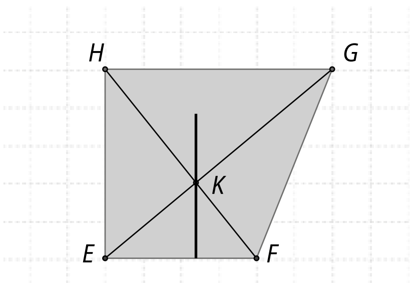
$AC_1=BD_1$ donc ABC_1D_1 est un carré.

$AC_2=\sqrt{(3+3)^2+(7-1)^2}=\sqrt{72}$.

$BD_2=\sqrt{(1+1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}$.

$AC_2\neq BD_2$ donc ABC_2D_2 n'est pas un carré.

101 **a.** Le lieu de points semble être une droite parallèle à (EH).



b. Dans un repère $(E\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath}$ unitaire de (EF) et $\vec{\jmath}$ unitaire de (EH).

$E(0\,;0)$; $F(4\,;0)$; $H(0\,;h)$; $G(6\,;h)$ et $K(x\,;y)$.

$\overrightarrow{EK}(x\,;y)$; $\overrightarrow{EG}(6\,;h)$.

dét$(\overrightarrow{EK},\overrightarrow{EG})=0\Leftrightarrow xh-6y=0$ (1)

$\overrightarrow{HK}(x\,;y-h)$; $\overrightarrow{HF}(4\,;-h)$.

dét$(\overrightarrow{HK},\overrightarrow{HF})=0\Leftrightarrow -xh-4(y-h)=0$ (2)

$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{cases}xh=6y\\ -6y-4y+4h=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xh=6y\\ y=0,4h\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,4\\ y=0,4h\end{cases}$

Le point K se trouve donc sur la droite verticale d'équation $x=2,4$.

102 **2. a.** $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$

$=\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$

b. $ABCD$ parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

D'où $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et les points D, C et N sont alignés.

3. a. On se place dans le repère $(D;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$.

$D(0\,;0)$; $C(1\,;0)$; $A(0\,;1)$; $B(1\,;1)$.

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-1=\frac{1}{3}(1-1)\\ y_M-0=\frac{1}{3}(1-0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=1\\ y_M=\frac{1}{3}\end{cases}$.

$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N-0=\frac{3}{2}(1-0)\\ y_N-1=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\frac{3}{2}\\ y_N=0\end{cases}$.

$\overrightarrow{DC}(1\,;0)$; $\overrightarrow{DN}\left(\frac{3}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{DN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$. Les points D, C et N sont alignés.

103 **1.** $\|\overrightarrow{F_u}\|=16000\cos30=13856$;

$\|\overrightarrow{F_d}\|=16\,000\sin30=8\,000$.

2. a. $\|\overrightarrow{R_{2d}}\|=20\,000\sin\alpha=8\,000$.

$\sin\alpha=\frac{8\,000}{20\,000}=0,4$ d'où $\alpha=24$ °.

b. Force utile $=13\,856+20\,000\cos24=32\,187$.

104 **1. a.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4-x-2-x-2(-3-x)=0\\ -1-y+2-y-2(-1-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8=0\\ 3=0\end{cases}$.

Système impossible, il n'y a pas de point M.

b. $\Leftrightarrow\begin{cases}4-x-2-x-2(1-x)=0\\ 2-y+2-y-2(2-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\ 0=0\end{cases}$.

Il y a une infinité de solutions.

2. $\overrightarrow{MA}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$.

105 **a.** $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AD})$ est une base du plan car $ABCD$ est un rectangle.

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CD} + \dfrac{11}{7}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BP}\left(1\ ;\ \dfrac{11}{7}\right)$.

$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BR}\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.

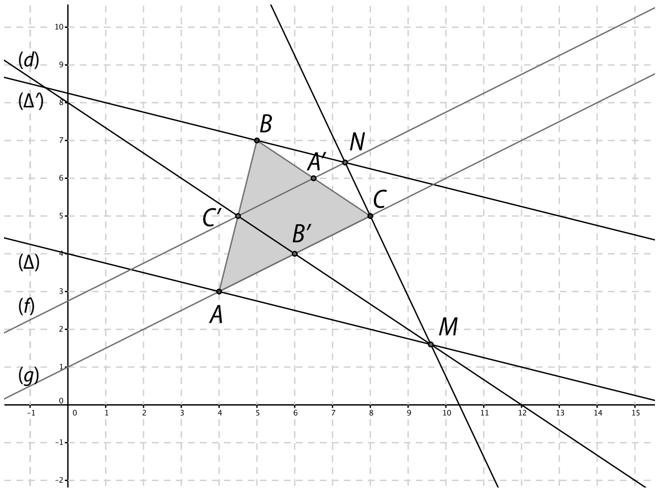
Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

b. $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{x}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BR}\left(\dfrac{x}{3}\ ;\ 1\right)$.

B, *P* et *R* sont alignés si $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BR}$ sont colinéaires, donc s'il existe un nombre réel *k* tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BR}$.

$$\begin{cases} 1 = k\,\dfrac{x}{3} \\ \dfrac{11}{7} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{11} \\ \dfrac{11}{7} = k. \end{cases}$$

106 **1.**



2. a. *ABC* est un triangle donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

b. $B(0\ ;\ 0)$; $A(1\ ;\ 0)$; $C(0\ ;1)$; $A'\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$; $B'\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$; $C'\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

c. Les points *B*' et *C*' ont la même abscisse $\dfrac{1}{2}$ et *M* étant sur la droite (*B'C'*), l'abscisse de *M* est aussi égale à $\dfrac{1}{2}$.

d. dét $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC}) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(1-k) - (y-k)\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (1-k)x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2} = 0$.

dét $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}y - kx = 0 \Leftrightarrow y = -2kx$.

(1) $\Leftrightarrow (1-k)x + \dfrac{1}{2}(-2kx) - \dfrac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2(1-2k)} \qquad y = \dfrac{-k}{1-2k}$.

e. $\overrightarrow{A'N}\left(\dfrac{1}{2(1-2k)}\ ;-\dfrac{1}{2(1-2k)}\right)$; $\overrightarrow{AC}(1\ ;-1)$.

Les vecteurs sont donc colinéaires.

107 **a.** $AN = AM = BM = BN =$ rayon donc *ANBM* est un parallélogramme.

b. *A* milieu de $[N_1N]$ donc $\overrightarrow{N_1A} = \overrightarrow{AN}$.

ANBM parallélogramme donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MB}$.

Finalement, $\overrightarrow{N_1A} = \overrightarrow{MB}$.

B milieu de $[N_2N]$ donc $\overrightarrow{BN_2} = \overrightarrow{NB}$.

c. $\overrightarrow{N_1M} = \overrightarrow{N_1A} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN_2} = \overrightarrow{MN_2}$.

108 **1. a.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ donc *A* et *E* sont confondus.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$ donc *ABDC* est un parallélogramme. Le point *K* est confondu avec *D* et *E*.

b. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$;

Donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DB}$.

Le point *K* est confondu avec le point *M* et est tel que *ABKC* est un parallélogramme.

2. a. $D(1\ ;k)$; $E(k\ ;1)$.

b. $\overrightarrow{DE}(k-1\ ;1-k)$; $\overrightarrow{BC}(-1\ ;1)$.

$\overrightarrow{DE} = (1-k)\overrightarrow{BC}$ donc (*DE*) // (*BC*).

c. $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 \\ y_K - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 1 \\ y_K = 1. \end{cases}$

$\overrightarrow{BK}(0\ ;1)$; $\overrightarrow{BD}(0;\ k)$ ces vecteurs sont colinéaires, donc *B*, *K* et *D* sont alignés.

$\overrightarrow{CK}(1\ ;0)$; $\overrightarrow{CE}(k\ ;0)$ ces vecteurs sont colinéaires, donc *C*, *K* et *E* sont alignés. Le point *K* est bien l'intersection de (*BD*) et (*CE*).

109 **1.** $G\left(\dfrac{0+3+9}{3}\ ;\dfrac{0+3+0}{3}\right) = (4\ ;1)$.

2. a.(*AC*) est l'axe des abscisses, par conséquent la médiatrice de [*AC*] est parallèle à l'axe des ordonnées. Donc $x_O = \dfrac{9}{2}$.

b. $OA = OB \Rightarrow OA^2 = OB^2$

$\Leftrightarrow {x_O}^2 + {y_O}^2 = (3 - x_O)^2 + (3 - y_O)^2$

$\Leftrightarrow 0 = 18 - 6x_O - 6y_O \Leftrightarrow 0 = 18 - 6\dfrac{9}{2} - 6y_O$

$\Leftrightarrow y_O = -\dfrac{3}{2}$.

3.a. La hauteur relative à [*AC*] est parallèle à l'axe des ordonnées. Donc $x_H = x_B = 3$.

b. $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{OA'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = k\left(6 - \dfrac{9}{2}\right) \\ y_H = k\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k\left(\dfrac{3}{2}\right) \\ y_H = 3k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y_H = 6 \end{cases}$.

4. $\overrightarrow{GO}\left(\frac{1}{2}\ ;-\frac{5}{2}\right)$; $\overrightarrow{HG}(1\ ;-5)$. $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$ donc H, G et O sont alignés.

110 On se place dans le repère $(E\ ;\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})$. $A(2\ ;0)$; $B(2\ ;1)$; $C(1\ ;1)$; $D(1\ ;0)$; $E(0\ ;0)$; $F(0\ ;1)$; $I\left(\frac{3}{2}\ ;1\right)$.

Si les droites sont concourantes, elles se coupent en un point K. Il existe un nombre réel k_1 tel que :

$$\overrightarrow{DK}=k_1\overrightarrow{DI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K-1=\frac{k_1}{2} \\ y_K=k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K=1+\frac{k_1}{2} \\ y_K=k_1 \end{cases}$$

d'où $2x_K-y_K-2=0$.

Il existe un nombre réel k_2 tel que :

$$\overrightarrow{EK}=k_2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K=2k_2 \\ y_K=k_2 \end{cases}$$ d'où $x_K-2y_K=0$.

Il existe un nombre réel k_3 tel que :

$$\overrightarrow{AK}=k_3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K-2=-k_3 \\ y_K=k_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K=2-k_3 \\ y_K=k_3 \end{cases}$$

d'où $x_K+y_K-2=0$.

On obtient donc le système : $\begin{cases} 2x_K-y_K-2=0 \\ x_K-2y_K=0 \\ x_K+y_K-2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y_K-y_K=2 \\ x_K=2y_K \\ x_K+y_K-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K=\frac{4}{3} \\ y_K=\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}+\frac{4}{3}-2=0 \end{cases}.$$

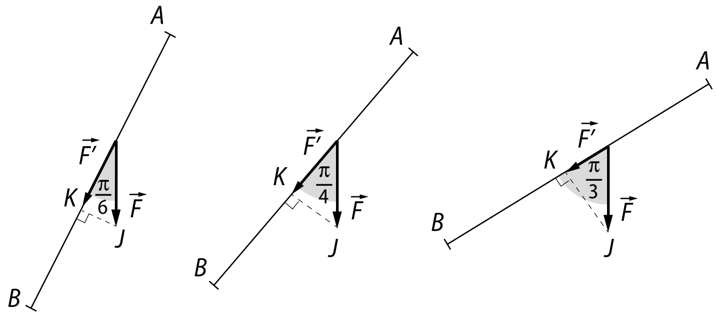
Ce système a pour solution $\left(\frac{4}{3}\ ;\frac{2}{3}\right)$.

4 Produit scalaire

Activités d'introduction

1 Poussé par le vent

1. a.



b. Dans chacune des situations, le triangle *IJK* est rectangle en *K*, donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IJ}}) = \frac{IK}{IJ} = \|\vec{F'}\|/\|\vec{F}\|$, donc $\|\vec{F'}\| = \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IJ}})$.

Ainsi, $W = AB \times \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{F}})$.

c. • Situation 1 : $W = 10 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3}$.

• Situation 2 : $W = 10 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{4} = 10\sqrt{2}$.

• Situation 3 : $W = 10 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3} = 10$.

2. • Lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires, $W = AB \times \|\vec{F}\| = 10 \times 2 = 20$.

• Lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}$ sont orthogonaux, $W = 0$.

2 Premières propriétés

1.a. On note $\vec{v}'$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

Dans les trois cas, on a alors $\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Or d'après la remarque qui précède, $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}'\|$ on en déduit que $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

b. ① $\vec{u}\,.\,\vec{v} > 0$ car $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) > 0$; ② $\vec{u}\,.\,\vec{v} > 0$ car $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) > 0$;

③ $\vec{u}\,.\,\vec{v} < 0$ car $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 0$; ④ $\vec{u}\,.\,\vec{v} < 0$ car $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 0$.

2. a. • On suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Puisque, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos x = \cos(-x)$, on a $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(-(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})) = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$.

Ainsi, $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$.

• On suppose que $\vec{v} = \vec{0}$; dans ce cas, le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est $\vec{0}$ et $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{0}\| = 0$ et $\vec{v}\,.\,\vec{u} = \|\vec{0}\| \times \|\vec{u}\| = 0$. D'où l'égalité.

b. Puisque pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, on en déduit que $|\cos x| \leqslant 1$.

D'où, $|\vec{u}\,.\,\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

c. • $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{0}$; • $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$; • $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

3 Théorème de la médiane

1. a. $AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B})^2 + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C})^2$.

b. $A^2 + AC^2 = \overrightarrow{AA'}^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'B}^2 + \overrightarrow{AA'}^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'C}^2$

$= 2\overrightarrow{AA'}^2 + 2\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}) + \overrightarrow{A'B}^2 + \overrightarrow{A'C}^2$

$= 2AA'^2 + A'B^2 + A'C^2 + 2\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$.

c. $\overrightarrow{A'B} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{A'C} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

d. $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + A'B^2 + A'C^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\vec{0}$

$= 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ car $A'B^2 = A'C^2 = \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = \dfrac{BC^2}{4}$.

2. Avec la configuration précédente, on note A le point où se trouve le photographe, B le point de départ, C le point d'arrivée et A' le point de mi-course.

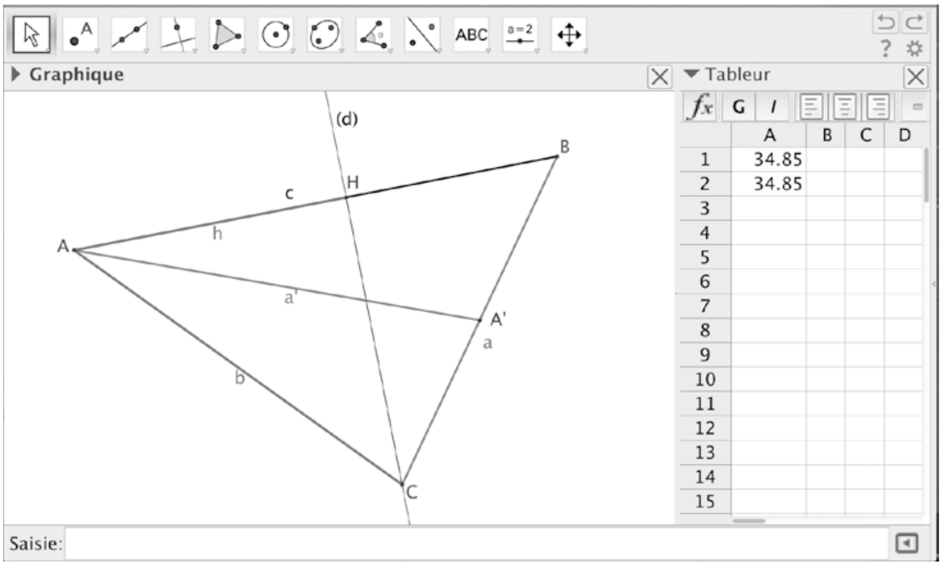
Ainsi, $AB = 60$, $AC = 50$, $BC = 100$.

Donc $60^2 + 50^2 = 2AA'^2 + \dfrac{100^2}{2}$, ainsi $6\,100 = 2AA'^2 + 5\,000$, donc $AA'^2 = 550$ et $AA' \approx 23{,}45$.

Le photographe se trouvera à environ 23,5 m au moment de la photo.

4 Une autre formule de la médiane

1. a. b. c.



d. $c \times h = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $AA'^2 - \dfrac{BC^2}{2} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. a. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, ainsi $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\widehat{A}$

et puisque $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = c \times b \times \cos\widehat{A}$, on en déduit que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

b. D'après le théorème de la médiane, $b^2 + c^2 = 2a' + \dfrac{a^2}{2}$,

donc $\dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = a'^2 + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{2}a^2 = a'^2 - \dfrac{a^2}{4}$.

Finalement, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a'^2 - \dfrac{a^2}{4} = AA'^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

Savoir-faire

3 **a.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AB \times AB = 100$;

b. $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{FC} = -CB \times EC = -200$;

c. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EO}.\overrightarrow{OC} = -5 \times 10 = -50$;

d. $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{O'D}.\overrightarrow{O'O} = -10 \times 5 = -50$.

4 $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF} = ED \times EF \times \cos(\widehat{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}})$

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF} = ED \times EF \times \cos\widehat{DEF}$

donc $20 = 5 \times 8 \times \cos\widehat{DEF}$

ainsi, $\cos\widehat{DEF} = \dfrac{20}{5 \times 8} = \dfrac{1}{2}$.

Donc, mes $\widehat{DEF} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

5 $\overrightarrow{HG}.\overrightarrow{HI} = GH \times IH \times \cos(\widehat{\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HI}})$

donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HI}}) = \dfrac{\overrightarrow{HG}.\overrightarrow{HI}}{GH \times IH}$.

a. $\cos(\widehat{\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HI}}) = \dfrac{-7}{7 \times \sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc mes $(\widehat{\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HI}}) = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

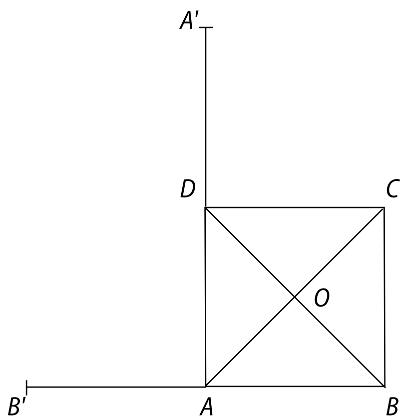
b. $\cos(\widehat{\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HI}}) = \dfrac{-7}{7 \times \sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc mes $(\widehat{\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HI}}) = \dfrac{3\pi}{4}$ rad.

8 D'après les codages, (BH) et (CK) sont les hauteurs de B et C dans le triangle OBC. Elles sont sécantes en I, donc (OI) est la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

Ainsi, $(OI) \perp (BC)$ et $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BC} = 0$.

9 **1.**



2. a. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ orthonormé, $O\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$, $A'(0 ; 2)$, $B'(-1 ; 0)$.

b. $\overrightarrow{OA'}\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OB'}\left(-\dfrac{3}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'} = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Donc $(OA') \perp (OB')$.

12 **a.** De la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, on déduit que : $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

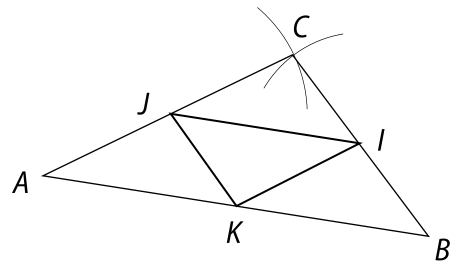
$\cos\widehat{I} = \dfrac{2{,}5^2 + 1{,}2^2 - 3^2}{2 \times 2{,}5 \times 1{,}2} \approx -0{,}218$ d'où mes $\widehat{I} \approx 1{,}8$ rad ;

$\cos\widehat{J} = \dfrac{3^2 + 1{,}2^2 - 2{,}5^2}{2 \times 3 \times 1{,}2} \approx 0{,}582$ d'où mes $\widehat{J} \approx 0{,}9$ rad ;

$\cos\widehat{K} = \dfrac{3^2 + 2{,}5^2 - 1{,}2^2}{2 \times 3 \times 2{,}5} \approx 0{,}921$ d'où mes $\widehat{K} \approx 0{,}4$ rad.

b. $\dfrac{KJ}{\sin\widehat{I}} = 2R$, donc $R \approx \dfrac{3}{2 \times \sin 1{,}8} \approx 1{,}54$.

13 **a.**



b. Les trois longueurs à calculer sont celles des médianes du triangle ABC. D'après la propriété du cours :

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ d'où $AA'^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2}}{2}$.

Ainsi, appliqué à cet exemple :

$AI^2 = \dfrac{7^2 + 5^2 - \dfrac{4^2}{2}}{2} = 33$, donc $AI = \sqrt{33}$;

$BJ^2 = \dfrac{7^2 + 4^2 - \dfrac{5^2}{2}}{2} = 26{,}25$, donc $BJ = \sqrt{26{,}25}$;

$CK^2 = \dfrac{5^2 + 4^2 - \dfrac{7^2}{2}}{2} = 8{,}25$, donc $CK = \sqrt{8{,}25}$.

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4} = 33 - \dfrac{4^2}{2} = 29$.

d. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$, donc

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{29}{7 \times 5} = \dfrac{29}{35}$.

Ainsi, mes $\widehat{BAC} \approx 0{,}6$ rad.

Exercices d'entraînement

14 **a.** $\overline{AB} = 1$; **b.** $\overline{BC} = 3$; **c.** $\overline{CB} = -3$; **d.** $\overline{DA} = -6$.

15 **a.** $\overline{AB} = 4$; $\overline{CD} = -1$. **b.** $\overline{AB} = -2$; $\overline{CD} = \dfrac{1}{2}$.

16 **1. a.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$; **b.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$.

2. a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$; **b.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

3. a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AH} \times \overline{AC}$; **b.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AC$.

4. a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AH} \times \overline{AC}$; **b.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AH \times AC$.

17 **a.** $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{HB} = \overline{HH'} \times \overline{HH'} = 16$;

b. $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC} = \overline{CD} \times \overline{HC} = 6 \times (-5) = -30$;

c. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} = \overline{DC} \times \overline{HD} = 6 \times (-1) = -6$;

d. $\overrightarrow{OH'}.\overrightarrow{BA} = \overline{O'B} \times \overline{BA} = -2 \times 4 = -8$ où O' est le projeté orthogonal de O sur (AB).

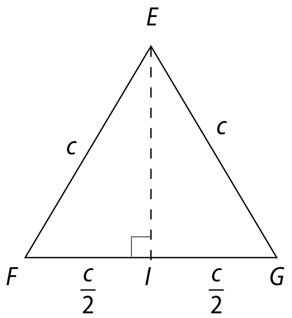
18 **a.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AB} = 1$;

b. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = \overline{AD} \times \overline{DA} = -1$;

c. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ car $(AC) \perp (BD)$;

d. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = \overline{AB} \times \overline{AB} = 1$.

19



a. $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{GF} = \overline{GI} \times \overline{GF} = \dfrac{c^2}{2}$;

b. $\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{FG} = \overline{GF} \times \overline{FG} = -c^2$;

c. $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EF} = \overline{EI} \times \overline{EI} = EI^2 = EF^2 - FI^2 = c^2 - \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = \dfrac{3c^2}{4}$;

d. $\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{IF} = \overline{GI} \times \overline{IF} = \dfrac{c^2}{4}$.

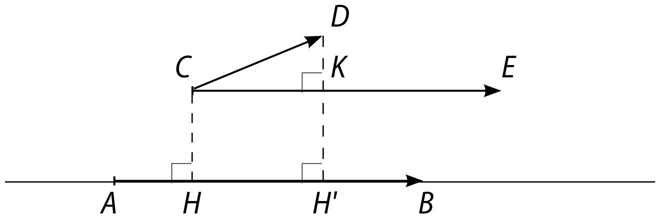
20 **a.** $h = \sqrt{c^2 - \left(\dfrac{c}{2}\right)^2} = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

b. • $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN} = -c \times \dfrac{c\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{c^2\sqrt{3}}{2}$;

• $\overrightarrow{QN}.\overrightarrow{RQ} = -c \times \dfrac{c\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{c^2\sqrt{3}}{2}$;

• $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{RQ} = \dfrac{c}{2} \times \dfrac{c\sqrt{3}}{2} = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{4}$.

21 **a.** et **b.**



c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD}$
$= \overline{CE} \times \overline{CK}$
$= \overline{AB} \times \overline{HH'}$

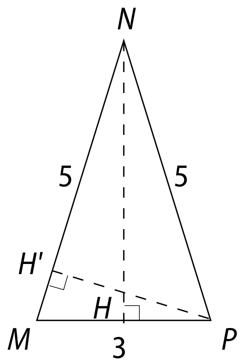
22 **a.** $\vec{u}.\vec{u} = 4$;

b. $\vec{u}.\vec{v} = 4 \times 1 = 4$;

c. $\vec{u}.\vec{w} = 4 \times (-3) = -12$;

d. $\vec{u}.\vec{t} = 4 \times (-1) = -4$.

23 **a.** Voir figure ci-contre.



b. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \overline{MH} \times \overline{MP} = 4,5$;

$\overrightarrow{PN}.\overrightarrow{PM} = \overline{PH} \times \overline{PM} = 4,5$;

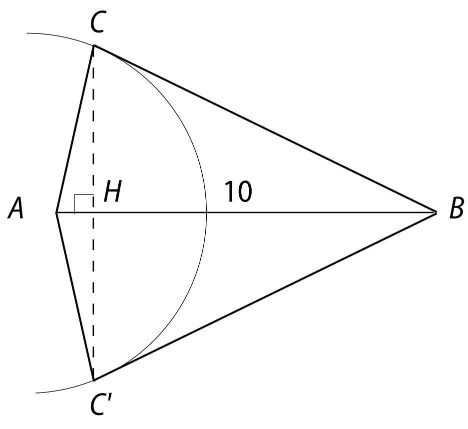
$\overrightarrow{NP}.\overrightarrow{PM} = \overline{HP} \times \overline{PM} = -4,5$.

c. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \overline{MN} \times \overline{MH'}$.

Or, d'après le **b.**, $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = 4,5$, donc $MH' = 4,5/5 = 0,9$.

Ainsi, $PH'^2 = MP^2 - MH'^2 = 3^2 - 0,9^2 = 8,19$.
$PH' = \sqrt{8,19}$.

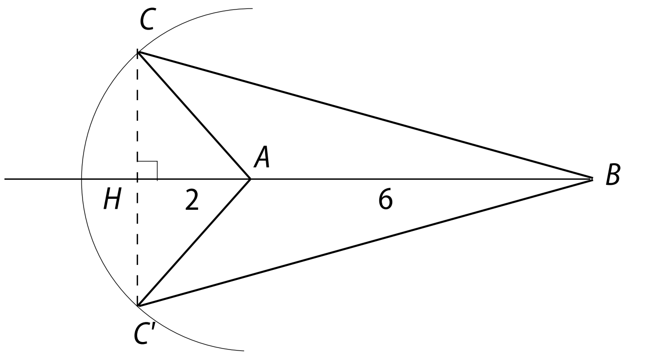
24 **a.**



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = 6$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc $AH = 15/10 = 1,5$.

Les deux triangles ABC et ABC' conviennent.

b.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = -12$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

donc $\overline{AH} = -\frac{12}{6} = -2$

Les deux triangles ABC et ABC' conviennent.

25 • $\vec{u}.\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; • $\vec{u}.\vec{v}_2 = -\frac{1}{2}$; • $\vec{u}.\vec{v}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
• $\vec{u}.\vec{v}_4 = \frac{1}{2}$.

26 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$;
b. $\vec{u}.\vec{v} = 10 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$;
c. $\vec{u}.\vec{v} = 0{,}1 \times 20 \times (-1) = -10$.

27 **a.** $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$;

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CO} = \overline{OC} \times \overline{CO} = -16$;

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b. $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = OB \times OC \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$

$= 4 \times 4 \times \cos\frac{2\pi}{3} = -8$;

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OA} = 0$;

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = BC \times AB \times \cos\frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2}$ où a est la longueur d'un côté du triangle. Or, en utilisant la propriété de Pythagore, on trouve que $4^2 = 2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Ainsi, $a^2 = 48$.

Finalement, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = 24$.

28 $W_1 = \overrightarrow{AB}.\vec{F}_1 = 9 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ J.
$W_2 = \overrightarrow{AB}.\vec{F}_2 = 9 \times 4 \times 0 = 0$ J.
$W_3 = \overrightarrow{AB}.\vec{F}_3 = 9 \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -18\sqrt{3}$ J.
$W_4 = \overrightarrow{AB}.\vec{F}_4 = 9 \times 4 \times (-1) = -36$ J.
$W_5 = \overrightarrow{AB}.\vec{F}_5 = 9 \times 4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -18\sqrt{2}$ J.
$W_6 = \overrightarrow{AB}.\vec{F}_2 = 9 \times 4 \times \frac{1}{2} = 18$ J.

29 **a.** • <u>Trajet de 50 m</u>

$W = \|\vec{F}\| \times 50 \times \cos\frac{\pi}{12}$

$W = 3\,000 \times 50 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$W = 3\,750\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ J.

• <u>Trajet de 1 km</u>

$W = 750\,000\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ J.

b. $300\,000 = \|\vec{F}\| \times 100 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d'où $\|\vec{F}\| = \frac{12\,000}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \approx 3\,100$ J.

30 $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$, d'où :

a. • $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{4\sqrt{2}}{4} \times 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{3\pi}{4}$ rad.

b. • $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{6\sqrt{3}}{3 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ainsi mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$ rad.

31 $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$, d'où :

a. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{1}{\sqrt{3} \times 5}$ ainsi, mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 1{,}687$ rad.

b. $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{4\sqrt{3}}{7 \times \sqrt{2}}$ ainsi, mes$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 0{,}796$ rad.

32 **a.** mes $\widehat{AOB} = \frac{360}{5} = 72°$ d'où mes $\widehat{ADB} = 36°$.

On en déduit que mes $\widehat{DBA} = 72°$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = AB \times DB \times \cos 72°$.

Or, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = \overline{AB} \times \overline{HB}$ où H est le projeté orthogonal de D sur $[AB]$, c'est-à-dire que H est le milieu de $[AB]$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = 5 \times 2{,}5 = 12{,}5$.

Ainsi, $12{,}5 = 5 \times DB \times \cos 72°$.

$DB = \frac{2{,}5}{\cos 72°} \approx 8{,}1$.

33 **a.** mes$(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ rad.

Ainsi, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OC} = AD \times OC \times \cos\frac{\pi}{3} = 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 16$.

b. • Le triangle OEF est équilatéral, donc $OE = OF = EF$.

Dans le triangle BEF rectangle en F, $BF = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$.

• mes$(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}}) = \frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}) = \frac{\pi}{6}$ rad.

• $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{OE} = BF \times OE \times \cos\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24$.

34 **a.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = AB \times AM \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$

d'où $1 = 1 \times 1 \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$

donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}) = 1$

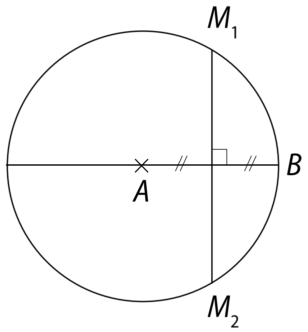
$M = B$ est le seul point qui convient.

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = AB \times AM \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$

d'où $\dfrac{1}{2} = 1 \times 1 \times \cos\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$

donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}) = \dfrac{1}{2}$.

M_1 et M_2 sont les points cherchés.



35 **a.** $\vec{u}^{\,2} = 2^2 = 4$; **b.** $\vec{v}^{\,2} = 1^2 = 1$; **c.** $\vec{w}^{\,2} = 2^2 + 1^2 = 5$;

d. $\vec{t}^{\,2} = 1^2 + 1^2 = 2$; **e.** $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 2^2 + 1^2 = 5$;

f. $(\vec{v} + \vec{t})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

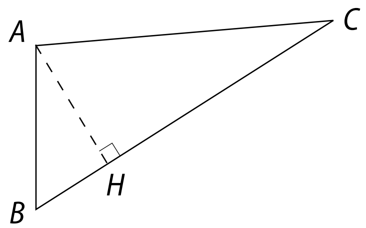
36 • Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{u}^{\,2} = \vec{0}.\vec{0} = 0$. D'où l'égalité.

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$:

$\vec{u}^{\,2} = \vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times 1$

$= ||\vec{u}||^2$.

37 **a.**



b. $BA^2 = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}$

$= \overline{BC} \times \overline{BH} + 0$ car $(AB) \perp (AC)$

$= \overline{BC} \times \overline{BH}$.

38 **1. a.** $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$

$= \vec{u}^{\,2} + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$ car $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

b. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$

$= \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$ car $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

c. $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$ car $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

2. On utilise le résultat du **1. a.** pour écrire :

$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$

$||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 2\vec{u}.\vec{v}$

Ainsi, $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$.

39 $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 3 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 - 2 \times \dfrac{3}{2} + 1^2 = 7$.

$(3\vec{u} + 4\vec{v})^2 = (3\vec{u} + 4\vec{v}).(3\vec{u} + 4\vec{v})$

$= 9\vec{u}^{\,2} + 12\vec{u}.\vec{v} + 12\vec{v}.\vec{u} + 16\vec{v}.\vec{v}$

$= 9||\vec{u}||^2 + 24\,\vec{u}.\vec{v} + 16||\vec{v}||^2$

$= 9 \times 3^2 + 24 \times \dfrac{3}{2} + 16^2 = 133$.

40 $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$= 0{,}1 \times 0{,}4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}02\sqrt{2}$.

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$

$= 0{,}1^2 - 2 \times 0{,}02\sqrt{2} + 0{,}4^2 = 0{,}17 - 0{,}04\sqrt{2}$.

$(3\vec{u} + 4\vec{v})^2 = (3\vec{u} + 4\vec{v}).(3\vec{u} + 4\vec{v})$

$= 9\vec{u}^{\,2} + 12\vec{u}.\vec{v} + 12\vec{v}.\vec{u} + 16\vec{v}.\vec{v}$

$= 9||\vec{u}||^2 + 24\vec{u}.\vec{v} + 16||\vec{v}||^2$

$= 9 \times 0{,}1^2 + 24 \times 0{,}02\sqrt{2} + 16 \times 0{,}4^2$

$= 2{,}65 + 0{,}48\sqrt{2}$.

41 $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$

$= \sqrt{2}^2 - 2 \times \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}^2 = 5 - 3\sqrt{2}$.

$(3\vec{u} + 4\vec{v})^2 = (3\vec{u} + 4\vec{v}).(3\vec{u} + 4\vec{v})$

$= 9\vec{u}^{\,2} + 12\vec{u}.\vec{v} + 12\vec{v}.\vec{u} + 16\vec{v}.\vec{v}$

$= 9||\vec{u}||^2 + 24\vec{u}.\vec{v} + 16||\vec{v}||^2$

$= 9 \times \sqrt{2}^2 + 24 \times \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 16 \times \sqrt{3}^2$

$= 66 + 36\sqrt{2}$.

42 $AD^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA})$

$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

43 $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(2{,}3^2 - 1^2 - 1{,}5^2) = 1{,}02$

De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

d'où $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \approx 0{,}44$.

44 **a.** $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}\|^2 - \|\overrightarrow{IJ}\|^2 - \|\overrightarrow{JK}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}(IK^2 - IJ^2 - JK^2) = \frac{1}{2}(3^2 - 2^2 - 4^2)$

$= -\frac{11}{2}$.

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{KI}\|^2 - \|\overrightarrow{IJ}\|^2 - \|\overrightarrow{KI}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}(KJ^2 - IJ^2 - KI^2) = \frac{1}{2}(4^2 - 2^2 - 3^2) = \frac{3}{2}$.

b. $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = IJ \times IK \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}})$ donc :

$-\frac{3}{2} = 2 \times 3 \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}})$ ainsi, $\cos(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}}) = -\frac{1}{4}$.

mes $\widehat{I} \approx 1{,}8$ rad.

45 $AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})^2$

$= \overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}^2$

$= 2\overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}) + 2\overrightarrow{IB}^2$.

Or, I est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ et $IB = \frac{BC}{2}$.

Ainsi, $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{AI}.\vec{0} + 2\times\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

46 $AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})^2 - (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})^2$

$= \overrightarrow{AH}^2 + 2\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HB}^2 - \overrightarrow{AH}^2 - 2\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HC}^2$

$= 2\overrightarrow{AH}.(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}) + \overrightarrow{HB}^2 - \overrightarrow{HC}^2$

$= 2\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HB}^2 - \overrightarrow{HC}^2$

$= \overrightarrow{HB}^2 - \overrightarrow{HC}^2$ car $(AH) \perp (BC)$.

47 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = -1 \times (-4) + 2 \times (-3) = -2$.

b. $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times (-4) + 4 \times (-2) = -12$.

48 **a.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5 \times 7 + 2 \times (-1) = 33$.

b. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 5 + (-3) \times 2 = 4$.

c. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 7 \times (-2) + (-1) \times (-6) = -8$.

d. $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD} = (-2) \times 3 + 3 \times (-4) = -18$.

49 $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$

$= (x_B - x_A) \times (x_B - x_A) + (y_B - y_A) \times (y_B - y_A)$

$= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

D'où la formule.

50 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = 10$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$; $\vec{v}^2 = 17$;

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{10}{\sqrt{13}\times\sqrt{17}}$ donc mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 0{,}8$ rad.

b. $\vec{u}.\vec{v} = -4$; $\|\vec{u}\| = 4$; $v^2 = 26$;

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-4}{4\times\sqrt{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$ donc mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 1{,}8$ rad.

51 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$; $\vec{v}^2 = 4$;

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times 2}$ donc mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 1{,}7$ rad.

b. $\vec{u}.\vec{v} = 1{,}4$; $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{37}}{2}$; $\vec{v}^2 = \frac{401}{25}$;

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{1{,}4}{\frac{\sqrt{37}}{2}\times\frac{\sqrt{401}}{5}}$ donc mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 1{,}5$ rad.

52 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = 9{,}9$; $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{101}}{2}$; $\vec{v}^2 = \frac{101}{25}$;

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{9{,}9}{\frac{\sqrt{101}}{2}\times\frac{\sqrt{101}}{5}}$ donc mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 0{,}2$ rad.

b. $\vec{u}.\vec{v} = 5$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$; $\vec{v}^2 = 55$;

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{55}}$ donc mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \approx 1{,}4$ rad.

53 $\cos\widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{2\times 4 + 3\times(-1)}{\sqrt{13}\times\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{13}\times\sqrt{17}}$

donc mes $\widehat{A} \approx 1{,}2$ rad.

• $\cos\widehat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \frac{-2\times 2 + (-3)\times(-4)}{\sqrt{13}\times\sqrt{20}} = \frac{8}{\sqrt{13}\times\sqrt{20}}$

donc mes $\widehat{B} \approx 1{,}1$ rad.

• $\cos\widehat{C} = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CA\times CB} = \frac{-4\times(-2) + 1\times 4}{\sqrt{17}\times\sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{17}\times\sqrt{20}}$

donc mes $\widehat{C} \approx 0{,}9$ rad.

54 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = x \times z + y \times t$ et $\vec{v}.\vec{u} = z \times x + t \times y$ d'où l'égalité.

b. $(\vec{u} + \vec{u}').\vec{v} = (x + x') \times z + (y + y') \times t$

$= x \times z + y \times b + x' \times z + y' \times t = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}'.\vec{v}$

c. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v}') = x \times (z + z') + y \times (t + t')$

$= x \times z + y \times t + x \times z' + y \times t' = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}'$

d. $k(\vec{u}.\vec{v}) = k(x \times z + y \times t) = kx \times z + ky \times t$

$= (k\vec{u}).\vec{v} = x \times kz + y \times kt = \vec{u}.(k\vec{v})$

55 $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 10$; $OA = \sqrt{25 + \lambda^2}$; $OB = 2$.

a. mes $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ donc $\cos\widehat{AOB} = \frac{1}{2}$.

Or, $\cos\widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA\times OB} = \frac{10}{2\sqrt{25+\lambda^2}}$

On cherche λ tel que $\frac{10}{2\sqrt{25+\lambda^2}} = \frac{1}{2}$,

donc $\sqrt{25+\lambda^2} = 10$ c'est à dire $25 + \lambda^2 = 100$
donc $\lambda^2 = 75$, ainsi $\lambda = \sqrt{75} = 5\sqrt{5}$
ou $\lambda = -\sqrt{75} = -5\sqrt{5}$.

b. mes $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{4}$ donc $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Or $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA \times OB} = \dfrac{10}{2\sqrt{25+\lambda^2}}$

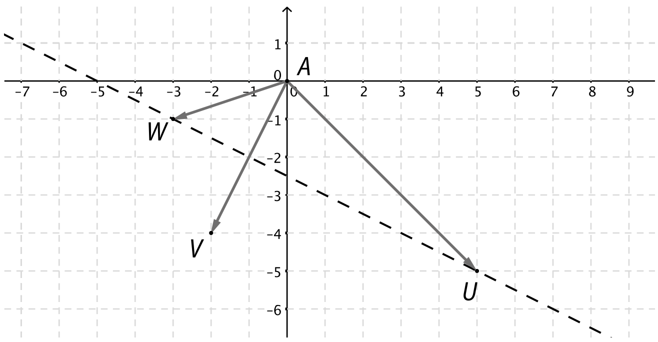
On cherche λ tel que $\dfrac{10}{2\sqrt{25+\lambda^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

donc $\sqrt{25+\lambda^2} = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$ c'est-à-dire $25 + \lambda^2 = \dfrac{100}{2}$

donc $\lambda^2 = 25$, ainsi $\lambda = -5$ ou $\lambda = 5$.

56 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = 10$; $\vec{w}.\vec{v} = 10$.

b.



Les points U et W ont même projeté orthogonal sur la droite (OV).

57 **a.** $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-1)$ et $\overrightarrow{DC}\,(2\,;-1)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme.

b. $AB = \sqrt{5}$, $AD = \sqrt{13}$.

$\cos\widehat{BAD} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{AB \times AD} = \dfrac{2\times 3 + (-1)\times 2}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$

d'où mes $\widehat{BAD} \approx 1{,}1$ rad.
De plus, mes $\widehat{BCD}$ = mes $\widehat{BAD} \approx 1{,}1$ rad ;
ensuite, mes $\widehat{ABC} = \pi -$ mes $\widehat{BAD} \approx 2{,}1$ rad ;
enfin, mes $\widehat{ADC}$ = mes $\widehat{ABC} \approx 2{,}1$ rad.

c. $AC^2 + BD^2 = 26 + 10 = 36$ et $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 5 + 13 + 5 + 13 = 36$, d'où l'égalité.

58 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = 0$; **b.** $\vec{u}^2 = 1$;
c. $-\vec{v}^2 = -2$; **d.** $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 = 1 + 2 = 3$

59 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = -1\times 4 + 4 \times \dfrac{1}{4} = -3 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

b. $\vec{u}.\vec{v} = 2 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times (-5) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c. $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{2}\times(-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3})\times(-\sqrt{2}) = -\sqrt{6} + \sqrt{6} = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

d. $\vec{u}.\vec{v} = (1+\sqrt{5})\times 4 + 4\times(-\sqrt{5}) = 4 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

60 Dans le repère $(M\,; \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN})$ orthonormé, $\overrightarrow{MI}\left(\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ et $IJ\left(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{4}\right)$ donc $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} + 1\times\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0$ donc $(MI) \perp (IJ)$.

61 **a.** $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EI}.(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}) = \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GH}$
$= \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FG}^2 + \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GH}.$

b. $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GH} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI}).\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GH}$
$= -EF\times GH + 0 + 2\overrightarrow{GI}^2 = -3\times 2 + 0 + 2 = -4.$

c. $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FG}^2 + \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{GH} = 2^2 - 4 = 0$ donc $(EI) \perp (FH)$.

62 Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ (ou $\vec{v} = \vec{0}$), $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$ par notation (voir le paragraphe 2 du cours).

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ c'est que

$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$ donc mes $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ rad donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$ donc $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

63 Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, l'équivalence est immédiate.

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$

64 $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (AM) \perp (MB)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0.$

a. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = 2\times 5 + (-2)\times 5 = 0$ donc $C \in (\mathscr{C})$.

b. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB} = 6\times 1 + (-1)\times 4 = 2 \neq 0$ donc $D \notin (\mathscr{C})$.

c. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EB} = 5\times 2 + 5\times(-2) = 0$ donc $E \in (\mathscr{C})$.

d. $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{FB} = 0\times 7 + 3\times 0 = 0$ donc $F \in (\mathscr{C})$.

65 **a.** $\overrightarrow{AB}\,(5\,;1)$, $\overrightarrow{BC}\,(1\,;-5)$, donc $AB = BC = \sqrt{26}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 5\times 1 + 1\times(-5) = 0$.

ABC est donc un triangle isocèle rectangle en B.

b. $\overrightarrow{AB}\,(3\,;4)$, $\overrightarrow{BC}\,(5\,;-3)$, donc $AB = 5$ et $BC = \sqrt{34}$ donc le triangle ABC n'est pas isocèle en B.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 5 + 4\times(-3) = 3 \neq 0$. Ce triangle n'est pas non plus rectangle en B. ABC est un triangle quelconque.

66 $\|\vec{i}^{\,2}\| = \vec{i}^{\,2} = (4\vec{u} - \vec{v}).(4\vec{u} - \vec{v}) = 16\vec{u}^{\,2} - 8\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
$= 16 \times 2 - 8 \times 7 + 25 = 1$

donc $\|\vec{i}\| = 1$, le vecteur $\vec{i}$ est unitaire.

$\|\vec{j}\|^2 = \vec{j}.\vec{j} = (-3\vec{u} + \vec{v}).(-3\vec{u} + \vec{v}) = 9\vec{u}^{\,2} - 6\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
$= 9 \times 2 - 6 \times 7 + 25 = 1$

donc $\|\vec{j}\| = 1$, le vecteur $\vec{j}$ est unitaire.

$\vec{i}.\vec{j} = (4\vec{u} - \vec{v}).(-3\vec{u} + \vec{v}) = -12\vec{u}^{\,2} + 4\vec{u}.\vec{v} + 3\vec{u}.\vec{v} - \vec{v}^{\,2}$
$= -12 \times 2 + 4 \times 7 + 3 \times 7 - 25 = 0,$

donc $\vec{i} \perp \vec{j}$. La base $(\vec{i}, \vec{j})$ est bien orthonormée.

67 **a.** $\vec{u}(1\,;-1)$, $\vec{v}(2\,;3)$ donc $\vec{u}.\vec{v} = -1$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

La base $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est ni orthonormée, ni orthogonale.

b. On a $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$, donc ces vecteurs sont unitaires.

Par contre, $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \times \dfrac{-1}{\sqrt{17}} + \dfrac{2}{\sqrt{13}} \times \dfrac{-4}{\sqrt{17}}$
$= \dfrac{-11}{\sqrt{13 \times 17}} \neq 0$

donc les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux et la base $(\vec{a}, \vec{b})$ n'est pas orthonormée.

68 **a.** $BC^2 = 3^2 + 2{,}5^2 - 2 \times 3 \times 2{,}5 \times \cos\dfrac{\pi}{6}$.

$BC^2 = 9 + 6{,}25 - 7{,}5\sqrt{3}$.

$BC = \sqrt{15{,}25 - 7{,}5\sqrt{3}}$.

b. $BC^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 \times \cos\dfrac{\pi}{4}$.

$BC^2 = 100 + 100 - 100\sqrt{2}$.

$BC = \sqrt{200 - 100\sqrt{2}}$.

69 Dans tous les cas, $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

a. $\cos\widehat{A} = \dfrac{30^2 + 23^2 - 10^2}{2 \times 30 \times 23} \approx 0{,}963$ donc mes $\widehat{A} \approx 0{,}3$ rad.

$\cos\widehat{B} = \dfrac{30^2 + 10^2 - 23^2}{2 \times 30 \times 10} \approx 0{,}785$ donc mes $\widehat{B} \approx 0{,}7$ rad.

$\cos\widehat{C} = \dfrac{23^2 + 10^2 - 30^2}{2 \times 10 \times 23} \approx -0{,}589$ donc mes $\widehat{C} \approx 2{,}2$ rad.

b. $\cos\widehat{A} = \dfrac{2^2 + 3{,}4^2 - 1{,}5^2}{2 \times 2 \times 3{,}4} \approx 0{,}978$ donc mes $\widehat{A} \approx 0{,}2$ rad.

$\cos\widehat{B} = \dfrac{2^2 + 1{,}5^2 - 3{,}4^2}{2 \times 2 \times 1{,}5} \approx -0{,}885$ donc mes $\widehat{B} \approx 2{,}7$ rad.

$\cos\widehat{C} = \dfrac{3{,}4^2 + 1{,}5^2 - 2^2}{2 \times 3{,}4 \times 1{,}5} \approx 0{,}962$ donc mes $\widehat{C} \approx 0{,}3$ rad.

70 On utilise la formule du cours :

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

qui donne $AA'^2 = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2}\right)$.

• $AA'^2 = \dfrac{1}{2}\left(2^2 + 3^2 - \dfrac{1{,}8^2}{2}\right) = 5{,}69$ donc $AA' = \sqrt{5{,}69}$.

• $BB'^2 = \dfrac{1}{2}\left(1{,}8^2 + 2^2 - \dfrac{3^2}{2}\right) = 1{,}37$ donc $BB' = \sqrt{1{,}37}$.

• $CC' = \dfrac{1}{2}\left(3^2 + 1{,}8^2 - \dfrac{2^2}{2}\right) = 5{,}2$ donc $CC' = \sqrt{5{,}12}$.

71 On utilise la formule du cours :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

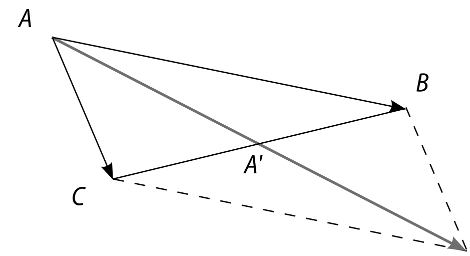
a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7^2 - \dfrac{(4\sqrt{37})^2}{4} = -99$.

b. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (\sqrt{75})^2 - \dfrac{10^2}{4} = 50$.

c. $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = (\sqrt{106})^2 - \dfrac{(6\sqrt{2})^2}{4} = 88$.

d. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 99$.

72



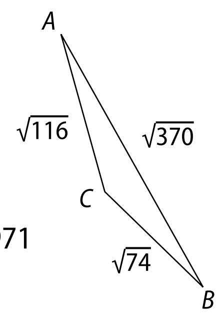
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(\|2\overrightarrow{AA'}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left[4AA'^2 - (AB^2 + AC^2)\right]$
$= \dfrac{1}{2}\left[4AA'^2 - \left(2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}\right)\right] = AA'^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

73 $AA'^2 = \dfrac{c^2 + b^2 - \dfrac{a^2}{2}}{2}$; $BB'^2 = \dfrac{a^2 + c^2 - \dfrac{b^2}{2}}{2}$

$CC'^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - \dfrac{c^2}{2}}{2}$ donc :

$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = \dfrac{1}{2}\left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2 + b^2 + \dfrac{c^2}{2}\right)$
$= a^2 + b^2 + c^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4} = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

74 Les trois côtés du terrain triangulaire mesurent respectivement $\sqrt{370}$, $\sqrt{116}$ et $\sqrt{74}$.



$\sqrt{370}^2 = \sqrt{116}^2 + \sqrt{74}^2$
$- 2 \times \sqrt{116} \times \sqrt{74} \times \cos\widehat{C}$

d'où $\cos\widehat{C} = \dfrac{116 + 74 - 370}{2 \times \sqrt{116 \times 74}} \approx -0{,}971$

ainsi, mes $\widehat{C} \approx 2{,}9$ rad.

• On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface du lac :
$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{116} \times \sqrt{74} \times \sin \widehat{C} \approx 11{,}1$ acres.

75 **1. a.** $AB^2 = 20^2 + 23{,}8^2 - 2 \times 20 \times 23{,}8 \times \cos \dfrac{\pi}{11}$

$AB^2 \approx 53$ et $AB \approx 7{,}3$ m.

La largeur d'un but est d'environ 7,3 m.

b. $CC'^2 = \dfrac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - \dfrac{AB^2}{2}\right)$

$CC'^2 \approx \dfrac{1}{2}\left(23{,}8^2 + 20^2 - \dfrac{7{,}3^2}{2}\right)$

$CC'^2 \approx 469{,}8975$

$CC' \approx 21{,}7$.

Le gardien se trouve à environ 21,7 m du ballon.

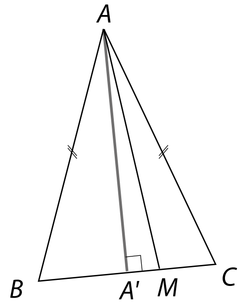
2. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos \widehat{ABC}$

$AC^2 \approx 7{,}3^2 + 25^2 - 2 \times 7{,}3 \times 25 \times \cos \dfrac{\pi}{6}$

$AC^2 \approx 362{,}19$

$AC \approx 19$ m.

76 On suppose que $BM \geqslant CM$.



On note A' le pied de la hauteur issue de A qui est aussi le milieu de $[BC]$.

Dans le triangle ABA' rectangle en A' : $AB^2 = AA'^2 + BA'^2$.

Dans le triangle AMA' rectangle en A' : $AM^2 = AA'^2 + A'M^2$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} AM^2 - AB^2 &= A'M^2 - BA'^2 = (\overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{BA'}).(\overrightarrow{A'M} - \overrightarrow{BA'}) \\ &= (\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'M}).(\overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{CA'}) = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} \\ &= BM \times CM. \end{aligned}$$

77 D'après la propriété du paragraphe **4a** du cours, puisque ABC est un triangle rectangle en A :

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2 \times AC^2} = \frac{BC^2}{\overline{BC} \times \overline{BH} \times \overline{CB} \times \overline{CH}}$$

$$= \frac{BC \times BC}{\overline{BC} \times \overline{BH} \times \overline{CB} \times \overline{CH}} = \frac{1}{-\overline{BH} \times \overline{CH}} = \frac{1}{-\overline{HB} \times \overline{HC}} = \frac{1}{AH^2}.$$

Faire le point

78 **1.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ car le produit scalaire est un nombre.

$\overrightarrow{AB}^2 = 4$ car $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 \geqslant 0$.

2. a. $\vec{u}.\vec{v} > 0$;

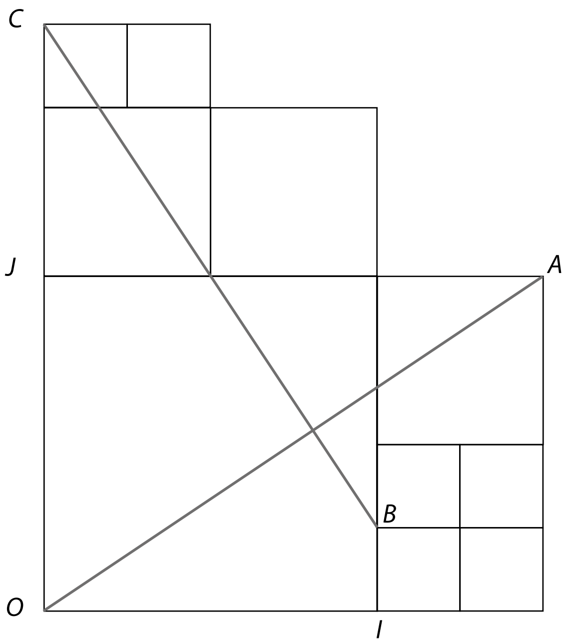
b. $\vec{u}.\vec{v} = 0$;

c. $\vec{u}.\vec{v} > 0$;

d. $\vec{u}.\vec{v} < 0$

79 **a.** On nomme certains points de la figure, utiles à la démonstration

Le repère (O, I, J) est orthonormé.



b. Dans le repère (O, I, J) orthonormé,

$O(0 ; 0)$, $A(1{,}5 ; 1)$, $B(1 ; 0{,}25)$, $C(0 ; 1{,}75)$.

c. $\overrightarrow{OA}(1{,}5 ; 1)$ et $\overrightarrow{BC}(-1 ; 1{,}5)$.

Ainsi, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} = 1{,}5 \times (-1) + 1 \times 1{,}5 = 0$. Donc $(OA) \perp (BC)$.

80 **a.** On utilise la formule liant produit scalaire et parallélogramme.

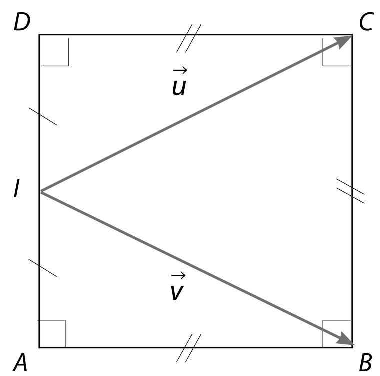
$\vec{u}(7 ; -4)$, $\vec{v}(1 ; -5)$ donc $\vec{u} + \vec{v}\,(8 ; -9)$.

$$\begin{aligned} \vec{u}.\vec{v} &= \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\,[8^2 + (-9)^2 - (7^2 + (-4)^2) - (1^2 + (-5)^2)] = 27. \end{aligned}$$

• On utilise la formule du produit scalaire dans un repère orthonormé.

$\vec{u}.\vec{v} = 7 \times 1 + (-4) \times (-5) = 27$.

b. On utilise la formule liant produit scalaire et parallélogramme.



Si on pose $AB = a$, alors $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$

$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$.

$\vec{u} + \vec{v} = 2\overrightarrow{AB}$

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = (2a)^2 = 4a^2$.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$= \frac{1}{2}\left(4a^2 - \frac{5a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}\right) = \frac{3}{4}a^2$.

• On utilise la formule du produit scalaire dans un repère orthonormé.

Dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires et de même sens, de même que $\vec{j}$ et $\overrightarrow{AD}$:

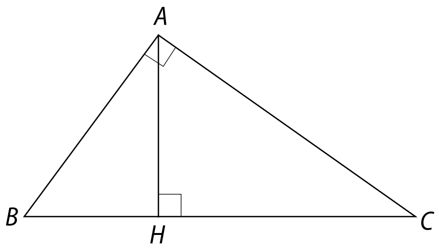
$A(0 ; 0)$, $I(0 ; \frac{a}{2})$, $B(a ; 0)$, $C(a; a)$, $D(0 ; a)$.

Ainsi, $\vec{u} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC}\left(a ; \frac{a}{2}\right)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IB}\left(a ; -\frac{a}{2}\right)$.

Donc, $\vec{u}.\vec{v} = a \times a + \frac{a}{2} \times \left(-\frac{a}{2}\right)$

$= a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$.

81 ABC est un triangle rectangle en A.



Or, $BA^2 = \overrightarrow{BA}^2 = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}).\overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ car $(AB) \perp (AC)$

$= BC \times BH$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

De plus, $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$

donc $BA^2 = (\overline{BH} + \overline{HC}) \times \overline{BH} = \overline{BH}^2 + \overline{HC} \times \overline{BH}$

d'où $BA^2 - BH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$ ainsi $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$ car le triangle ABH est rectangle en H.

• $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC} = \overline{BH} \times \overline{HC}$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

$= AH^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 0$,

ce qui prouve que $(AB) \perp (AC)$ et que le triangle ABC est rectangle en A.

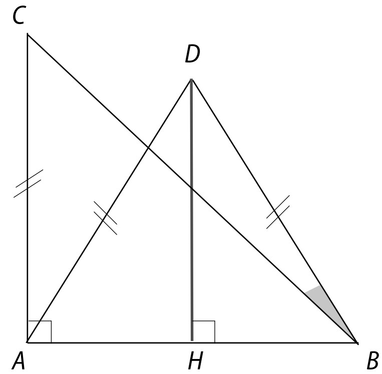
82 $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{JK} = IJ \times JK \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{JK}})$

$= IJ \times JK \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= 3{,}4 \times 5 \times \cos\frac{2\pi}{3}$

$= 3{,}4 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -8{,}5$.

83



1. a. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA} = \frac{c^2}{2}$;

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = HD \times AC = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \times c = \frac{c^2\sqrt{3}}{2}$;

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{c^2(1 + \sqrt{3})}{2}$.

b. Le triangle ABC est rectangle isocèle en A, donc mes$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$; le triangle ABD est équilatéral, donc mes$\widehat{ABD} = \frac{\pi}{3}$; ainsi, mes$\widehat{CBD} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

• $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = BD \times BC \times \cos\widehat{CBD}$, ainsi :

$\frac{c^2(1 + \sqrt{3})}{2} = c \times c\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{12}$.

Finalement, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

2. a. D'après la propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre interceptant le même arc $\overset{\frown}{BC}$:

mes$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{BOC} = \frac{\pi}{12}$ rad.

b. Dans le triangle ACH rectangle en H, $\cos\widehat{BAC} = \frac{AH}{AC}$.

Dans le triangle ABC rectangle en C, $\cos\widehat{BAC} = \frac{AC}{AB}$.

Ainsi, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

c. $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{AH}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2}$.

Finalement, $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Se tester

84 à **87** Voir Manuel de l'élève page 258.

Exercices d'approfondissement

88 **a.** $2\overrightarrow{IH}+3\overrightarrow{EF}=2(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EH})+6\overrightarrow{EI}=4\overrightarrow{EI}+2\overrightarrow{EH}$

$=2\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EH}=2(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH})=2\overrightarrow{EG}.$

b. $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{2}(2\overrightarrow{IH}+3\overrightarrow{EF}).\overrightarrow{IH}=IH^2+\dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{IH}$

$=IH^2+\dfrac{3}{2}\times\overline{EF}\times\overline{IE}=EI^2+EH^2+\dfrac{3}{2}\times\overline{EF}\times\overline{IE}$

$=2^2+(2\sqrt{2})^2+\dfrac{3}{2}\times 4\times(-2)=0$

donc $(EG)\perp(IH)$.

89 **1.** Le repère $(B\,;\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BM})$ est orthonormé puisque $BI=BM=1$ et que $(BI)\perp(BM)$.

2. a. Dans le repère précédent :

$O(1\,;-0{,}5)$; $P(0{,}5\,;\,1)$; $N(4\,;\,0{,}5)$; $\overrightarrow{OP}(-0{,}5\,;\,1{,}5)$ et $\overrightarrow{ON}(3\,;1)$.

Ainsi, $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{ON}=-0{,}5\times3+1{,}5\times1=0$ donc $(OP)\perp(ON)$.

Le triangle OPN est rectangle en O.

b. On note le $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle OPN son diamètre est $[PN]$ (il existe plusieurs façons de répondre).

• $D(2\,;-1)$. Donc $\overrightarrow{DP}(-1{,}5\,;2)$ et $\overrightarrow{DN}(2\,;1{,}5)$.

Ainsi, $\overrightarrow{DP}.\overrightarrow{DN}=-1{,}5\times2+2\times1{,}5=0$.

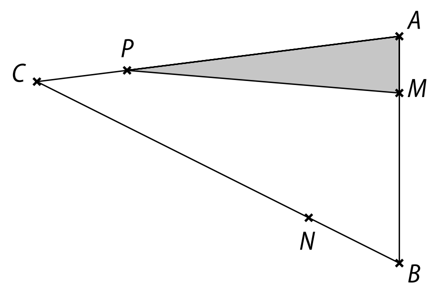
Le triangle DPN est rectangle en D, donc D appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[PN]$.

• $J(1\,;2)$. Donc $\overrightarrow{JP}(-0{,}5\,;-1)$ et $\overrightarrow{JN}(3\,;-1{,}5)$.

Ainsi $\overrightarrow{JP}.\overrightarrow{JN}=-0{,}5\times3+(-1)\times(-1{,}5)=0$.

Le triangle JPN est rectangle en J, donc J appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[PN]$.

90 **1. a.**



b. Lorsque $x=\dfrac{1}{2}$, M, N, P sont les milieux des côtés du triangle ABC.

2. a. $\mathcal{A}(AMP)=\dfrac{1}{2}AM\times AP\times\sin\widehat{A}$

$=\dfrac{1}{2}\,x\,AB(1-x)\,AC\sin\widehat{A}$

$=\dfrac{1}{2}\,x(1-x)\,AC\sin\widehat{A}=\dfrac{1}{2}\,x(1-x)\,bc\sin\widehat{A}.$

b. $\mathcal{A}(ABC)=\dfrac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A}=\dfrac{1}{2}\,ac\sin\widehat{B}=\dfrac{1}{2}\,ab\sin\widehat{C}.$

c. $\mathcal{A}(AMP)=x(1-x)\,\mathcal{A}(ABC)$.

On montre de même que : $\mathcal{A}(BMP)=x(1-x)\,\mathcal{A}(ABC)$ et $\mathcal{A}(CPN)=x(1-x)\,\mathcal{A}(ABC)$.

Ainsi $\mathcal{A}(AMP)=\mathcal{A}(BMN)=\mathcal{A}(CPN)$.

d. $\mathcal{A}(MNP)=\mathcal{A}(ABC)-3\times\mathcal{A}(AMP)$

$=\dfrac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A}-3\times\dfrac{1}{2}\,x(1-x)\,bc\sin\widehat{A}$

$=\dfrac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A}[1-3x(1-x)]$

$=\mathcal{A}(ABC)\,[1-3x(1-x)].$

3. a. $\mathcal{A}(MNP)=\mathcal{A}(ABC)\Leftrightarrow 1-3x(1-x)=\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 3x^2-3x+\dfrac{3}{4}=0.$

b. L'aire est maximale (et vaut l'aire ABC) pour $x=1$.

91 **1.** On peut raisonner en utilisant les coordonnées de vecteurs dans une base orthonormée.

$\vec{u}(a\,;b)$, $\vec{v}(a'\,;b')$, $\vec{w}(x\,;y)$

a. $\begin{cases}\vec{w}\text{ colinéaire à }\vec{u}\\ \vec{w}\text{ colinéaire à }\vec{v}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{dét}(\vec{w},\vec{u})=0\\ \text{dét}(\vec{w},\vec{v})=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}ay-bx=0\\ a'y-b'x=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a'ay-a'bx=0\\ a'ay-ab'x=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}ay-bx=0\\ (ab'-a'b)x=0\end{cases}$

Or, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $ab' - a'b \neq 0$, ainsi $x = 0$ et $y = 0$

Réciproquement, si $\vec{w} = \vec{0}$ alors il est colinéaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

b. $\begin{cases} \vec{w} \text{ orthogonal à } \vec{u} \\ \vec{w} \text{ orthogonal à } \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 0 \\ a'x - b'y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'ax + a'by = 0 \\ a'ax - ab'y = 0 \end{cases}$

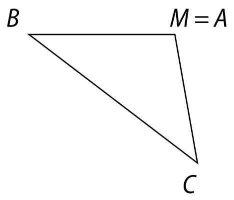
$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = 0 \\ (a'b - ab')y = 0 \end{cases}$

Or, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $a'b - ab' \neq 0$ ainsi, $y = 0$ et $x = 0$.

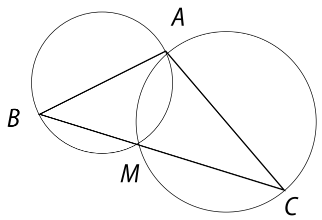
Réciproquement, si $\vec{w} = \vec{0}$, alors il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2. a. et **b.**

Premier cas



Deuxième cas



b. <u>Premier cas</u> : $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$ ne sont pas colinéaires (c'est-à-dire que les points B, C, M ne sont pas alignés).

Dans ce cas, en posant $\vec{u} = \overrightarrow{BM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CM}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AM}$, on retrouve la question **1. a**.

Donc $\vec{w} = \vec{0}$ et $M = A$

<u>Deuxième cas :</u> $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires (c'est à dire que les points B, C, M sont alignés)

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow ABM$ est un triangle rectangle en M ou $M = A$ ou $M = B$

$\Leftrightarrow M \in (\mathscr{C})$ où $(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

De même, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow M \in (\mathscr{C}')$ où $(\mathscr{C}')$ est le cercle de diamètre $[AC]$.

Ainsi, M est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de $(\mathscr{C}')$; de plus M, B, C sont alignés.

92 **1.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{MA}.\vec{0} + \overrightarrow{AB}.\vec{0} = 0$

2. H est le point d'intersection de deux des trois hauteurs (celle issue de A et celle issue de B).

On sait donc que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$

Or, d'après le **1.**, $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$

$0 + 0 + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ donc $(HC) \perp (AB)$.

Ainsi, (HC) est la hauteur issue de C et les trois hauteurs sont concourantes en H.

93 **1.** Dans le triangle ABD :

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \cos\widehat{A}$

d'où $\cos\widehat{A} = \dfrac{222{,}9^2 + 173{,}7^2 - 249{,}7^2}{2 \times 222{,}9 \times 173{,}7} \approx 0{,}226$ donc mes $\widehat{A} \approx 1{,}34$ rad.

Ainsi $\mathcal{A}(ABD) = \dfrac{1}{2} AB \times AD \times \sin\widehat{A}$

$\approx \dfrac{1}{2} \times 222{,}9 \times 173{,}7 \times \sin 1{,}34$

$\approx 18\,845{,}5 \text{ m}^2$.

• Dans le triangle BCD :

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \times BC \times CD \times \cos\widehat{C}$

d'où $\cos\widehat{C} = \dfrac{112{,}6^2 + 175^2 - 249{,}7^2}{2 \times 112{,}6 \times 175} \approx -0{,}483$

donc mes $\widehat{C} \approx 2{,}075$ rad.

Ainsi $\mathcal{A}(BCD) = \dfrac{1}{2} BC \times CD \times \sin\widehat{C}$

$\approx \dfrac{1}{2} \times 112{,}6 \times 175 \times \sin 2{,}075$

$\approx 8626{,}5 \text{ m}^2$.

Finalement, l'aire de la surface du terrain d'Abdou est environ $18\,845{,}5 + 8\,626{,}5$ c'est à dire $24\,472 \text{ m}^2$.

2. On cherche la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

• $\mathcal{A}(ABD) = \dfrac{1}{2} BD \times BA \sin\widehat{ABD}$

donc $\sin\widehat{ABD} \approx \dfrac{2 \times 18\,845{,}5}{249{,}7 \times 222{,}9} \approx 0{,}6772$

d'où mes $\widehat{ABD} \approx 0{,}74$ rad.

• $\mathcal{A}(BCD) = \dfrac{1}{2} BC \times BD \times \sin\widehat{CBD}$

donc $\sin\widehat{CBD} \approx \dfrac{2 \times 8\,626{,}5}{249{,}7 \times 112{,}6} \approx 0{,}6136$

d'où mes $\widehat{CBD} \approx 0{,}66$.

Ainsi, mes $\widehat{ABC} \approx 0{,}74 + 0{,}66 \approx 1{,}4$ rad.

• Finalement,

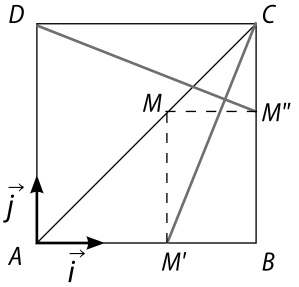
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

$AC^2 \approx 222{,}9^2 + 112{,}6^2 - 2 \times 222{,}9 \times 112{,}6 \times \cos 1{,}4$

$AC^2 \approx 53\,831$.

Ainsi, $AC \approx 232$ m.

94 **1.** On conjecture que (CM') et (DM'') sont orthogonales.



2. On note $a = AB$ et $x = AM'$.
Ainsi, $0 \leqslant x \leqslant a$.

Dans le repère orthonormé $(A\,;\vec{i}, \vec{j})$, $M'(x\,;0)$, $C(a\,;a)$, $M''(a\,;x)$, $D(0\,;a)$.

Ainsi, $\overrightarrow{CM'}(x-a\,;-a)$ et $\overrightarrow{DM''}(a\,;x-a)$.
D'où $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{DM''} = (x-a)\times a + (-a)\times(x-a) = 0$.
Donc $(CM') \perp (DM'')$.

95 **a.** Dans le triangle A_1A_2H, mes $\widehat{A_1A_2H} = 180° - 57°$ $= 123°$; mes $\widehat{A_1HA_2} = 180° - (123° + 17°) = 40°$.

$$\frac{50}{\sin \widehat{A_1HA_2}} = \frac{A_2H}{\sin \widehat{A_2A_1H}}$$

donc $A_2H = \dfrac{50 \times \sin 17°}{\sin 40°} \approx 22{,}7$ m.

b. D'une part, $\mathcal{A}(A_1A_2H) = \dfrac{1}{2}\, A_1A_2 \times A_2H \sin \widehat{A_1A_2H}$

$\mathcal{A}(A_1A_2H) \approx \dfrac{1}{2} \times 50 \times 22{,}7 \times \sin 123°$

$\mathcal{A}(A_1A_2H) \approx 476$ m².

D'autre part, $\mathcal{A}(A_1A_2H) = \dfrac{A_1A_2 \times HB}{2}$

d'où $HB \approx 2 \times \dfrac{476}{50} \approx 19{,}04$.

Finalement, $h = HB + BC \approx 20{,}8$.

La hauteur de la mosquée de Djenné est d'environ 21 m.

96 **1. a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = b - a$.

b. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$
$= 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$.

2. $\overrightarrow{OA}(\cos a\,;\sin a)$, $\overrightarrow{OB}(\cos b\,;\sin b)$.

Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3. Puisque $\cos(-x) = \cos x$ pour tout x de $\mathbb{R}$:
$\cos(b-a) = \cos(a-b)$.
D'après le **1. b.** et le **2.,** on en déduit que :
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

4. a. On pose $b' = -b$. Ainsi, d'après le **3.** :
$\cos(a+b) = \cos a \cos(-b') + \sin a \sin(-b)$
$= \cos a \cos b' - \sin a \sin b'$.

b. On pose $a' = \dfrac{\pi}{2} - a$.

D'une part, $\cos(a'+b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a + b\right)$
$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \sin(a-b)$.

D'autre part, $\cos(a'+b) = \cos a' \cos b - \sin a' \sin b$
$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\sin b$
$= \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Ainsi, $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

c. On pose $b' = -b$.
$\sin(a+b') = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b)$
$= \sin a \cos b' + \cos a \sin b'$.

97 **1.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{HK} = \overline{CA} \times \overline{HK} = -CA \times HK$.

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = -BC^2 + BA^2 = -L^2 + l^2$.

Ainsi, $-CA \times HK = -L^2 + l^2$ d'où $HK = \dfrac{L^2 - l^2}{CA} = \dfrac{L^2 - l^2}{\sqrt{L^2 + l^2}}$.

2. a. $AC = 3\,HK \Leftrightarrow \sqrt{L^2 + l^2} = 3 \times \dfrac{L^2 - l^2}{\sqrt{L^2 + l^2}}$
$\Leftrightarrow L^2 + l^2 = 3L^2 - 3l^2 \Leftrightarrow 4l^2 = 2L^2$
$\Leftrightarrow L^2 = 2l^2 \Leftrightarrow L = l\sqrt{2}$.

b. $\mathcal{A}(BHDK) = DK \times HK$. Or, $AH = HK = KC$ puisque $AC = 3HK$, donc $HK = \dfrac{\sqrt{L^2 + l^2}}{3}$ et comme $CK = \dfrac{\sqrt{L^2 + l^2}}{3}$, on en déduit que (dans le triangle DKC rectangle en K), $DK^2 = l^2 - CK^2$.

$DK^2 = l^2 - \dfrac{L^2 + l^2}{9} = \dfrac{8\,l^2 - L^2}{9}$ d'où $DK = \dfrac{\sqrt{8\,l^2 - L^2}}{3}$.

Ainsi, $\mathcal{A}(BHDK) = \dfrac{\sqrt{8\,l^2 - L^2}}{3} \times \dfrac{\sqrt{L^2 + l^2}}{3}$.

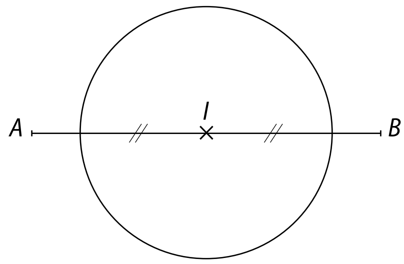
Or, $L = l\sqrt{2}$ donc $L^2 = 2l^2$, on simplifie :

$\mathcal{A}(BHDK) = \dfrac{\sqrt{8\,l^2 - 2l^2}}{3} \times \dfrac{\sqrt{2l^2 + l^2}}{3}$
$= \dfrac{\sqrt{6\,l^2 \times 3\,l^2}}{3 \times 3} = \dfrac{l^2\sqrt{2}}{3}$.

98 **1.** $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$
$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$
$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$
$= 2MI^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$ (car $IA = IB = \dfrac{AB}{2}$)
$= 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

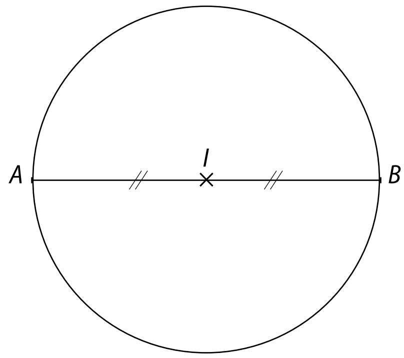
2. a. $MA^2 + MB^2 = 12 \Leftrightarrow 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 12$
$\Leftrightarrow 2MI^2 + \dfrac{4^2}{2} = 12$
$\Leftrightarrow MI^2 = 2 \Leftrightarrow MI = \sqrt{2}$.

M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.



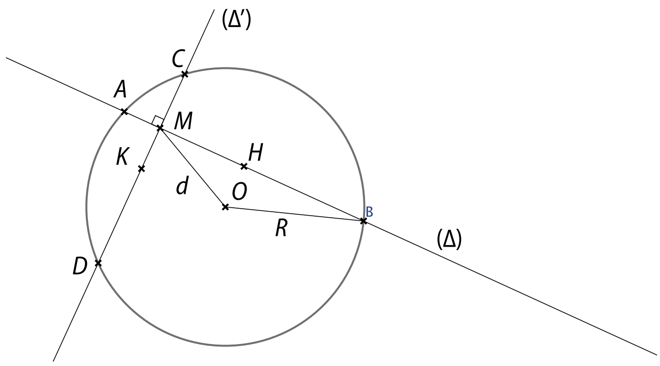
b. En procédant de même, on trouve :
$MA^2 + MB^2 = -3 \Leftrightarrow MI = -\dfrac{11}{2}$.
Donc il n'existe pas de tels points M.

c. En procédant de même, on trouve : $MA^2 + MB^2 = 16$ $\Leftrightarrow MI = 4$. M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.



d. En procédant de même, on trouve :
$MA^2 + MB^2 = 8 \Leftrightarrow MI = 0$.
Donc le seul point M qui convient est le point I.

99 **a.**



b. $OH^2 + OK^2 = d^2$ car $OKMH$ est un rectangle

c. Dans le triangle AOB, d'après le théorème de la médiane :
$OA^2 + OB^2 = 2OH^2 + \dfrac{AB^2}{2}$; $2R^2 = 2OH^2 + \dfrac{AB^2}{2}$
donc $AB^2 = 4(R^2 - OH^2)$.

• Dans le triangle COD, d'après le théorème de la médiane :

$OC^2 + OD^2 = 2OK^2 + \dfrac{CD^2}{2}$

$2R^2 = 2OK^2 + \dfrac{CD^2}{2}$ donc $CD^2 = 4(R^2 - OK^2)$

Ainsi, $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4\,(OH^2 + OK^2)$
$AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4d^2$.

d. $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{HA})^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2$

$= \overrightarrow{MH}^2 + 2\,\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA}^2 + \overrightarrow{MH}^2 + 2\,\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HB}^2$

$= 2\,MH^2 + 2\,\overrightarrow{MH}.(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}) + HA^2 + HB^2$

$= 2\,MH^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

• On montre de même que : $MC^2 + MD^2 = 2MK^2 + \dfrac{CD^2}{2}$.

• Ainsi,

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2MH^2 + 2MK^2 + AB^2 + \dfrac{CD^2}{2}$

$= 2d^2 + \dfrac{8R^2 - 4d^2}{2} = 4R^2$.

100 **a.** On note $\alpha = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}})$, ainsi :

$\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GF}}) = 2\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha$.

$\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GE} = GH \times GE \times \cos\alpha$; $\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GF} = GI \times GF \times \cos(\pi - \alpha)$.

• Or, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $GH = GE$ et $GF = GI$, donc $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GE} = -\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GF}$ et finalement, $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GF} = 0$.

b. $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GF} = 0$ est successivement équivalent à : $(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FH}).\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GI}.(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HF}) = 0$

$\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{FH}.\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{HF} = 0$

$0 + \overrightarrow{FH}.\overrightarrow{GE} + 0 + \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{HF} = 0$

$\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{IG}.\overrightarrow{FH} = 0$

$\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{FH}.\overrightarrow{IG} = 0$

$\overrightarrow{FH}.(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GE}) = 0$

$\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{IE} = 0$, donc $(FH) \perp (IE)$.

101 **Méthode 1**

Dans le triangle CDE rectangle en C, $\tan\widehat{CED} = \dfrac{8}{13}$.

Dans le triangle ADF rectangle en A, $\tan\widehat{ADF} = \dfrac{5}{8}$.
Donc $\tan\widehat{CED} \neq \tan\widehat{ADF}$.

Ainsi $\text{mes}\,\widehat{CED} \neq \text{mes}\,\widehat{ADF}$ donc les points E, D, F ne sont pas alignés.

Méthode 2

On note I le point de $[BC]$ tel que $BI = 1$ et J le point de $[BA]$ tel que $BJ = 1$.

Ainsi, le repère (B, I, J) est orthonormé.

Dans ce repère, $E\,(21\,;0)$, $D\,(8\,;8)$, $F\,(0\,;13)$.

$\overrightarrow{ED}\,(-13\,;8)$, $\overrightarrow{DF}(-8\,;5)$.

$\text{dét}\,(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DF}) = -13 \times 5 - 8 \times (-8) = -1 \neq 0$ donc $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas colinéaires donc D, E, F ne sont pas alignés.

102 **1 .** Lorsque $M \in (\mathcal{C})$, $\mathcal{P}_M = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ car alors le triangle AMB est rectangle en M (ou $M = A$ et $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $M = B$ et $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$).

2. a. Le triangle ABA' est rectangle en B, donc B est le projeté orthogonal de A' sur (AB), donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

b. $\mathcal{P}_M = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'})$

$= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$

$= d^2 + \overrightarrow{MO}.\vec{0} + \overline{OA} \times \overline{OA'} = d^2 - R^2$.

3. On note A' le point diamétralement opposé à A.

$\mathcal{P}_M = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'})$

$= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$

$= d^2 + \overrightarrow{MO}.\vec{0} + \overline{OA} \times \overline{OA'} = d^2 - R^2$.

4. a. $\mathcal{P}_M$ ne dépend pas de A et B puisqu'il ne dépend que de d et de R, c'est-à-dire de la distance du point M au centre du cercle et du rayon du cercle.

b. Lorsque M est extérieur à $(\mathcal{C})$, $d > R$ donc $\mathcal{P}_M > 0$;

lorsque $M \in (\mathcal{C})$, $\mathcal{P}_M = 0$;

lorsque M est intérieur à $(\mathcal{C})$, $d < R$ donc $\mathcal{P}_M < 0$.

5. a. M doit être situé à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$ et à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C}')$.

$\mathcal{P}_M = d^2 - R^2 = d^2 - 25$; $\mathcal{P}'_M = d^2 - R'^2 = d^2 - 9$.

Donc $\mathcal{P}_M + \mathcal{P}'_M = 2d^2 - 34$.

$2d^2 - 34 = 0 \Leftrightarrow d^2 = 17 \Leftrightarrow d = \sqrt{17}$ (car $d > 0$).

Donc l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{17}$.

b. $\mathcal{P}_M = \mathcal{P}'_M \Leftrightarrow d^2 - R^2 = d'^2 - R^2 \Leftrightarrow d^2 = d'^2 \Leftrightarrow d = d'$

$\Leftrightarrow$ M est équidistant de O et O'.

Donc l'ensemble des points M est la médiatrice de $[OO']$.

c. Les deux points doivent être situés à l'intérieur de $(\mathcal{C})$ ou à l'extérieur de $(\mathcal{C})$.

$\mathcal{P}_K - \mathcal{P}_M = OK^2 - R^2 - d^2 + R^2 = OK^2 - d^2$.

Donc $OK^2 - d^2 = 0$, c'est-à-dire $d = OK$.

Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre O et de rayon OK.

103 **1. a.** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$ donc

$\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

b. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sin C$; $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sqrt{1 - \cos^2\widehat{C}}$.

c. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sqrt{(1 + \cos^2\widehat{C})(1 - \cos^2\widehat{C})}$

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sqrt{\left(1 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)\left(1 - \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)}$

d. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sqrt{\left(\dfrac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)\left(\dfrac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab}\right)}$

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}$

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}$

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)}$

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

2. a. $p = 3{,}6 + 4 + \dfrac{6{,}6}{2} = 7{,}1$

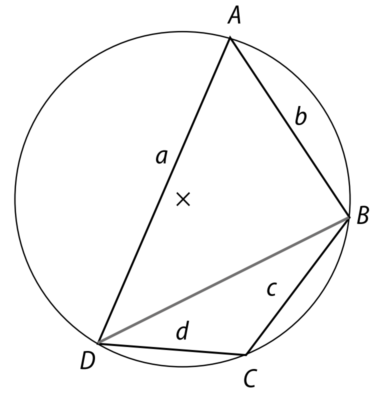
Donc $\mathcal{A} = \sqrt{7{,}1\ (7{,}1 - 3{,}6)(7{,}1 - 4)(7{,}1} - 6{,}6) \approx 6{,}2$.

b. $\dfrac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$ donc $R = \dfrac{abc}{4\mathcal{A}} \approx \dfrac{3{,}6 \times 4 \times 6{,}6}{4 \times 6{,}2} \approx 3{,}8$.

104 **1. a.** Le quadrilatère étant inscriptible dans un cercle, on a :

• mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{C}$ lorsque le quadrilatère est croisé, donc $\sin\widehat{A} = \sin\widehat{C}$;

• mes $\widehat{A} = \pi -$ mes $\widehat{C}$ lorsque le quadrilatère est non croisé comme c'est le cas ici, donc $\sin\widehat{A} = \sin(\pi - \widehat{C}) = \sin\widehat{C}$.



$\mathcal{A} = \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(BCD)$

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{A} + \dfrac{1}{2}\sin\widehat{C} = \dfrac{1}{2}(ab + cd)\sin\widehat{A}$.

b. $DB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{A}$ (triangle ABD)

$DB^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{C}$ (triangle DCB), d'où l'égalité.

Ainsi, puisque $\cos\widehat{A} = \cos(\pi - \widehat{C}) = -\cos\widehat{C}$, on en déduit que :

$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\widehat{A} - 2cd\cos\widehat{C}$

$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\widehat{A} + 2cd\cos\widehat{A}$

$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd)\cos\widehat{A}$

c. $16\mathcal{A}^2 = 16 \times \frac{1}{4}(ab+cd)^2 \sin^2\widehat{A}$

$16\mathcal{A}^2 = 4(ab+cd)^2(1-\cos^2\widehat{A})$

$16\mathcal{A}^2 = 4(ab+cd)^2 - 4(ab+cd)^2\cos^2\widehat{A}$.

d. $p-a = \frac{a+b+c+d}{2} - a = \frac{-a+b+c+d}{2}$;

de même, $p-b = \frac{a-b+c+d}{2}$

$p-c = \frac{a+b-c+d}{2}$ et $p-d = \frac{a+b+c-d}{2}$.

D'après le **b.**, $2(ab+cd)\cos\widehat{A} = a^2+b^2-c^2-d^2$ donc $4(ab+cd)^2\cos^2\widehat{A} = (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

Donc $16\mathcal{A}^2 = 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$= [2(ab+cd)+a^2+b^2-c^2-d^2][2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2]$

$= [(a+b)^2-(c-d)^2]\,[-(a-b)^2+(c+d)^2]$

$= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)$

$= 2(p-d)\,2(p-c)\,2(p-b) = 16(p-a)(p-b)(p-c)\,(p-d)$.

Ainsi, $\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)\,(p-d)}$.

2. a. $p = 5+6+9+\frac{8}{2} = 14$.

Donc $\mathcal{A} = \sqrt{(14-5)(14-6)(14-9)(14-8)} = \sqrt{2\,160}$

$\mathcal{A} = 12\sqrt{15}$.

• $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(6\times 5+8\times 9)\sin\widehat{B}$

$12\sqrt{15} = 51\times\sin\widehat{B}$

$\sin\widehat{B} = \frac{12\sqrt{15}}{51} = \frac{4\sqrt{15}}{17}$ donc mes $B \approx 65{,}68°$.

$\mathcal{A}(ABC) \approx 13{,}7$.

b. $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}AC\times AB\sin\widehat{BAC}$

Or, $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$,

donc mes $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOC} = 30°$.

Ainsi, $13{,}7 \approx \frac{1}{2}AC\times 6\sin 30°$.

$AC \approx 4\times 13{,}7/6 \approx 9{,}1$.

105 1. $O(0\,;0)$, $B(b\,;0)$, $C(0\,;c)$, $D(b\,;-b)$, $E(0\,;-b)$, $F(-c\,;c)$, $G(-c\,;0)$.

2. a. $\begin{cases} C\in(CD) \\ D\in(CD)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_C = m\,x_C+p \\ y_D = m\,x_D+p\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = m\times 0+p \\ -b = m\times b+p\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = c \\ m = \dfrac{-b+c}{m}\end{cases}$

La droite (CD) a pour équation $y = -\frac{b+c}{b}x+c$.

$\begin{cases} B\in(BF) \\ F\in(BF)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_B = m'x_B+p' \\ y_F = m'x_F+p'\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m'\times b+p' \\ c = m'x(-c)+p'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m'(-b-c) \\ 0 = m'\times b+p'\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m' = -\dfrac{c}{b+c} \\ 0 = -\dfrac{c}{b+c}\times b+p'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m' = -\dfrac{c}{b+c} \\ p' = -\dfrac{bc}{b+c}\end{cases}$

La droite (BF) a pour équation $y = -\frac{c}{b+c}x+\frac{bc}{b+c}$.

b. H est le point d'intersection de ces deux droites.

$\begin{cases} y_K = -\dfrac{b+c}{b}x_H+c \\ y_H = -\dfrac{c}{b+c}x_H+\dfrac{bc}{b+c}\end{cases}$

$\begin{cases} -\dfrac{b+c}{b}x_H+c = -\dfrac{c}{b+c}x_H+\dfrac{bc}{b+c} \\ y_H = -\dfrac{b+c}{b}x_H+c\end{cases}$

$\begin{cases} \left(\dfrac{c}{b+c}-\dfrac{b+c}{b}\right)x_H = \dfrac{bc}{b+c}-c \\ y_H = -\dfrac{b+c}{b}x_H+c\end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{bc-(b+c)^2}{(b+c)^2}x_H = \dfrac{b^2c-bc(b+c)}{b(b+c)} \\ y_H = -\dfrac{b+c}{b}x_H+c\end{cases}$

$\begin{cases} bc-(b+c)^2\,x_H = b^2c-bc(b+c) \\ y_H = -\dfrac{b+c}{b}x_H+c\end{cases}$

$\begin{cases} bc-(b+c)^2\,x_H = -bc^2 \\ y_H = -\dfrac{b+c}{b}x_H+c\end{cases}$

$\begin{cases} x_H = \dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2} \\ y_H = -\dfrac{b+c}{b}\times\dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2}+c\end{cases}$

$\begin{cases} x_H = \dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2} \\ y_H = \dfrac{bc^2+c^3+bc^2-c(b+c)^2}{bc-(b+c)^2}\end{cases}$

$\begin{cases} x_H = \dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2} \\ y_H = \dfrac{bc^2+c^3+bc^2-cb^2-2bc^2-c^3}{bc-(b+c)^2}\end{cases}$

$\begin{cases} x_H = \dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2} \\ y_H = \dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2}\end{cases}$

b. $\overrightarrow{OH}\left(\dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2}\,;\dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2}\right)$ et $\overrightarrow{BC}\,(-b\,;c)$ donc

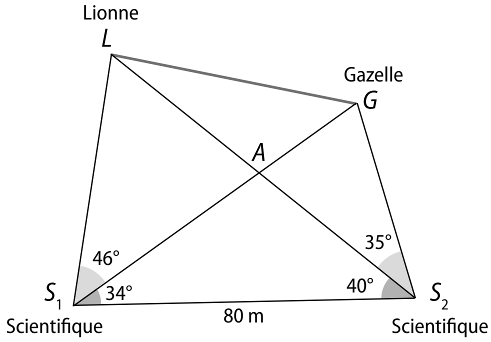
$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{b^2c^2}{bc-(b+c)^2}+\dfrac{-b^2c}{bc-(b+c)^2} = 0$.

Donc (OH) est la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

• La droite (OH) passe par l'origine du repère, elle a donc pour équation $y = m''x$ avec $m'' = \dfrac{y_H}{x_H}$.

$(OH) : y = \dfrac{b}{c}\,x$.

106



• Dans le triangle AS_1S_2 :

$$\frac{S_1S_2}{\sin \widehat{S_1AS_2}} = \frac{AS_1}{\sin \widehat{AS_1S_2}} = \frac{AS_2}{\sin \widehat{AS_2S_1}}$$

donc $AS_1 = \dfrac{80 \times \sin 34°}{\sin 106°} \approx 46{,}54$ m ;

$AS_2 = \dfrac{80 \times \sin 40°}{\sin 106°} \approx 53{,}5$ m.

• mes $\widehat{LAG}$ = mes $\widehat{S_1AS_2} = 106°$.

• mes $\widehat{LAS_1}$ = mes $\widehat{GAS_2} = 74°$.

• mes $\widehat{AGS_2} = 180°$ – mes $\widehat{GAS_2}$ – mes $\widehat{AS_2G}$
$= 180° - 74° - 35° = 71°$.

• mes $\widehat{ALS_1} = 180°$ – mes $\widehat{LAS_1}$ – mes $\widehat{AS_1L}$
$= 180° - 74° - 46° = 60°$.

• Dans le triangle AS_2G :

$$\frac{AS_2}{\sin \widehat{AGS_2}} = \frac{AG}{\sin \widehat{AS_2G}} = \frac{GS_2}{\sin \widehat{GAS_2}}$$

donc $AG = \dfrac{53{,}5 \times \sin 35°}{\sin 71°} \approx 32{,}45$ m ;

$GS_2 = \dfrac{53{,}5 \times \sin 74°}{\sin 71°} \approx 54{,}4$ m.

• Dans le triangle LAS_1 :

$$\frac{AL}{\sin \widehat{AS_1L}} = \frac{AS_1}{\sin \widehat{ALS_1}} = \frac{LS_1}{\sin \widehat{LAS_1}}$$

donc $AL = \dfrac{43{,}54 \times \sin 46°}{\sin 60°} \approx 38{,}66$ m ;

$LS_1 = \dfrac{43{,}54 \times \sin 74°}{\sin 60°} \approx 51{,}66$ m.

• Dans le triangle LGS_2 :

$LG^2 = LS_2^{\,2} + GS_2^{\,2} - 2LS_2 \times GS_2 \times \cos 35°$

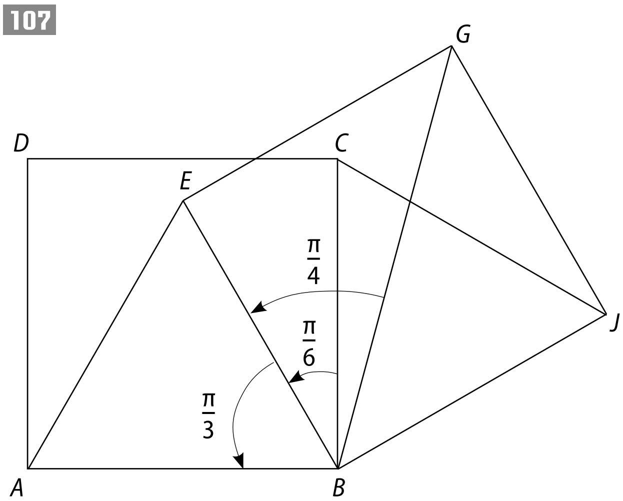
$LG^2 \approx (38{,}66 + 53{,}5)^2 + 54{,}4^2 - 2 \times (38{,}66 + 53{,}5) \times 54{,}4 \cos 35°$

$LG^2 \approx 3\,239{,}2$

$LG \approx 57$ m.

La distance entre la lionne et la gazelle est d'environ 57 m. La distance entre la lionne et le scientifique le plus proche est $LS_1 \approx 52$ m.

107



a. On commence par déterminer quelques longueurs (par la propriété de Pythagore) et quelques mesures d'angles utiles pour la suite.

$AC = BD = BG = \sqrt{2}$; mes $\widehat{ABE} = \dfrac{\pi}{3}$; mes $\widehat{ABD} = \dfrac{\pi}{4}$ donc mes $\widehat{DBE} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$;

de même mes $\widehat{GBC} = \dfrac{\pi}{12}$ et comme mes $\widehat{EBC} = \dfrac{\pi}{6}$, on en déduit que mes $\widehat{DBG} = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BG} &= (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}).\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BG} \\
&= -\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BG} \\
&= -BD \times BG \times \cos \widehat{BG} + BE \times BG \times \cos \widehat{EBG} \\
&= -\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{3} + 1 \times \sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} \\
&= -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Donc $(DE) \perp (BG)$

b. De plus, [EJ] et [BG] sont les diagonales du carré $BJGE$, donc $(EJ) \perp (BG)$.

Ainsi, (DE) et (EJ) sont parallèles, mais comme elles ont un point commun, elles sont confondues : D, E, J sont donc alignés.

108 **a.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$= (\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})$

$= 3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG}+\vec{0}$

$= 3\overrightarrow{OG}$ (car G est le centre de gravité du triangle ABC).

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ (d'après la règle du parallélogramme) donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{OA'}$.

b. D'après le **a.**, $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{OA'}$, donc

$3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{OA'}$.

Or, $(HA) \perp (BC)$ car (HA) est la hauteur issue de A, et $(OA') \perp (BC)$ car (OA') est la médiatrice de $[BC]$, donc les vecteurs $\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OH}-3\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

c. En procédant comme au **a.**, on peut montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{OB'}$ puis que $3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{HB}-2\overrightarrow{OB'}$ et enfin que $\overrightarrow{OH}-3\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Ainsi, $\begin{cases} (\overrightarrow{OH}-3\overrightarrow{OG}).\overrightarrow{BC} = 0 \\ (\overrightarrow{OH}-3\overrightarrow{OG}).\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

donc $\overrightarrow{OH}-3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ (car il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires).

Finalement, $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Donc, les points O, G et H sont alignés.

d. De $\overrightarrow{OH}-3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$, on déduit que $\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{OA'} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

109 **1. a.** $CD^2 - CB^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

• $KD^2 = AD^2 + AK^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{4}\times 2\right)^2 = \frac{13}{4}$;

$KB^2 = \left(\frac{1}{4}\times 2\right)^2 = \frac{1}{4}$ donc $KD^2 - KB^2 = \frac{13}{4} - \frac{1}{4} = 3$.

b. $MD^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB})$

$= (\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DB}).\overrightarrow{BD}$

$= 2\,\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}^2$

$= 2\,\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD} - BD^2$.

c. $MD^2 - MB^2 = 3 \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD} - BD^2 = 3$

$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD} = -3 + BD^2$

$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD} = 3 + 2^2 + 1^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD} = 4$.

d. On cherche l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BD} = 4$.

On note H le projeté orthogonal de M sur (BD) :

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{BD} = 4 \Leftrightarrow \overline{HD}\times\overline{BD} = 4 \Leftrightarrow HD = \frac{4}{BD} \Leftrightarrow HD = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

L'ensemble de ces points M est donc la droite (Δ) perpendiculaire à (BD), passant par H.

Or, d'après le **a.**, $C \in (\Delta)$ et $K \in (\Delta)$, donc $(\Delta) = (KC)$ et $(KC) \perp (BD)$.

2. On note I le milieu de $[AB]$. Le repère (A, I, D) est orthonormé. Dans ce repère, $\overrightarrow{KC}\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $\overrightarrow{BD}(-2\,;\,1)$.

Donc $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\times(-2) + 1\times 1 = 0$.

Ainsi, $(KC) \perp (BD)$.

5 Équations de droites et de cercles

Activités d'introduction

1 Équation cartésienne d'une droite

1. a. $\overrightarrow{AB}(-3\,;2)$.

b. $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

c. $\overrightarrow{AM}\,(x-1\,;y-2)$.
$M \in (AB) \Leftrightarrow -3\,(y-2)-2\,(x-1)=0 \Leftrightarrow -2x-3y+8=0$.

2. a. $-2x_D-3y_D+8=-8+8=0$ donc $D \in (AB)$.
$-2x_E-3y_E+8=-12+6+8=2\neq 0$ donc $E \notin (AB)$.

b. $\overrightarrow{DE}\,(2\,;-2)$ est un vecteur directeur de (DE).

$\overrightarrow{DM}\,(x-4\,;y)$

$$\begin{aligned} M \in (DE) &\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \text{ et } \overrightarrow{DE} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow 2y-(-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow 2y+2(x-4)=0 \\ &\Leftrightarrow 2x+2y-8=0 \Leftrightarrow x+y-4=0 \end{aligned}$$

2 Ensemble de points vérifiant une équation

a. $3x_A-2y_A+4=0 \Leftrightarrow -6-2y_A+4=0$
$\Leftrightarrow -2y_A-2=0 \Leftrightarrow y_A=-1$.

De même, $y_B=2$, $y_C=5$ et $y_D=8$.

b. On constate que les points A, B, C et D sont alignés.

c. $E(-4\,;-4)$. Il est aligné avec A, B, C et D.

2. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $3x-2y+4=0$ est une droite.

3 Représentation paramétrique d'une droite

2. a. Pour $t=0$, $M(1\,;-2)$.

b. $\overrightarrow{AM}\,(x-1\,;y+2)$ d'où $\overrightarrow{AM}\,(2t\,;-3t)$ et $\overrightarrow{AM}=t\vec{v}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et que M appartient à la droite passant par A et dirigée par $\vec{v}$.

4 Équation cartésienne d'un cercle

a. $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow IM=3 \Leftrightarrow IM^2=9$.

b. $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow IM^2=9 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Savoir-faire

3 $\overrightarrow{OA}\,(-2\,;1)$ est un vecteur directeur de la droite (OA). Donc une équation de (OA) est de la forme $1x-(-2)\,y+c=0$, $x+2y+c=0$.

$O \in (OA)$, donc $x_O+2y_O+c=0$, $0+0+c=0$ et $c=0$.

Une équation de (OA) est $x+2y=0$.

$\overrightarrow{AB}\,(5\,;-3)$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Donc une équation de (AB) est de la forme :
$-3x-5y+c=0$.
$A \in (AB)$, donc $-3x_A-5y_A+c=0$, c'est-à-dire :
$6-5+c=0$ et $c=-1$.

Une équation de (AB) est $-3x-5y-1=0$.

4 $M(x\,;y)$ désigne un point quelconque du plan ainsi, $\overrightarrow{AM}\,(x+3\,;y-1)$.

M appartient à la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}\,(3\,;-1)$ si et seulement si dét$(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})=0$.

$$\begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -1(x+3)-3(y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow -x-3y=0.$$

7 **a.** $\overrightarrow{EF}(8\,;4)$ et $\overrightarrow{CD}(3\,;-8)$.

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CD}=8\times 3+4(-8)=24-32=-8\neq 0$ donc (EF) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

b. $\vec{v}(4\,;-1)$ est un vecteur directeur de (d') or $(d)\,//\,(d')$ donc $\vec{v}(4\,;-1)$ est un vecteur directeur de (d).

Une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=3-t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

8 **a.** $I\left(\dfrac{-2+2}{2}\,;\dfrac{-3-1}{2}\right)$, c'est-à-dire $I\,(0\,;-2)$.

$\overrightarrow{CI}\,(-1\,;-4)$ est un vecteur directeur de la médiane (CI).

$$\begin{aligned} M(x\,;y) \in (CI) &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CI})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix}=0 \\ &\Leftrightarrow -4(x-1)-(-1)(y-2)=0 \\ &\Leftrightarrow -4x+4+y-2=0 \\ &\Leftrightarrow -4x+y+2=0. \end{aligned}$$

b. $-4x_D+y_D+2=-12+10+2=0$, donc $D \in (CI)$.

11 **a.** Les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont $I(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2})$ et $CI^2 = (\frac{1}{2} - 1)^2 + (\frac{3}{2} - 0)^2$

$$= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Une équation cartésienne du cercle de centre C et de rayon CI est $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = \frac{5}{2}$, c'est-à-dire $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{5}{2}$ ou encore $x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0$.

b. $\overrightarrow{AM}(x + 3\ ;\ y - 2)$ et $\overrightarrow{CM}(x - 1\ ;\ y)$.

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) + (y - 2)\ y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0.$

12 **a.** $x^2 + y^2 + 4x - 10y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 10y = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 29.$

C'est l'équation du cercle de centre $A(-2\ ;\ 5)$ et de rayon $\sqrt{29}$.

b. $x^2 + y^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{5}{4}.$

C'est l'équation du cercle de centre $B(-\frac{1}{2}\ ;\ 0)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c. $x^2 + y^2 + 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 9 + y^2 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = -1.$

Ce n'est pas l'équation d'un cercle car $-1 < 0$.

Exercices d'entraînement

13 **a.** $A(0\ ;\ 3)$, $\vec{u}(1\ ;\ -1)$. **b.** $A(1\ ;\ -1)$, $\vec{u}(1\ ;\ 2)$.

14 $A(2\ ;\ 1)$, $\vec{u}(5\ ;\ 2)$.

15 $A(2\ ;\ 0)$, $\vec{j}(0\ ;\ 1)$.

16 $y_A = y_B = 1$ donc une équation de (AB) est $y = 1$.
$x_A = x_C = 2$ donc une équation de (AC) est $x = 2$.

$\overrightarrow{OC}(2\ ;\ -2)$ est un vecteur directeur de (OC) donc une équation cartésienne de (OC) est de la forme :
$-2x - 2y + c = 0$.

$O(0\ ;\ 0) \in (OC)$ donc $-2 \times 0 - 2 \times 0 + c = 0$, c'est-à-dire $c = 0$. Une équation cartésienne de (OC) est $-2x - 2y = 0$ et, en simplifiant, $x + y = 0$.

17 **a.** $\overrightarrow{AB}(5\ ;\ -2)$ est un vecteur directeur de (AB) donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme $2x + 5y + c = 0$. Or $2x_A + 5y_A + c = 0$ et $c = 3$ donc une équation de (AB) est $2x + 5y + 3 = 0$.

Une équation de (BC) est $x = 1$ car $x_B = x_C = 1$.

b. $I\left(-\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$. Une équation de (BI) est $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y + 2 = 0$.

c. $\overrightarrow{AC}(5\ ;\ -3)$ est un vecteur perpendiculaire à la hauteur (d) issue de B du triangle ABC donc $\vec{u}(3\ ;\ 5)$ est un vecteur directeur de (d) et une équation de (d) est $5x - 3y - 8 = 0$.

d. Les coordonnées du milieu, J, de $[AB]$ sont $(-\frac{3}{2}\ ;\ 0)$.
$\overrightarrow{AB}(5\ ;\ -2)$ est un vecteur perpendiculaire à la médiatrice, une équation de (d') est $5x - 2y + \frac{5}{2} = 0$.

18 -1, 2 et $\frac{1}{2}$ sont respectivement les coefficients directeurs de (d_1), (d_2) et (d_3) qui ont donc pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1(1\ ;\ -1)$, $\vec{u}_2(1\ ;\ 2)$ et $\vec{u}_3(1\ ;\ \frac{1}{2})$.
2, -1 et -2 sont les ordonnées à l'origine respectives de (d_1), (d_2) et (d_3) qui ont donc pour équations réduites respectives $y = -x + 2$, $y = 2x - 1$ et $y = \frac{1}{2}x - 2$.

19 **a.** Une équation de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ peut être écrite sous la forme $x + 2y + c = 0$, or $x_A + 2x_A + c = 0$ d'où $-3 + 2 + c = O$ et $c = 1$. Une équation de cette droite est $x + 2y + 1 = 0$.

b. $\overrightarrow{BC}(1\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur de la droite (BC).
Une équation de (BC) peut être écrite sous la forme $-x - y + c = 0$, or $-x_B - y_B + c = 0$ d'où $c = 2$.
Une équation de (BC) est $-x - y + 2 = 0$.

c. Une équation cartésienne de la droite passant par $C(3\ ;\ -1)$ et parallèle à l'axe des abscisses est $y = -1$.

d. $x = 3$.

20 **a.** $\overrightarrow{BC}(2\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de la droite (BC) donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de la droite passant par A et parallèle à (BC), donc une équation de cette dernière est de la forme $-x + 2y + c = 0$. Or $-x_A + 2y_A + c = 0$, d'où $c = 0$.
Une équation de la droite passant par A et parallèle à (BC) est $-x + 2y = 0$.

b. $\overrightarrow{BC}(2\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de (BC). Or le repère est orthonormé donc $\vec{u}(-1\ ;\ 2)$ est un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}(2\ ;\ 1)$ donc $\vec{u}(-1\ ;\ 2)$ est un vecteur directeur de la médiatrice du segment [BC].

Le milieu I de [BC] a pour coordonnées $I\left(\frac{1+3}{2}; \frac{0-1}{2}\right)$, $I\left(2\ ; -\frac{1}{2}\right)$.

Une équation de la médiatrice de [BC] est de la forme $-2x - y + c = 0$, or $-2x_I - y_I + c = 0$, d'où $c = \frac{7}{2}$.

Une équation de la médiatrice de [BC] est :

$-2x - y + \frac{7}{2} = 0$.

21 **a.** $\vec{u}(-1\ ;-1)$ **b.** $\vec{i}(1\ ;0)$ **c.** $\vec{i}(1\ ;0)$

d. $\vec{j}(0\ ;1)$ **e.** $\vec{u}(1\ ;1)$ **f.** $\vec{u}(-3\ ;1)$.

22 Une équation de la droite passant par le point A et de coefficient directeur 3 est de la forme $y = 3x + P$. Or $y_A = 3x_A + P$; $y_A = 3x_A + P$ d'où $2 = -15 + P$ et $P = 17$.

Une équation de la droite passant par A et de coefficient directeur 3 est $y = 3x + 17$.

23 Les coordonnées du point d'intersection de (d) avec l'axe des abscisses sont les solutions du système

$$\begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Les coordonnées du point d'intersection de (d) avec l'axe des ordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x - 5y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

24 L'équation réduite de (AB) est $y = -2$ car $y_A = y_B = -2$.

$\overrightarrow{AD}(2\ ;\ 3)$. Une équation cartésienne de (AD) est de la forme $3x - 2y + c = 0$ or $3x_A - 2y_A + c = 0$, $c = -1$ donc $3x - 2y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de (AD).

De même on trouve $2x - 5y + 3 = 0$ et $5x + y - 33 = 0$ comme équations respectives de (DC) et (BC).

25 **a.** $y = -5x + 2$ et $y = \frac{1}{4}x - 1$ sont respectivement les équations réduites de (d) et (d') qui s'écrivent aussi sous la forme $5x + y - 2 = 0$ et $-\frac{1}{4}x + y + 1 = 0$.

b. $5x_A + y_A - 2 = -20 + 5 - 2 = -17 \neq 0$ donc $A \notin (d)$.

$-\frac{1}{4}x_A + y_A + 1 = 1 + 5 + 1 = 7 \neq 0$ donc $A \notin (d')$.

$5x_B + y_B - 2 = 1000 + 50 - 2 = 1048 \neq 0$ donc $B \notin (d)$.

$-\frac{1}{4}x_B + y_B + 1 = -50 + 50 + 1 = 1 \neq 0$ donc $B \notin (d')$.

$5x_C + y_C - 2 = -50 + 199 - 2 = 147 \neq 0$ donc $C \notin (d)$.

$-\frac{1}{4}x_C + y_C + 1 = \frac{10}{4} + 199 + 1 = 202{,}5 \neq 0$ donc $C \notin (d')$.

$5x_D + y_D - 2 = 150 - 10 - 2 = 138 \neq 0$ donc $D \notin (d)$.

$-\frac{1}{4}x_D + y_D + 1 = -\frac{15}{2} - 10 + 1 = -\frac{33}{2} \neq 0$ donc $D \notin (d')$.

26 **a.** $\overrightarrow{BC}(-6\ ;2)$, $\overrightarrow{AC}(-6\ ;-2)$.

b. $\overrightarrow{BC}(-6\ ;\ 2)$ est un vecteur directeur de (BC) or le repère est orthonormé donc $\vec{u}(-2\ ;-6)$ est un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la médiatrice de [BC].

Le milieu I de [BC] a pour coordonnées $I(0\ ;0)$.

Une équation de la médiatrice de [BC] est de la forme $6x - 2y + c = 0$ or $6x_I - 2y_I + c = 0$ donc $c = 0$.

Une équation de la médiatrice de [BC] est $6x - 2y = 0$ et, après simplification, $3x - y = 0$.

Une équation de la médiatrice de [AC] est $2x - 6y + 12 = 0$ et, après simplification, $x - 3y + 6 = 0$.

Une équation de la médiatrice de [AB] est $y = 1$.

c. $y_C = 1$ donc C appartient à la médiatrice de [AB] donc $CA = CB$ et le triangle ABC est isocèle en C.

Le point A n'appartient pas à la médiatrice de [BC] car $3x_A - y_A \neq 0$, donc $AB \neq AC$ et le triangle ABC n'est pas équilatéral.

27 **a.** $\overrightarrow{AB}(2\ ;-3)$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Une équation de (AB) est de la forme $3x + 2y + c = 0$ or $3x_B + 2y_B + c = 0$ donc $c = -1$.

Une équation de (AB) est $3x + 2y - 1 = 0$.

Les coordonnées de C sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ d'où } C\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right).$$

Les coordonnées de D sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ d'où } D\left(\frac{1}{3}\ ;0\right).$$

b. Les coordonnées du point H sont $\left(-\frac{1}{3}\ ;1\right)$.

c. La droite (Δ) passant par E et perpendiculaire à (AB) a pour équation $-2x + 3y + 1 = 0$.

Les coordonnées du point G cherché sont donc solutions du système $\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ -2x + 3y + 1 = 0. \end{cases}$

Après calculs, on trouve $G\left(\frac{5}{13}; \frac{-1}{13}\right)$.

28 **a.** Pour tout nombre réel k on a :

$(3+k)x_A + 2ky_A + 6 = -2(3+k) + 2k + 6$
$= -6 - 2k + 2k + 6 = 0$ donc $A \in (D_k)$.

b. $\vec{u}_k(-2k\,;\,3+k)$ est un vecteur directeur de (D_k) et $\vec{v}(1\,;\,-3)$ est un vecteur directeur de (d).

(D_k) et (d) sont parallèles si et seulement si $\vec{u}_k$ et $\vec{v}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}_k\,;\,\vec{v}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2k & 1 \\ 3+k & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(-2k) - 1(3+k) = 0$$
$$\Leftrightarrow 6k - 3 - k = 0 \Leftrightarrow 5k = 3$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{5}.$$

29 **a.** $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $\overrightarrow{AB}(7\,;\,-2)$ est un vecteur directeur de (AB).

(AB) : $\begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c. $\vec{i}(1\,;\,0)$ est un vecteur directeur de la droite passant par A et parallèle à l'axe des abscisses, qui a donc comme représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

d. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

30 **a.** $M(-3\,;\,0) \in (d)$. $\vec{u}(5\,;\,1)$ est un vecteur directeur de (d).

b. $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

31 **a.** $A(2\,;\,-1)$, $B(-2\,;\,2)$, $C(6\,;\,-4)$ sont trois points de (d) obtenus respectivement pour $t = 0$, $t = 1$ et $t = -1$.

b. $\vec{u}(-4\,;\,3)$, $\vec{v}(4\,;\,-3)$ et $\vec{w}(-8\,;\,6)$ sont trois vecteurs directeurs de (d).

32 **a.** $\overrightarrow{BC}(4\,;\,-3)$ est un vecteur directeur de (BC) et de (d).

Une représentation paramétrique de (d) est :

$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $D \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 + 4t \\ y_D = -1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} = 2 + 4t \\ \frac{7}{3} = -1 - 3t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{10}{3} = 4t \\ \frac{10}{3} = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{10}{12} \\ t = -\frac{10}{9} \end{cases}$

or $-\frac{10}{12} \neq -\frac{10}{9}$ donc $D \notin (d)$.

c. $E \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 1u = 2 + 4t \\ -10 = -1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 4t \\ -9 = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t = 3$ donc $E \in (d)$.

33 $A \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 2 + t \\ 30 = -2 + 20t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = \frac{8}{5} \end{cases}$

donc $A \notin$ (d).

$A \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -10 + 4t' \\ 30 = 74 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 5/4 \\ t' = -44 \end{cases}$

donc $A \notin (d')$.

$B \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2 + t \\ 78 = -2 + 20t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t = 4$ donc $B \in (d)$.

$B \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -10 + 4t' \\ 78 = 74 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 4 \\ t' = 4 \end{cases}$

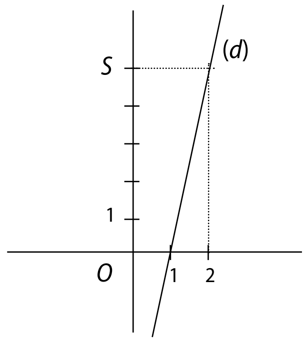
$\Leftrightarrow t' = 4$ donc $B \in (d')$.

De même $C(20\,;\,79) \notin (d)$ et $C(20\,;\,79) \notin (d')$.

34 **a.** $C(1\,;\,0) \in (d)$ et $\vec{u}(1\,;\,5)$ est un vecteur directeur de (d).

b. $A \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 + t \\ -5 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ donc } A \in (d) \\ t = -1 \end{cases}$

$B \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + t \\ 4 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ donc } B \notin (d) \\ t = \frac{4}{5} \end{cases}$



35 $\vec{u}(1\,;\,3)$ est un vecteur directeur de (d) donc une représentation paramétrique de (d) est

$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

36 $\vec{j}(0\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de (d) donc une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

37 $\vec{u}(1\ ;\ 3)$ est un vecteur directeur de (d) et $A(0\ ;-1) \in (d)$ donc une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

De même (d') : $\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 5 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

38 $A(0\ ;2) \in (d)$ et $\vec{u}(2\ ;1)$ est un vecteur directeur de (d) donc une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

$A(0\ ;2) \in (d')$ et $\vec{v}(-1\ ;-3)$ est un vecteur directeur de (d') donc une représentation paramétrique de (d') est :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

39 **a.** Les coordonnées du point d'intersection de (d) avec l'axe des abscisses sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -2 + 3t \\ y = 5 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 + 3t \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 13 \\ t = 5 \end{cases}$$

donc $A(13\ ;\ 0)$ est le point d'intersection de (d) avec l'axe des abscisses.

b. Les coordonnées de B sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -2 + 3t \\ y = 5 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ t = \dfrac{1}{3} \\ y = 5 - \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{14}{3} \end{cases}$$

d'où $B\left(1\ ;\ \dfrac{14}{3}\right)$.

40 **a.** Un vecteur directeur de (d) est $\vec{v}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\ ;\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, c'est-à-dire $\vec{v}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\dfrac{1}{2}\right)$ donc une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2}t \end{cases} \text{ ou, plus simplement, } \begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{v}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\ ;\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ c'est-à $\vec{v}\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \text{ ou, plus simplement, } \begin{cases} x = -t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

41 $\vec{u}(1\ ;-3)$ est un vecteur directeur de la première droite.

• $A(-5\ ;2)$ est un point de la deuxième droite associé à $t = 1$ et qui admet $\vec{v}(-2\ ;6)$ pour vecteur directeur.

$\vec{v} = -2\,\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et les deux droites sont parallèles.

Les deux droites sont parallèles et ont le point A en commun donc elles sont confondues.

42 $A(2\ ;\ 5)$ est un point et $\vec{u}(-1\ ;\ 2)$ est un vecteur directeur de la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

$A(2\ ;5)$ est un point et $\vec{v}(1\ ;-2)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = -2x + 9$.

$\vec{v} = -\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et les deux droites sont parallèles.

Les deux droites sont parallèles et ont le point A en commun, donc elles sont confondues.

43 **a.** $\vec{u}(1\ ;3)$ est un vecteur directeur de (d) et de (d') donc (d) et (d') sont parallèles.

b. $\vec{u}\left(1\ ;\dfrac{1}{4}\right)$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{u}(1\ ;-4)$ est un vecteur directeur de (d').

Or $\vec{u}\cdot\vec{u}' = 1 \times 1 + \dfrac{1}{4}(-4) = 1 - 1 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux et les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.

c. $\vec{i}(1\ ;0)$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{u}(1\ ;5)$ est un vecteur directeur de (d').

Or $\det(\vec{i}\ ;\ \vec{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

et $\vec{i}\cdot\vec{u} = 1 \times 1 + 0 \times 5 = 1 \neq 0$

donc (d) et (d') ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.

d. $\vec{u}(-1\ ;\ 2)$ et $\vec{u}'(4\ ;\ 2)$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (d) et (d').

Or $\vec{u}\cdot\vec{u}' = -1 \times 4 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux et (d) et (d') sont perpendiculaires.

44 $\vec{u}(2\ ;-3)$, $\vec{u}'(-6\ ;9)$ et $\vec{u}''(3\ ;2)$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (d), (d') et (d'').

$\vec{u}' = -3\,\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires et les droites (d) et (d') sont parallèles.

$\vec{u}\,.\,\vec{u}'' = 2 \times 3 + (-3) \times 2 = 6 - 6 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}''$ sont orthogonaux et les droites (d) et (d'') sont perpendiculaires.

45 $\vec{u}(1\ ;\ 2)$ et $\vec{u}'(3\ ;\ -2)$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (d) et (d'),

or $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{u}') = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 3 \times 2 = -2 - 6 = -8 \neq 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires et les droites (d) et (d') sont sécantes. Les coordonnées du point d'intersection de (d) avec (d') sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ x = -2 + 3t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ t = -2 + 3t' \\ -1 + 2t = 5 - 2t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ t = -2 + 3t' \\ -1 + 2\,(-2 + 3t') = 5 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ t = -2 + 3t' \\ t' = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ y = \dfrac{5}{2} \\ t = \dfrac{7}{4} \\ t' = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$ donc le point d'intersection de (d) et (d') est $A\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{5}{2}\right)$.

46 **a.** $\vec{u}(3\ ;\ 1)$ et $\vec{u}'(-5\ ;\ -2)$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (d) et (d').

Or $\text{dét}(\vec{u}\,;\ \vec{u}') = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) - (-5) \times 1 = -6 + 5$
$= -1 \neq 0$,

donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires et les droites (d) et (d') sont sécantes.

b. $\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ -2(3y - 1) + 5y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ -y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

donc $A(5\ ;2)$ est le point d'intersection de (d) et (d').

47 $\vec{u}(3\ ;2)$ est un vecteur directeur de (d).

a. $\vec{u}_1(4\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de la droite (d_1) d'équation $x - 4y + 3 = 0$.

Or $\text{dét}(\vec{u}\,;\ \vec{u}_1) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}_1$ ne sont pas colinéaires et les droites (d) et (d') sont sécantes.

b. $\vec{u}_2(-9\ ;-6)$ est un vecteur directeur de la droite (d_2) d'équation $-6x + 9y = 0$ or $\vec{u}_2 = -3\,\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires et les droites (d) et (d_2) sont parallèles. De plus $O(0\ ;0) \in (d_2)$ et $O(0\ ;0) \notin (d)$ donc (d) et (d_2) sont strictement parallèles.

c. $\vec{u}_3\left(-\dfrac{3}{5}\ ;-\dfrac{2}{5}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (d_3) d'équation $-\dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5}y - 1 = 0$.

Or $\text{dét}(\vec{u}\,;\ \vec{u}_3) = 3\left(-\dfrac{2}{5}\right) - 2\left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{6}{5} + \dfrac{6}{5} = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}_3$ sont colinéaires et les droites (d) et (d_3) sont parallèles.

De plus le point $A\left(0\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$ appartient aux deux droites (d) et (d_3) donc (d) et (d_3) sont confondues.

d. $\vec{u}_4\left(1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (d_4) d'équation $y = \dfrac{3}{2}x - 1$.

Or $\text{dét}(\vec{u}\,;\ \vec{u}_4) = 3 \times \dfrac{3}{2} - 2 \times 1 = \dfrac{9}{2} - 2 = \dfrac{5}{2} \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}_4$ ne sont pas colinéaires et les droites (d) et (d_4) sont sécantes.

e. $\vec{u}_5(4\ ;-6)$ est un vecteur directeur de la droite (d_5) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -6t \end{cases}$.

Or $\text{dét}(\vec{u}\,;\ \vec{u}_5) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -18 - 8 = -26 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}_5$ ne sont pas colinéaires et les droites (d) et (d_5) sont sécantes.

f. $\vec{u}_6(-4\ ;6)$ est un vecteur directeur de la droite (d_6) :

$\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 1 + 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Or $\text{dét}(\vec{u}\,;\ \vec{u}_6) \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}_6$ ne sont pas colinéaires et les droites (d) et (d_6) sont sécantes.

48 **a.** $\vec{u}(3\ ;2)$ et $\vec{u}'(-6\ ;-4)$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (d) et (d'). Or $\vec{u}' = -2\,\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires et les droites (d) et (d') sont parallèles.

b. $A(1\ ;1)$ est un point de la droite (d') et
$2x_A - 3y_A + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$ donc $A(1\ ;1) \in (d)$.
(d) et (d') ont le point $A(1\ ;1)$ en commun et elles sont parallèles (d'après **a**), donc elles sont confondues.

49 **a.** Pour $t = 0$ on a $\begin{cases} x = -1 + 3 \times 0 = -1 \\ y = 2 + k \times 0 = 2 \end{cases}$

donc le point $A(-1\ ;2)$ est commun à toutes les droites (d_k).

b. $\vec{u}_k(3\,;k)$ est un vecteur directeur de (d_k) donc $\vec{u}_1(3\,;1)$ et $\vec{u}_2(3\,;2)$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2).
Or $\det(\vec{u}_1\,;\vec{u}_2)=3\times 2-3\times 1=6-3\neq 0$ donc (d_1) et (d_2) sont sécantes et d'après **a**, leur point d'intersection est $A(-1\,;2)$.

c. $\vec{u}_k$ et $\vec{u}_{k'}$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (d_k) et $(d_{k'})$.

Or $\det(\vec{u}_k\,;\vec{u}_{k'})=\begin{vmatrix}3 & 3\\ k & k'\end{vmatrix}=3k'-3k=3(k-k')$ donc, si $k\neq k'$,alors $\det(\vec{u}_k\,;\,\vec{u}_{k'})\neq 0$, $\vec{u}_k$ et $\vec{u}_{k'}$ ne sont pas colinéaires et les droites (d_k) et $(d_{k'})$ sont sécantes.

50 $(x-(-1))^2+(y-2)^2=3^2$, $(x+1)^2+(y-2)^2=9$
et, après développement, on trouve :
$x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

51 $0^2+0^2+6\times 0-0=0$ donc $O\in(\mathscr{C})$.
$(-1)^2+(-2)^2+6(-1)-(-2)=1+4-6+2=6\neq 0$ donc $A\notin(\mathscr{C})$.

$0^2+1^2+6\times 0+(-1)=1-1=0$ donc $B\in(\mathscr{C})$.

52 $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $C(-3\,;0)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

53 **a.** $x^2+y^2-6x+2y=0 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2+2y=0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1=0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=10$.

b. $x^2+y^2-6x+2y=0$ est une équation du cercle de centre $C(3\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

54 $x^2+y^2+4x-8y+1=0 \Leftrightarrow x^2+4x+y^2-8y+1=0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2-4+(y-4)^2-16+1=0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=19$.
Donc $x^2+y^2+4x-8y+1=0$ est une équation du cercle de centre $C(-2\,;4)$ et de rayon $\sqrt{19}$.

55 **a.** $AB^2=(1-(-1))^2+(-2-1)^2=2^2+(-3)^2=4+9=13$.
Une équation du cercle de centre A et de rayon AB est $(x-(-1))^2+(y-1)^2=13$, $(x+1)^2+(y-1)^2=13$ et, après développement, on trouve :
$x^2+y^2+2x-2y-11=0$.

b. $M(x\,;y)$ est un point du cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$,

$\Leftrightarrow (x-(-1))(x-1)+(y-1)(y-(-2))=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)+(y-1)\,(y+2)=0$

$\Leftrightarrow x^2-1+y^2+2y-y-2=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+y-3=0$.

56 **a.** L'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation $x^2+y^2=3$ est le cercle de centre $O\,(0\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

b. $x^2+y^2-2x+6y=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9=0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=10$.

C'est une équation du cercle de centre $C(1\,;-3)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

c. $x^2+y^2-3x+y-7=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-7=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{38}{4}=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{38}{4}$.

C'est une équation du cercle de centre $C\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{38}{4}}=\frac{\sqrt{38}}{2}$.

d. $(x+3)^2+y^2+3=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=-3$, or $(x+3)^2+y^2\geqslant 0$ et $-3<0$ donc l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant $(x+3)^2+y^2=-3$ est vide.

57 **a.** $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $O(0\,;0)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

b. $\vec{u}(-2\,;1)$ est un vecteur directeur de (d), or le repère est orthonormé donc $\vec{v}(1\,;2)$ est un vecteur normal de (d).

La droite (d') passant par le centre $O(0\,;0)$ de $(\mathscr{C})$ et perpendiculaire à (d) admet $\vec{v}(1\,;2)$ pour vecteur directeur.

Une équation de (d') est $y=2x$ car elle passe par l'origine du repère et admet 2 pour coefficient directeur.

• Les coordonnées du point d'intersection de (d) avec (d') sont les solutions du système

$\begin{cases} y=2x \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x+4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$

(d) et (d') se coupent au point $A(1\,;2)$.

• $A\in(\mathscr{C})$ car $x_A^2+y_A^2=1^2+2^2=5$.

• (d) est perpendiculaire à (OA) et passe par le point A appartenant à $(\mathscr{C})$ donc (d) est tangente à $(\mathscr{C})$ en A.

c. Le point $B(-1\,;-2)$ est le point de $(\mathscr{C})$ diamétralement opposé à $A(1\,;2)$.

La tangente (T) à $(\mathscr{C})$ parallèle (et non confondue) avec (d) est la droite passant par $B(-1\,;-2)$ et parallèle à (d). Donc une équation de (T) est de la forme

$-x - 2y + c = 0$. Or $-x_B - 2y_B + c = 0 \Leftrightarrow 5 + c = 0$ $\Leftrightarrow c = -5$, donc une équation de (T) est $-x - 2y - 5 = 0$ et, après simplification, $x + 2y + 5 = 0$.

58 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ donc $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $B(1\,;-2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

• $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y = 0$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ donc $(\mathscr{C}')$ est le cercle de centre $A(3\,;2)$ et de rayon 2.

• $AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ et la somme des rayons de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ est égale à $2 + \sqrt{5} \neq 4\sqrt{2}$ donc $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ ne sont pas tangents.

b. $y_A = 2$ donc la distance du point A à l'axe des abscisses est 2 et égale au rayon du cercle $(\mathscr{C}')$, donc l'axe des abscisses est tangent à $(\mathscr{C})$.

59 **a.** Le triangle OAB est rectangle en O donc le cercle circonscrit au triangle OAB est le cercle de diamètre $[AB]$.

Les coordonnées du milieu, I, de $[AB]$ sont :

$\left(\dfrac{3+0}{2}\,;\dfrac{0+4}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\,;2\right)$.

$AB = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Le cercle circonscrit au triangle OAB est le cercle de centre $I\left(\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$ et de rayon égal à $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{5}{2}$ qui a pour équation $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$ et, après développement, $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

b. Le triangle OAB est rectangle en O donc sa médiane issue de O a pour longueur $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{5}{2}$. Donc une équation du cercle de centre O et passant par le milieu de $[AB]$ est $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{25}{4}$.

60 **a.** $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow AM^2 = r^2$ (car AM et r sont positifs) $\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

b. $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (d'après **a.**)
$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

61 $x^2 + y^2 - 6x + 3y + k = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 3y + k = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} - k = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = 9 + \dfrac{9}{4} - k$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{45}{4} + k$
donc $x^2 + y^2 - 6x + 3y + k = 0$ est une équation d'un cercle si et seulement si $\dfrac{45}{4} - k \geqslant 0$ donc si et seulement si $k \leqslant \dfrac{45}{4}$.

62 a. $\overrightarrow{AC}(3\,;\,1)$, $\overrightarrow{CB}(2\,;\,2)$, $L\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ est le milieu de $[AC]$ et $J(2\,;\,0)$ celui de $[CB]$. La médiatrice de $[AC]$ est la droite passant par $L\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;3)$ (car $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$) donc d'équation de la forme $-3x + y + c = 0$. Or $-3x_L + y_L + c = 0$, $c = -1$, donc d'équation $-3x + y - 1 = 0$.

De même, une équation de la médiatrice de $[CB]$ est $2x + 2y - 4 = 0$ et, après simplification, $x + y - 2 = 0$. Les coordonnées du point d'intersection, I, des deux précédentes médiatrices sont les solutions du système :

$$\begin{cases} -3x + y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ x + 3x + 1 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7}{4} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

donc I a pour coordonnées $I\left(\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{7}{4}\right)$.

$$IA^2 = \left(-2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(-\frac{9}{4}\right)^2 + \left(-\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} + \frac{49}{16} = \frac{130}{16}.$$

Une équation du cercle circonscrit au triangle ABC qui a pour centre $I\left(\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{7}{4}\right)$ et pour rayon IA est :

$\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{4}\right)^2 = \dfrac{130}{16}$, et après développement,

$x^2 + y^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{2}y - 5 = 0$.

b. $x_D^2 + y_D^2 - \dfrac{1}{2}x_D - \dfrac{7}{2}y_D - 5 = 4 + 9 + 1 - \dfrac{21}{2} - 5 = -\dfrac{3}{2} \neq 0$ donc D n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle ABC et les points A, B, C et D ne sont pas cocycliques.

Faire le point

63 $2x - 3y - 6 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d_2).

$y = 2x$ est l'équation réduite de la droite (d_1).

$AB(3 ; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (d_2).

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique de (d_2).

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ est une équation cartésienne du cercle de centre $C(-1 ; 2)$ et de rayon 2.

64 L'équation $0x + 0y + 1 = 0$ n'est pas celle d'une droite. En effet $0x + 0y + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ qui n'admet pas de solution.

• L'équation $x^2 + y^2 = -1$ n'est pas une équation d'un cercle. En effet $x^2 + y^2 \geqslant 0$ et $-1 < 0$ donc l'équation $x^2 + y^2 = -1$ n'admet pas de solution.

Une équation de l'axe des ordonnées est $x = 0$ qui ne s'écrit pas sous la forme $y = mx + p$.

65 Les solutions du système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases}$

sont les coordonnées des points communs à (d) et (d') ; donc si (d) et (d') sont confondues, alors le système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

admet une infinité de solutions.

66 La droite d'équation $y = -3x - 10$ passe par $A(4 ; 2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; -3)$, donc elle est associée à (d'').

• $-10x + 5y + 15 = 0 \Leftrightarrow 5y = 10x - 15 \Leftrightarrow y = 2x - 3$ donc l'équation $-10x + 5y + 15 = 0$ est associée à (d).

• $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

est une représentation paramétrique de la droite passant par $B(1 ; -1)$, qui appartient à (d), et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2)$ qui est aussi un vecteur directeur de (d).

Donc $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, est associée à (d).

• $\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = -1 - 2t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$

est une représentation paramétrique de la droite passant par $C(-1 ; -1)$, qui appartient à (d') et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; -2)$ et qui est aussi un vecteur directeur de (d') car $\vec{v}(-2 ; 4)(= -2\,\vec{u})$ est un vecteur directeur de (d'). Donc le système est associé à (d').

• $4x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = -4x - 6 \Leftrightarrow y = -2x - 3$.

Donc l'équation $y = 2x - 3$ est associée à (d').

• $-6x - 2y - 20 = 0 \Leftrightarrow -2y = 6x + 20 \Leftrightarrow y = -3x - 10$ qui est associée à (d'').

67 **a.** Les coordonnées du milieu, I, de $[BC]$ sont $I\left(2 ; \frac{5}{2}\right)$.

Donc la médiane issue de A du triangle ABC est la droite passant par $A(-3 ; 1)$ et qui a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AI}\left(5 ; \frac{3}{2}\right)$, donc une représentation paramétrique de cette médiane est :

$$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + \frac{3}{2}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Les coordonnées du milieu, J, de $[AB]$ sont $J\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

• $\overrightarrow{AB}(7 ; 1)$ donc $\vec{u}(1 ; -7)$ est un vecteur directeur de la médiatrice de $[AB]$. Une équation de cette médiatrice est de la forme $7x + y + c = 0$.

Or $7x_J + y_J + c = 0 \Rightarrow \frac{7}{2} + \frac{3}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -5$; donc une équation de la médiatrice de $[AB]$ est $7x + y - 5 = 0$.

c. $\overrightarrow{AC}(3 ; 2)$ est un vecteur perpendiculaire à la hauteur issue de B du triangle ABC donc $\vec{v}(2 ; -3)$ est un vecteur directeur de cette hauteur qui admet donc une équation de la forme $3x + 2y + c = 0$.

Or $3x_B + 2y_B + c = 0 \Rightarrow 3 \times 4 + 2 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -16$ donc une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC est $3x + 2y - 16 = 0$.

68 $\overrightarrow{AB}(-4 ; 10)$ est un vecteur perpendiculaire à la droite (d) passant par C et perpendiculaire à (AB) donc $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(2 ; -5)$ est aussi un vecteur normal à (d) et $\vec{u}(5 ; 2)$ est un vecteur directeur de cette dernière.

• Équation de (d) en utilisant le produit scalaire :

$M(x ; y) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \vec{v}(2 ; -5) \Leftrightarrow 2(x - 0) - 5(y - 3) = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 5y + 15 = 0$.

• Équation de (d) en utilisant le déterminant :

$M(x ; y) \in (d) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{CM} ; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 0 & 5 \\ y - 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 5(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 15 = 0$.

• Recherche d'une équation de la forme $ax + by + c = 0$: $\vec{u}(5\ ;\ 2)$ est un vecteur directeur de (d). Une équation de (d) est de la forme $-2x + 5y + c = 0$.
Or $-2x_C + 5y_C + c = 0 \Leftrightarrow c = -15$; donc une équation de (d) est $-2x + 5y - 15 = 0$.

69 **1. a.** Une équation cartésienne du cercle de centre $C(a\ ;\ b)$ et de rayon r est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

b. A et B désignent deux points donnés du plan et $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$. On se donne un point $M(x\ ;y)$ quelconque du plan et on exprime les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ en fonction de x et y, puis on écrit une condition nécessaire et suffisante à l'appartenance de M à $(\mathscr{C})$: $M(x\ ;\ y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$
$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

2. a. Une équation de $(\mathscr{C})$ est $(x - x_A)^2 + (y - y_B)^2 = (\sqrt{5})^2$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

b. $M(x\ ;\ y)$ est un point quelconque du plan ;
$\overrightarrow{BM}(x + 1\ ;\ y - 3)$ et $\overrightarrow{CM}(x - 4\ ;\ y - 2)$,

$$\begin{aligned} M(x\ ;\ y) \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) + (y - 3)(y - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + x - 4 + y^2 - 2y - 3y + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 5y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Se tester

70 à **73** Voir Manuel de l'élève page 258.

Exercices d'approfondissement

74 **a.**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 9 \text{ donc } C(3\ ;\ 0) \end{aligned}$$

est le centre de $(\mathscr{C})$.

b. $B \in (\mathscr{C})$ donc $x^2_B + y^2_B - 6x_B = 0$;
$1^2 + y^2_B - 6 \times 1 = 0$; $y^2_B = 5$; $y_B = -\sqrt{5}$.

c. $\overrightarrow{CB}(-3\ ;\ -\sqrt{5})$ est un vecteur orthogonal à la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en B donc $\vec{u}(\sqrt{5}\ ;\ -3)$ est un vecteur directeur de (T).

d. Une équation cartésienne de (T) est de la forme $3x + \sqrt{5}y + c = 0$;
or $3x_B + \sqrt{5}y_B + c = 0 \Leftrightarrow 3 + \sqrt{5}(-\sqrt{5}) + c = 0$
$\Leftrightarrow 3 - 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = 2$ donc une équation de (T) est $3x + \sqrt{5}y + 2 = 0$

75 $\overrightarrow{AB}(3\ ;\ -1)$. Une équation de (AB) est de la forme $x + 3y + c = 0$ or $x_A + 3y_A + c = 0 \Leftrightarrow -1 + 9 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$ donc une équation de (AB) est $x + 3y - 8 = 0$.

Les coordonnées du point d'intersection de (AB) avec (d) sont les solutions de :

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \\ x + 3(-2x + 3) - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 3 \\ -5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{13}{5} \\ x = \dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

donc les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (AB) sont $\left(\dfrac{1}{5}\ ;\ \dfrac{13}{5}\right)$.

76 **1.** $(\mathscr{C}_0) : x^2 + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 1$ donc $(\mathscr{C}_0)$ est le cercle de centre $A(0\ ;\ -1)$ et de rayon 1.

$$\begin{aligned} (\mathscr{C}_1) : x^2 + y^2 - 2x = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1 \text{ donc } (\mathscr{C}_1) \text{ est} \end{aligned}$$

le cercle de centre $B(1\ ;\ 0)$ et de rayon 1.

2. a. $x^2 + y^2 - 2mx - 2(m - 1)\, y + 2m^2 - 2m = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + y^2 - 2(m - 1)y + 2m^2 - 2m = 0$
$\Leftrightarrow (x - m)^2 - m^2 + (y - (m - 1))^2 - (m - 1)^2 + 2m^2 - 2m = 0$
$\Leftrightarrow (x - m)^2 + (y - (m - 1))^2 = (m - 1)^2 - m^2 + 2m$
$\Leftrightarrow (x - m)^2 + (y - (m - 1))^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 2m$
$\Leftrightarrow (x - m)^2 + (y - (m - 1))^2 = 1$ or $1 \geqslant 0$ donc, pour tout nombre réel m, $(\mathscr{C}_m)$ est un cercle.

b. D'après **a.** $C_m(m\ ;\ m - 1)$ et $R_m = 1$.

3. Les coordonnées $(x\ ;y)$ du centre C_m de $(\mathscr{C}_m)$ sont telles que :

$$\begin{cases} x = m \\ y = m - 1 \end{cases} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

qui est une représentation paramétrique de la droite passant par $I(0\ ;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;1)$.

4. $C_m = K \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -4 \end{cases}$

donc il n'existe pas de valeur de m pour laquelle le centre de $(\mathscr{C}_m)$ est $K(-3\ ;-5)$.

77 **a.** $\overrightarrow{AB}(-5\ ;1)$, $\overrightarrow{AM}(x-3\ ;y+1)$.

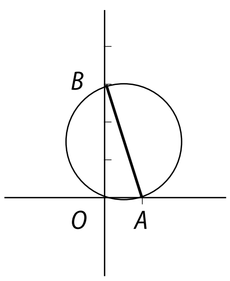
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = m &\Leftrightarrow -5(x-3) + 1(y+1) = m \\ &\Leftrightarrow -5x + 15 + y + 1 = m \\ &\Leftrightarrow -5x + y + 16 - m = 0. \end{aligned}$$

b. L'ensemble des points $M(x\ ;y)$ dont les coordonnées vérifient (E_0) est la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).

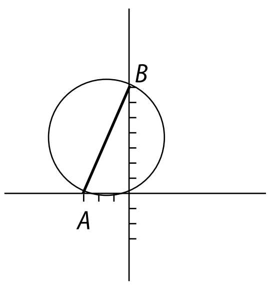
78 **1.** $M(x\ ;y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-a)(x-0) + (y-0)(y-b) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - by = 0. \end{aligned}$$

2. a.



b.



3. $0^2 - a \times 0 + 0^2 - b \times 0 = 0$ donc O appartient à $(\mathscr{C})$ pour tous a et b.

Pour tous a et b tels que $a + b = 4$,

$$\begin{aligned} 2^2 - a \times 2 + 2^2 - b \times 2 &= 4 - 2a + 4 - 2b \\ &= 8 - 2(a+b) = 8 - 2 \times 4 = 0 \end{aligned}$$

donc $C(2\ ;2)$ appartient à $(\mathscr{C})$ pour tous a et b tels que $a + b = 4$.

4. $x^2 - ax + y^2 - by = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + \left(y - \dfrac{b}{2}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{4}$ donc $I\left(\dfrac{a}{2}\ ;\dfrac{b}{2}\right)$ est le centre de $(\mathscr{C})$.

Lorsque a et b varient tels que $a + b = 4$ on a :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{a}{2} \\ y_I = \dfrac{4-a}{2} \end{cases} \text{avec } a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_I = \dfrac{1}{2}a \\ y_I = 2 - \dfrac{1}{2}a \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

donc l'ensemble des centres des cercles $(\mathscr{C})$ lorsque a et b varient est la droite passant par $J(0\ ;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2}\ ;-\dfrac{1}{2}\right)$ ou $\vec{v}(1\ ;-1)$.

5. $CA = \sqrt{(a-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + 4}$.

$$\begin{aligned} CB = \sqrt{(0-2)^2 + (b-2)^2} &= \sqrt{4 + (4 - a - 2)^2} \\ &= \sqrt{4 + (2-a)^2} = \sqrt{4 + (a-2)^2} = CA. \end{aligned}$$

Or C appartient au cercle de diamètre $[AB]$ donc le triangle ABC est rectangle en C et son aire est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}CA \times CB = \frac{1}{2}CA^2 &= \frac{1}{2}[(a-2)^2 + 4] \\ &= \frac{1}{2}(a^2 - 4a + 4 + 4) = \frac{1}{2}a^2 - 2a + 4. \end{aligned}$$

L'aire du triangle rectangle OAB est égale à :

$$\frac{1}{2}OA \times OB = \frac{1}{2}ab.$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(4-a) = -\frac{1}{2}a^2 + 2a.$$

L'aire du quadrilatère est égale à :

$$\frac{1}{2}a^2 - 2a + 4 - \frac{1}{2}a^2 + 2a = 4$$

79 L'expression de la fonction f convertissant les degrés Celsius en degrés Fahrenheit est de la forme $f(x) = ax + b$. On sait qu'elle vérifie :

$$\begin{cases} f(0) = 32 \\ f(100) = 212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 32 \\ 100a + b = 212 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 32 \\ 100a = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 32 \\ a = \dfrac{180}{100} = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

donc $f(x) = \dfrac{9}{5}x + 32$.

Les deux thermomètres indiquent la même valeur pour une température x en degrés Celsius vérifiant

$$\begin{aligned} f(x) = x \Leftrightarrow \frac{9}{5}x + 32 = x \Leftrightarrow \frac{9}{5}x - x = 32 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x = 32 \\ \Leftrightarrow x = 32 \times \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = 40. \end{aligned}$$

80 **a.** Conjecture : $(\mathscr{C})$ et (d) ont un seul point commun.

b. $M(x\ ;y)$ est un point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (d) si et seulement si :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3{,}55 - 2t \\ x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3{,}55 - 2t \\ (3+t)^2 + (-3{,}55-2t)^2 + 4(3+t) + 6(-3{,}55-2t) - 5 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation est équivalente à : $t^2 + 6t + 9 + 12{,}6025 + 14{,}1t + 4t^2 + 12 + 4t - 21{,}3 - 12t - 5 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 12{,}1t + 7{,}3025 = 0$. En représentant graphiquement la fonction $f \mapsto 5x^2 + 12{,}1x + 7{,}3025$, on observe que sa courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.

Donc ($\mathscr{C}$) et (d) ont deux points d'intersections et la conjecture est fausse.

81 **1. a.** $OM = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{1} = 1$ donc M appartient au cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 1.

b. Si $N \in (\mathscr{C})$ alors $ON = 1$ et il existe $t \in]-\pi ; \pi]$ tel que mes $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{ON}}) = t$ par conséquent on aurait :

$$\begin{cases} x_N = ON \cos t = \cos t \\ y_N = ON \sin t = \sin t. \end{cases}$$

2. D'après **1. a.** et **1. b.**, l'ensemble des points $M(x ; y)$ vérifiant (E) est le cercle de centre O et de rayon 1.

82 **1. a.** Une équation de ($\mathscr{C}$) est $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

b. $\overrightarrow{AB}(-10 ; -5)$ est un vecteur normal à (d_3) donc $\vec{u}(5 ; -10)$ est un vecteur directeur à (d_3), or $\vec{v}(1 ; -2)$ est colinéaire à $\vec{u}(5 ; -10)$.

Une équation de (d_3) est de la forme $2x + y + c = 0$ vérifiant $2x_C + y_C + c = 0$, $4 + 1 + c = 0$, $c = -5$ donc une équation cartésienne de (d_3) est $2x + y - 5 = 0$.

c. Une équation de (AB) est $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Les coordonnées du système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ 2x + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{5}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

donc (AB) et (d_3) se coupent en $K(1 ; 3)$.

$K \in (\mathscr{C})$. En effet $x_K^2 + y_K^2 - 4x_K - 2x_K = 1 + 9 - 4 - 6 = 0$.

(AB) est perpendiculaire à (d_3) en un point K appartenant à ($\mathscr{C}$) donc (AB) est tangente à ($\mathscr{C}$) en $K(1 ; 3)$.

2. $I(1 ; -1) \in (\mathscr{C})$. En effet

$x_I^2 + y_I^2 - 4x_I - 2y_I = 1 + 1 - 4 + 2 = 0$.

La tangente (d_1) à ($\mathscr{C}$) en I a pour vecteur normal $\overrightarrow{CI}(-1 ; -2)$ donc a pour vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1)$. Une équation cartésienne de (d_1) est de la forme $x + 2y + c = 0$ or $x_I + 2y_I + c = 0$, $c = 1$ donc une équation de (d_1) est $x + 2y + 1 = 0$.

$B \in (d_1)$. En effet $x_B + 2y_B + 1 = -3 + 2 + 1 = 0$.

3. $D \in (\mathscr{C})$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = -3 \times 2 + (-6)(-1) = -6 + 6 = 0$ donc (AB) est la tangente à ($\mathscr{C}$) en D.

4. $\vec{u}_1(-2 ; 1)$ et $\overrightarrow{AD}(-3 ; -6)$ sont respectivement deux vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2) et $\vec{u}_1.\overrightarrow{AD} = -2(-3) + (-6) \times 1 = 6 - 6 = 0$; donc (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires et, par conséquent, le triangle AJB est rectangle en J.

Une équation du cercle circonscrit au triangle rectangle AJB est celle du cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [AB] :

$$\begin{aligned} M(x ; y) \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-7)(x+3) + (y-6)(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 7x - 21 + y^2 - y - 6y + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 7y - 15 = 0. \end{aligned}$$

83 **1.** $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{v}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4t \\ y - 3 = 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

donc le lieu de la particule P_1 est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. La position M de la particule P_2 à l'instant t vérifie

$\overrightarrow{BM} = t\,\vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = t \\ y - 1 = 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

donc (d_2) est la droite de représentation paramétrique

$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. $\vec{v}_1(4 ; 2)$ et $\vec{v}_2(1 ; 2)$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2).

Or dét$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 1 \times 2 = 8 - 2 = 6 \neq 0$

donc (d_1) et (d_2) sont sécantes.

$M(x ; y)$ est le point d'intersection de (d_1) et (d_2) si et seulement si :

$$\begin{cases} 1 + 4t = 3 + t' \\ 3 + 2t = 1 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 4t = t' \\ 2 + 2t - 2t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 + 4t \\ 2 + 2t - 2(-2 + 4t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 + 4t \\ -6t + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 + 4 \times 1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \Leftrightarrow \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

donc (d_1) et (d_2) se coupent en $C(5 ; 5)$.

b. Les particules P_1 et P_2 sont en $C(5\,;5)$ respectivement aux instants 1 et 2 donc il ne peut pas y avoir collision.

3. $B'(a\ ;\ b)$ est la position de P_2 à l'instant $t = 0$. La position de P_2 à l'instant t est $\begin{cases} x = a + t \\ y = b + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Il y a collision entre les particules P_1 et P_2 si et seulement si :

$$\begin{cases} a + t = 1 + 4t \\ b + 2t = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + 3t \\ b = 3 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

donc il y a collision si à l'instant $t = 0$ la particule P_2 se trouve sur la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

84 **a.** $M(m\,;m)$, $I(0\,;m)$, $J(1\,;m)$, $K(m\,;0)$, $L(m\,;1)$.

b. $\overrightarrow{IL}(m\,;1-m)$, $\overrightarrow{JK}(m-1\,;-m)$.

(IL) et (JK) sont parallèles si et seulement si $\text{dét}(\overrightarrow{IL}\,;\overrightarrow{JK}) = 0$,

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & m-1 \\ 1-m & -m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m(-m) - (m-1)(1-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow -2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

c. Une représentation paramétrique :

• de (IL) est $\begin{cases} x = mt \\ y = m + (1-m)t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$;

• de (JK) est $\begin{cases} x = m + (m-1)t' \\ y = -mt' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Pour $m \neq \frac{1}{2}$, $M(x\,;y)$ est le point d'intersection de (IL) et (JK) si et seulement si : $\begin{cases} mt = m + (m-1)\,t' \\ m + (1-m)t = -mt' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \dfrac{m-1}{m}t' \\ m + (1-m)\,[1 + \dfrac{m-1}{m}t'] = -mt' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \dfrac{m-1}{m}t' \\ m + 1 - m + \dfrac{(1-m)(m-1)}{m}t' = -mt' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \dfrac{m-1}{m}t' \\ 1 = -\dfrac{(1-m)(m-1)}{m}t' - mt' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \dfrac{m-1}{m}t' \\ 1 = \dfrac{m^2 - 2m + 1)}{m}t' - \dfrac{m^2}{m}t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \dfrac{m-1}{m}t' \\ 1 = \dfrac{-2m+1}{m}t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \dfrac{m-1}{m}t' \\ t' = \dfrac{m}{-2m+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m + (m-1)\dfrac{m}{-2m+1} \\ y = -m\,\dfrac{m}{-2m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-m^2}{-2m+1} \\ y = \dfrac{-m^2}{-2m+1} \end{cases}$$

L'équation réduite de la droite (AC) est $y = x$ or les coordonnées du point, M, d'intersection de (IL) et (KJ) vérifient $y_M = x_M$, donc M appartient à (AC).

85 **1.** $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (-3) = 5t \\ y - 1 = 3t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $M(x\,;y)$.

a. Il s'agit de la demi-droite $[AB)$.

b. Il s'agit du segment $[AB]$.

c. Il s'agit de la demi-droite $(AB]$.

2. a. $[AI) = [AB)$. **b.** $[BI) = [BA)$.

c. Une représentation paramétrique de $[AI]$ est :

$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

d. Une représentation paramétrique de $[IB]$ est :

$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

86 **a.** $x^2 + y^2 - 2x - 2k = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2k = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2k + 1$.

Pour $k > -\frac{1}{2}$ on a $2k + 1 > 0$ donc $(\mathscr{C}_k)$ est le cercle de centre $C(1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{2k+1}$.

Pour $k = -\frac{1}{2}$ on a $2k + 1 = 0$ donc $(\mathscr{C}_k)$ est $\{C(1\,;0)\}$.

Pour $k < -\frac{1}{2}$ on a $2k + 1 < 0$ donc $(\mathscr{C}_k)$ est vide.

b. Si $k \neq k'$ alors $2k + 1 \neq 2k' + 1$ donc $(\mathscr{C}_k)$ et $(\mathscr{C}_{k'})$ sont deux cercles de même centre et de rayon différent, ils sont donc disjoints.

87 **1.** L'équation réduite de (d) est $y = 2x$.

Le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $C(-3\ ;\ 4)$ est : $CO = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ donc une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ est $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0.$

$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + (2x)^2 + 6x - 8 \times 2x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5x^2 - 10x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(5x - 10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}$

donc (d) et ($\mathscr{C}$) se coupent en $O(0 ; 0)$ et en $B(2 ; 4)$.

2. Intersection de ($\mathscr{C}$) avec l'axe des abscisses :

$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 6x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}$

donc les points d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec l'axe des abscisses sont $O(0 ; 0)$ et $D(-6 ; 0)$.

Intersection de ($\mathscr{C}$) avec l'axe des ordonnées :

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(y - 8) = 0 \end{cases}$

et on trouve les points $O(0 ; 0)$ et $E(0 ; 8)$.

3. a. $x^2_A + y^2_A + 6x_A - 8y_A = (-6)^2 + 8^2 + 6(-6) - 8 \times 8 = 36 + 64 - 36 - 64 = 0$

donc $A \in (\mathscr{C})$.

b. $\overrightarrow{CA}(-3 ; -4)$ est un vecteur orthogonal à la tangente (T) en A à ($\mathscr{C}$) donc $\vec{u}(4 ; -3)$ est un vecteur directeur de (T).

Une équation cartésienne de (T) est de la forme $3x + 4y + c = 0$.

Or $3x_A + 4y_A + c = 0 \Leftrightarrow -18 + c = 0 \Leftrightarrow c = 18$.

Donc une équation de (T) est $3x + 4y + 18 = 0$.

88 **a.** $\overrightarrow{AB}(2 ; 0)$, $\overrightarrow{AC}(1 ; \sqrt{3})$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}(3 ; \sqrt{3})$ est un vecteur directeur de la bissectrice (d) de l'angle $\widehat{BAC}$.

Une représentation paramétrique de (d) est

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = \sqrt{3}t. \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Le point, I, de (d) d'abscisse 5 a une ordonnée y vérifiant :

$\begin{cases} 1 + 3t = 5 \\ y = \sqrt{3}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases}$

I est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc il est à égale distance de (AB) et (AC), par conséquent le cercle de centre $I\left(5 ; \dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ et de rayon égal à la distance de I à (AB), égal à $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ est tangent à (AB) et à (AC). Ce cercle admet pour équation :

$(x - 5)^2 + \left(y - \dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - \dfrac{8}{3}\sqrt{3}y + \left(\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - \dfrac{8}{3}\sqrt{3}\,y + 25 = 0.$

c. L'intersection de ($\mathscr{C}$) avec (AB) est le point $D(5 ; 0)$.

Intersection de ($\mathscr{C}$) avec (AC) :

Une représentation paramétrique de (AC) est :

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ x^2 + y^2 - 10x - \dfrac{8}{3}\sqrt{3}y + 25 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ (1 + t)^2 + (\sqrt{3}t)^2 - 10(1 + t) - \dfrac{8}{3}\sqrt{3} \times \sqrt{3}t + 25 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ 4t^2 - 16t + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ t^2 - 4t + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \sqrt{3}t \\ (t - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2\sqrt{3} \\ t = 2 \end{cases}$

Donc l'intersection de ($\mathscr{C}$) avec (AC) est le point $E(3 ; 2\sqrt{3})$.

89 $\overrightarrow{BA}(3\,;4)$, $\overrightarrow{BC}(3\,;-4)$, $\overrightarrow{CA}(0\,;8)$.

$BA = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$, $BC = 5$ et $CA = 8$ donc les vecteurs $\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$, $\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\frac{1}{8}\overrightarrow{CA}$ ont la même norme 1 ; par conséquent les vecteurs $\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\left(\frac{6}{5}\,;0\right)$ et $\frac{1}{8}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}\left(\frac{-3}{5};\frac{9}{5}\right)$ sont respectivement des vecteurs directeurs des bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ et sont colinéaires respectivement à $\vec{u}(1\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;-3)$.

Une représentation paramétrique de la bissectrice de $\widehat{ACB}$ est $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -5-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

L'équation réduite de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ est $y = -1$.

Les coordonnées du point, I, intersection de ces deux bissectrices sont les solutions de :

$$\begin{cases} y=-1 \\ x = 3+t \\ y = -5-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x = 3+t \\ -1 = -5-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x = \frac{5}{3} \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

donc $I\left(\frac{5}{3};-1\right)$.

La distance du point $I\left(\frac{5}{3};-1\right)$ à la droite (AC) est égale à $3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$ (voir graphique).

Une équation du cercle inscrit dans le triangle ABC est

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}+y^2+2y+1=\frac{16}{9}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}x+2y+2=0.$$

90 **1.** $\overrightarrow{HM}\,.\,\vec{n} = (x_0-x_H)\,a+(y_0-y_H)\,b$

$= ax_0-ax_H+by_0-by_H$

$= ax_0+by_0-(\,ax_H+by_H)$

$= ax_0+by_0-(-c)$ car $ax_H+by_H+c=0$

puisque H appartient à (d).

Donc $\overrightarrow{HM}\,.\,\vec{n} = ax_0+by_0+c$.

2. $\overrightarrow{HM}.\vec{n} = \|\overrightarrow{HM}\| \times \|\vec{n}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{HM},\vec{n}})$ or $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{HM},\vec{n}})=1$ ou $\cos(\widehat{\overrightarrow{HM},\vec{n}})=-1$ et $|\cos(\widehat{\overrightarrow{HM},\vec{n}})|=1$. Par conséquent on a :

$|\overrightarrow{HM}.\vec{n}| = \|\overrightarrow{HM}\|\times\|\vec{n}\|\times\cos(\widehat{\overrightarrow{HM},\vec{n}}) = HM.\|\vec{n}\|$.

3. D'après **2.** on a $HM = \dfrac{\overrightarrow{HM}.\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ et, en utilisant le résultat du **1.**, on a $HM = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4. a. La distance de $M(-3\,;4)$ à la droite d'équation $2x-5y+1=0$ est égale à :

$$\frac{|2x_M-5y_M+1|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} = \frac{|-6-20+1|}{\sqrt{29}} = \frac{25}{\sqrt{29}} = \frac{25\sqrt{29}}{29}.$$

b. $x^2+y^2+4x-21=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-4+y^2-21=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=25$

donc le cercle $(\mathscr{C})$ est de centre $C(-2\,;0)$ et de rayon 5.

La distance de C à la droite d'équation $x+y-4=0$ est égale à $\dfrac{|x_C+y_C-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|-6|}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} \neq 5$ donc le cercle $(\mathscr{C})$ n'est pas tangent à la droite d'équation $y=-x+4$.

91 **a.** $\overrightarrow{AB}(-30\,;20)$. Une équation cartésienne de (AB) est de la forme $20x+30y+c=0$ or $20x_A+30y_A+c=0$ donne $c=-600$ donc une équation de (AB) est :

$20x+30y-600=0$.

La distance du centre C à la route est égale à :

$$\frac{|20\times 11+30\times 12-600|}{\sqrt{20^2+30^2}} = \frac{|-20|}{\sqrt{1\,300}} = \frac{20}{10\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Donc le rayon du stade doit être égal à :

$$\frac{2\sqrt{13}}{13}-0{,}05 = \frac{2\sqrt{13}-0{,}65}{13} \approx 0{,}505 \text{ km}.$$

b. La surface que le stade va occuper est égale à :

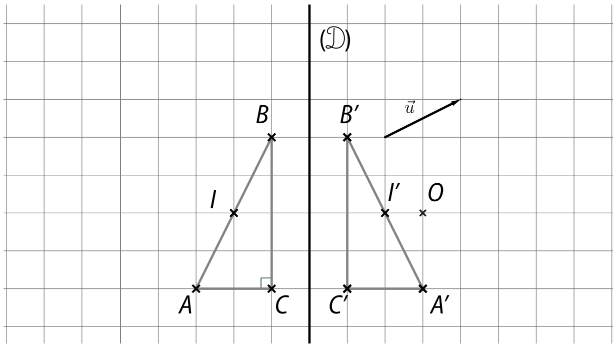
$\pi\left(\dfrac{2\sqrt{13}-0{,}65}{13}\right)^2$ km², soit environ 0,8 km².

6 Transformations du plan

Activités d'introduction

1 Observer pour conjecturer

1. et **2. a.**



b. On conjecture que :

• les points A', B' et I' sont alignés et que I' est le milieu de $[A'B']$;

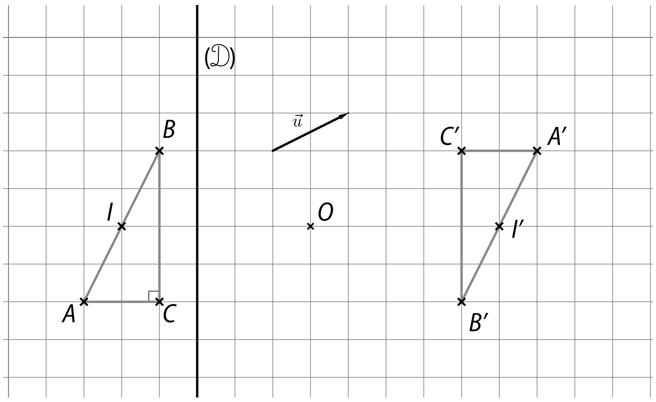
• les segments et leurs symétriques ont même longueur ;

• si elle est perpendiculaire à ($\mathcal{D}$), alors une droite est sa propre symétrique,
si elle est parallèle à ($\mathcal{D}$), alors une droite et sa droite symétrique sont parallèles,
sinon, une droite et sa droite symétrique sont sécantes en un point de ($\mathcal{D}$) ;

• $(A'B') \perp (B'C')$.

c. $\overrightarrow{A'B'}$ est le symétrique de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{A'C'}$ est le symétrique de $\overrightarrow{AC}$; $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ est le symétrique de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.
Par une symétrie orthogonale, un angle orienté a pour symétrique un angle orienté de mesure opposée.

3.



On conjecture que :

• les points A', B', I' sont alignés et que I' est le milieu de $[A'B']$;

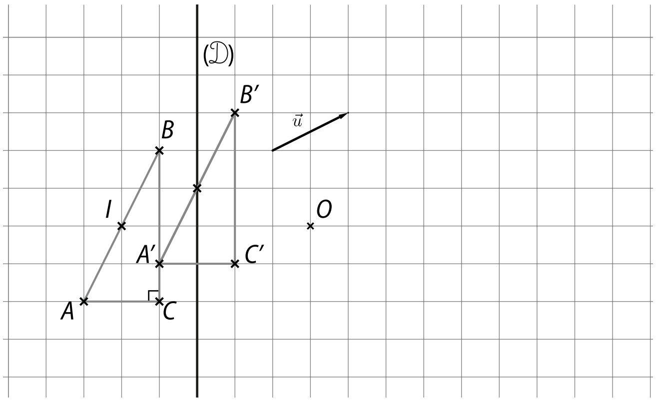
• les segments et leurs symétriques ont même longueur ;

• les droites et leurs symétriques sont parallèles ;

•$(A'B') \perp (B'C')$;

• par une symétrique centrale, un angle orienté a pour symétrique un angle orienté de même mesure.

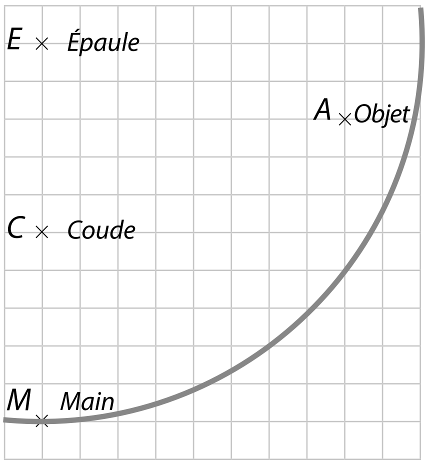
4.



On conjecture que :
- les points A', B', I' sont alignés et que I' est le milieu de $[A'B']$;
- les segments et leurs translatés ont même longueur ;
- les droites et leurs translatées sont parallèles ;
- $(A'B') \perp (B'C')$;
- par une translation, un angle orienté a pour translaté un angle orienté de même mesure.

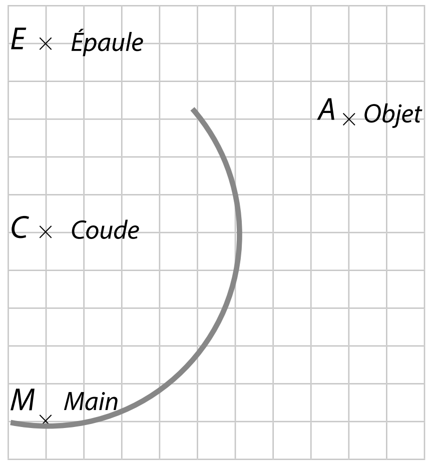
2 Le mouvement du robot

1. a. L'ensemble des lieux possibles pour la main du robot est l'arc de cercle gris.



b. Le robot ne peut saisir l'objet.

2. a. L'ensemble des lieux possibles pour la main du robot est l'arc de cercle gris.



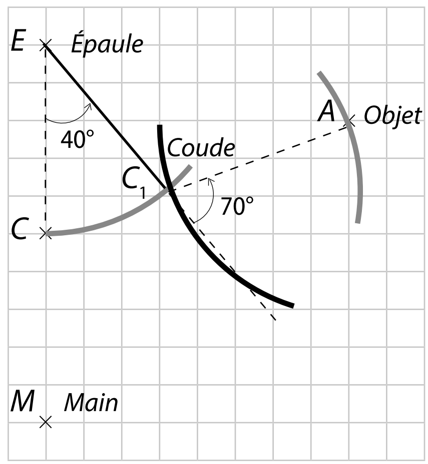
b. Le robot ne peut saisir l'objet.

3. a. À partir de l'objet, on trace un arc de cercle de rayon CM (en noir).

Puis, à partir de l'épaule, on trace un arc de cercle de rayon EC, il coupe l'arc bleu au point C_1 (en gris).

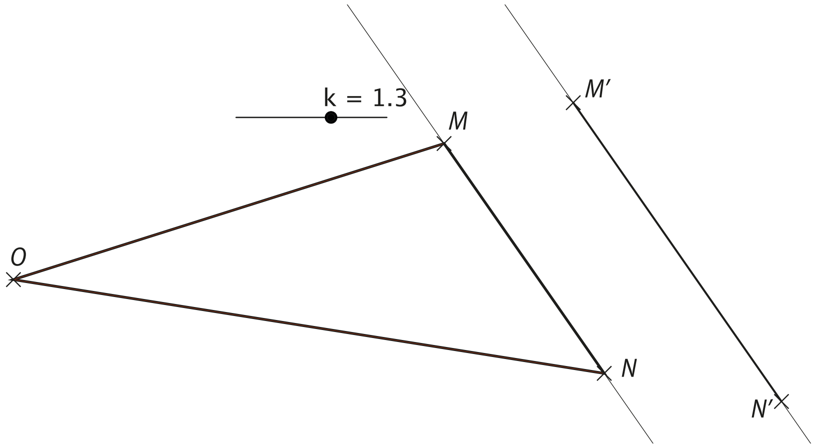
b. • La rotation autour de l'épaule a pour centre E et pour mesure d'angle $+40°$ environ ;

• La rotation autour du coude a pour centre C_1 et pour mesure d'angle $+110°$ environ.



3 Observer à l'aide d'un logiciel

1. a à **c.**



d. On conjecture que $(MN) \,//\, (M'N')$.

e. • Lorsque $k = 0$, les images de tous les points du plan sont égales à O.

• Lorsque $k = 1$, tous les points du plan sont leur propre image.

2. a. $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

b. $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$, donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{MO} + k\overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\overrightarrow{MN}$

c. • Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

• $M'N' = |k| \times MN$ d'après la propriété de Thalès.

En effet, $OM' = |k| \times OM$, $ON' = |k| \times ON$ et $(MN) \,//\, (M'N')$, donc $|k| = \dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{ON'}{ON} = \dfrac{M'N'}{MN}$.

4 Caractérisation d'une homothétie

1. a. • Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires, ainsi il existe un nombre réel k, non nul, tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

• Si une telle homothétie existe, son rapport est k.

b. On note h l'homothétie du rapport k qui transforme A en A',

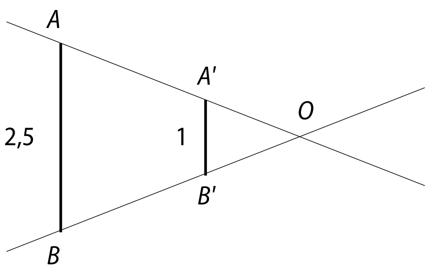
le point A' est unique et son centre noté O, est l'unique point tel que $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

le centre O et le rapport k sont uniques, donc h est unique.

c. $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. $\quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OB}$.

Or $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Ainsi, B' est l'image de B par h.

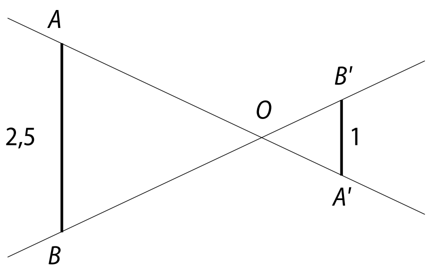
2. a.



h homothétie de centre O et de rapport

$k = \dfrac{1}{2{,}5} = 0{,}4$.

b.

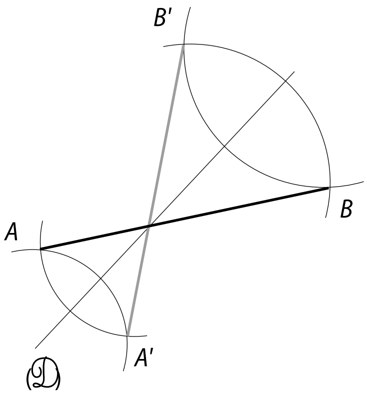


h homothétie de centre O et de rapport

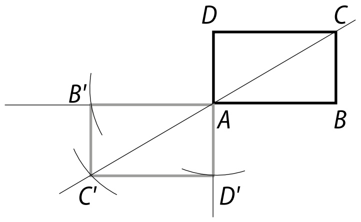
$k = -\dfrac{1}{2{,}5} = -0{,}4$.

Savoir-faire

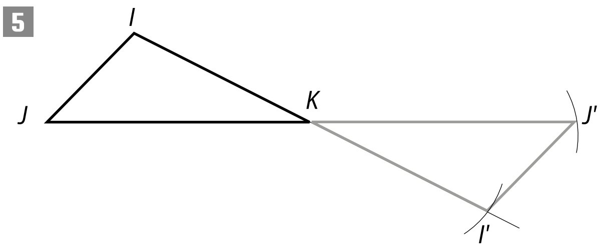
3



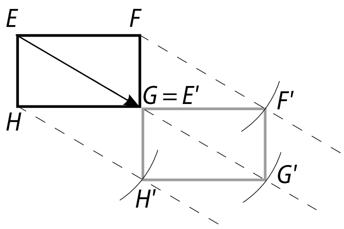
4



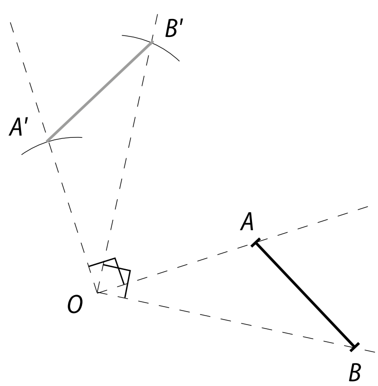
5



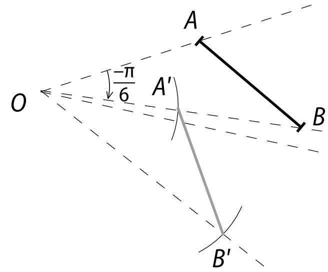
6



9 **1.** et **2.a.**



1. et **2. b.**



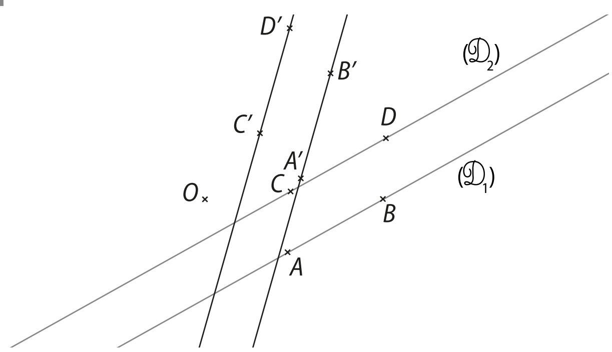
10 Une symétrie axiale (resp. une symétrie centrale ; resp. une translation) conserve l'alignement, or les points A, I, B sont alignés donc leurs images respectives A', I', B' sont alignées.

Une symétrie axiale (resp. une symétrie centrale ; reps. une translation) conserve les longueurs, donc $IA = I'A'$, $IB = I'B'$.

Or, I est le milieu de $[AB]$, donc $IA = IB$ d'où $I'A' = I'B'$.

Ainsi, puisque I', A', B' sont alignés, I' est le milieu de $[A'B']$.

11



On sait que $(\mathscr{D}_1) \,//\, (\mathscr{D}_2)$.

On place, comme sur le schéma quatre points A, B, C, D sur $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de sorte que $ABCD$ est un parallélogramme.

On note r la rotation et $A' = r(A)$, $B' = r(B)$, $C' = r(C)$ et $D' = r(D)$.

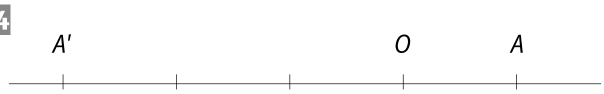
Une rotation conserve les longueurs donc $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$.

Or, $ABCD$ est un parallélogramme donc $AB = CD$ et $BC = DA$.

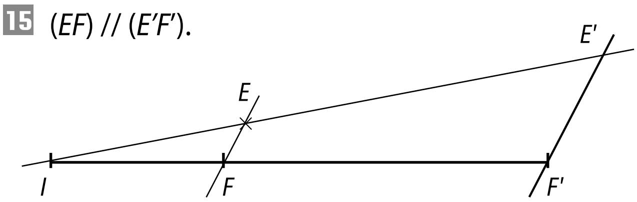
Ainsi, $A'B' = C'D'$ et $B'C' = D'A'$ donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Ainsi, les droites $(A'B')$ et $(C'D')$, images des droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ par la rotation, sont parallèles.

14

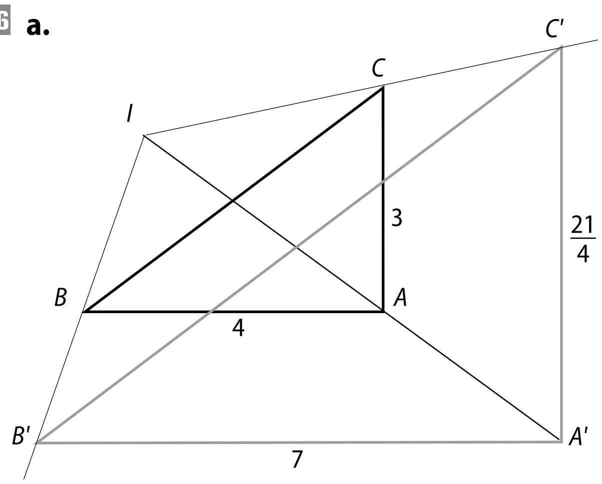


15 $(EF) \mathbin{//} (E'F')$.



E' est l'image de E par cette homothétie

16 **a.**



b. Une homothétie transforme un angle orienté en un angle orienté de même mesure, donc :

$\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}}) = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{2}$.

Donc le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'.

c. $\mathcal{A}(A'B'C') = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \mathcal{A}(ABC)$

$\mathcal{A}(A'B'C') = \frac{49}{16} \times \frac{3 \times 4}{2}$

$\mathcal{A}(A'B'C') = \frac{147}{8}$ cm^2.

Exercices d'entraînement

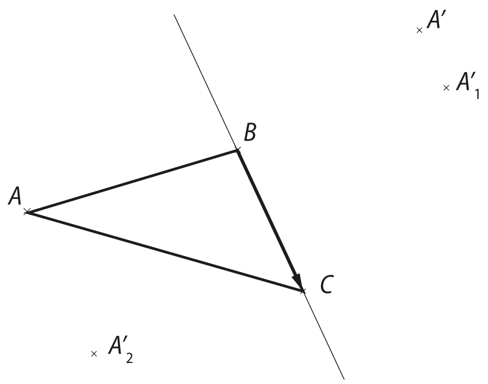
17 **a.** $s_{(ES)}(I) = Q$; $s_{(ES)}(P) = B$;
b. $s_M(I) = Q$; $s_M(P) = J$;
c. $t_{\overrightarrow{FD}}(I) = A$; $t_{\overrightarrow{FD}}(P) = L$.

18 **a.** La symétrie orthogonale d'axe (SH) ;

b. la symétrie centrale de centre M ;

c. la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$.

19

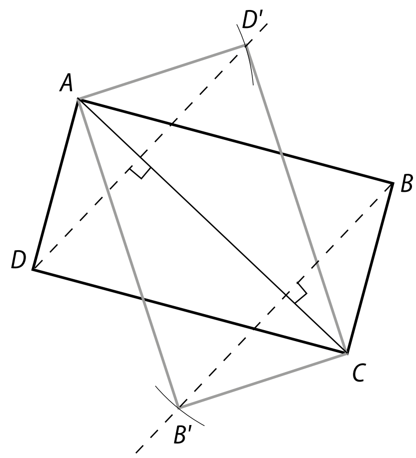


A' est l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe (BC) ;

A'_1 est l'image du point A par la symétrie centrale de centre B ;

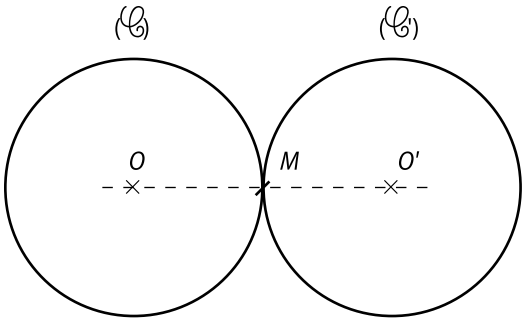
A'_2 est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

20 **a.**

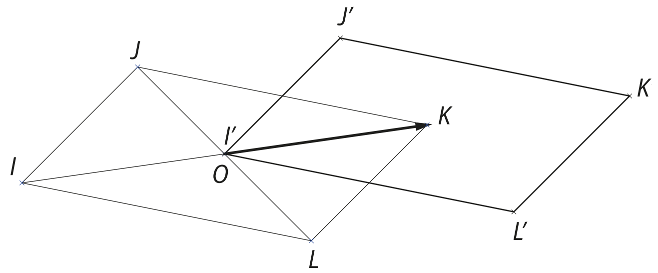


b. Si $ABCD$ est un carré alors son image par la symétrie orthogonale d'axe (AC) est le carré $ABCD$ lui-même.

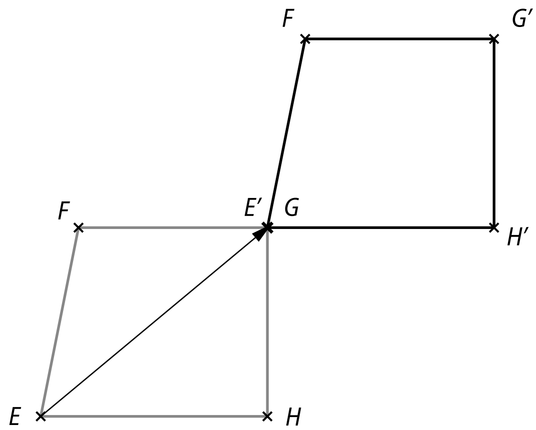
21



22



23



24 La symétrie orthogonale d'axe (*AC*) (ou (*BD*)) laisse le carré *ABCD* invariant.

La symétrie centrale de centrale le centre du carré *ABCD* laisse le carré *ABCD* invariant.

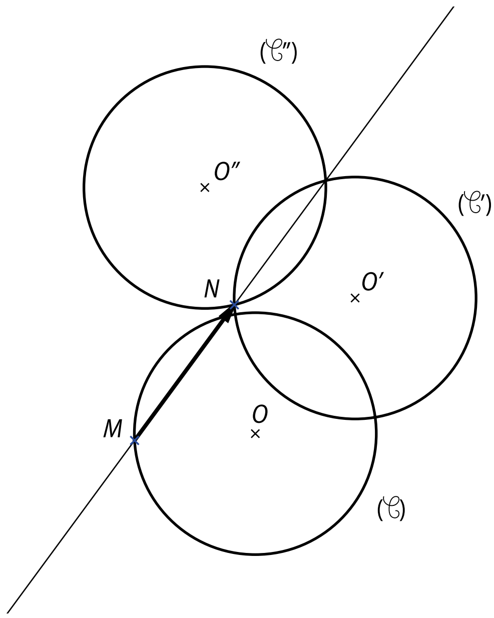
La symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [*EP*] (ou celle de [*EH*]) laisse le rectangle *EFGH* invariant.

La symétrie centrale de centre le centre du rectangle *EFGH* laisse le rectangle *EFGH* invariant.

La symétrie orthogonale d'axe toute droite qui passe par *I* laisse le cercle invariant.

La symétrie centrale de centre *I* laisse le cercle invariant.

25



26 $A'(3 ; 1)$, $B'(-1 ; 3)$, $C'(2 ; 5)$, $D'(4 ; 3)$.

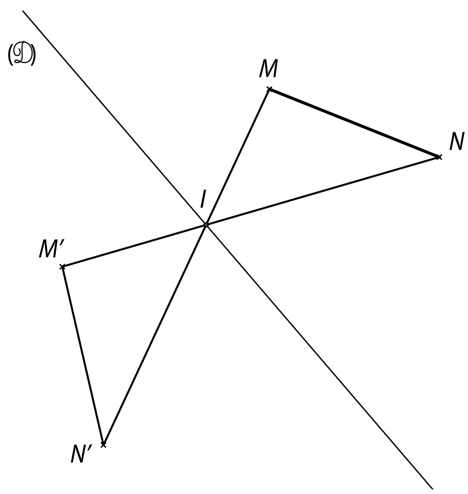
27 $A'(-1 ; 3)$, $B'(3 ; 1)$, $C'(0 ; -1)$, $D'(-2 ; 1)$.

28 $A'(-3, -3)$, $B'(1 ; -1)$, $C'(0 ; 7)$, $D'(-4 ; -1)$.

29 $A'(-1 ; 3)$, $B'(3 ; 5)$, $C'(0 ; 7)$, $D'(-2 ; 5)$.

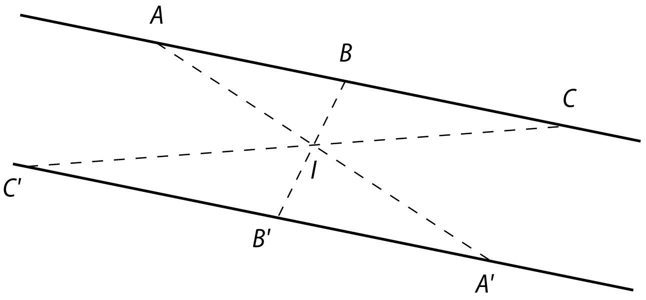
30 $A' = D'(4 ; 1)$, $B'(0 ; -1)$, $C'(3 ; -3)$, $D'(5 ; -1)$.

31 **1. a. b.**



2. On note $s_{(\mathscr{D})}$ la symétrie orthogonale d'axe ($\mathscr{D}$).
L'image de (MN') par $s_{(\mathscr{D})}$ est $(M'N)$ donc le point *I* d'intersection de ces deux droites vérifie $s_{(\mathscr{D})}(I) = I$, donc $I \in (\mathscr{D})$.
Or, ($\mathscr{D}$) est la médiatrice de $[MN']$ et de $[NN']$, donc $IM = IM'$ et $IN = IN'$, de plus mes $\widehat{MIN}$ = mes $\widehat{M'IN'}$.
Ainsi, les triangles *IMN* et *IM′N′* sont semblables et $MN = M'N'$.

32 **a.**



b. I est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$, donc $ACA'C'$ est un parallélogramme, donc $(A'C') \, // \, (AC)$.

I est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$, donc $ABA'B'$ est un parallélogramme, donc $(A'B') \, // \, (AB)$.

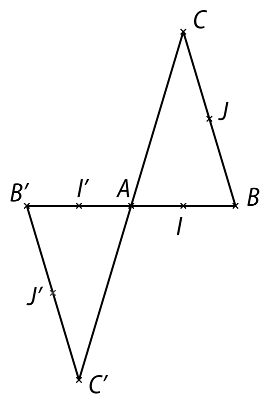
Or, $(AB) = (AC)$ donc $(A'B') \, // \, (AC)$ et comme $(A'B')$ et $(A'C')$ ont le point A' en commun, on en déduit que $(A'B') = (A'C')$ donc les points A', B', C' sont alignés.

33 L'aire du rectangle $EFGH$ est $EF \times EH$. La translation conserve les longueurs et les angles, donc l'image $E'F'G'H'$ du rectangle $EFGH$ est un rectangle.

Comme $E'F' = EF$ et que $E'H' = EH$, on en déduit que l'aire du rectangle $E'F'G'H'$ est, elle aussi, égale à $EF \times EH$.

34 La symétrie centrale conserve les angles donc elle transforme deux droites (par exemple (AB) et (AC)) perpendiculaires (c'est-à-dire telles que mes $\widehat{BAC} = 90°$) en deux droites $(A'B')$ et $(A'C')$) perpendiculaires (car mes $\widehat{B'A'C'}$ = mes $\widehat{BAC} = 90°$).

35 **a.**



b. • Le triangle $AB'C'$ est isocèle en C' et tel que $AB' = AB = 2{,}5$ et $AC' = AC = 4$ car la symétrie centrale conserve les distances.

• De plus, I' est le milieu de $[AB']$ car la symétrie centrale conserve les milieux.

• Dans le triangle $I'B'C'$ rectangle en I' :

$I'C'^2 = B'C'^2 - B'I'^2 = 4^2 - 1{,}25^2 = 2{,}4375$

d'où $I'C' = \sqrt{2{,}4375}$.

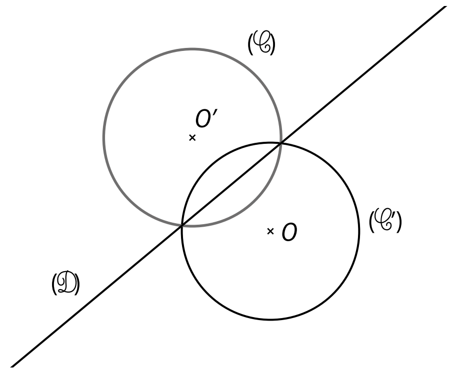
L'aire du triangle $AB'C'$ est donc :

$\dfrac{AB' \times I'C'}{2} = \dfrac{2{,}5' \times \sqrt{2{,}4375'}}{2}$.

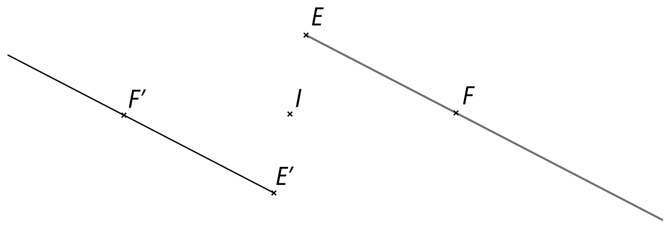
Le périmètre du triangle $AB'C'$ est donc :

$AB' + B'C' + C'A = 10{,}5$.

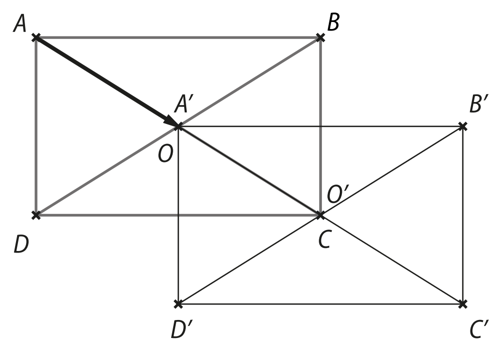
36 $(\mathscr{E})$ est le cercle $(\mathscr{C}')$.



37 $(\mathscr{E})$ est la demi–droite $[E'F')$.



38 $(\mathscr{E})$ est le rectangle $OB'C'D'$.



39 **a.** L'image du point L est R ; l'image du point J est D.

b. L'image du point L est N ; l'image du J est P.

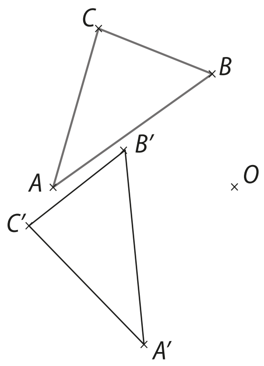
c. L'image du point L est H ; l'image du point J est X.

40 **a.** La rotation de centre Q et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ rad.

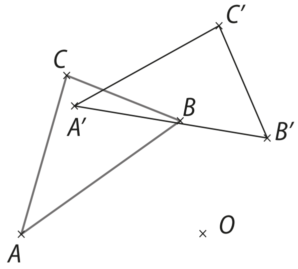
b. La rotation de centre S et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ rad.

c. La rotation de centre I et d'angle de mesure π rad.

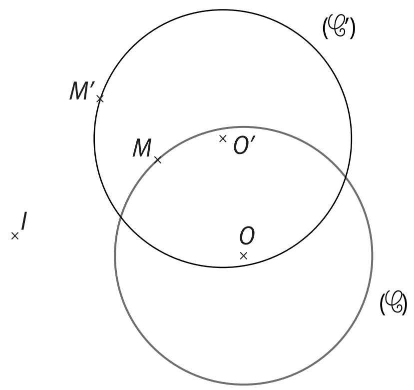
41 **1.** et **2. a.**



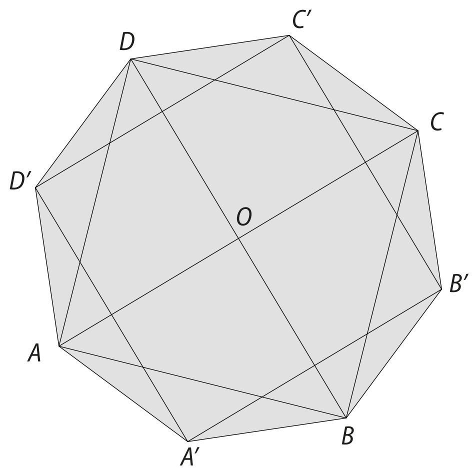
1. et **2. b.**



42

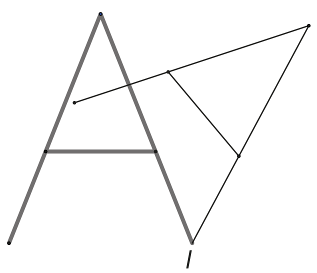


43 **a.**

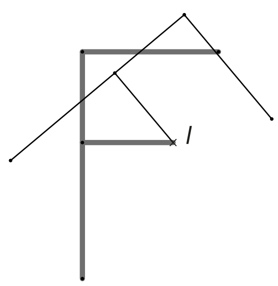


b. Ce polygone est un octogone régulier.

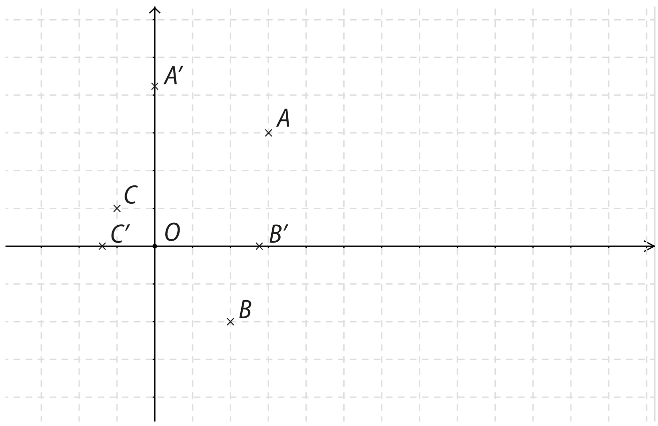
44 **a.**



b.

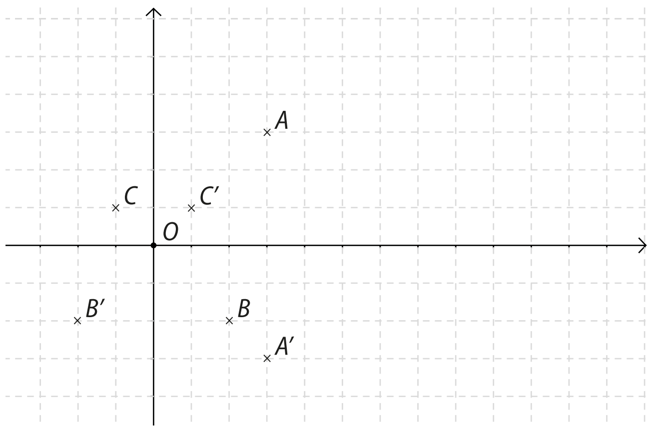


45 **a.**



$A'(0 ; 3\sqrt{2})$, $B'(2\sqrt{2} ; 0)$, $C'(-\sqrt{2} ; 0)$.

b.



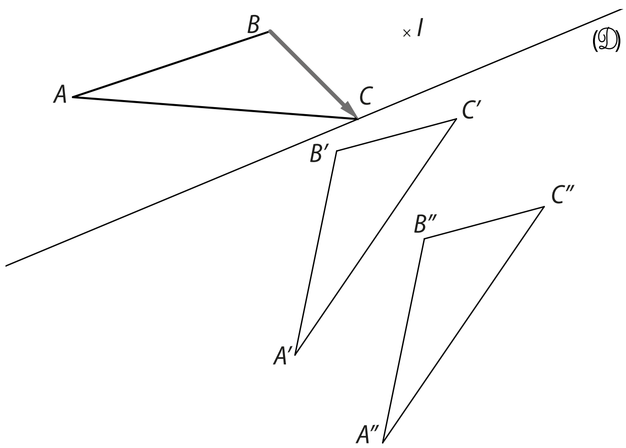
$A'(3 ; -3)$, $B'(-2 ; -2)$, $C'(1 ; 1)$.

46 La rotation de centre O, le centre du carré $ABCD$, et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ rad, laisse le carré $ABCD$ invariant.

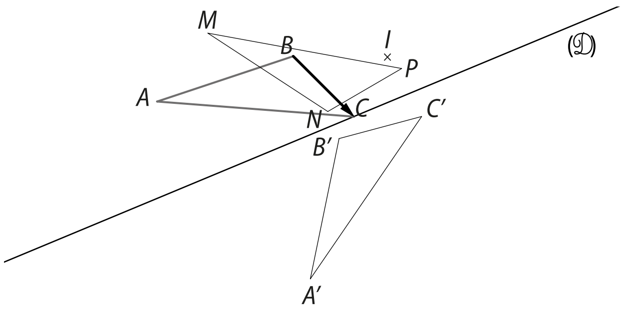
La rotation de centre O, le centre du cercle circonscrit au triangle EFG, et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad, laisse le triangle EFG invariant.

La rotation de centre I et d'angle de mesure quelconque, laisse le cercle invariant.

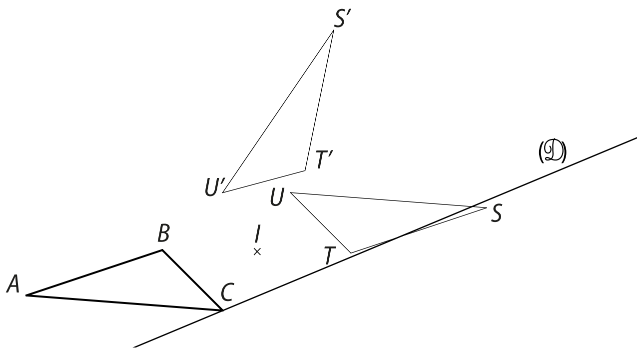
47



48



49



50 On note r une rotation.

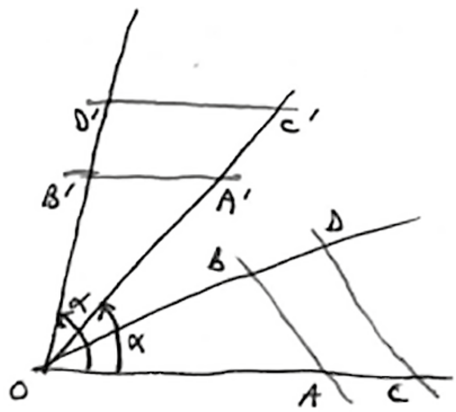
A et B sont deux points de milieu I.

$A' = r(A)$, $B' = r(B)$ et $I' = r(I)$.

Puisqu'une rotation transforme trois points (ici, A, B et I) alignés en trois points alignés, on en déduit que A', B' et I' sont alignés.

Comme, de plus, une rotation conserve les longueurs, $A'I' = AI$ et $I'B' = IB$, or $AI = IB$, donc $A'I' = I'B'$ donc I' est le milieu de $[A'B']$

51 **a.** À main levée



b. Les triangles OAB et OCD sont en configuration de Thalès, donc $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$.

Or, une rotation conserve les longueurs, donc :
$OA' = OA$, $OB' = OB$, $OC' = OC$, $OD' = OD$.

Ainsi, $\dfrac{OA'}{OC'} = \dfrac{OB'}{OD'}$ donc, d'après la propriété réciproque de Thalès dans les triangles, les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles.

Ainsi, par une rotation, les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

52 On note I le milieu de $[NP]$.

Dans le triangle MIP rectangle en I,

$\sin \widehat{IMP} = \dfrac{1{,}8}{6} = 0{,}3$ donc $\widehat{IMP} \approx 17{,}45°$.

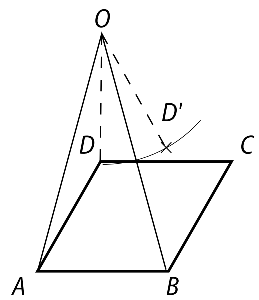
Ainsi, l'angle de cette rotation, qui est $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$, a pour mesure environ $2 \times 17{,}45°$ c'est-à-dire 35°.

53 Un losange est un quadrilatère dont les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu, or une rotation conserve les angles et les milieux, donc l'image d'un losange est un losange.

L'aire d'un losange $ABCD$ de centre O est $AC \times OB$, or une rotation conserve les longueurs et les milieux, donc $AC = A'C'$ et $OB = O'B'$ (avec A', B', C', D' images des points A, B, C, D par la rotation), donc $AC \times OB = A'C' \times O'B'$.

Ainsi le losange $ABCD$ et le losange image ont la même aire.

54 **a.**



b. On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Par hypothèse : $r(A) = B$ et $r(D) = D'$

Or, $ABCD$ est un parallélogramme, donc $AD = BC$.

Une rotation conserve les longueurs donc $AD = BD'$. Ainsi, $BC = BD'$. Donc le triangle BCD' est isocèle en B.

55 **a.** On note O le centre du carré $IJKL$.

La rotation de centre O et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ rad est notée r.

$r(J) = K$ car $IJKL$ est un carré ; $r(I) = J$ car $IJKL$ est un carré donc $r((IJ)) = (JK)$ et l'image de $M \in [IJ]$ et tel que $IM = b$ par r est $X \in [KJ]$ et tel que $JX = b$, donc $X = N$.

On montre de la même façon que $r(N) = P$.

Ainsi, l'image par r du triangle MJN est le triangle NKP.

b. La rotation r transforme M en N et N en P, donc $MN = NP$ et $(MN) \perp (NP)$. On montre de la même façon que $PQ = QM$ et $(PQ) \perp (QM)$. Donc $MNPQ$ est un carré.

c. Dans le triangle MJN rectangle en J.

$MN^2 = MJ^2 + JN^2 = (a + b)^2 + b^2$ donc

$MN = \sqrt{(a + b)^2 + b^2}$.

Ainsi, l'aire du carré $MNPQ$ est $(a + b)^2 + b^2$.

56 **a.** $\overrightarrow{OA'} = 0{,}3\,\overrightarrow{OA}$; **b.** $\overrightarrow{IM'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{IM}$.

57 **a.** M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 5 ;

b. A' est l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{4}$;

c. C est l'image de D par l'homothétie de centre K et de rapport $-\frac{1}{3}$;

d. F est l'image de G par l'homothétie de centre E et de rapport 0,2.

58 **a.** $\overrightarrow{OM'} = -3\,\overrightarrow{OM}$; **b.** $\overrightarrow{OP'} = -3\,\overrightarrow{OP}$; **c.** $\overrightarrow{M'N'} = -3\,\overrightarrow{MN}$; **d.** $\overrightarrow{DN'} = -3\,\overrightarrow{ON}$.

59 **a.** $\frac{2}{3}$; **b.** 2 ; **c.** $-\frac{1}{4}$.

60 **a.** • L'image du point K est O ;

- l'image du point W est C.

b. L'image du point K est H ;

- l'image du point W est N.

61 **a.** $h(W\,;3)$; $h(M\,;-1)$.

b. $h(A\,;4)$; $h(M\,;-1/2)$.

62 **a.** $-\frac{1}{2}$; **b.** -2.

63 **a.** $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ donc $k = -1$

b. $\overrightarrow{OM'} = -\frac{2}{3}\,\overrightarrow{OM}$ donc $k = -\frac{2}{3}$.

c. $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} + 3\,\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OM'} = -2\,\overrightarrow{OM}$ donc $k = -2$.

d. $2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}) = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ donc $k = -1$.

64 **a.** $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{BA}$ donc $k = 3$.

b. $3\,\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$ donc $2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

donc $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$ donc $k = -\frac{1}{2}$.

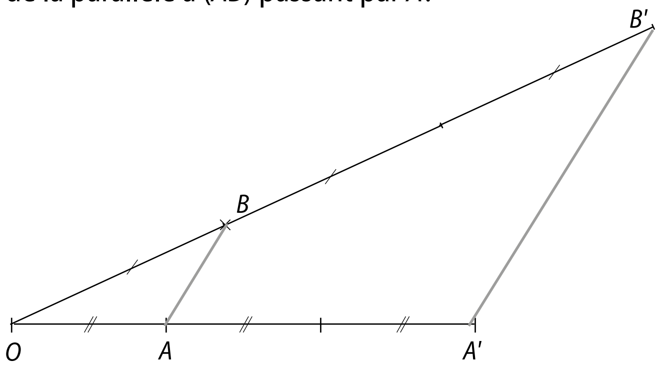
c. $3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$3\,\overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

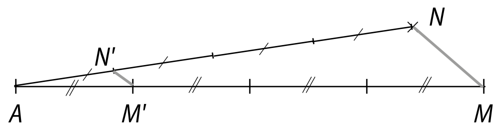
$\overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{CA}$ donc $k = \frac{3}{2}$.

65 On sait que les points O, B et B' sont alignés, de plus $\overrightarrow{OB'} = 3\,\overrightarrow{OB}$, donc $\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = 3$. Ainsi, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(AB)\ //\ (A'B')$.

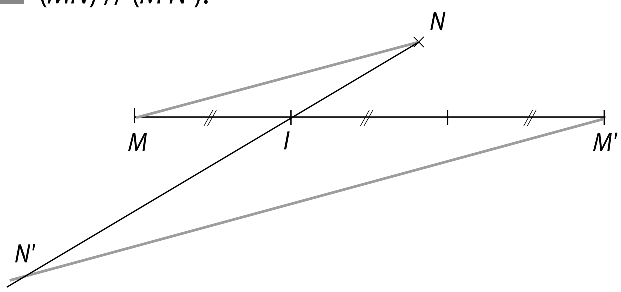
Le point B' est donc à l'intersection des droites (OB) et de la parallèle à (AB) passant par A'.



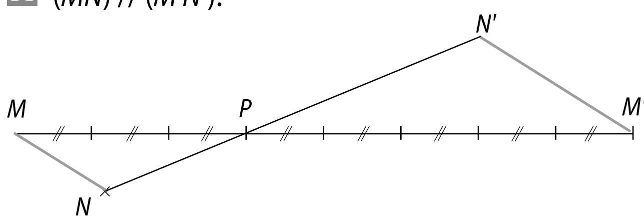
66



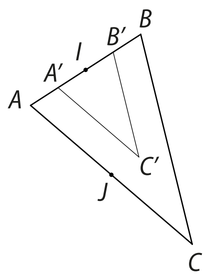
67 $(MN)\ //\ (M'N')$.



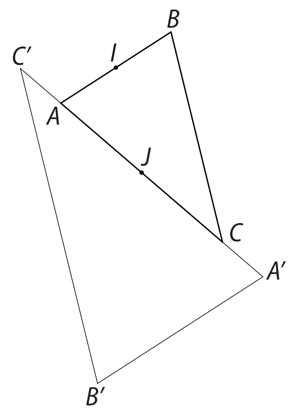
68 $(MN)\ //\ (M'N')$.



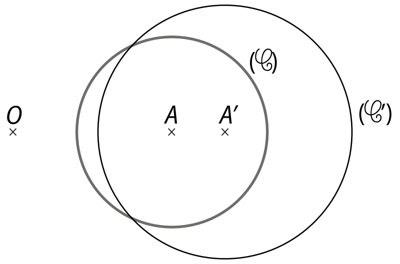
69 **a.**



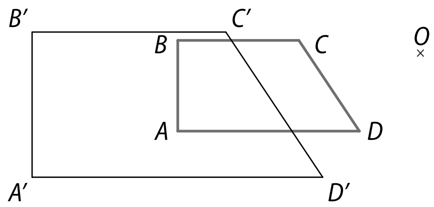
b.



70 **a.** et **b.**



71



72 $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ or $\overrightarrow{OM'}(x' ; y')$ et $\overrightarrow{OM}(x ; y)$

donc $\begin{cases} x' = kx ; \\ y' = ky. \end{cases}$

a. $\begin{cases} x' = 2x ; \\ y' = 2y \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{4}x ; \\ y' = -\dfrac{1}{4}y \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x' = \dfrac{5}{3}x ; \\ y' = \dfrac{5}{3}y. \end{cases}$

73 **a.** $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}.$

$\begin{cases} x'-1 = 2(x-1) \\ y'+2 = 2(y+2) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 2. \end{cases}$

b. $\overrightarrow{JM'} = 1/4\overrightarrow{JM}$

$\begin{cases} x' + 1 = -\dfrac{1}{4}(x+1) \\ y' - 3 = -\dfrac{1}{4}(y-3) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4} \\ y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{15}{4}. \end{cases}$

c. $\overrightarrow{KM'} = -12\overrightarrow{KM}$

$\begin{cases} x' - \dfrac{1}{4} = -12(x - \dfrac{1}{4}) \\ y' - \dfrac{1}{3} = -12(y - \dfrac{1}{3}) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x' = -12x + \dfrac{13}{4} \\ y' = -12x + \dfrac{13}{3}. \end{cases}$

74 Dans les trois cas, on cherche un point $A(a ; b)$ tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$, donc tel que $\begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases}.$

a. $k = 3$ et $\begin{cases} 3x - 6 - a = 3(x - a) \\ 3y + 4 - b = 3(y - b) \end{cases}$

$\begin{cases} -6 - a = -3a \\ 4 - b = -3b \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}.$

Ainsi $h(A\,(3 ; -2) ; 3)$.

b. $k = -2$ et $\begin{cases} -2x + 5 - a = -2(x - a) \\ -2y + 8 - b = -2(x - b) \end{cases}$

$\begin{cases} 5 - a = 2a \\ 8 - b = 2b \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = \dfrac{5}{3} \\ b = \dfrac{8}{3} \end{cases}.$

Ainsi $h\left(A\left(\dfrac{5}{3} ; \dfrac{8}{3}\right) ; -2\right)$

c. $k = \dfrac{1}{4}$ et $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x - a = \dfrac{1}{4}(x - c) \\ \dfrac{1}{4}y - 1 - b = \dfrac{1}{4}(y - b) \end{cases}$

$\begin{cases} -a = -\dfrac{1}{4}a \\ -1 - b = -\dfrac{1}{4}b \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{4}{3} \end{cases}.$

Ainsi $h\left(A\left(0 ; -\dfrac{4}{3}\right) ; \dfrac{1}{4}\right)$.

75 On note A, B deux points distincts et A', B' leurs images par l'homothétie.

On a donc $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

On note I le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ et I' l'image de I par l'homothétie.

$\overrightarrow{I'A'} = k\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{I'B'} = k\overrightarrow{BI}$

donc $\overrightarrow{I'A'} = \overrightarrow{I'B'}$ donc I' est le milieu de $[A'B']$

76 (AB) et (CD) sont deux droites parallèles.

On note A', B', C', D' les images des points A, B, C, D par une homothétie de rapport k.

On a donc $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{CD}$.

Comme les droites (AB) et (CD) sont parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc il existe un nombre réel λ non nul tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

Ainsi, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} = k \times \lambda\overrightarrow{CD} = \lambda \times k\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{C'D'}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles.

77 On note A', B', C', D' les images des images des points A, B, C, D par une homothétie de rapport k.

Une homothétie conserve les angles orientés, ainsi, de mes $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$, on déduit que mes $\widehat{A'B'C'} = \dfrac{\pi}{2}$.

Il en est de même pour les autres angles. Donc $A'B'C'D'$ est un rectangle.

On sait que $A'B' = |k| \times AB$ et $A'D' = |k| \times AD$.

$$\text{Ainsi, } \mathcal{A}(A'B'C'D') = A'B' \times A'D' = |k| \times AB \times |k| \times AD = |k|^2 \times AB \times AD = k^2 \times AB \times AD = k^2 \times \mathcal{A}(ABCD).$$

78 Les droites (AD) et (BC) sont parallèles, les droites (AD) et ($B'C'$) sont parallèles donc les droites (BC) et ($B'C'$) sont parallèles.

Ainsi, les triangles ABC et $AB'C'$ sont en configuration de Thalès, d'où : $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

On note k le nombre $\dfrac{AB'}{AB}$. Ainsi, B' et C' sont les images de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport k.

De plus, $AD' = B'C'$ et $AD = BC$, donc $\dfrac{AD'}{AD} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$.

Ainsi, D' est l'image de D par l'homothétie de centre A et de rapport k. D'où, $B'D' = kBD$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{B'D'}$ sont colinéaires.

On en déduit que les droites (BD) et ($B'D'$) sont parallèles.

79 $\overrightarrow{QP} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{QM} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{QT}$, donc P et M sont les images des points R et T par l'homothétie h de centre Q et de rapport $-\dfrac{1}{4}$.

$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{QT} - \frac{1}{4}\overrightarrow{QR}$$
$$= -\frac{1}{4}(\overrightarrow{QT} + \overrightarrow{QR}) = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{QT} + \overrightarrow{TS}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{QS}$$

donc N est l'image de S par h. Ainsi, $MNPQ$ est l'image de $TSRQ$ par h.

b. $\mathcal{A}(MNPQ) = QM \times QP = 2 \times 1 = 2$

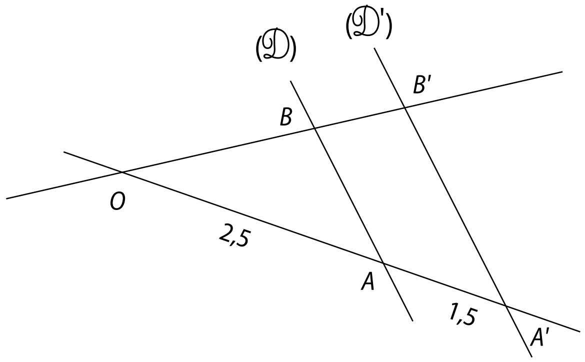
$\mathcal{A}(MNPQ) = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 \times \mathcal{A}(TSQR) = \dfrac{1}{16} \times 8 \times 4 = 2.$

80

Homothétie	Rapport	Aire de $\mathcal{F}$	Aire de $\mathcal{F}'$
h_1	-3	10	90
h_2	-5 ou 5	1	25
h_3	$-0{,}5$	400	100
h_4	$-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	15	3

Aire de $\mathcal{F}' = k^2 \times$ Aire de $\mathcal{F}$.

81



Les triangles OAB et $OA'B'$ sont en configuration de Thalès, donc A' (resp B') est l'image de A (resp de B) par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{4}{2{,}5} = 1{,}6$.

Ainsi $\mathcal{A}(OA'B') = 1{,}6^2 \times \mathcal{A}(OAB)$

$= 2{,}56 \times 5 = 12{,}8$.

L'aire du domaine coloré en bleu est donc $12{,}8 - 5 = 7{,}8$.

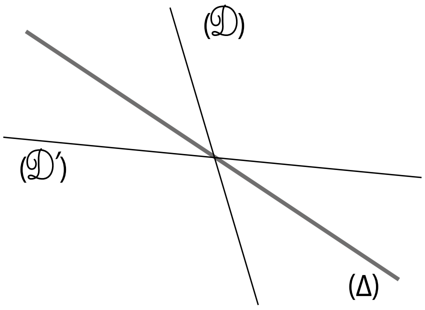
Faire le point

82 **a.**

Propriété	Symétrie orthogonale	Symétrie centrale	Translation	Rotation	Homothétie
Transforme un segment en un segment de même longueur	Oui	Oui	Oui	Oui	Non (1)
Transforme trois points alignés en trois points alignés	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Transforme une droite en une droite parallèle	Non (2)	Oui	Oui	Non (3)	Oui
Transforme un angle orienté en un angle orienté de même mesure	Non (4)	Oui	Oui	Oui	Oui
Transforme une figure en une figure de même aire	Oui	Oui	Oui	Oui	Non
Transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

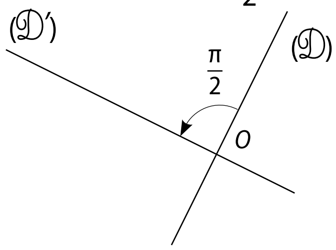
b. (1) Si A' et B' sont les images de A et B par une homothétie de rapport k, alors $A'B' = |k| \times AB$.

(2) Contre-exemple :



$S_{(\Delta)}((\mathcal{D})) = (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathcal{D}')$.

(3) Contre-exemple : $r = \text{rot}\,(O\,;\,\frac{\pi}{2})$.



$r((\mathcal{D})) = (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathcal{D}')$.

(4) Si A', B', C' sont les images de A, B, C par une symétrie orthogonale, alors mes $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -$ mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(5) Si $\mathcal{F}'$ est l'image d'une figure $\mathcal{F}$ par une homothétie de rapport k, alors Aire de $\mathcal{F}' = k^2 \times$ Aire de $\mathcal{F}$.

83 Elle n'a pas pris en compte le sens de l'angle orienté (sens trigonométrique).

84

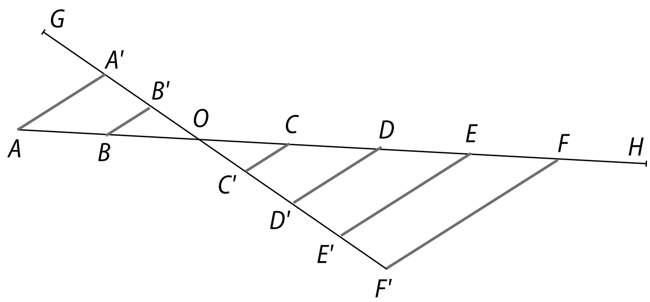
Objet	Image
A	B
C	D
B	C
E	F
$[AB]$	$[BC]$

Objet	Image
$[CB]$	$[CD]$
milieu de $[AC]$	milieu de $[BD]$
triangle ABC	triangle BCD
$(AC) \cap (BE)$	$(BD) \cap (CF)$

85

Homothétie	Transforme…	Centre	Rapport
h_1	D' en C'	O	$\frac{1}{2}$
h_2	C en B	O	-1
h_3	F en C et F' en C'	O	$\frac{1}{4}$
h_4	A' en C' et A en C	O	$-\frac{1}{2}$
h_5	$[AA']$ en $[FF']$	O	-2
h_6	$[EE']$ en $[FF']$	O	$\frac{4}{3}$

2. a. et **b.**

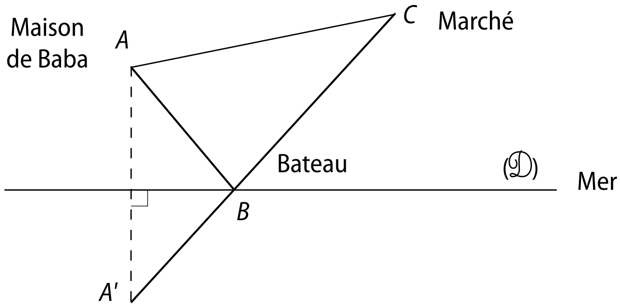


Se tester

86 à **89** Voir Manuel de l'élève page 259.

Exercices d'approfondissement

90 Le trajet Marché-Maison de Baba ne peut pas être modifié. Il faut donc minimiser le trajet : Maison de Baba – Bateau – Bateau – Marché.



On note A' le symétrique de A par la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$.

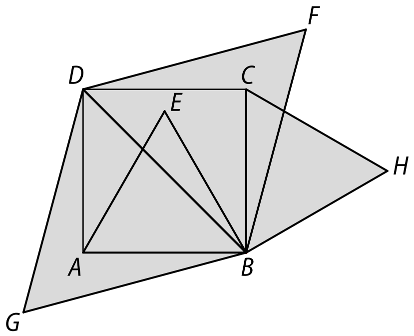
On sait que le trajet $A'B + BC$ est minimal (car c'est une ligne droite) et que $A'B = AB$, donc le trajet $AB + BC$ est minimal pour le point B ainsi placé.

91 **1.** $GB = GD$; $AB = AD$; $CB = CD$ donc les points G, A et C appartiennent à la médiatrice de $[BC]$.

2. a. $r = \text{rot}\left(B\,;\dfrac{\pi}{3}\right)$. **b.** $r(G) = D$; $r(A) = E$; $r(C) = H$.

b. Or, d'après le **1.**, les points G, A, C sont alignés, donc les points D, E, H sont alignés.

3. a.



b. $(BD) \perp (GC)$. Or, $r(B) = B$, $r(D) = F$, $r(G) = D$, $r(C) = H$. *Ainsi* $r((BD)) = (BF)$ et $r((GC)) = (DH)$.

Or, une rotation transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires. Donc, $(BF) \perp (DH)$.

92 **a.** $\overrightarrow{AM'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Les points A, B, C sont fixés donc à chaque point M correspond un unique point M'.

Pour $M = A$: $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Pour $M = B$: $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Pour $M = C$: $\overrightarrow{AC'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

b. M est un point invariant par f lorsque $M' = M$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

L'unique point invariant par f est le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

c. On sait que le centre de cette homothétie est D (son unique point invariant) et que :

• $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ *donc* $\overrightarrow{DA'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA}$.

• $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$

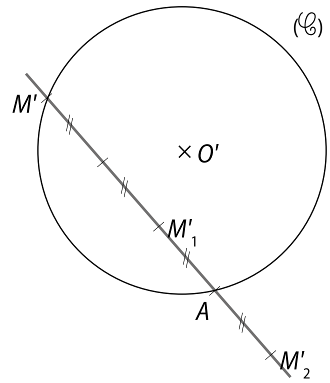
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DB'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DB'} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}$.

h est l'homothétie de centre D et de rapport $\dfrac{2}{3}$.

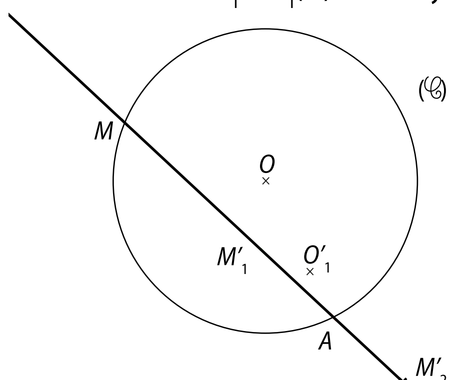
93 **1. a.**



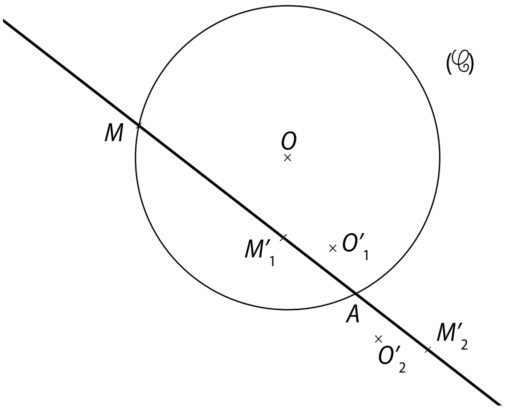
b. h_1 est l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

h_2 est l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.

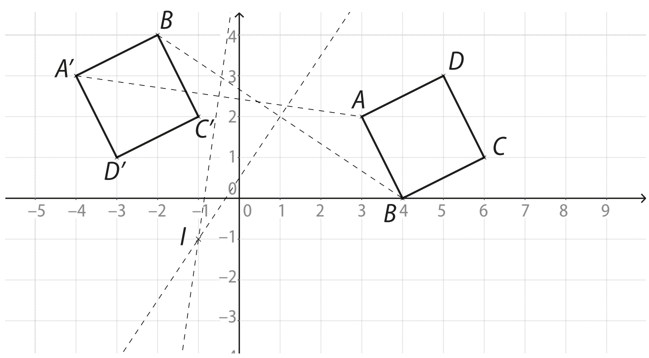
2. Lorsque M décrit $(\mathscr{C})$, l'ensemble $(\mathscr{E}_1)$ des points M_1 est le cercle de centre $O_1 = h_1(O)$ et de rayon $\dfrac{OA}{3}$.



3. Lorsque M décrit $(\mathscr{C})$, l'ensemble $(\mathscr{E}_2)$ des points M_2 est le cercle de centre $O_2 = h_2(O)$ et de rayon $\dfrac{OA}{3}$.



94 **1.** et **3. a.**



2. $\overrightarrow{AC}(3\ ;-1)$, $\overrightarrow{BD}(1\ ;3)$, donc $AC = BD = \sqrt{10}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 3 \times 1 + (-1) \times 3 = 0$. De plus, le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{9}{2}\ ;\dfrac{3}{2}\right)$ et le milieu de $[BD]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{9}{2}\ ;\dfrac{3}{2}\right)$. Ainsi, le quadrilatère $ABCD$ possède des diagonales de même longueur qui se coupent perpendiculairement en leur milieu.

Donc $ABCD$ est un carré.

On montre de même que $A'B'C'D'$ est un carré.

Comme $\overrightarrow{AB}(1\ ;-2)$ et $\overrightarrow{A'B'}(2\ ;1)$, on en déduit que $AB = A'B' = \sqrt{5}$.

Donc ces carrés sont superposables.

3. a. Le point I est le point d'intersection des médiatrices de $[AA']$ (puisque $IA = IA'$) et de $[BB']$ (car $IB = IB'$). On lit (ou on démontre que) $I(-1\ ;1)$.

b. D'après la formule d'Al-Kashi :

$AA'^2 = IA^2 + IA'^2 - 2IA \times IA' \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}})$

donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}) = \dfrac{IA^2 + IA'^2 - AA'^2}{2IA \times IA'}$.

Or, $\overrightarrow{IA}(4\ ;3)$ donc $IA = 5$.

$\overrightarrow{IA'}(-3\ ;4)$ donc $IA' = 5$.

$\overrightarrow{AA'}(-7\ ;1)$ donc $AA' = 5\sqrt{2}$.

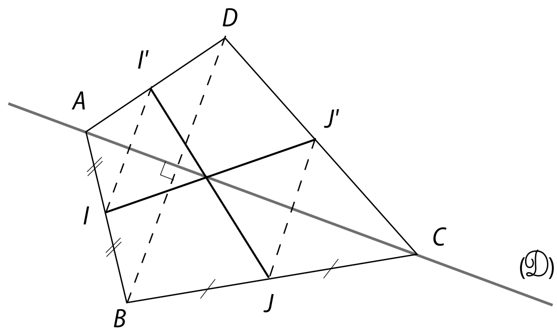
Donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}) = \dfrac{25 + 25 - 50}{2 \times 5 \times 5} = 0$.

Ainsi, mes $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}) = 90°$

c. $\overrightarrow{IC}(7\ ;2)$ donc $IC = \sqrt{53}$; $\overrightarrow{IC'}(0\ ;3)$ donc $IC' = 3$.
Ainsi, $IC \neq IC'$ donc C' n'est pas l'image de C par r.

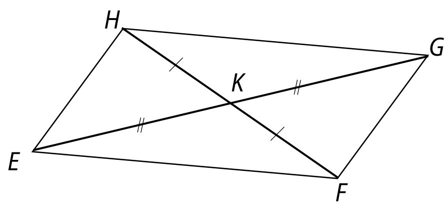
$\overrightarrow{ID}(6\ ;4)$ donc $ID = \sqrt{52}$; $\overrightarrow{ID'}(-2\ ;2)$ donc $ID' = 2\sqrt{2}$.
Ainsi, $ID \neq ID'$ donc D' n'est pas l'image de D par r.

95 **1. a.** et **b.**



c. $S_{(\mathscr{D})}(I) = I'$; $S_{(\mathscr{D})}(J) = J'$; $S_{(\mathscr{D})}(I') = I$; $S_{(\mathscr{D})}(J') = J$.
Donc $S_{(\mathscr{D})}((IJ')) = S_{(\mathscr{D})}((I'J))$ et $S_{(\mathscr{D})}((I'J)) = (IJ')$.
Ainsi, $S_{(\mathscr{D})}((IJ') \cap (I'J)) = (I'J) \cap (IJ')$
Or, comme $(IJ') \cap (I'J) = (I'J) \cap (IJ')$.
On en déduit que ce point d'intersection des deux droites reste invariant par $S_{(\mathscr{D})}$, donc il appartient à $(\mathscr{D})$.

2. a.



b. $[FG]$ et $[EG]$ ont même milieu, donc $EFGH$ est un parallélogramme.

96 **1.** $x' = x + \alpha$, $y' = y + \beta$.

2. $\dfrac{x + x'}{2} = a$ donc $x' = 2a - x$;

$\dfrac{y + y'}{2} = b$ donc $y' = 2b - y$.

3. a. t est la translation de vecteur $\vec{u}(-2\ ;3)$.

• B' a pour coordonnées : $x' = x_B + \alpha = 1 - 2 = -1$ et $y' = y_B + \beta = -1 + 3 = 2$. Donc $B'(-1\ ;2)$

• De $x' = x + \alpha$, on déduit que $x = x' - \alpha = x' + 2$.
De $y' = y + \beta$, on déduit que $y = y' - \beta = y' - 3$.

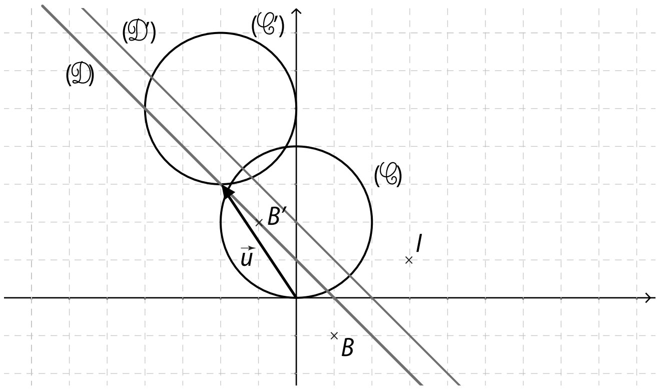
$(\mathcal{D}) : x + y - 1 = 0$

donc $x' + 2 + y' - 3 - 1 = 0$

Ainsi, $(\mathcal{D}') : x' + y' - 2 = 0$

• $(\mathcal{C}) : x^2 + (y - 2)^2 = 4$ donc $(x' + 2)^2 + (y' - 3 - 2)^2 = 4$.

Ainsi, $(\mathcal{C}') : (x' + 2)^2 + (y' - 5)^2 = 4$.



b. S est la symétrie centrale de centre $I(3 ; 1)$.

• B' a pour coordonnées : $x' = 2a - x = 6 - 1 = 5$ et $y' = 2b - y = 2 - (-1) = 3$. Donc $B'(5 ; 3)$.

• De $x' = 2a - x$, on déduit que $x = 2a - x' = 6 - x'$.

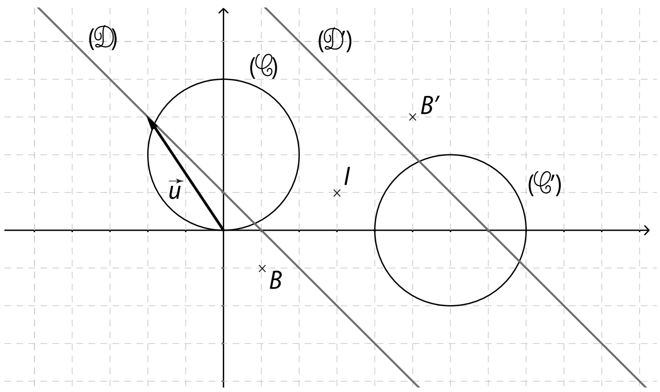
De $y' = 2b - y$, on déduit que $y = 2b - y' = 2 - y'$.

$(\mathcal{D}) : x + y = 0$ donc $6 - x' + 2 - y' - 1 = 0$.

Ainsi, $(\mathcal{D}') : -x' - y' + 7 = 0$

• $(\mathcal{C}) : x^2 + (y - 2)^2 = 4$ donc $(6 - x')^2 + (2 - y' - 2)^2 = 4$.

• Ainsi, $(\mathcal{C}') : (x' - 6)^2 + y'^2 = 4$.



97 **1. a.** $\mathcal{A}(ABD) = \dfrac{5 \times 2}{2} = 5$.

b. $\overrightarrow{AB}(5 ; 0)$, $\overrightarrow{AC}(4 ; 3)$, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5 \times 4 + 0 + 3 = 20$.

De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

donc $20 = 5 \times \sqrt{4^2 + 9^2} \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

ainsi, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{4}{5}$.

À la calculatrice, on en déduit que :

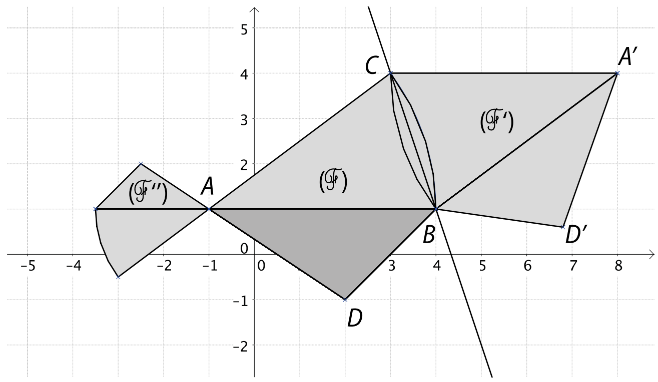
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \approx 0{,}64$ rad.

c. L'aire du secteur angulaire est :

$\dfrac{\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})}{2} \times R^2 \approx \dfrac{0{,}64}{2} \times AB \approx 1{,}6.$

L'aire de la figure $(\mathcal{F})$ est donc : 6,6.

2. a et **b**

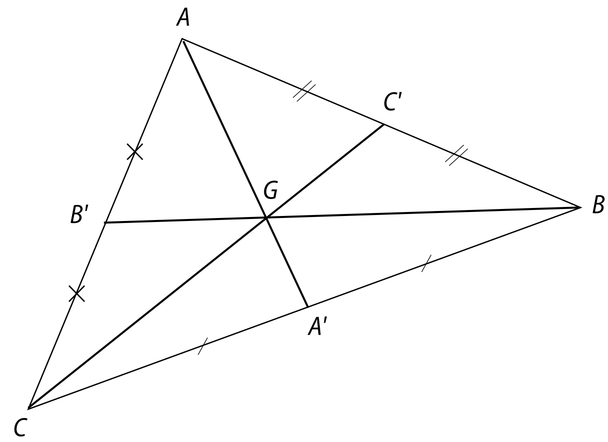


c. Aire $(\mathcal{F}')$ = Aire $(\mathcal{F}) \approx 6{,}6$

Aire $(\mathcal{F}'') = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 \times$ Aire $(\mathcal{F}) \approx 1{,}65$

98 **1.** $k = \dfrac{1}{2}$.

a.



b. On sait que G vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

On a :

$\overrightarrow{MM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$

$\overrightarrow{GM'} = -\overrightarrow{MG} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MG} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$\overrightarrow{GM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GM} + \dfrac{1}{2} \times \vec{0}$

$\overrightarrow{GM'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GM}$, donc f est l'homothétie de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

2. $k = -1$.

On a : $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$.

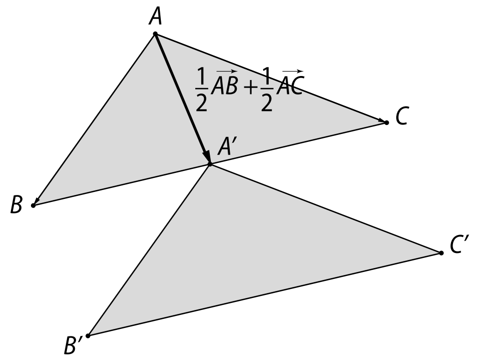
Donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$

$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Les points A, B, C sont fixés donc le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ aussi.

Ainsi, f est la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b.



3. $k \neq -1$

On a : $\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KM'} = k(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC})$

$\overrightarrow{KM'} = -\overrightarrow{MK} + (k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})\,\overrightarrow{MK} + k\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$

$\overrightarrow{KM'} = k\overrightarrow{MK} + \vec{0}$

$\overrightarrow{KM'} = -k\overrightarrow{KM}$, donc f est l'homothétie de centre K et de rapport $-k$.

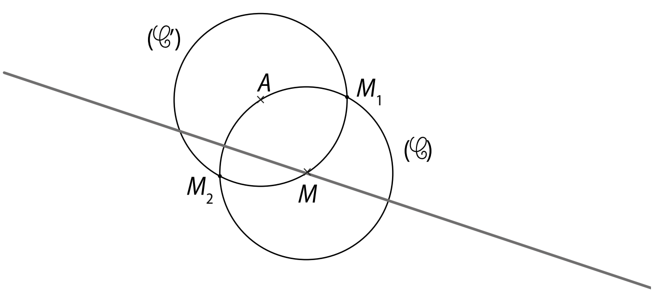
4. a. On note p' le périmètre de l'image de ABC par f.

$p' = |k| \times p$.

b. On note $\mathcal{A}'$ l'aire de l'image de ABC par f.

$\mathcal{A}' = k^2 \times \mathcal{A}$.

99 **1. a.** et **2. b.** & **c.**



b. Puisque M, M_1, $M_2 \in (\mathcal{C})$, on en déduit que $AM = AM_1 = AM_2$, donc que les triangles AMM_1 et AMM_2 sont isocèles en A.

2. a. $f_1 = \text{rot}(A\,;\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_1}}))$

et $f_2 = \text{rot}(A\,;\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM_2}}))$.

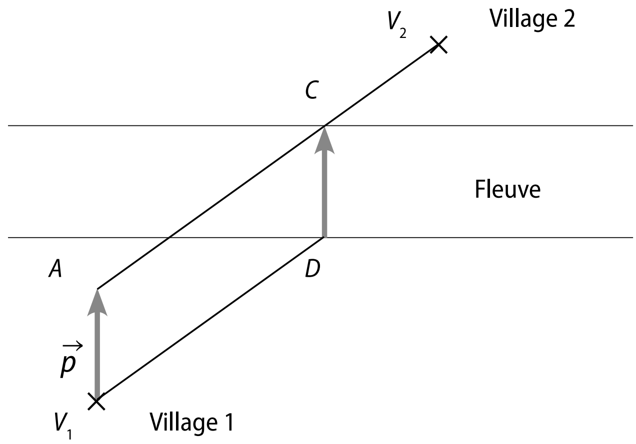
b. Voir figure précédente.

c. On note N'_1, P'_1 (resp. N'_1, P'_2) les images des points N, P par f_1 (resp. par f_2).

Le lieu des points M_1 est la droite $(N'_1P'_1)$

Le lieu des points M_2 est la droite $(N'_2P'_2)$.

100 La direction et la longueur du pont sont invariables. On note $\vec{p}$ le vecteur correspondant au pont.

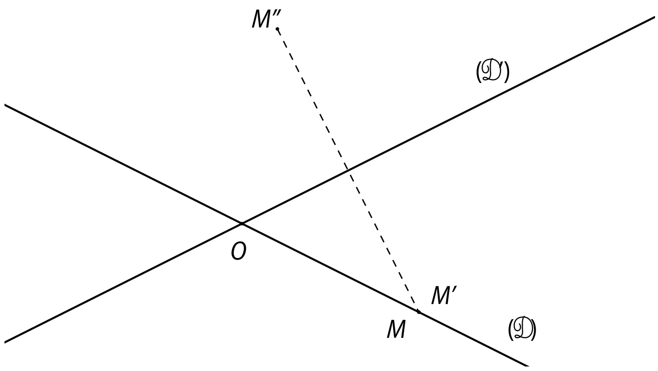


Les trajets $V_1D + DC + CV_2$ et $V_1A + AC + CV_2$ sont de même longueur (puisque V_1DCA est un parallélogramme).

Or le trajet $AC + CV_2$ est minimal (ligne droite), donc le trajet $V_1A + AC + CV_2$ également, ainsi que le trajet $V_1D + DC + CV_2$.

Il faut donc placer le pont au point D.

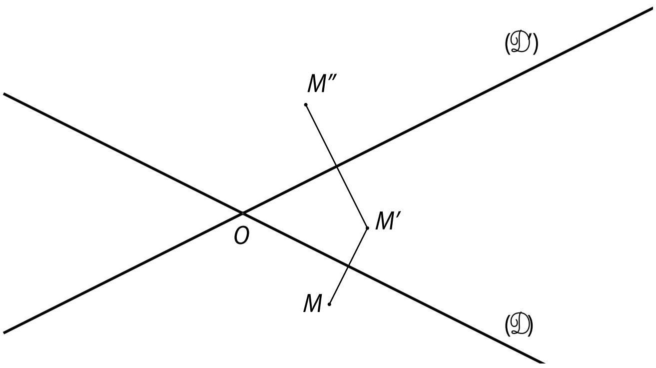
100 **1. a.**



b. Dans ce cas, $M' = M$ donc $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ car $(\mathcal{D})$ est alors la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}})$.

La rotation de centre O et d'angle de mesure 2α transforme M en M''.

2.



$(\mathscr{D})$ est la bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$ et $(\mathscr{D}')$ est la bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}})$.

On note I (resp. I') le milieu de $[MM']$ (resp. de $[M'M'']$).

$\beta = \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$

$\quad = 2\,\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}})$

et $\gamma = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}})$

$\quad = 2\,\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OJ}})$.

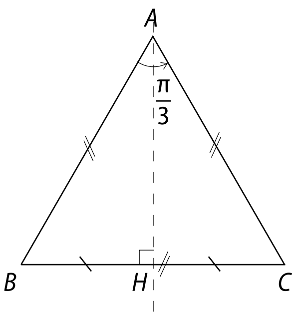
Donc $\beta + \gamma = 2(\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}}) + \text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OJ}}))$

$\beta + \gamma = 2\,\alpha$.

La rotation de centre O et d'angle de mesure 2α transforme M en M'.

3. La succession de deux symétries orthogonales d'axes sécants peut être décrite comme une rotation dont l'angle a pour mesure le double de l'angle situé entre les axes.

4. a.



b. Cette mesure est $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

c. Les axes $(\mathscr{D}) = (AB)$ et $(\mathscr{D}') = (AH)$, où H est le milieu de $[BC]$, conviennent.

102 **1. a.** $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(M) = M'$, donc $(AM) // (A'M')$ et $(BM) // (B'M')$.

Ainsi, le point M' est le point d'intersection de la parallèle à (AM) passant par A' et de la parallèle à (BM) passant par B'.

b.

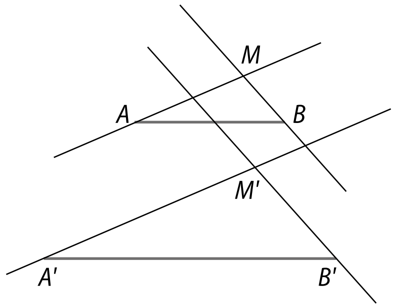


Figure 1

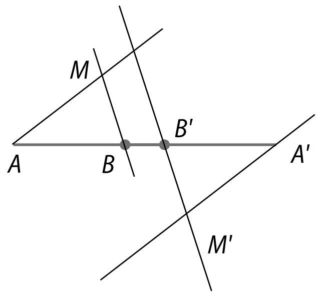


Figure 2

2. a. En procédant avec $C \notin (AB)$, on se retrouve dans le cas de la question **1.** et on peut construire C'.

b. Dès lors $M \notin (AC)$, on se retrouve à nouveau dans le cas de la question **1.** et on peut construire M' :

M' est le point d'intersection de la parallèle à (AM) passant par A' et de la parallèle à (CM) passant par C'.

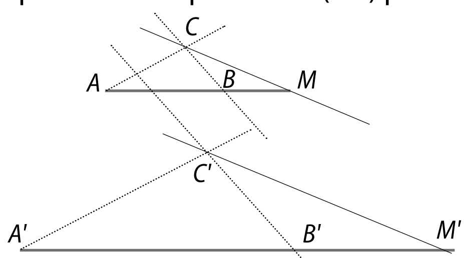


Figure 1

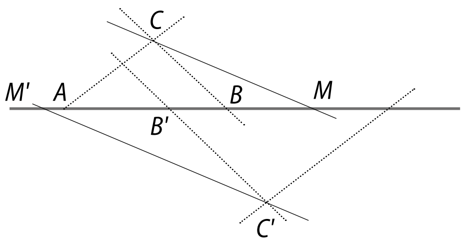


Figure 2

103 **1. a.** Les triangles IOM (resp. ION) et $IO'M'$ (resp. $IO'N'$) sont isocèles, l'un en O et l'autre en O'.

Comme $IO = IO'$ et que mes $\widehat{OIM}$ = mes $\widehat{O'IM'}$ (resp. mes $\widehat{ION}$ = mes $\widehat{IO'N'}$), on en déduit que ces triangles sont superposables et donc que $IM = IM'$ (resp. $IN = IN'$).

De plus, les points M, I, M' (resp. N, I, N') sont alignés, donc I est le milieu de $[MM']$ (resp. I est le milieu de $[NN']$). Donc, $S_I(M) = M'$ et $S_I(N) = N'$.

b. I est le milieu des diagonales $[MM']$ et $[NN']$, donc $MNM'N'$ est un parallélogramme.

2. Oui, en prenant pour N le point diamétralement opposé à M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

3. a. $MNM'N'$ est un rectangle donc $MN' = M'N = OO' = 6$, et si on note H le pied de la hauteur issue de I dans le triangle INM', $IH = ON = O'M' = 3$.

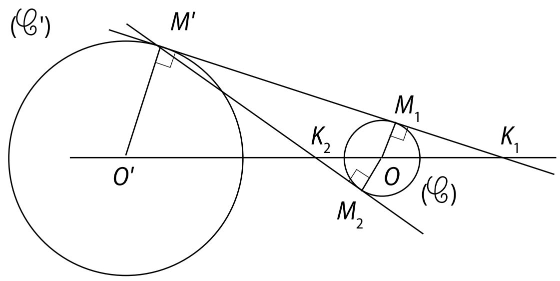
Ainsi, $\mathcal{A}(INM') = \dfrac{M'N \times IH}{2} = 9$

b. Le triangle IMN est rectangle donc les points N', O', I, O, N sont alignés.

IN est une base du triangle INM' et $IN = 6$ et la hauteur associée est $O'M' = 3$.

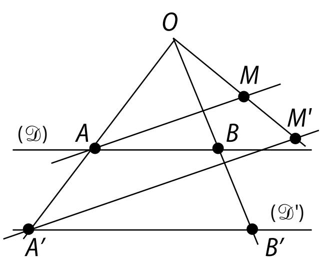
Ainsi, $\mathcal{A}(INM') = \dfrac{IN \times O'M'}{2} = 9$.

104 **a.** $h_1(K_1\,;\dfrac{R'}{R})$ et $h_2(K_2\,;-\dfrac{R'}{R})$.



b. Lorsque O et O' sont confondus, il n'existe qu'une seule homothétie qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$, c'est : $h(O\,;\dfrac{R'}{R})$.

105 **1.** On suppose que toute droite $(\mathcal{D})$ est sa propre image par f.



Soit M un point du plan, $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ deux droites sécantes en M. L'image de M par f appartient à l'intersection des images par f des droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$, qui sont invariantes. Donc M est invariant par f, qui est l'application identique.

On suppose dans la suite qu'il existe une droite $(\mathcal{D})$ dont l'image $(\mathcal{D}')$ lui est strictement parallèle (1).

2. Si A et B sont deux points de $(\mathcal{D})$, qui ont pour images par f deux points A' et B' distincts de $(\mathcal{D}')$, alors A et B sont eux-mêmes distincts.

3. On suppose que (AA') et (BB') sont sécantes en un point O.

a. On a $f(A) = A'$. L'image par f de la droite (AA) est la parallèle à (AA') passant par A'.

Donc $f[(AA')] = (AA')$ et, de même, $f[(BB')] = (BB')$.

b. $O \in (AA') \cap (BB') \Rightarrow f(O) \in f[(AA')] \cap f[(BB')]$.

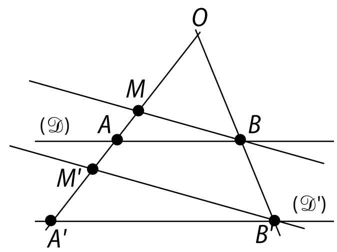
Or $f[(AA')] = (AA')$, $f[(BB')] = (BB')$ et $(O) = (AA') \cap (BB')$; donc $f(O) = O$ et O est invariant par f.

$O \in (\mathcal{D}) \Rightarrow f(O) \in f[(\mathcal{D})]$

$\Rightarrow O \in (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}) = (\mathcal{D}')$, en contradiction avec (1).

Donc $O \notin (\mathcal{D})$ et O est distinct de A et B.

c. Soit $M \notin (AA')$ et $M' = f(M)$.

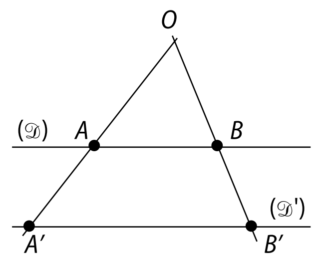


La droite (OM) a pour image par f la droite (OM'), qui lui est parallèle ; donc $M' \in (OM)$.

La droite (AM) a pour image par f la droite $(A'M')$, qui lui est parallèle ; M' est donc un point de la parallèle à (AM) passant par A'.

Donc (OM) et la parallèle à (AM) passant par A' sont sécantes en M'.

d. Soit $M \in [AA'] \setminus \{O\}$ et $M' = f(M)$.



$M \notin (BB')$; par un raisonnement analogue à celui du **c.**, on démontre que (OM) et la parallèle à (BM) passant par B' sont sécantes en M'.

e. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.

On a : $h(A) = A' = f(A)$ et $h(O) = O = f(O)$.

Par ailleurs, $h(B)$ est le point d'intersection de (OB) avec la parallèle à (AB) issue de A' ; donc $h(B) = B'$.

Soit M un point du plan.

1[er] cas : $M = O$. $h(O) = O = f(O)$; donc $h(M) = f(M)$.

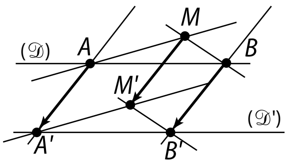
2[e] cas : $M \in (AA') \setminus (O)$. $h(M)$ est le point d'intersection de la droite (AA') avec la parallèle à (BM) issue de B'.

D'après **d.**, on a donc $h(M) = f(M)$.

3[e] cas : $M \notin (AA')$. $h(M)$ est le point d'intersection de la droite (OM) avec la parallèle à (AM) issue de A'.

D'après **c.**, on a donc $h(M) = f(M)$. f est donc l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.

4. On suppose que (AA') et (BB') sont parallèles.



a. Les côtés opposés du quadrilatère $AA'B'B$ sont parallèles, donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

b. Soit $M \notin (AB)$ et $M' = f(M)$. Désignons par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

L'image par t de la droite (AM) est la parallèle à (AM) passant par A' ; donc : $t((AM)) = (A'M')$.

L'image par t de la droite (BM) est la parallèle à (BM) passant par B' ; donc : $t((BM)) = (B'M')$.

Les droites (AM) et (BM) sont sécantes en M ; on en déduit que : $t(M) = M'$ et $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

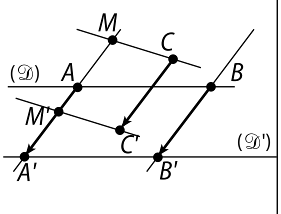
c. Soit $C \notin (AB)$ et $C' = f(C)$. D'après **b.**, $C' = t(C)$ et $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$.

Soit $M \in (AB) \setminus \{A\}$. On a : $M \notin (AC)$.

L'image par t de (AM) est la parallèle à (AM) passant par A' ; donc : $t((AM)) = (A'M')$.

L'image par t de (CM) est la parallèle à (CM) passant par C' ; donc : $t((CM)) = (C'M')$.

$\{M\} = (AM) \cap (BM)$; on en déduit que : $t(M) = M'$ et $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.



d. f est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

5. Les seules applications du plan dans lui-même, qui transforment une droite en une droite qui lui est parallèle, sont les homothéties et les translations.

106 **1.** $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ donc

$$\begin{cases} x' - 0 = k(x - 0), \\ y' - 0 = k(y - 0) \end{cases} \text{c'est-à-dire} \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

2. a. $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$

donc $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{AM}$ d'où $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA}$.

b. $\begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = k(y - b) + b. \end{cases}$

3. a. $\begin{cases} x' = 3(5 - 3) + 3 \\ y' = 3(4 - (-2)) + (-2) \end{cases}$

Ainsi, B' a pour coordonnées $(9 ; 16)$.

b. De $x' = k(x - a) + a$, on déduit que $x' - a = k(x - a)$ et $x = \dfrac{x' - a}{k} + a$.

De même, $y = \dfrac{y' - b}{k} + b$.

Or, $(\mathscr{D}) : 3x - 2y + 1 = 0$. Donc :

$$3\left[\left(\frac{x' - 3}{3}\right) + 3\right] - 2\left[\left(\frac{y' - (-2)}{3}\right) + (-2)\right] + 1 = 0$$

donc $x' - 3 + 9 - \dfrac{2}{3}y' - \dfrac{4}{3} + 4 + 1 = 0$.

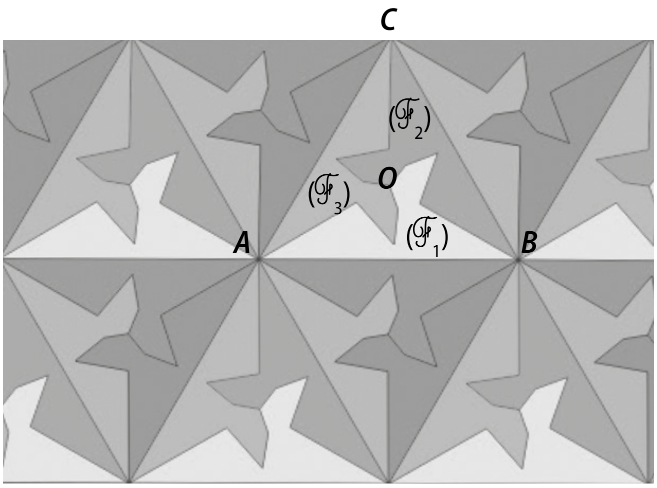
Ainsi, $(\mathscr{D}') : x' - \dfrac{2}{3}y' + \dfrac{29}{3} = 0$.

c. Le cercle $(\mathscr{C})$ a pour centre $I\,(1 ; -2)$ et pour rayon $\sqrt{5}$, donc le cercle $(\mathscr{C}')$ a pour centre I' (image de I par h) et pour rayon $|k| \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

Or, $x_{I'} = 3(1 - 3) + 3 = -3$ et $y_{I'} = 3(-2 - (-2)) + (-2) = -2$.

Donc $I'(-3 ; -2)$.

107 **a.** À main levée.



b. $\mathscr{F}_1$ est le pavé de base.

On obtient $(\mathscr{F}_2)$ et $(\mathscr{F}_3)$ à partir de $(\mathscr{F}_1)$ par rotation de centre O et d'angle de mesure $\pm \dfrac{2\pi}{3}$ rad ; puis le reste par des symétries orthogonales (par exemple d'axes (AB), (AC) et (BC)).

$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2 + \mathscr{F}_3$ est le pavé de base.

On peut obtenir des pavés analogues par rotation de centre A (ou B ou C) et d'angle de mesure $\pm \dfrac{\pi}{3}$ rad.

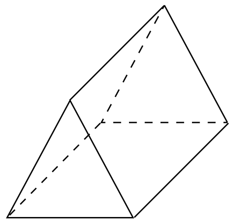
Également par des translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AC}$ …).

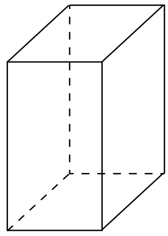
7 Géométrie dans l'espace

Activités d'introduction

1 Perspective en architecture

1 a. Un prisme droit à base triangulaire et un pavé droit.



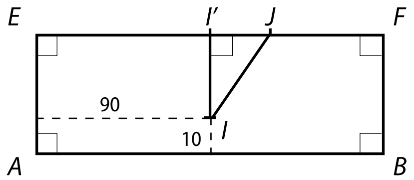


b. Le b. est juste. Dans la représentation a., les arêtes cachées ne sont pas représentées en perspective cavalière. Dans celle de c., la découpe du prisme pour emboîter le pavé droit n'est pas parallèle aux arêtes du prisme.

2 a. Dans le patron a., il manque le pavé droit. Dans le patron c., le pavé droit par du toit. Donc c'est le patron b.

2 Calcul de longueurs

1. a.

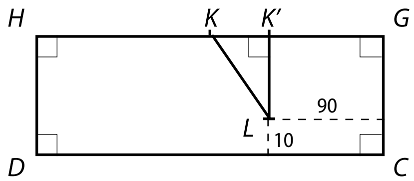


b. I' est le sommet de l'angle droit du triangle rectangle $II'J$.

$II' = 20 - 10 = 10$. $I'J = 100 - 90 = 10$.

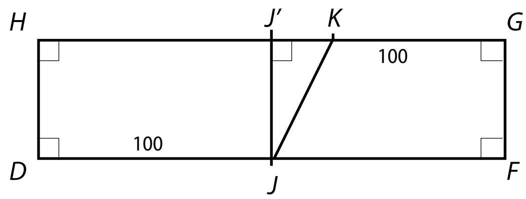
D'après le théorème de Pythagore,
$IJ = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

c. De même pour KL :



$KL = 10\sqrt{2}$.

De même pour JK :



$J'K = 210 - 100 - 100 = 10$; $J'J = 20$;
$KJ = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$.

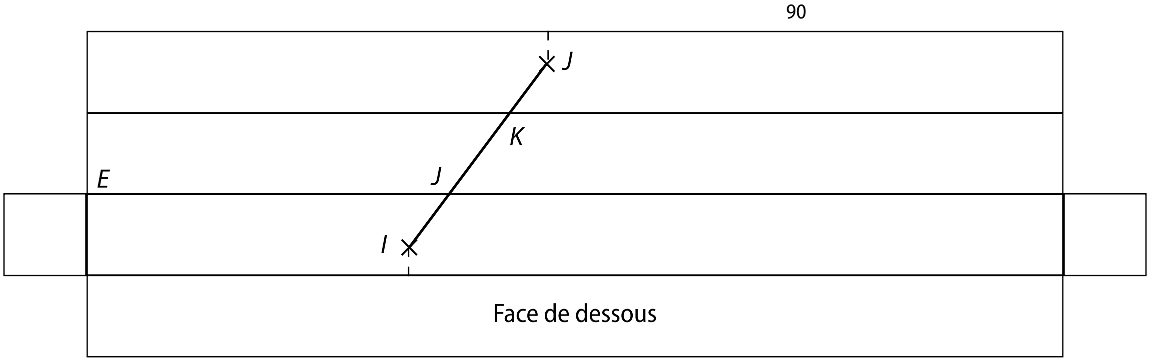
Distance parcourue $= 20\sqrt{2} + 10\sqrt{5}$.

2. a. En procédant comme au **1.**, $IJ = \sqrt{100 + (a - 90)^2}$, $JK = \sqrt{400 + (110 - a)^2}$.
b. $d = IJ + JK + KL = \sqrt{100 + (a - 90)^2} + \sqrt{400 + (110 - a)^2} + 10\sqrt{2}$.

a	90	95	100	105	110	115	120
distance	52,4	50,3	50,6	52,7	56,5	61,7	68,1

c. Pour $a = 95$, la distance semble être minimale.

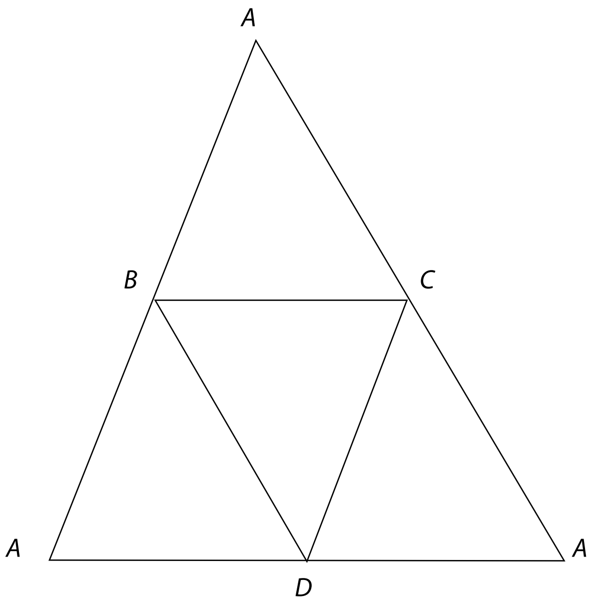
d.



$a = EJ \approx 4{,}75 \times 20 \approx 95.$

3 Plan et droite

1. a. b.



2. a. b. Oui si *M* n'est pas le milieu de [*AB*]. Non sinon.

c. (*IM*) est sécante au plan (*BCD*) ou (*IM*) est parallèle au plan (*BCD*).

3. a. Oui, à la droite (*BC*).

b. En se plaçant dans le plan (*ABC*), on peut appliquer le théorème de la droite des milieux de côtés d'un triangle ou sa contraposée.

4 Des droites ni parallèles ni sécantes

1. a. (*AH*) et (*BG*) sont parallèles. **b.** Oui, dans le plan (*ABG*). **c.** (*HG*) et (*AB*).

2. a. (*AG*) et (*BH*) sont sécantes. **b.** Oui dans le plan (*ABG*). **c.** (*IJ*).

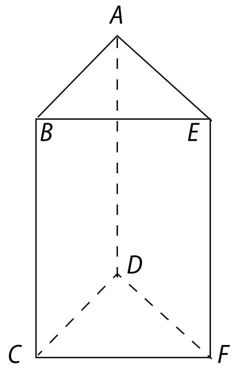
3. a. (*AH*) et (*FC*) ne sont ni parallèles, ni sécantes. **b.** Non. **c.** (*HF*) et (*AC*).

Savoir-faire

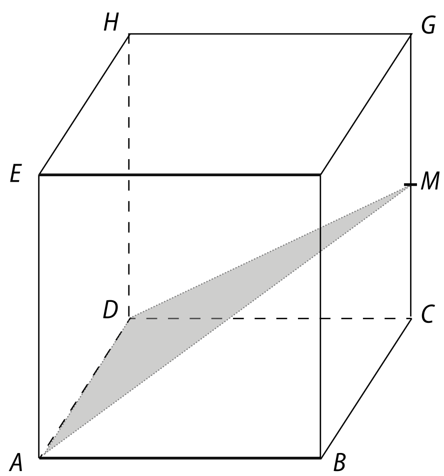
2 Recherche de la longueur *BE.*

Dans le triangle rectangle *ABE*, d'après la trigonométrie, $\cos(\widehat{ABE}) = \dfrac{AB}{BE}$ donc $BE = \dfrac{AB}{\cos(\widehat{ABE})}$ soit :

$BE = \dfrac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$.



3 **a.**



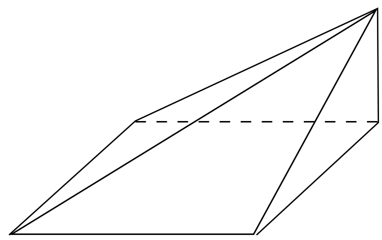
b. Dans le plan (*AEB*) : *ABF* triangle rectangle en *B*, d'après le théorème de Pythagore, $DM^2 = DC^2 + CM^2$ donc $DM^2 = 11{,}25$ donc $DM = \sqrt{11{,}25}$.

Dans le plan (*ADM*) : *ADM* triangle rectangle en *D*, d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AD^2 + DM^2$ donc : $AM^2 = 9 + 11{,}25$ donc $AM = \sqrt{20{,}25}$.

Dans le plan (*ADM*) : *ADM* triangle rectangle en *D*, d'après la trigonométrie, $\cos\widehat{ADM} = \dfrac{DM}{AM} = \dfrac{\sqrt{11{,}25}}{\sqrt{20{,}25}}$.

Ainsi, mes $\widehat{ADM} \approx 41{,}18°$.

4



5 Pour les faces parallèles, par exemple de dessus et de dessous, l'angle de fuite est respecté mais les pointillés ne sont pas tracés.

8 D'après le codage, dans le plan (*SBC*) d'après la contraposée du théorème de la droite des milieux, (*IJ*) non parallèle à (*BC*) et, comme elles sont coplanaires, (*IJ*) et (*BC*) sont sécantes.

9 **a.** (*HD*) // (*IJ*) donc $D \in$ (*IHJ*). Ainsi *D* est un point commun aux deux plans.

$I \in$ [*AB*] et (*AB*) est incluse dans (*DCB*). Ainsi *I* est un point commun aux deux plans. (*HIJ*) et (*DCB*) sont donc sécants en (*DI*).

b. $F \in$ (*EAB*) donc *F* est un point commun aux deux plans et $B \in$ (*CGF*) donc *B* est un point commun aux deux plans. Ainsi (*CFG*) et (*EAB*) sont sécants en (*BF*).

12 Les points *G*, *C* et *B* définissent le plan (*BFC*) alors que *A* appartient au plan (*EAD*) parallèle à (*BFC*).

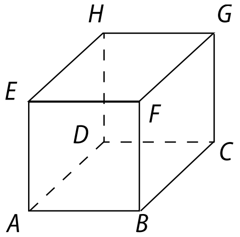
Donc les points *G*, *C*, *B* et *A* sont non coplanaires et donc les droites (*CA*) et (*GB*) sont non coplanaires.

13 (*DC*) et (*CJ*) sont deux droites sécantes du plan (*DCJ*), elles sont respectivement parallèles aux droites (*EF*) et (*FI*). Or (*EF*) et (*FI*) sont deux droites sécantes du plan (*EFI*). Donc les plans (*DCJ*) et (*EFI*) sont parallèles.

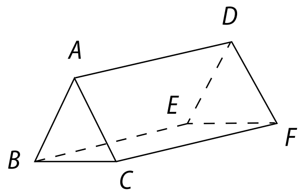
14 Les droites (*FI*) et (*CG*) sont parallèles, les droites (*HD*) et (*CG*) sont parallèles donc les droites (*FI*) et (*HD*) sont parallèles et sont donc coplanaires.

Exercices d'entraînement

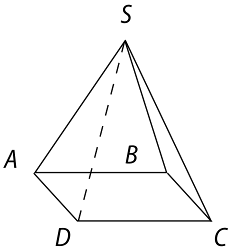
15 **a.**



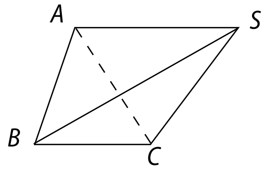
b.



c.



d.



16 **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Faux.

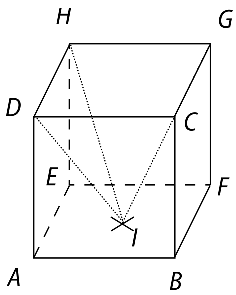
17 Pour que *HMBN* soit un parallélogramme, il faut et il suffit que (*HM*) // (*BN*) et $HM = BN$.

Si N est tel que $GN = \frac{2}{3}GC$ alors les deux conditions précédentes sont vérifiées.

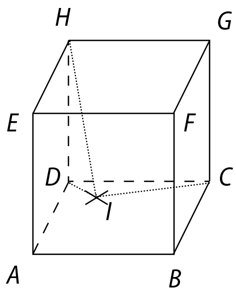
b. Il faut que $HM = MB$ or dans le triangle rectangle *EHM*, $HM^2 = ME^2 = \frac{1}{9}a^2$ et dans le triangle rectangle *MAB*, $MB^2 = MA^2 + AB^2 = \frac{4}{9}a^2 + a^2 = \frac{13}{9}a^2$.

Donc $HM \neq MB$, il n'y a pas de position de N pour que *HMBN* soit un losange.

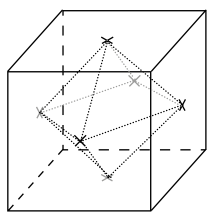
18 **a.**



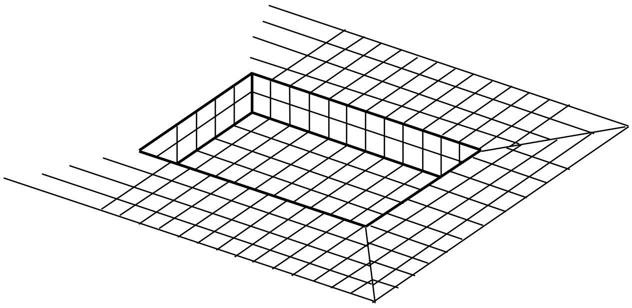
b.



19



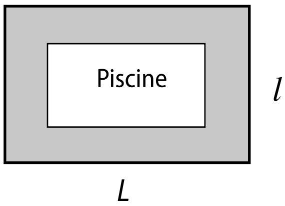
20 **a.**



b. $\mathcal{V} = 50 \times 25 \times 3 = 3\,750$.

Il faut évacuer 3 750 m^3.

c. Vue de haut du bassin :



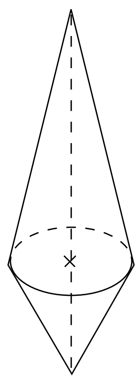
$L = 50 + 2 \times (4 \times 0{,}3)$
$= 52{,}4$ m.

$l = 25 + 2 \times (4 \times 0{,}3)$
$= 27{,}4$ m.

$\mathcal{A}_{\text{Carrelée}} = (52{,}4 \times 27{,}4) - (50 \times 25) = 185{,}76$ m^2.

Il faut commander environ 186 m^2 de carrelage.

21 **a.**

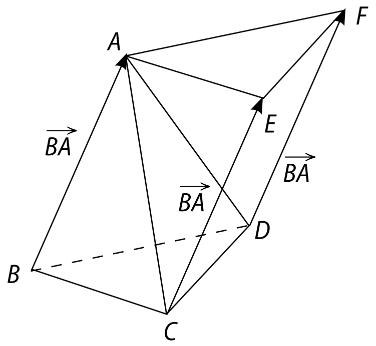


b. Si $h = 12$ alors la partie supérieure est un cône de révolution de hauteur 8 cm et de rayon 3 cm. Ainsi $\mathcal{V}_{1/2} = \frac{1}{3}(\pi \times 3^2) \times 8 = 24\pi$ cm^3.

Pour la partie inférieure : $\mathcal{V}' = \frac{1}{3}(\pi \times 3^2) \times 4$
$= 12\pi$ cm^3.

Le volume de son bouchon est 36π cm^3.

22 **a.** et **b.**



c. Les faces *BCD* et *AEF* sont parallèles et les faces latérales sont des parallélogrammes. *AEFBCD* est un prisme à base triangulaire.

23 **a.** Pour respecter cette condition dans le plan, il faut tracer un quadrilatère dont les côtés et les diagonales ont les mêmes longueurs. Ceci n'est pas possible puisque dans un losange, les diagonales sont de longueurs différentes et dans un carré, les diagonales sont égales mais plus grandes que le côté.

b. D' un tétraèdre régulier.

c. Ce sera le centre de ce tétraèdre.

24 **a.** Oui (droites parallèles).
b. Oui (3 points non alignés).
c. Oui.
d. Non (trois points alignés).
e. Non.
f. Oui (deux droites sécantes).

25 **1. a.** (*ABC*) ; **b.** *H* et (*BC*) ; **c.** (*HG*) et (*AB*).

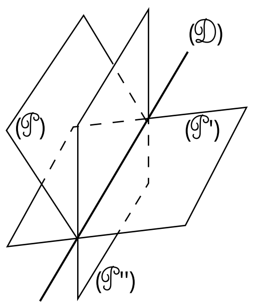
2. Pour a. : *D ;* pour b. : *E* et *J* ; pour c. : *I*, *J* et *K*.

26 **a.** *ABCDEFGH* parallélépipède rectangle.

b. (*KLC*) qui contient les crêtes (*EA*) et (*GC*).

c. (*KLB*) qui contient le sommet *B*.

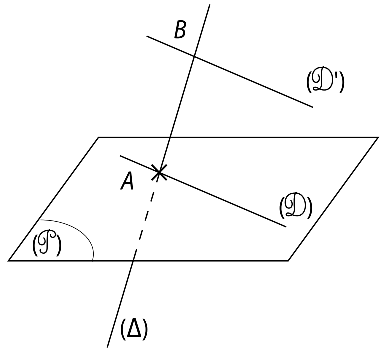
27



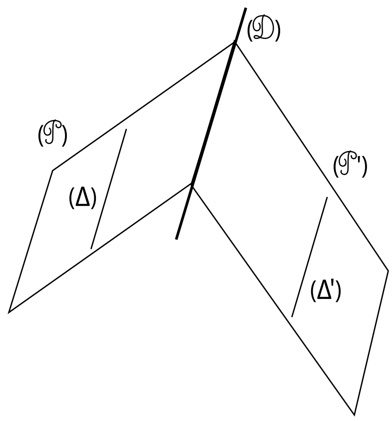
28 **a.** Tracer un plan (𝒫) et placer un point *A* appartenant à ce plan (𝒫). Tracer une droite (*D*) incluse dans (𝒫) passant par le point *A*.

Placer un point *B* n'appartenant pas à (𝒫). Tracer la droite (Δ) passant par *A* et *B*.

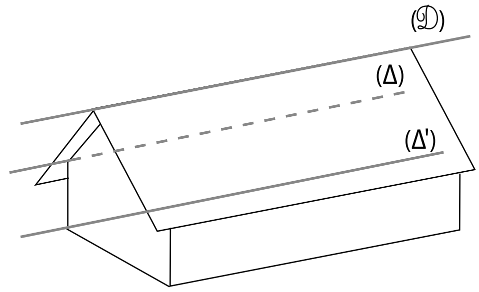
b.



29 **a.**



b.



Les droites (Δ), (Δ') et (*D*) sont parallèles d'après le théorème du toit.

30 a ; b ; d ; e.

31 **a.** $DB^2 = DA^2 + AB^2 = 4^2 + 5^2 = 41$. $DB = \sqrt{41}$.

b. $DF^2 = DB^2 + BF^2 = 41 + 3^2 = 50/\ DF = \sqrt{50}$.

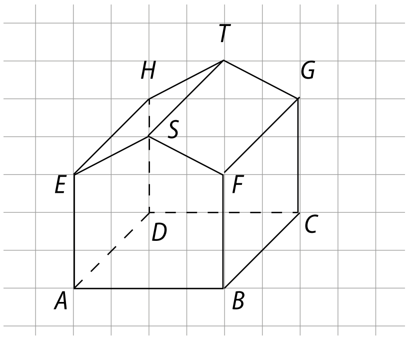
c. $AI^2 = AE^2 + EI^2 = 3^2 + 2{,}5^2 = 15{,}25$. $AI = \sqrt{15{,}25}$.

d. $IJ^2 = IB^2 + BJ^2 = IA^2 + BJ^2 = 15{,}25 + 3^2 = 24{,}25$.
$IJ = \sqrt{24{,}25}$.

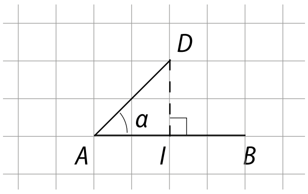
e. $ID^2 = IA^2 + AD^2 = 15{,}25 + 4^2 = 31{,}25$. $ID = \sqrt{31{,}25}$.

f. $IC = ID = \sqrt{31{,}25}$.

32 **a.**



b. À l'aide du quadrillage, on projette D orthogonalement sur (AB) :



Puis on utilise la trigonométrie

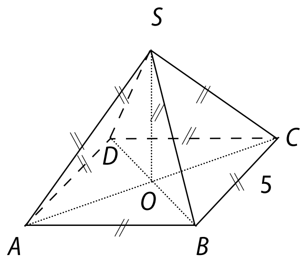
$\tan\alpha = DI/AI = 2/2 = 1$.

Ainsi $\alpha = 45°$

c. À l'aide du quadrillage :

$BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ donc $BC = \sqrt{8}$. Ainsi $k = \dfrac{\sqrt{8}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

33 **a.**



b. Pyramide régulière donc ODS triangle rectangle car SBD triangle isocèle en S et O milieu de $[DB]$.

Ainsi $SO^2 + OB^2 = SB^2$.

$ABCD$ carré donc $DB^2 = DC^2 + CB^2 = 5^2 + 5^2 = 5\sqrt{5}$.

Ainsi $SO^2 = 5^2 - \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 25 - \dfrac{25}{2} = 12{,}5$.

$OS = \sqrt{12{,}5}$.

c. $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times OS \times \mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{12{,}5} \times 5^2$

$= 25\dfrac{\sqrt{12{,}5}}{3}\text{cm}^2$.

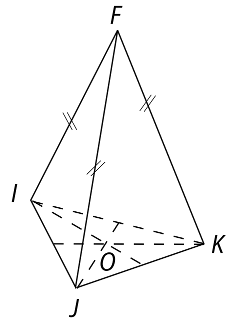
$SO = \sqrt{12{,}5}$ cm.

34 **a.** Dans le triangle EFG, I et J milieu de $[EF]$ et $[FG]$ donc $IJ = \dfrac{1}{2}EG$. De même $IK = \dfrac{1}{2}EB$ et $JK = \dfrac{1}{2}GB$.

De plus $ABCDEFGH$ est un cube donc $EG = EB = GB$ et donc $IJ = JK = KI$.

Le triangle IJK est équilatéral.

b.



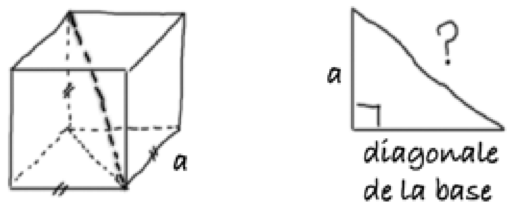
c. Calculons FJ puis IJ.

$FJ = \dfrac{1}{2}FG = 2$.

$IJ = \dfrac{1}{2}EG = \dfrac{1}{2}(\sqrt{FE^2 + FG^2}) = \dfrac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}$.

Donc $FIJK$ n'est pas un tétraèdre régulier.

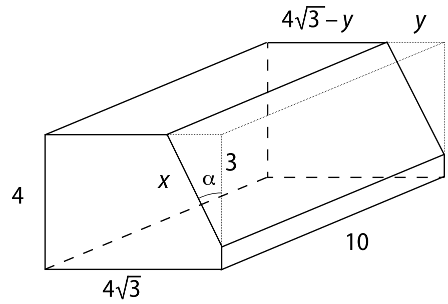
35 Dessins à main levée.

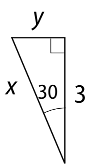


Diagonale du carré de côté $a = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Diagonale du cube de côté $a = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3a^2}$ $= a\sqrt{3}$.

36 **a.**





$\cos(30) = \dfrac{3}{x}$ donc $x = \dfrac{3}{\cos(30)} \approx 3{,}5$ m.

$\tan(30) = \dfrac{y}{3}$ donc $y = 3\tan(30) \approx 1{,}7$ m.

b. $\mathcal{V}_{ob} = \mathcal{V}_{pavé} - \mathcal{V}_{prisme}$

$= (4 \times 4\sqrt{3} \times 10) - \left(\dfrac{3 \times y}{2} \times 10\right)$

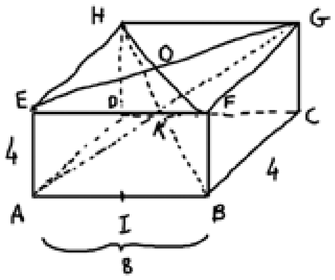
$= 160\sqrt{3} - 15 \times 3\tan(30) = 160\sqrt{3} - \dfrac{45}{\sqrt{3}}$

$= 145\sqrt{3}$.

c. $\mathcal{V}_{ob} \approx 251$ m^3. Ainsi Masse $\approx 15\,069$ kg.

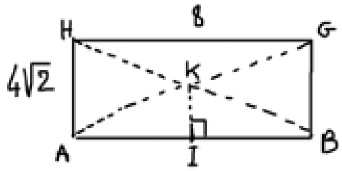
37 À main levée.

1. a.



$(HG) // (AB)$ donc les quatre points sont coplanaires et $HG = AB$ donc $GHBA$ est un parallélogramme.

b.



Dans ADH rectangle en D

$AH^2 = AD^2 + DH^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$

$AH = 4\sqrt{2}.$

AKB isocèle en K avec $KI = 2\sqrt{2}$ et $AI = 4$.

Ainsi $\tan \widehat{AKB} = \dfrac{KI}{AI} - \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Donc mes $(\widehat{KAI}) \approx 35°$

et donc mes $(\widehat{AKB}) = 180 - 2$ mes $(\widehat{KAI}) \approx 109°$.

2. Dans OEA rectangle en E,

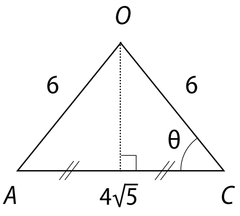
$OA^2 = AE^2 + OE^2 = 4^2 + \left(\dfrac{1}{2}EG\right)^2.$

Dans EHG rectangle en H :

$EG^2 = EH^2 + HG^2 = 4^2 + 8^2 = 80.$

Ainsi $OA^2 = 16 + 20 = 36$. Donc $OA = 6$.

De même $OC = 6$. Puis $AC = EG = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.



$\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{6} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Donc mes $\theta \approx 42°$.

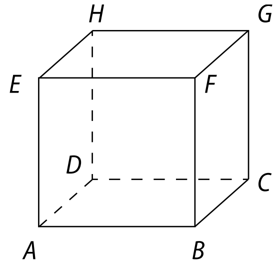
Ainsi mes $(\widehat{OCA})$ = mes $(\widehat{CAO}) \approx 42°$ et mes $(\widehat{OAC}) \approx 96°$.

38 **a.** Non coplanaires. **b.** Perpendiculaires en D. **c.** Parallèles. **d.** Non coplanaires.

39 **a.** Sécantes en C. **b.** Parallèles. **c.** Parallèles. **d.** Sécantes en E.

40 **a.** Parallèles. **b.** Sécants en (FG). **c.** Confondus. **d.** Sécants en (HD).

41 **a.**

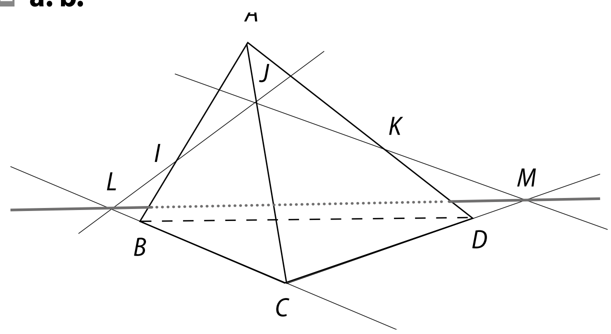


b. $\left.\begin{array}{l}(EF) // (AB)\\(DC) // (AB)\end{array}\right\}$ donc $(EF) // (DC)$.

De plus $EF = DC$ (arêtes du cube) donc $EFCD$ est un parallélogramme, donc $(ED) // (FC)$.

c. (FC) est parallèle à (ED) qui est une droite incluse dans le plan (EDG), donc (FC) est parallèle à (EDG).

42 **a. b.**



(IJ) et (BC) sont coplanaires et sécantes en L et L est le point d'intersection de (IJ) et (BCD).

De même M est l'intersection de (JK) et (BCD).

c. Les plans (IJK) et (BCD) se coupent en la droite (LM).

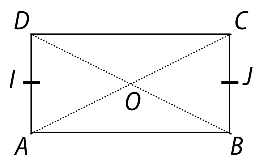
43 **a.** $(AD) // (FG)$ donc $(AI) // (KG)$.

I milieu de $[AD]$ donc $AI = \dfrac{1}{2}AD$. De même $GK = \dfrac{1}{2}FG$.

$ABCDEFGH$ pavé droit donc $AD = FG$. Ainsi $AI = GK$.

Finalement, $AIGK$ est un parallélogramme.

• Montrons que $(IJ) // (DC)$.



Dans le rectangle $ABCD$, d'après la droite des milieux dans DBC, $(DC) // (OJ)$.

Dans le triangle DAC, (JO) est la droite passant par un milieu de côté O et parallèle à un deuxième côté donc (JO) coupe $[DA]$ en son milieu I. Ainsi $(JO) = (OI) = (IJ)$.

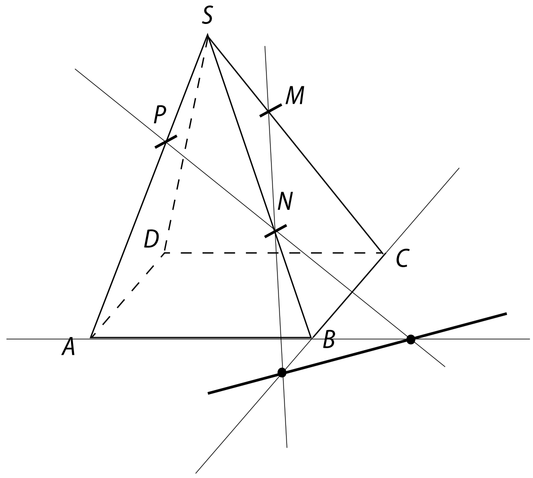
D'après ce qui précède $(IJ) // (DC)$.
Comme $(DC) // (HG)$, $(IJ) // (HG)$.

De plus, $JO + OI = \frac{1}{2}DC + \frac{1}{2}DC = DC$. Or $DC = HG$, donc $IJ = HG$.

IJGH est bien un parallélogramme.

b. *AIGH* parallélogramme donc $(AK) // (IG)$. (IG) est incluse dans (IJH) donc (AK) est parallèle à (IJH) car $(IJH) = (IJG)$.

44



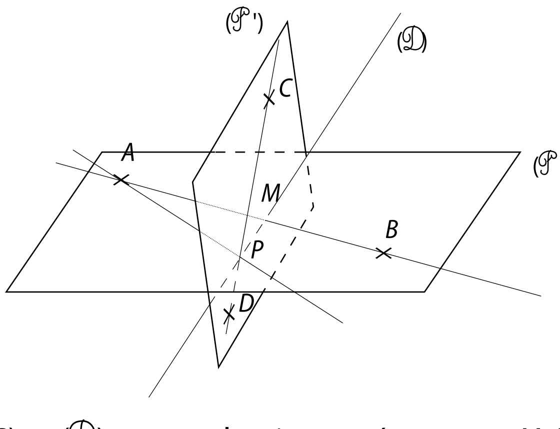
1. a. *M*, *N*, *B* et *C* sont coplanaires et dans le triangle *SBC*, $SM/SC \neq SN/SB$ donc (MN) est non parallèle à (BC).

b. L'intersection de (MN) et (BC) est aussi celle de (MN) et (ADC).

2. a. b. Voir **1. a.**

3. Les deux points d'intersection précédents appartiennent aux plans (PMN) et (ABC) donc appartiennent à la droite d'intersection de ces deux plans.

45 **1. a.**



(AB) et $(\mathscr{D})$ sont coplanaires et sécantes en *M*. Et ce point appartenant à $(\mathscr{D})$ appartient aussi à $(\mathscr{P})$ car $(\mathscr{D})$ est incluse dans $(\mathscr{P})$.

b. *C* et *M* sont deux points du plan $(\mathscr{P}')$ et aussi du plan (ABC). Ainsi (CM) est la droite d'intersection des plans $(\mathscr{P}')$ et (ABC).

2. On procède de même avec *N* intersection de (CD) et $(\mathscr{D})$ qui est aussi intersection de (ACD) et $(\mathscr{P}')$ et donc la droite (AN) est la droite d'intersection des plans (ACD) et $(\mathscr{P}')$.

46 $(\mathscr{P})$ est le plan dont la section avec le tétraèdre est hachurée en orange.

I, *J* et *K* sont le points d'intersection du plan $(\mathscr{P})$ avec les arêtes de *SABC*.

Ainsi $E \in (IJ)$, $G \in (JK)$ et $F \in (IK)$. Dans ce cas, les points *E*, *F* et *G* sont les points d'intersection de ces droites et des droites (AC), (AB) et (CB).

E, *F* et *G* appartiennent au plan $(\mathscr{P})$ et (ABC). Or deux plans, s'ils sont sécants, se coupent en une droite. Donc *E*, *F* et *G* appartiennent à cette droite. Les trois points sont alignés.

47 **a.** Non coplanaires. **b.** Non coplanaires. **c.** Parallèles. **d.** Non coplanaires.

48 **a.** Parallèles. **b.** Sécants.
c. Parallèles. **d.** Sécants.

49 **a.** Sécants en (GH). **b.** Parallèles.
c. Sécants. **d.** Parallèles.

50 **1.** $AL = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}GC = CI$ et $(AL) = (AE)$, $(CI) = (CG)$ donc $(AL) // (CI)$.

ALIC est un parallélogramme. Donc $(AC) // (LI)$.

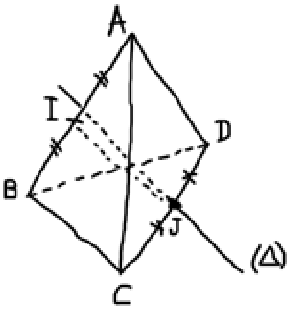
2. a. Dans le triangle *ABC*, *K* et *J* sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$ donc $(KJ) // (AC)$. Comme $(LI) // (AC)$, $(KJ) // (LI)$.

b. $(LI) // (JK)$ donc *L*, *I*, *J* et *K* sont coplanaires donc *LKJI* est un quadrilatère. De plus $(KJ) // (LI)$ et $KJ \neq LI$ donc *LKJI* est un trapèze et donc (LK) et (JI) sont sécantes.

3. a. *L* et *K* sont des points de (ABF) donc la droite (LK) est incluse dans (ABF) donc *M* appartient à (ABF). De même $M \in (CBF)$.

b. (ABF) et (CBF) sont deux plans sécants en (BF) donc $M \in (BF)$.

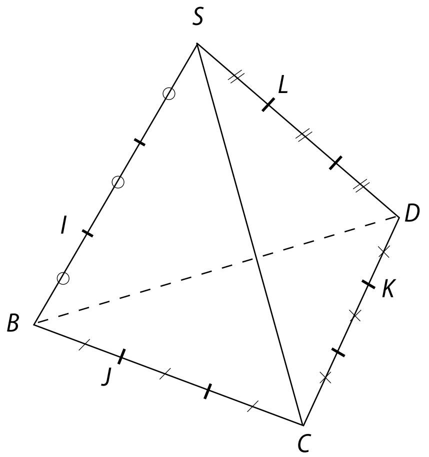
51 Figure à main levée.



• On trace la parallèle à (BC) passant par J que l'on nomme (Δ).

• Les droites (IJ) et (Δ) sont sécantes donc elles sont coplanaires et forment donc un plan (Q). Tout plan parallèle à (Q) sera solution.

52 **a.**



b. $IJ = IB + BJ = \frac{1}{3}SB + \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}(SB + BC) = \frac{1}{3}SC.$

c. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{SC}$ sont colinéaires donc $(SC) // (IJ)$. Or $(IJ) \subset (IJK)$, ainsi $(SC) // (IJK)$.

d. De même $\overrightarrow{JK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$ donc $(JK) // (BD)$ et comme $(JK) \subset (IJK)$, $(BD) // (IJK)$.

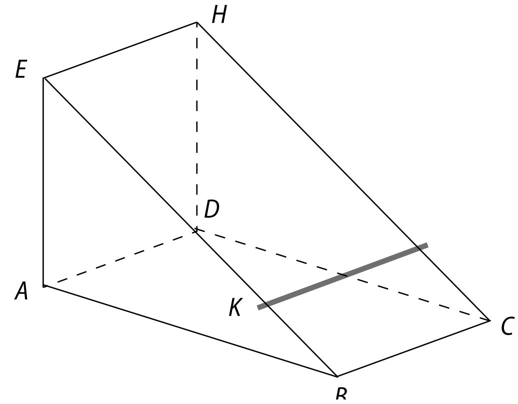
53 Dans ADM, $(AD) // (IH)$ donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{MI}{MA} = \frac{MH}{MD} = \frac{HI}{DA}$.

Or I milieu de $[HF]$ et $AD = HE$ donc $\frac{HI}{DA} = \frac{1}{2}$.

Ainsi $\frac{MI}{MA} = \frac{1}{2}$ donc I milieu de $[MA]$. De même J milieu de $[AN]$.

Ainsi dans AMN, I et J sont les milieux de $[AM]$ et $[AN]$ donc $(IJ) // (MN)$.

54



Justification :

$(AD) // (EH)$ et (AD) et (EH) sont incluses respectivement dans (DAK) et (EHC). Ces deux plans sont sécants puisque K est un point appartenant à ces deux plans.

Donc d'après la « propriété du toit » (AD), (EH) et la droite d'intersection des deux plans sont parallèles.

55 **1.** I milieu de $[AB]$, K milieu de $[HG]$ et $ABCDEFGH$ est un cube donc $BI = HK$ et $(BI) // (HK)$. $BIHK$ est donc un parallélogramme. Ainsi $(IH) // (HIJ)$.

56 **a.** Le trapèze $ABGH$. **b.** Le triangle IJK.

c. Le trapèze $ILMM'$ où M' est le milieu de $[AD]$.

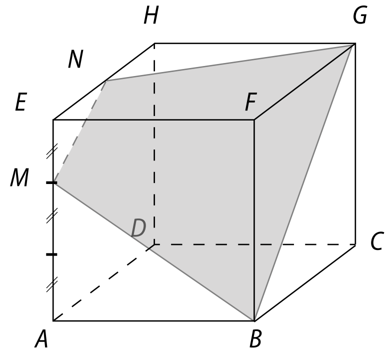
d. Le parallélogramme $KNOO'$ où O' est le milieu de $[ND]$.

e. Le trapèze $KNMO'$.

f. Le trapèze $ILCD$.

57 **a.** Le segment $[RS]$. **b.** Le segment $[RT]$ **c.** Oui, S appartient aux deux plans. **d.** Les droites (BD) et (RT).

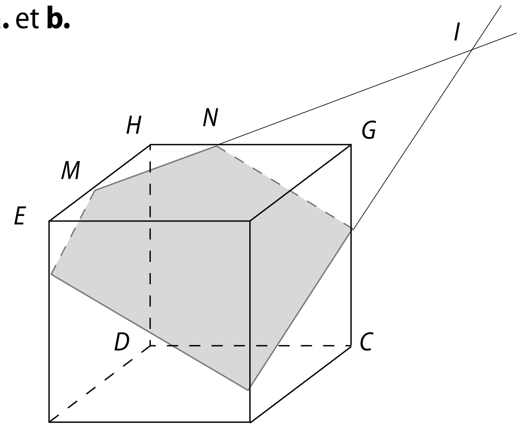
58 **a.** et **d.**



b. (FBC) et (EDA) sont des plans parallèles donc le plan (MGB) qui coupe l'un en $[GB]$ et coupe l'autre en une droite parallèle à (GB).

c. G appartient aux deux plans et N aussi donc $[GN]$ est l'intersection du plan (MGB) et de la face $EFGH$.

59 **a.** et **b.**



3. a. *M*, *N*, *F* et *G* sont quatre points coplanaires.

b. $I \in (MN)$ donc $I \in (MNP)$. De même $I \in (FG)$ donc $I \in (FGC)$.

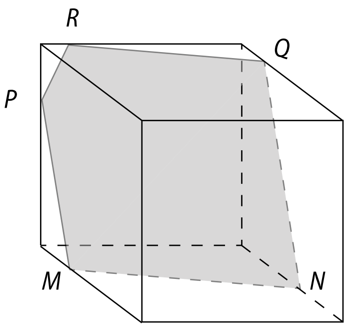
4. Dans ce cube, (*ABF*) et (*DCG*) sont parallèles donc si (*MNP*) coupe l'un, il coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Faire le point

60 • Incluse ; • Parallèles ; • Coplanaires ; • Parallèles ou non coplanaires.

61 **a.** Safi : « Les droites d'intersection d'un plan avec deux plans parallèles sont parallèles entre elles. »

b. Non. Justifications : (*MP*) // (*NQ*) et (*MN*) // (*RQ*).



62 **1.** Intersection des plans (*SAB*) et (*SCD*) : ces deux plans ne sont pas parallèles (*S* point commun) et sont non confondus donc ils sont sécants en une droite (Δ) passant par *S*.

Puis (*DC*) et (*AB*) sont des droites parallèles dont l'une est incluse dans (*SCD*) et l'autre dans (*SAB*). D'après le théorème du toit, (Δ) est parallèle aussi à (*AB*) et (*CD*).

2. Intersection de (*FG*) et (Δ) :

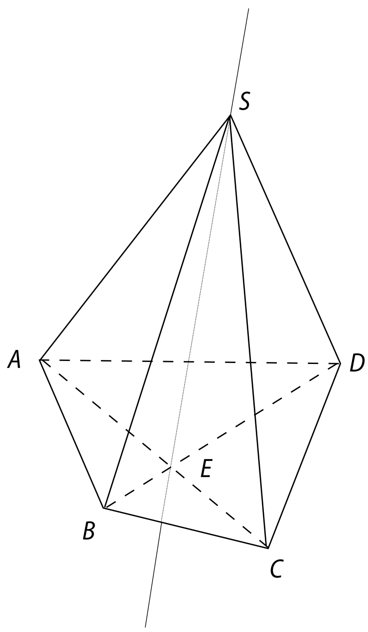
(*FG*) et (Δ) sont incluses dans le plan (*ABS*), on peut prolonger ces droites pour déterminer leur point d'intersection est *H*.

3. Point d'intersection du plan (*EFG*) et de la droite (*SC*) : (*EF*) et (*SC*) sont incluses dans le plan (*SDC*), elles sont sécantes en *I*. $H \in (FG)$ donc $H \in (EFG)$. Ainsi (*EH*) est incluse dans (*EFH*) et donc $I \in (EFH)$. Finalement, *I* est l'intersection de (*SC*) et de (*EFG*).

63 **1.** Le point *S* appartient aux deux plans.

2. (*AC*) et (*BD*) sont deux droites incluses dans (*SAC*) et (*SBD*) et ces deux droites sont sécantes. Leur point d'intersection (*E*) appartient à l'intersection.

3. La droite d'intersection est (*SE*).



64 Remarque du professeur :

On ne peut pas utiliser la propriété du cours 4.b.1 puisque (*SAD*) et (*SBC*) sont des plans sécants.

Se tester

65 à **68** Voir Manuel de l'élève page 259.

Exercices d'approfondissement

69 **a.** Un cube de côté b ; un cube de côté a.

Trois pavés de dimensions a, a, b.

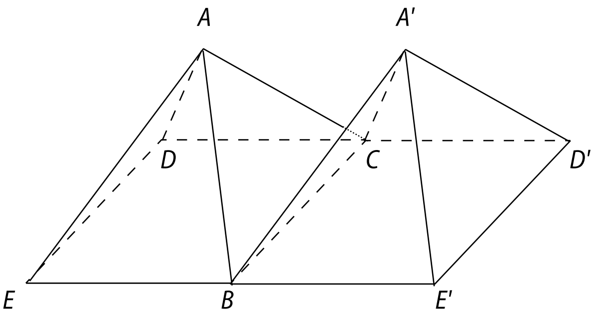
Trois pavés de dimensions b, b, a.

$\mathcal{V}_1 = b^3$, $\mathcal{V}_2 = a^3$, $\mathcal{V}_3 = a^2b$ et $\mathcal{V}_4 = ab^2$.

b. Volume du cube de base $(a+b)^3$.

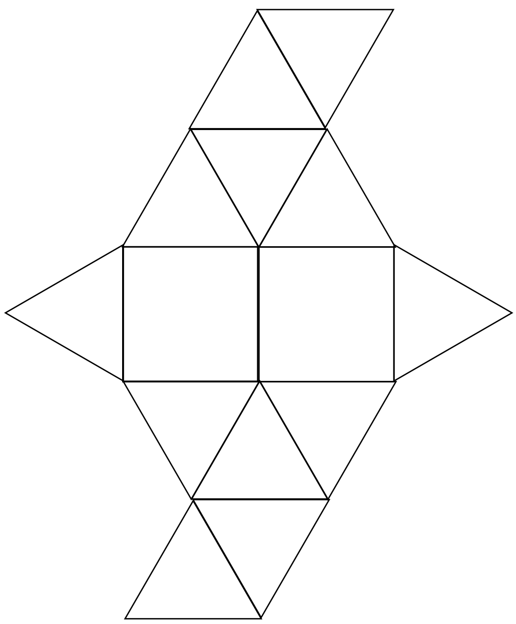
Donc $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$.

70 **a.**

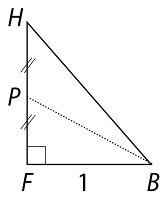


b. $AA'BC$ est un tétraèdre régulier d'arête 4 cm.

c.



71 **1. a.**



$[HF]$ est la diagonale du carré $EFGH$ de côté 1 cm donc mesure $\sqrt{2}$ cm.

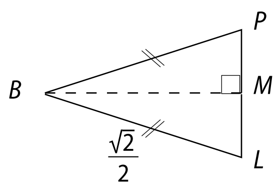
$BP^2 = BF^2 + FP^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$.

Ainsi $BP = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. b. De même dans HBC, $BL = \frac{\sqrt{3}}{2}$. BPL est donc un triangle isocèle.

2. Dans le triangle EDG, P et L sont les milieux de $[EG]$ et $[GD]$ donc $PL = \frac{1}{2}ED$. Or $ED = \sqrt{2}$ donc $PL = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. a.



$$\sin(\widehat{LBM}) = \frac{LM}{LB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

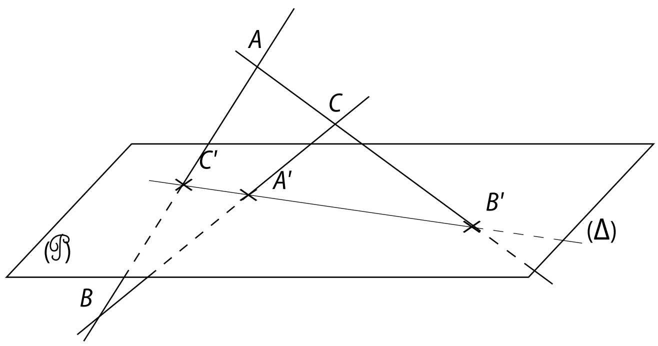
Donc mes $(\widehat{LBM}) \approx 17°$.

(BM) est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{PBL}$ donc :

mes $(\widehat{PBL}) = 2 \times$ mes $(\widehat{PBM})$.

Ainsi mes $(\widehat{PBL}) \approx 34°$.

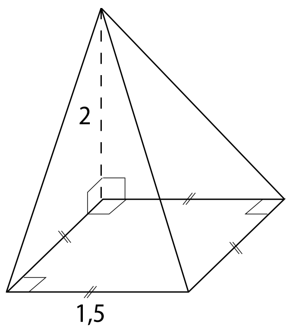
72 **a.**



b. Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils forment un plan (ABC).

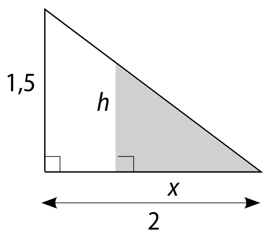
($\mathcal{P}$) et ABC sont sécants en une droite (Δ). De plus, (AB) est une droite incluse dans ABC, elle coupe ($\mathcal{P}$) en A' qui est un point de (ABC) et de ($\mathcal{P}$) donc $A' \in (\Delta)$.
De même $B' \in (\Delta)$ et $C' \in (\Delta)$.
Finalement les points A', B' et C' sont alignés.

73 **1.**



2. $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 2 \times \text{Aire}_{\text{carré}} = \dfrac{1}{3} \times 2 \times (1{,}5)^2 = 1{,}5 \text{ m}^3$.

3. a. $\mathcal{V}_{\text{eau}} = \dfrac{1}{3} \times x \times \text{Aire}_{\text{carré eau}}$



D'après Thalès $\dfrac{x}{2} = \dfrac{h}{1{,}5}$ donc $\dfrac{1{,}5x}{2} = h$.

Ainsi $\mathcal{V}_{\text{eau}} = \dfrac{1}{3} \times x \times h^2 = \dfrac{1}{3} \times x \times \left(\dfrac{1{,}5x}{2}\right)^2$
$= \dfrac{2{,}25x^2 \times x}{3 \times 4} = \dfrac{2{,}25x^3}{12}$.

Les quotients $\dfrac{3}{16}$ et $\dfrac{2{,}25}{12}$ sont-ils égaux ?

$3 \times 12 = 36$ et $16 \times 2{,}25 = 36$ donc $\dfrac{3}{16} = \dfrac{2{,}25}{12}$. Ainsi l'eau restante a un volume de $\dfrac{3}{16}x^3$ m^3.

3. b. À moitié vide donc $\mathcal{V}_{\text{eau}} = \dfrac{15}{2}$ m^3 soit 0,75 m^3.

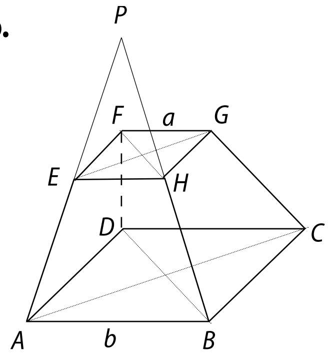
Résolvons $\dfrac{3}{16}x^3 = 0{,}75 \Leftrightarrow x^3 = 16 \times \dfrac{0{,}75}{3} \Leftrightarrow x^3 = 4$.

Avec le tableau de valeur de la fonction $x \longmapsto x^3$ sur [0 ; 2] :

x	1,4	1,5	1,6
$f(x) \approx$	2,75	3,375	4,096

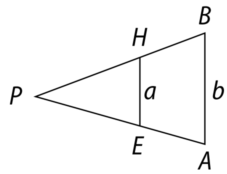
on déduit qu'à partir de $x \approx 1{,}5$ m, Aboubacar peut remplir son récipient.

74 **1.** et **2. b.**



2. a. Les points A, E, B et H forment une face du solide donc sont coplanaires. Puis $AB \neq EH$ donc (AE) et (BH) sont sécantes.

3. Dans PAB, (AB) // (EH) et $EH = \dfrac{1}{2}AB$.



D'après le théorème deThalès, $\dfrac{PA}{PE} = \dfrac{AB}{HE} = \dfrac{b}{a} = 2$.

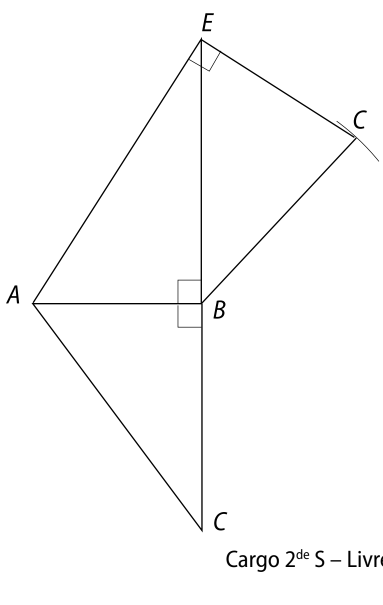
Ainsi E milieu de [AP].

4. De même (GC) et (HB) sont coplanaires et sécantes. Supposons que le point d'intersection soit différent de P, notons le P'. Comme en **3.**, H sera le milieu de [BP'] or H est déjà le milieu de [BP] donc la supposition est absurde, le point d'intersection est P.
De même avec (AE) et (DF). Finalement (AE), (BH), (CE) et (DF) sont concourantes en P.

5. a. (AE) et (CG) sont sécantes en P donc coplanaires.

b. Les plans (DBP) et (APC) sont sécants en une droite qui passe par P. Si on note O le centre de $ABCD$, $O \in (DBP)$. Ainsi O appartient à la droite d'intersection des plans (DBP) et (APC).
De même avec O' centre de $EHGF$.
P, O et O' appartiennent à une même droite, ils sont alignés.

75 **a.** $EABC$ est un tétraèdre.



b. $AB^2 + BC^2 = 56{,}25$ et $AC^2 = 56{,}25$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Sami a raison

c. EB est la hauteur de ce tétraèdre donc :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times BC}{2} \times EB.$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{4{,}5 \times 6}{2} \times 7 = 31{,}5 \text{ cm}^3.$$

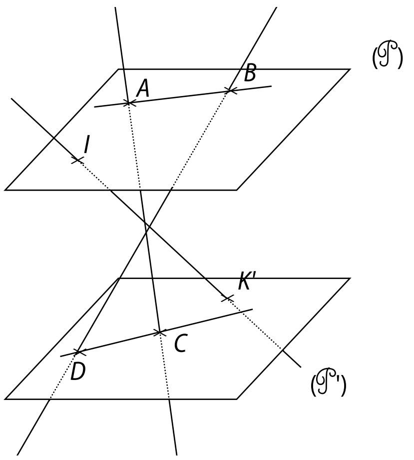
d. Dans le triangle EAC, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{EM}{EC} = \frac{EN}{EA} = \frac{MN}{AC}.$$

Ainsi $\frac{MN}{7{,}5} = \frac{4{,}2}{EC}$. Or $EC^2 = EB^2 + BC^2 = 85$.

$$MN = \frac{4{,}2 \times 7{,}2}{\sqrt{85}} \approx 3{,}4 \text{ cm}.$$

76 **1.**



• A et B sont distincts et n'appartiennent pas à ($\mathcal{P}$) donc ($\mathcal{P}$) et (ABC) sont sécants.

• (ABC) est un plan qui coupe deux plans ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}$') parallèles dont les droites d'intersections sont parallèles.

Donc (Δ) // (AB)

2. Les droites parallèles à ($\mathcal{P}$) passant par K sont incluses dans ($\mathcal{P}$) or $H \in$ ($\mathcal{P}$) donc (KH) non parallèle à ($\mathcal{P}$) donc (KH) coupe ($\mathcal{P}$).

• Si $I \in (AB)$, comme $H \in (BC)$, la droite (HI) est incluse dans le plan (ABC) et donc K qui est un point de (HI) et du plan ($\mathcal{P}$) appartiendrait à (Δ) or $K \notin$ (Δ), donc la supposition $I \in (AB)$ est absurde donc $I \notin (AB)$.

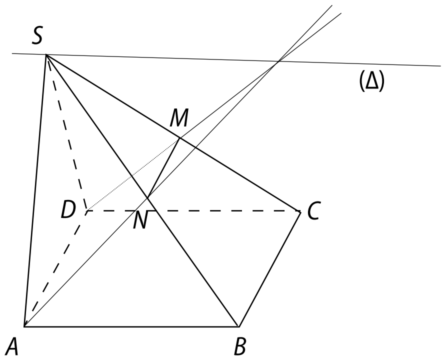
3. $H \in (AC)$ et $I \in (HK)$ donc les points I, A, H, K et C sont coplanaires. Le plan (AIC) coupe ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}$') en droites parallèles entre elles puisque ($\mathcal{P}$) // ($\mathcal{P}$'). Ainsi (AI) // (KC).

De même (KD) // (BI).

77 **1.** $ABCD$ parallélogramme, donc (AD) // (BC). De plus (BC) // (MN) donc (MN) // (AD).

2. a. Les plans (SAB) et (SDC) sont sécants, (AN) et (DM) sont des droites incluses dans ces plans et elles ne sont pas parallèles car $AD \neq MN$, donc elles sont sécantes.

b.



Le point d'intersection de (AN) et (DM) est un point qui appartient aux deux plans (SAB) et (SDC) donc il appartient à leur intersection (Δ). (S aussi).

3. (AB) et (DC) sont deux droites incluses dans les plans (SAB) et (SDC) donc, d'après le théorème du toit, (AB) et (DC) sont parallèles à (Δ) intersection des deux plans.

78 **1. a.** N milieu de [HF] et J milieu de [FC] donc (NJ) // (HC).

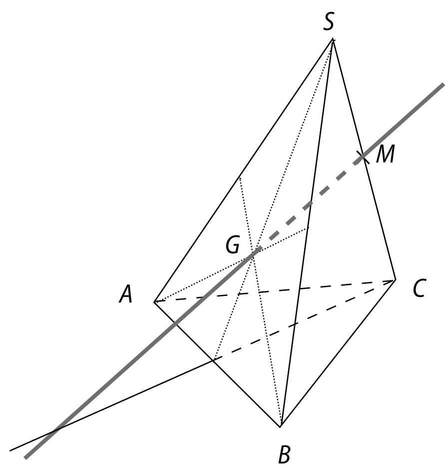
b. I milieu de [AC] et L milieu de [AH] donc (IL) // (CH).

c. (NJ) // (HC) // (JL) donc (IL) // (JN).

2. (MN) // (BG) et (IK) // (BG) (avec les triangles EBG et DBG).

3. (JN) et (MN) sont deux droites sécantes du plan (JMN) et elles sont parallèles aux droites (IL) et (IK) sécantes du plan (JKL) donc les plans (JMN) et (IKL) sont parallèles.

79 **a.**



b. (*MG*) et (*ABC*) sont sécants. *I* est le milieu de [*AB*].

G et *M* sont des points du plan (*SIC*) et dans le triangle *SIC*, $SM = \frac{1}{2}SC$ et $SG = \frac{2}{3}SI$, donc d'après le théorème de Thalè,s (*MG*) et (*IC*) sont sécantes.

Or (*IC*) est incluse dans (*ABC*) donc (*MG*) et (*ABC*) sont sécants.

c. L'intersection de (*MG*) et (*ABC*) est l'intersection de (*MG*) et (*IC*).

80 **a.** Dans le triangle *ACB*, *I* et *J* sont les milieux de [*AC*] et [*BC*] donc (*IJ*) // (*AB*).

De même dans le triangle *FED*, (*KL*) // (*DE*).

Or dans le prisme *ABCDEF*, les droites (*AB*) et (*DE*) sont parallèles.

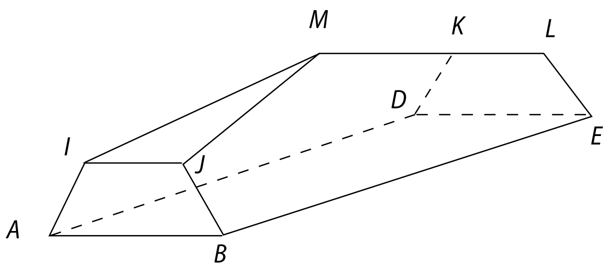
Ainsi (*IJ*) // (*AB*) et (*DE*) // (*KL*) et donc *I*, *J*, *K* et *L* sont coplanaires.

Enfin le plan (*IJK*) coupe deux plans parallèles (*ACB*) et (*DEF*) donc les droites d'intersection de ces plans (*IJ*) et (*KL*) sont parallèles.

b. Les plans (*IJM*) et (*KLM*) sont sécants en une droite passant par *M*. De plus, d'après le théorème du toit, cette droite d'intersection est parallèle aux droites (*IJ*) et (*KL*) puisqu'elles sont incluses dans ces plans et elles sont parallèles entre elles (a.).

Ainsi la droite d'intersection de (*IJM*) et (*KLM*) est la droite parallèle à (*IJ*) passant par *M*.

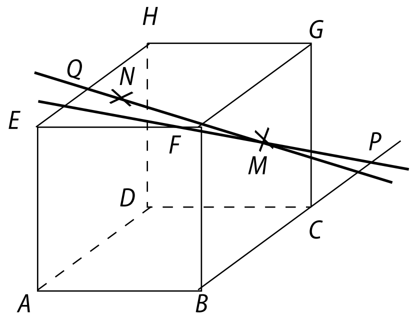
c.



81 **1. a.** *M*, *F*, *B* et *C* sont coplanaires et les droites (*MF*) et (*BC*) sont sécantes. Ce point d'intersection appartient à (*BC*) qui est, elle, incluse dans le plan (*FHC*) donc (*MF*) et (*EHC*) sont sécants.

1. b. De même (*NF*) et (*EH*) sont sécantes et leur point d'intersection appartient à (*EHC*). Donc (*NF*) et (*EHC*) sont sécants.

2.



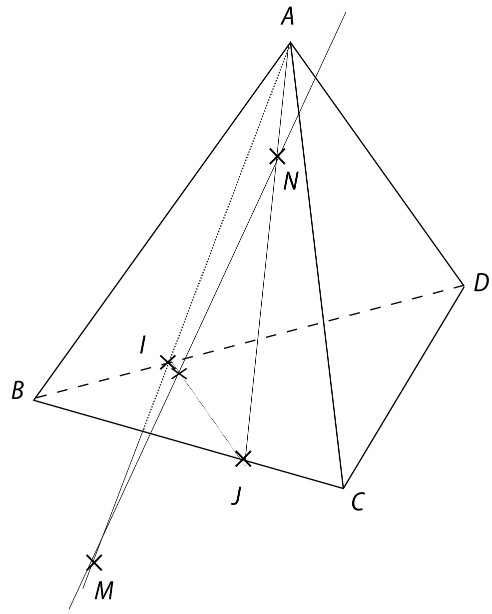
3. (*FMN*) est un plan qui contient la droite (*FM*) et donc *P*.

De même $Q \in (NF)$, (*NF*) est incluse dans (*FMN*) et donc $Q \in (FMN)$.

Ainsi *P*, *Q*, *M* et *N* appartiennent au plan (*FMN*), ils sont donc coplanaires.

4. (*MN*) est incluse dans le plan (*FMN*). Ce plan coupe (*EHC*) en la droite (*PQ*). L'intersection entre les droites (*MN*) et (*PQ*) est aussi l'intersection de (*MN*) et du plan (*EHC*).

82

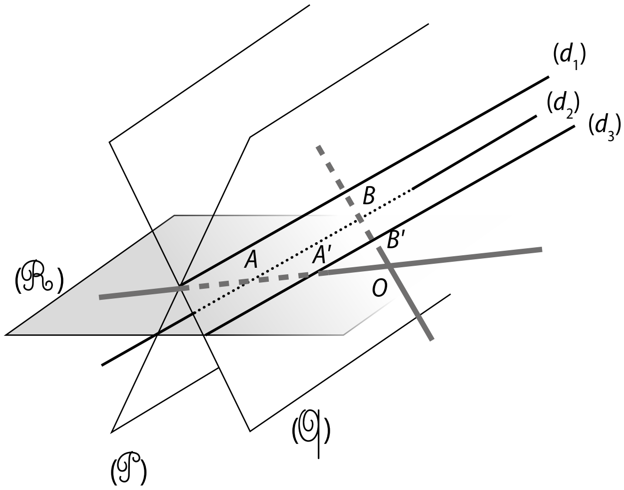


a. $N \in (AJ)$ donc $N \in (AIJ)$ et $M \in [AI)$ donc $M \in (AIJ)$. Ainsi *M* et *N* appartiennent au plan (*AIJ*) donc *M*, *N*, *I* et *J* sont coplanaires.

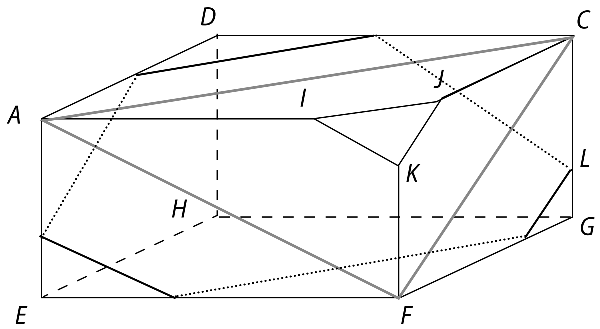
b. Voir figure.

(*AIJ*) et (*BCD*) sont deux plans sécants en (*IJ*) donc (*MN*), droite incluse dans (*AIJ*), coupe le plan (*BCD*) en le point d'intersection de (*MN*) et (*IJ*).

83

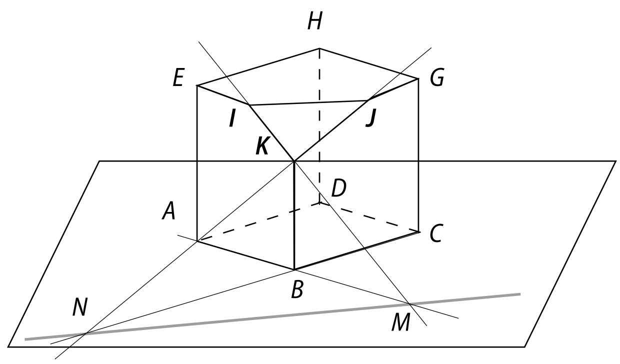


84



2. a. en noir ; **b.** en gris.

85



• On nomme *IJK* le triangle qui correspond à l'intersection de $(\mathcal{Q})$ et du cube.

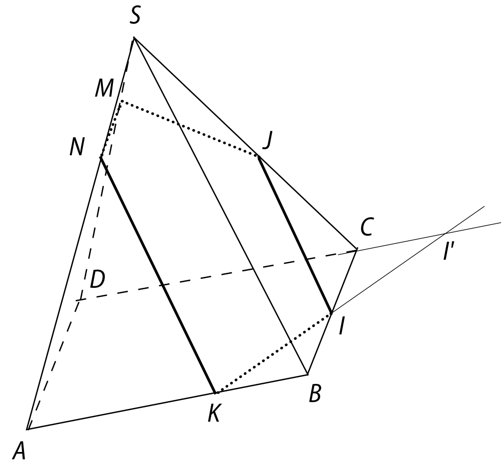
• On nomme *ABCD* la face du cube incluse dans $(\mathcal{P})$.

• (*IK*) et (*AB*) sont sécantes en *M*.

• (*JK*) et (*BC*) sont sécantes en *N*.

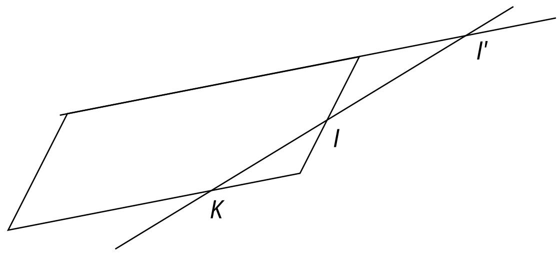
• $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont sécants en la droite (*MN*).

86 **a.**



1) Tracer [*IJ*] et [*IK*] qui sont inclus dans des faces.

2) Dans le plan de base :



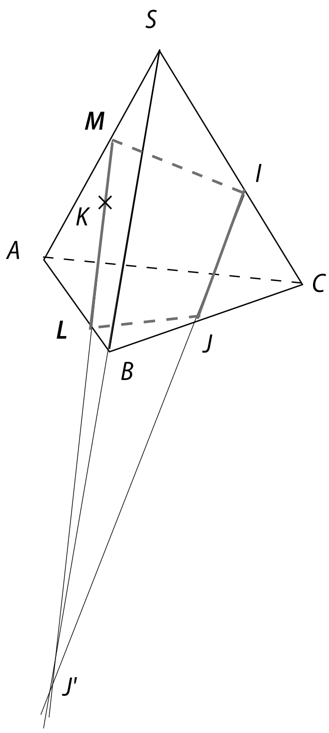
On peut tracer [*JM*].

3) (*IJ*) // (*SB*) donc, d'après le théorème du toit avec les plans (*SBC*) et (*SBA*), on obtient [*KN*] :

(*KN*) // (*IJ*) et (*KN*) // (*SB*)).

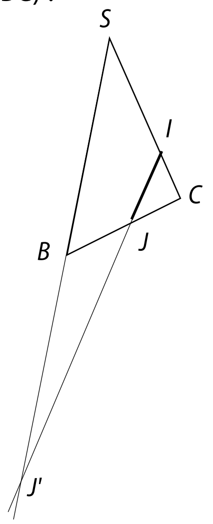
4) On trace [*NM*].

b.



1) Tracer [*IJ*].

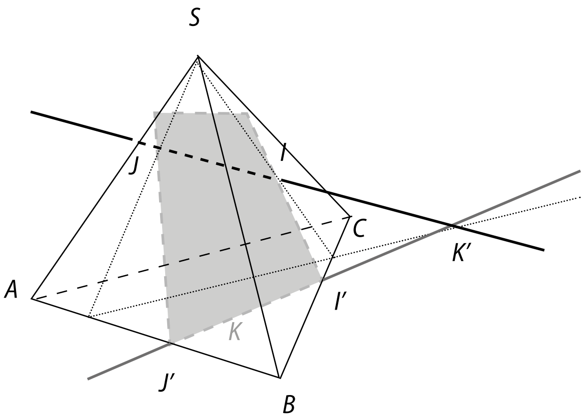
2) Dans le plan (*SBC*) :



3) Dans (*SAB*) : on trace [*LM*] en utilisant la droite (*J'K*).

4) On trace [*IM*].

c.

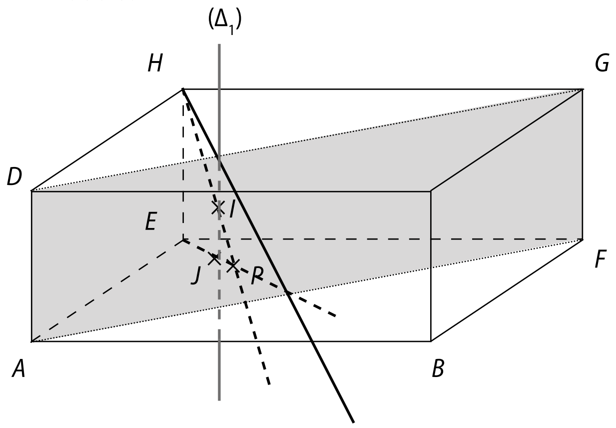


• On suppose que (*IJ*) non parallèle à (*ABC*). On trace l'intersection des plans (*SIJ*) et (*ABC*), puis on trace l'intersection de (*IJ*) et de (*ABC*) : *K'*.

• On trace (*KK'*) et on obtient la section du plan (*IJK*) et (*ABC*).

• Puis on termine la section (*J'J*) et (*I'I*).

87 **1. a. b.**



Pour *I* :

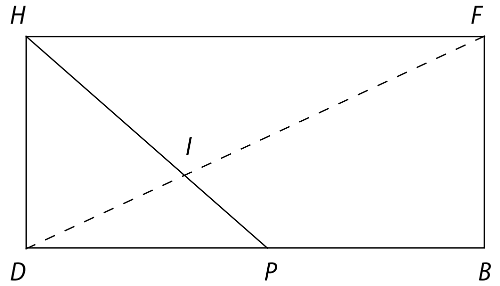
• On trace la droite d'intersection du plan (*AFGD*) et du plan (*EHP*).

• La droite (Δ_1) et la droite (*HP*) se coupent en *I*.

Pour *J* :

Les droites (Δ_1) et (*EP*) se coupent en *J*.

2. a.



b. Dans le plan (*DBF*) et d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{ID}{IF} = \dfrac{AP}{GE} = \dfrac{1}{2}$.

88 **1.** $O \in (AB)$ donc $O \in (MA)$ donc $I \in (MAB)$.

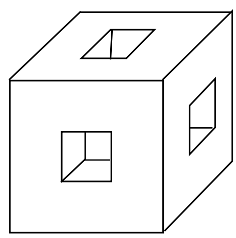
$J \in (MB)$ donc $J \in (MAB)$.

2. Le plan $(\mathcal{P})$.

3. a. Ils ont un point en commun : *O* et $A \in (MAB)$ mais $A \notin (\mathcal{P})$.

3. b. Les plans $(\mathcal{P})$ et (*MAB*) sont sécants en une droite et les points *O*, *I* et *J* appartiennent à ces deux plans. Donc *O*, *I* et *J* appartiennent à la droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et de (*MAB*) donc ils sont alignés.

89 **1.**

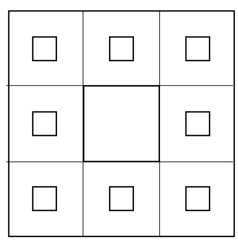


2. a. $9 \times 3 = 27$ petits cubes.

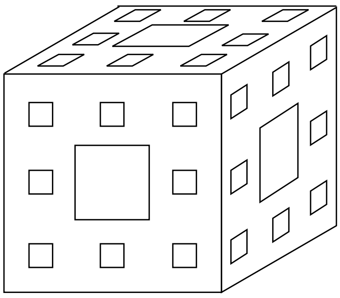
b. $\dfrac{7}{27}$.

c. $\mathcal{V} = 1 - \dfrac{7}{27} = \dfrac{20}{27}$ *u.*v.

3. a.



b.



c. Pour les 20 petits cubes restants, chacun va perdre 7 des 27 tout petits cubes.

Donc il reste $\frac{20}{27} \times \frac{20}{27} = \left(\frac{20}{27}\right)^2$ du cube.

d. Un petit cube tracé à la 2e étape va perdre $\frac{7}{27}$ de son volume. Or son volume de départ était de $\frac{1}{27}$ donc ces cubes ont pour volume $\frac{1}{27} \times (1 - \frac{1}{27})$, soit $\frac{20}{27^2}$. Et il y avait 20 de ces cubes après l'étape 1, donc

$\mathcal{V}_2 = 20 \times \frac{20}{27^2} = \left(\frac{20}{27}\right)^2$.

4. a. Avec le même raisonnement, il reste $(20)^2$ cubes qui sont tracés à cette étape et donc qui perdent $\frac{7}{27}$ de leur volume qui est de $\frac{1}{27^2}$.

$\mathcal{V}_3 = (20)^2 \times \frac{1}{27^2}\left(1 - \frac{1}{27}\right) = \frac{20^3}{27^3} = \left(\frac{20}{27}\right)^3$.

b. $\mathcal{V}_M = \left(\frac{20}{27}\right)^M$.

90 **a.** *SAO* triangle rectangle en *A* donc $SA^2 = SO^2 + AO^2$ soit $36 = SO^2 + 4$.

Ainsi $SO = 4\sqrt{2}$ cm.

$\mathcal{V}_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times$ Aire du disque $\times$ hauteur.

Ici $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$.

b. Ici, la génératrice de ce cône de révolution est 6 cm donc la face latérale est une partie d'un disque de rayon 6 cm.

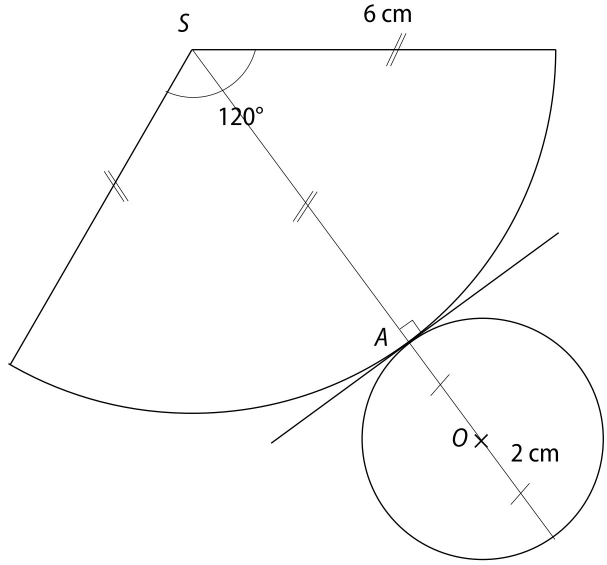
c. La longueur du disque de rayon 6 cm est de :

$2 \times \pi \times 6 = 12\pi$ cm.

La longueur du disque de la base du cône est de :

$2 \times \pi \times 2 = 4\pi$ cm.

Or $\frac{4\pi}{12\pi} = \frac{1}{3}$, donc il faut prendre le tiers de la longueur du disque de rayon 6 cm. Le tiers des 360° de ce disque, soit 120°.



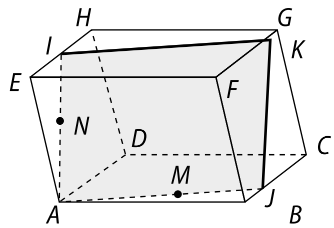
91 **1.** *A*, *M* et *N* ne sont pas alignés ; ces points définissent donc un plan, distinct de chacun des plans des faces du pavé. Les plans distincts (*AMN*) et (*ABC*) contiennent le point *A* ; ils sont donc sécants suivant une droite.

De plus (*ABC*) // (*EFG*) ; donc (*AMN*) et (*EFG*) sont aussi sécants suivant une droite.

On démontre de même que (*AMN*) est sécant suivant une droite avec chacun des plans des autres faces du pavé.

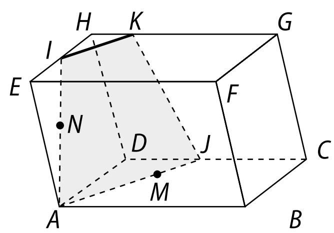
2. Les segments [*AI*] et [*AJ*] sont les intersections des faces *ADHE* et *ABCD* avec le plan (*AMN*) ; les intersections de (*AMN*) avec les faces *BCGF* et *EFGH*, lorsqu'elles existent, sont des segments respectivement parallèles à [*AI*] et [*AJ*].

a.



La section du pavé par le plan (*AMN*) est le parallélogramme *AJKI* tel que $K \in [FG]$, (*JK*) // (*AI*) et (*IK*) // (*AJ*).

b.

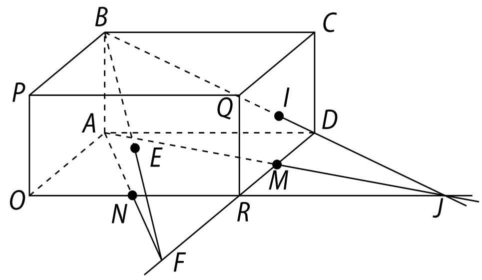


La section du pavé par le plan (*AMN*) est le trapèze *AJKI* tel que $K \in [GH]$ et (*IK*) // (*AJ*).

92 **1. a.** Dans le rectangle *OPQR*, (*NE*) // (*OP*) ; donc, (*NE*) // (*AB*) et *A*, *B*, *N*, *E* sont dans un même plan ($\mathcal{P}$).

Dans ($\mathcal{P}$), les droites (*BE*) et (*AN*), qui ne sont pas parallèles, sont sécantes en un point *F*.

Comme (*AN*) $\subset$ (*ADR*), *F* est aussi le point d'intersection de la droite (*BE*) avec le plan (*ADR*).



b. On démontre de même que le point d'intersection *J* de la droite (*BI*) avec le plan (*ADR*) est le point d'intersection des droites (*BI*) et (*AM*).

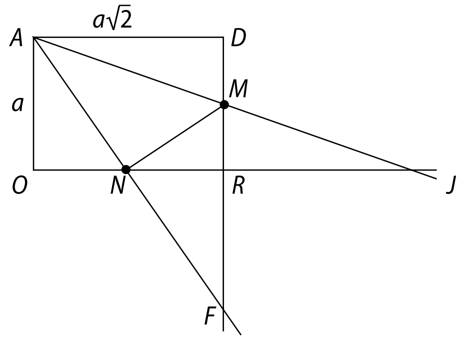
c. Les points *F*, *R* et *D* appartiennent au plan (*ADR*).

Le plan (*BPR*) contient les points *R* et *D*, car (*RD*) // (*PB*).

Or la droite (*BE*), qui contient le point *F*, est incluse dans le même plan, car $E \in (PR)$; donc, les points *F*, *R* et *D* appartiennent au plan (*BPR*).

On en déduit que *F*, *R* et *D* appartiennent à deux plans sécants ; ils sont donc alignés.

2. a. Face *AORD*, ainsi que les points *M*, *N*, *F* et *J* :



b. $AN^2 = AO^2 + ON^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$NM^2 = NR^2 + RM^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$

$AM^2 = AD^2 + DM^2 = 2a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{9a^2}{4}$

Or $\dfrac{3a^2}{2} + \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{9a^2}{4}$; donc *AMN* est un triangle rectangle en *N*.

3. a. $V = a \times a\sqrt{2} \times h = ha^2\sqrt{2}$; $v = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$,

où $\mathcal{B}$ est l'aire du triangle *AFI*, rectangle en *F* tel que :, $AF = 2AN = a\sqrt{6}$ et $FJ = 2NM = a\sqrt{3}$.

Donc, $v = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a\sqrt{6} \times a\sqrt{3}}{2} \times h = h\,a^2\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b. On en déduit que : $\dfrac{V}{v} = 2$.