CARGO

Collection de Mathématiques

5^e

Guide pédagogique

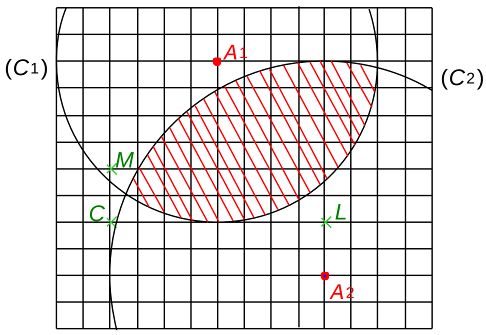
ISBN : 978-2-7531-0282-8

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Cercle ; son intérieur et son extérieur [1 p.8]	10, 11, 12, 13	30, 31	35, 42, 43, 44, 45, 46
2, 3	Inégalité triangulaire [2 p.8]	14, 15, 16, 17, 18	33	36, 37, 38
	Apprendre à utiliser l'inégalité triangulaire [1 p.10]	1, 2, 3, 4, 5, 19, 20		
3, 4, 5	Axes de symétrie d'un segment [3 p.9]		32	
	Equidistance et médiatrice [4 p.9]	21, 22, 26		39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47
	Apprendre à utiliser les propriétés de la médiatrice [2 p.11]	6, 7, 8, 9, 23, 24, 25, 27, 28, 29	34	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer (Les antennes relais)



1. Devant être à moins de 300 m pour capter le signal de l'antenne relais A_1 :
- Marie peut capter ce signal ;
- Laélie ne peut pas capter ce signal.

2.b. La limite, à l'intérieur de laquelle on capte le signal de l'antenne A_1, est le cercle (C_1) de centre A_1 et de rayon 300 m (6 carreaux sur le dessin).

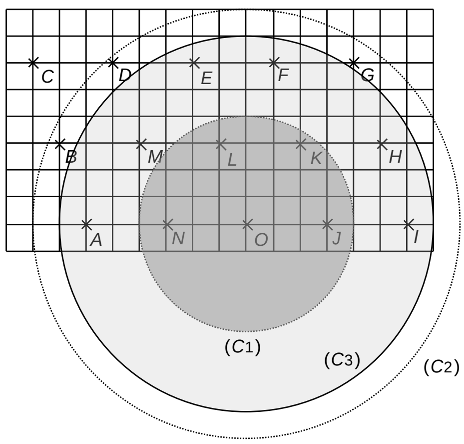
c. C étant à l'extérieur du cercle (C_1), Che ne peut capter le signal de l'antenne relais A_1.

3. L'antenne A_2 émet son signal jusqu'à 400 m ; donc la limite, à l'intérieur de laquelle on capte le signal de cette antenne, est le cercle (C_2) de centre A_2 et de rayon 400 m (8 carreaux sur le dessin) ; seule Laélie peut capter ce signal.

4. Pour capter le signal de chacune des deux antennes, Bernard doit être situé dans la zone coloriée en rouge.

1 Distances et cercles

1.



2.a. $EO \approx 3,2$ cm.
b. Cette distance est comprise entre 2 cm et 4 cm.

4. C'est en traçant, avec le compas, les cercles (C_1) et (C_2), de même centre O et de rayons respectifs 2 cm et 4 cm, que l'on peut compléter le tableau suivant :

	inférieure à 2 cm	entre 2 cm et 4 cm	supérieure à 4 cm
Points dont la distance au point O est :	O, N, L, K, J.	A, B, D, E, F, G, H, I, M.	C.

5. C'est en traçant, avec le compas, le cercle (C_3), de centre O et de rayon 3,5 cm, que l'on détermine les points situés à plus de 3,5 cm de O : B, C, D et G.

2 Des longueurs prises au hasard

1. Seul le tirage de Adze (6, 4 et 5) permet de construire un triangle ; le tirage de Fua conduit à trois points alignés et celui de Noah à une construction impossible.

2.a. Exemples de tirages ne permettant pas de construire des triangles :
1, 3 et 5 ; 1, 2 et 4 ; 1, 1 et 3 ; 2, 5 et 2 … *il y en a d'autres*.

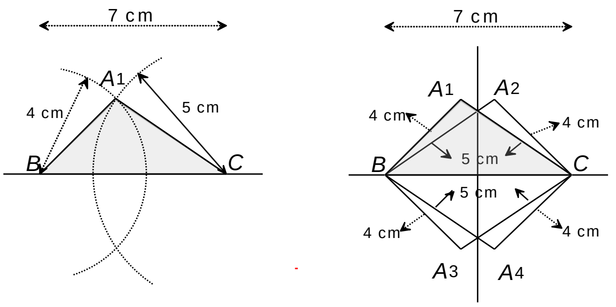
b. Raison pour laquelle il n'est pas possible de construire des triangles avec ces triplets de nombres :
$5>1+3$; $4>1+2$; $3>1+1$; $5>2+2$;
dans chaque cas : *le plus grand des trois nombres est supérieur à la somme des deux autres* ;
or : *le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite*.

3.a. Tirages permettant de construire des triangles :
1, 3 et 3 ; 2, 3 et 4 ; 2, 2 et 3 ; 4, 5 et 2 … *il y en a d'autres*.

b. Condition pour laquelle trois longueurs peuvent correspondre aux longueurs des côtés d'un triangle :
la plus grande des trois longueurs est inférieure à la somme des deux autres ;
et : *le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite*.

3 Triangles symétriques

1.



Construction, avec la règle graduée et le compas :
d'un triangle A_1BC des 4 triangles A_1BC, A_2BC, A_3BC, A_4BC.

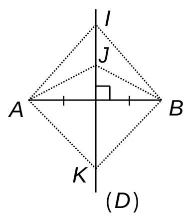
Ci-contre :
- [*BC*] est un segment de 7 cm de long ;
- A_1BC, A_2BC, A_3BC et A_4BC sont les quatre triangles dont les côtés (autres que [*BC*]) mesurent 4 cm et 5 cm.

2. La figure obtenue admet deux axes de symétrie :
- la droite (*BC*) ;
- la médiatrice de [*BC*].

4 Médiatrice et équidistance

1.a. Ce n'est pas en 1, *où (D) n'est pas perpendiculaire au support du segment [EF]*, ni en 3, *où (D) ne passe pas par le milieu du segment [EF]*, que la droite (*D*) est un axe de symétrie du segment [*EF*].
C'est donc en 2, *où (D) passe par le milieu du segment [EF] et est perpendiculaire à son support*, que la droite (*D*) est un axe de symétrie du segment [*EF*].
b. Cet axe de symétrie est appelé la <u>*médiatrice*</u> du segment.

2.



a. (*D*) est la médiatrice de [*AB*].
b. *I*, *J* et *K* sont trois points de (*D*).
c.d. On constate que : $IA=IB$, $JA=JB$ et $KA=KA$.

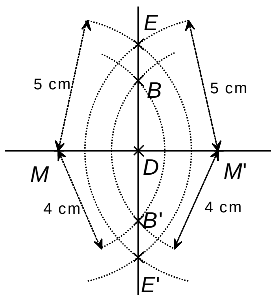
3. *Dans la symétrie par rapport à la droite (D) :*
le point <u>B</u> est le symétrique du point A et le point <u>I</u> est le symétrique du point I ;
par conséquent, les segments [AI] et <u>[BI]</u> sont symétriques ;
or, deux segments <u>symétriques</u> par rapport à une droite ont la même <u>longueur</u> ;
donc, les segments <u>[AI]</u> et <u>[BI]</u> ont la même <u>longueur</u>.

5 Equidistance

1. Si 2 400 m séparent les deux mairies, sur un dessin (où 1 cm représente 400 m) les points *M* et *M*' les représentant seront tels que $MM' = \frac{2\,400}{400} = 6$ cm.

2.

$MM' = 6$ cm.



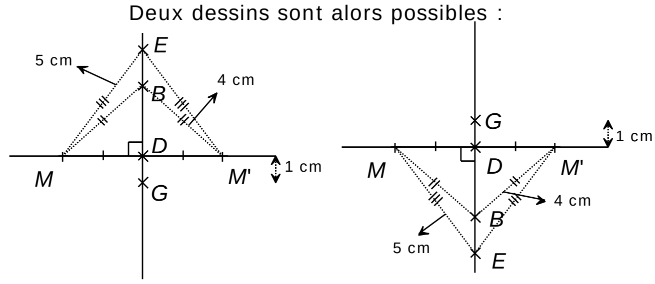
a. La construction de l'école est possible en *E* ou en *E*', les deux points situés sur le dessin à 5 cm de *M* et *M*'. (Ces 5 cm représentent en réalité $5\times400=2\,000$ m.)

b. La construction de la bibliothèque est possible en *B* ou en *B*', les deux points situés sur le dessin à 4 cm de *M* et *M*'. (Ces 4 cm représentent en réalité $4\times400=1\,600$ m.)
Le dispensaire, situé à 1 200 m de chaque mairie, ne peut être construit qu'au milieu *D* du segment [*MM*'].

3. Tous les points construits en 2. appartiennent à la médiatrice du segment [*MM*'].

4. Située à égale distance des deux mairies, la gare routière ne pourra être construite que sur cette médiatrice de [*MM*'].

5. Sachant que l'emplacement de la gare ne sera pas du même côté que l'école et la bibliothèque par rapport à la droite (*MM*'), à 400 m du dispensaire, sa construction n'est possible qu'en *G*, point situé sur le dessin à 1 cm de *D*.
Deux dessins sont alors possibles :



Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à utiliser l'inégalité triangulaire

Exercice 1

a. Il est possible de tracer un triangle dont les côtés mesurent 5,9 cm ; 6,5 cm et 2,3 cm car $5{,}9+2{,}3>6{,}5$;

b. Il est impossible de tracer un triangle dont les côtés mesurent 0,3 dm ; 0,6 dm et 0,25 dm car $0{,}3+0{,}25<0{,}6$.

c. Il est possible de tracer un triangle dont les côtés mesurent 47 mm ; 73 mm et 35 mm car $47+35>72$.

Exercice 2

BOA est le seul triangle possible car $9+6>12$;

les autres sont impossibles :
ANE car $37+52<92$;
OIE car $3{,}6+3{,}5<7{,}2$;
RAT car $5{,}6+8{,}1<13{,}8$.

Exercice 3

a. $I \notin [AB]$ car $7+14>20$;

b. $I \in [AB]$ car $45+33=78$;

c. $I \notin [AB]$ car $6{,}7+4{,}8>10{,}5$;

d. $I \in [AB]$ car $5{,}6+1{,}5=7{,}1$.

Exercice 4

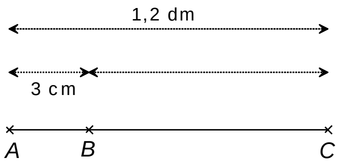
Les points *A*, *B* et *L* sont alignés car $1{,}4+2{,}7=4{,}1$;

Les points *C*, *D* et *I* ne sont pas alignés car $42+21>53$;

Les points *H*, *N* et *G* sont alignés car $4{,}4+19{,}4=23{,}8$;

Les points *F*, *O* et *E* ne sont pas alignés car $146+132>274$.

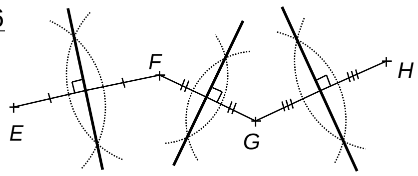
Exercice 5



$CB=CA-AB$
$=12-3=9$ cm.

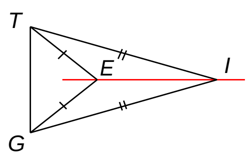
2 Apprendre à utiliser les propriétés des médiatrices

Exercice 6



Pour chaque segment, trace deux cercles sécants, de même rayon et centrés aux extrémités de ce segment ; la droite, passant par les deux points d'intersection de ces cercles, est la médiatrice de ce segment.

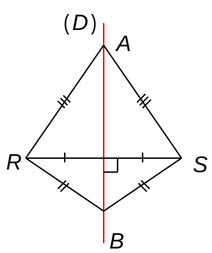
Exercice 7



1. Les points *I* et *E*, équidistants des extrémités du segment [*TG*], appartiennent à la médiatrice de ce segment.

2. La droite (*IE*), médiatrice du segment [*TG*], est perpendiculaire à la droite (*TG*).

Exercice 8

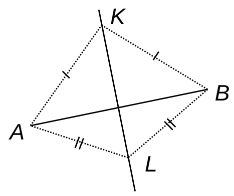


1. (*D*) est la médiatrice du segment [*RS*].

2. Si $A \in (D)$ et $B \in (D)$, alors les points *A* et *B* sont équidistants de *R* et *S* ; donc les triangles *ARS* et *BRS* sont isocèles, respectivement en *A* et *B*.

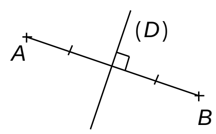
Exercice 9

1.



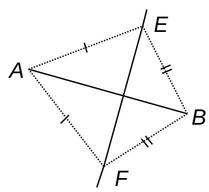
K et *L* sont équidistants de *A* et *B*, donc (*KL*) est la médiatrice de [*AB*].

2.



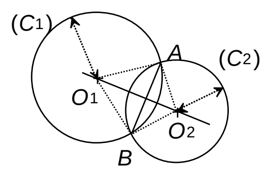
La droite (*D*) passe par le milieu de [*AB*] et est perpendiculaire à son support, donc (*D*) est la médiatrice de [*AB*].

3.



La droite (*EF*) n'est pas la médiatrice de [*AB*].

4.



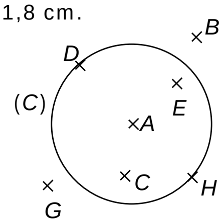
O_1 et O_2 sont équidistants de *A* et *B*, donc (O_1O_2) est la médiatrice de [*AB*].

Activités d'application

Régionnement du plan par un cercle

Exercice 10

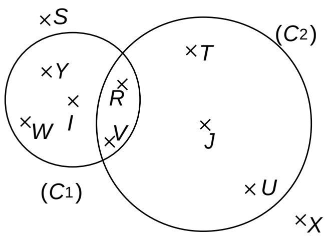
(C) est un cercle de centre A et de rayon 1,8 cm.



1. Points situés à exactement 1,8 cm de A : D et H.
2. Points situés à moins de 1,8 cm de A : C et E.
3. Points situés à plus de 1,8 cm de A : G et B.

Exercice 11

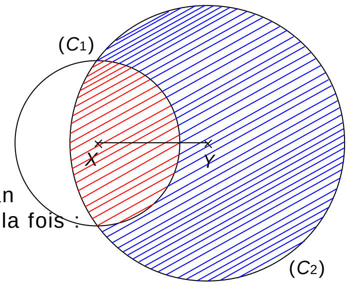
(C_1) est un cercle de centre I et de rayon 1,3 cm.
(C_2) est un cercle de centre J et de rayon 2 cm.



1. Points situés à la fois à moins de 1,3 cm de I et à moins de 2 cm de J : R et V.
2. Points situés à la fois à moins de 1,3 cm de I et à plus de 2 cm de J : I, W et Y.
3. Points situés à la fois à plus de 1,3 cm de I et à moins de 2 cm de J : J, T et U.
4. Points situés à la fois à plus de 1,5 cm de I et à plus de 2 cm de J : S et X.

Exercice 12

1. $XY = 4$ cm,
(C_1) est le cercle de centre X et de rayon 3 cm,
(C_2) est le cercle de centre Y et de rayon 5 cm.

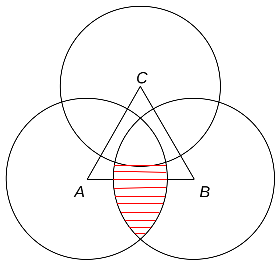


2.a. En rouge la partie du plan contenant les points situés à la fois :
- à moins de 3 cm de X,
- à moins de 5 cm de Y.

b. En bleu la partie du plan contenant les points situés à la fois à plus de 3 cm de X et à moins de 5 cm de Y.

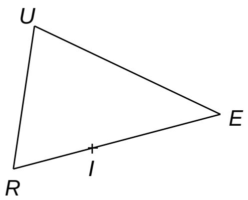
Exercice 13

1. ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm ; les 3 cercles ont pour centres les sommets de ce triangle et pour rayon 3 cm.
2. En rouge la partie du plan contenant les points situés à la fois :
- à moins de 3 cm de A et de B,
- à plus de 3 cm de C.



Inégalité triangulaire

Exercice 14



a. $RU < RE + EU$;
b. $RI + IE = RE$;
c. $ER + RU > EU$;
d. $RE < RU + UE$.

Exercice 15

Si deux côtés d'un triangle mesure 12 cm et 8 cm, alors le troisième côté :

a. ne peut pas mesurer 3 cm car $8+3<12$;
b. peut mesurer 5 cm car $8+5>12$;
c. peut mesurer 8 cm car $8+8>12$;
d. peut mesurer 12 cm car $8+12>12$.

Exercice 16

Si un triangle EFG est tel que $EF = 6{,}8$ cm et $EG = 4{,}7$ cm alors la longueur FG :
- peut être égale à 2,3 cm car $4{,}7+2{,}3>6{,}8$;
- peut être égale à 8,4 cm car $4{,}7+6{,}8>8{,}4$;
- ne peut pas être égale à 2 cm car $4{,}7+2<6{,}8$;
- peut être égale à 10 cm car $4{,}7+6{,}8>10$;
- peut être égale à 6,5 cm car $6{,}5+4{,}7>6{,}8$;
- ne peut pas être égale à 11,8 cm car $6{,}8+4{,}7<11{,}8$.

Exercice 17

Si le côté [ST] d'un triangle, isocèle en R, mesure 7 cm :
- il est possible que $SR = 3{,}51$ cm car $3{,}51+3{,}51>7$;
- il n'est pas possible que $SR = 3{,}4$ cm car $3{,}4+3{,}4<7$;
- il est possible que $SR = 1$ m car $100+100>7$.

Exercice 18

Si un triangle isocèle a un côté de longueur 12,5 cm et un autre de longueur 6,2 cm, alors :

le 3e côté ne mesure pas ~~6,2 cm~~ car $6{,}2+6{,}2<12{,}5$;	Le 3e côté mesure 12,5 cm car $12{,}5+6{,}2>12{,}5$.

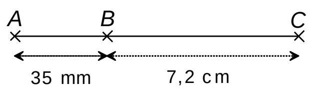
Exercice 19

1. $5{,}2+4{,}6+7{,}1=16{,}9$;
donc les points A, B, C et D sont alignés.
2. $3{,}2+3{,}7=6{,}9$ et $3{,}7+4{,}6=8{,}3$;
donc les points E, F, G et H ne sont pas alignés, alors que les points E, F et G le sont.

Exercice 20

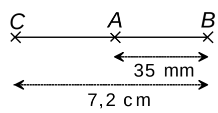
Si A, B et C sont alignés, $AB = 35$ mm et $BC = 7{,}2$ cm, alors deux cas de figures peuvent se présenter :

ou bien B est entre A et C



et $AC = 3{,}5+7{,}2 =$ 10,7 cm ;

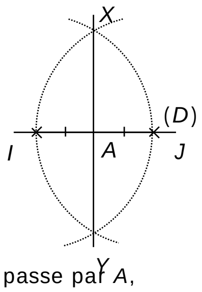
ou bien A est entre B et C



et $AC = 7{,}2-3{,}5 =$ 3,7 cm.

Problèmes de construction

Exercice 21



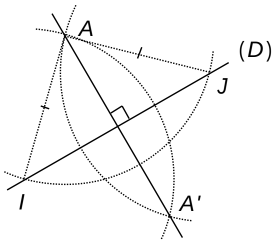
1. $A \in (D)$.

2. I et J sont deux points de la droite (D), tels que A soit le milieu de $[IJ]$.

3. Le cercle de centre I, passant par J, et le cercle de centre J, passant par I, sont sécants en deux points X et Y, équidistants de I et J.
On en déduit que la droite (XY) est la médiatrice de $[IJ]$. Comme cette médiatrice passe par A, (XY) est la perpendiculaire à la droite (D) passant par A.

Commentaires : pour cette construction n'ont été utilisés que le compas et la règle non graduée.

Exercice 22



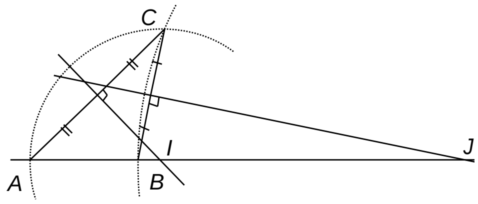
1. $A \notin (D)$.

2. Un cercle centré en A coupe (D) en deux points I et J, équidistants de A.

3. Les cercles centrés en I et J, passant par A, ont même rayon (puisque $IA=JA$) et sont sécants en un second point A', tel que $IA'=JA'$.
La droite (D), qui passe par les points I et J équidistants de A et A', est la médiatrice de $[AA']$. (AA') est donc la perpendiculaire à (D) passant par A.

Commentaires : pour cette construction n'ont été utilisés que le compas et la règle non graduée.

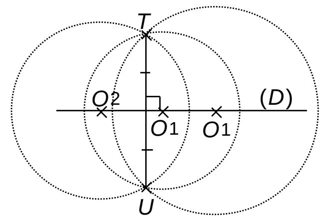
Exercice 23



1. ABC est un triangle tel que : $AB=4$ cm, $BC=5$ cm et $CA=7$ cm.

2.a. Le point I sur (BA), centre d'un cercle passant par A et C, est le point d'intersection avec (BA) de la médiatrice du segment $[AC]$.
b. Le point J sur (BA), centre d'un cercle passant par B et C, est le point d'intersection avec (BA) de la médiatrice du segment $[BC]$.

Exercice 24

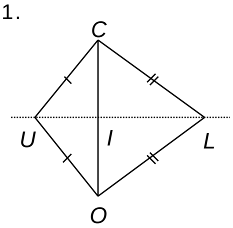


Les trois points, O_1, O_2 et O_3, centres de cercles passant par T et U doivent être équidistants de T et U, c'est-à-dire appartenir à la médiatrice (D) de $[TU]$.

Justifier, démontrer

Exercice 25

1.



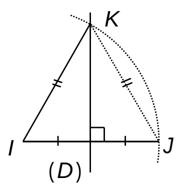
2. a. Les points U et L sont équidistants de C et O, puisque les triangles COU et COL sont isocèles respectivement en U et L.

b. On en déduit que la droite (UL) est la médiatrice du segment $[CO]$.

c. Cette droite coupe $[CO]$ en son milieu I.

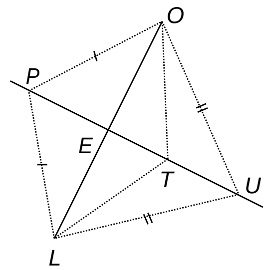
Exercice 26

1.



2. K appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$, de longueur 5 cm, et $IK=5$ cm.
On en déduit que $KI=KJ=IJ=5$ cm, c'est-à-dire que le triangle IJK est équilatéral.

Exercice 27



1. T est équidistant de O et L ?

Schéma de démonstration :

P et U sont équidistants de O et L.

↓

Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment.

↓

P et U sont sur la médiatrice de [OL].

↓

(PU) est la médiatrice de [OL]. — *T est un point de (PU).*

↓

Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

↓

T est équidistant de O et L.

2. E est le milieu de $[OL]$?

Schéma de démonstration :

(PU) est la médiatrice de [OL]. — *E est le point d'intersection de [OL] et (PU).*

↓

Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

↓

E est le point de [OL], équidistant de O et L.

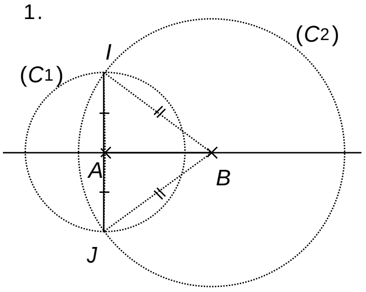
↓

E est le milieu de [OL].

3. Quatre cercles, passant par O et L, peuvent être tracés avec les points de la figure ; ils ont pour centres P, E, T et U.

Exercice 28

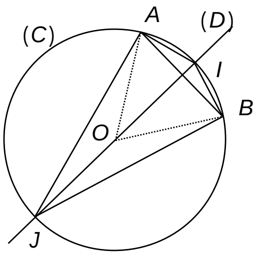
1.



2. $AI=AJ=3$ cm, donc A appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$;
$BI=BJ=5$ cm, donc B appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$.

On en déduit que la droite (AB) est la médiatrice de $[IJ]$.

Exercice 29



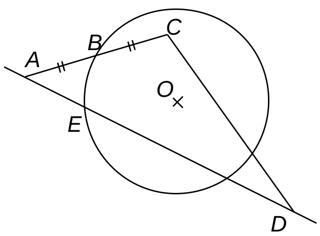
1. $OA=OB=$rayon du cercle (C), donc le point O, équidistant de A et B, appartient à la médiatrice (D) de la corde $[AB]$.

2. I et J, points d'intersection de (D) et (C), sont équidistants de A et B ;
donc les triangles AIB et AJB sont isocèles respectivement en I et J.

Bien comprendre, mieux rédiger

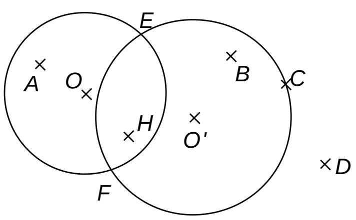
Exercice 30

O est le centre du cercle ;
$B \in [AC]$ et $E \in [AD]$.



- Le point C est à l'intérieur du cercle et à l'extérieur du segment $[AB]$.
- Le point D est à l'extérieur du segment $[BC]$ et à l'extérieur du cercle.
- Le point B est équidistant de A et de C.
- Le point O est à l'extérieur des segments $[BC]$ et $[ED]$ et à l'intérieur du cercle. Il est aussi équidistant de B et de E.
- Le point A est à l'extérieur du segment $[ED]$.

Exercice 31



- A est un point du disque de centre O.
- C est un point du cercle et du disque de centre O'.
- H est un point de l'intersection du disque de centre O et du disque de centre O'.
- E et F sont les seuls points d'intersection du cercle de centre O et du cercle de centre O'.
- B est un point du disque de centre O' car il est à l'intérieur du cercle de même centre.

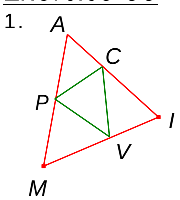
Exercice 32

1. Dans la figure de l'exercice 31 :
a. La droite (EF) n'est pas la médiatrice du segment $[OO']$; en effet ni E ni F ne sont équidistants de O et de O'.
b. La droite (OO') est la médiatrice du segment $[EF]$; en effet O et O' sont équidistants de E et de F.

2. Pour que la droite (EF) soit la médiatrice du segment $[OO']$ et la droite (OO') soit la médiatrice du segment $[EF]$, il faut que les deux cercles aient le même rayon.

Exercice 33

1.

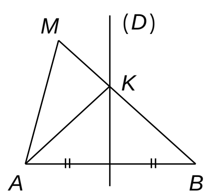


2.a. $PC<PA+AC$; $CV<CI+IV$; $PV<PM+MV$;
D'où $PC+CV+PV<PA+AC+CI+IV+PM+MV$

b. $PC+CV+PV<PA+PM+AC+CI+IV+MV$
$PC+CV+PV< \quad AM \quad + \quad AI \quad + \quad IM$.

c. Il s'agissait de démontrer que le périmètre du triangle PCV est inférieur au périmètre du triangle AMI.

Exercice 34



1. D'après l'inégalité triangulaire, dans le triangle MKB, $MK+KA>MA$.

Les points M, K et B sont alignés dans cet ordre, donc $MK+KB=MB$.

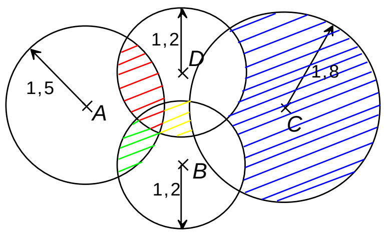
(D) est la médiatrice de $[AB]$ et $K \in (D)$, donc $KA=KB$.

En remplaçant KA par KB, je constate que :
$MK+KB>MA$ et $MK+KB=MB$; donc $MA<MB$.

2. *La médiatrice (D) d'un segment [AB] détermine deux demi-plans. Si un point M appartient au demi-plan contenant A, alors $MA<MB$. Si M appartient au demi-plan contenant B, alors $MB<MA$.*

Exercices d'approfondissement

Exercice 35



1. La zone composée des points situés à la fois à moins de 1,5 cm de *A*, à plus de 1,2 cm de *D* et à moins de 1,2 cm de *B* a pour couleur : vert.

2. La zone rouge est composée des points situés à la fois à moins de 1,5 cm de *A* et à moins de 1,2 cm de *D* ;

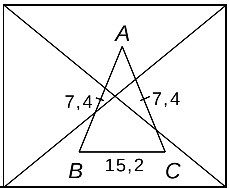
La zone jaune est composée des points situés à la fois à plus de 1,5 cm de *A*, à moins de 1,2 cm de *D*, à moins de 1,2 cm de *B* et à plus de 1,9 cm de *C* ;

La zone bleue est composée des points situés à la fois à plus de 1,2 cm de *D*, à plus de 1,2 cm de *B* et à moins de 1,9 cm de *C*.

Exercice 36

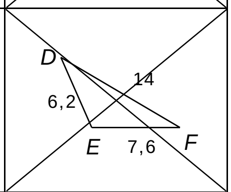
a. Construire un triangle *ABC* isocèle en *A* tel que *AB*=7,4 cm et *BC*=15,2 cm est impossible ;

en effet : *AC*=*AB*=7,4 cm,
mais 7,4+7,4<15,2.



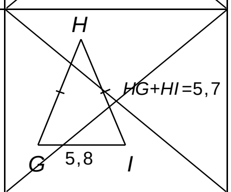
b. Construire un triangle *DEF* de périmètre 27,8 cm et tel que *DE*=6,2 cm et *EF*=7,6 cm est impossible ;

en effet : *DF*=27,8-6,2-7,6=14 cm,
mais 6,2+7,6<14.



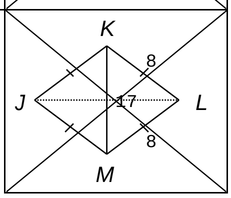
c. Construire un triangle *GHI* isocèle en *H*, de périmètre 11,5 cm et tel que *GI*=5,8 cm est impossible ;

en effet : *HG*+*HI*=11,5-5,8=5,7,
mais 5,7<5,8.



d. Construire un losange *JKLM* de périmètre 32 cm et tel que la diagonale *KM*=17 cm est impossible ;

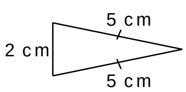
en effet : *LK*=*LM*=32÷4=8 cm,
mais 8+8<17.



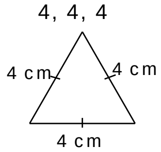
Exercice 37

S'il n'y a que trois triangles dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers de centimètres et dont le périmètre est égal à 12, alors les dimensions respectives (en cm) de ces triangles sont :

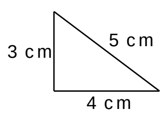
2, 5, 5



4, 4, 4



3, 4, 5



Exercice 38

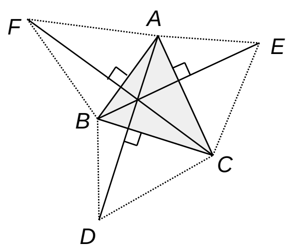
a. 1,3 dm=13 cm ; 70 mm=7 cm ;
13<8+7 donc on peut construire un triangle dont les côtés mesurent : 8 cm ; 1,3 dm et 70 mm.

b. 72 mm=7,2 cm ; 108 mm=10,8 cm ;
10,8<7,2+4,5 donc on peut construire un triangle dont les côtés mesurent : 72 mm ; 4,5 cm et 108 mm.

c. 2,7 dm=27 cm ; 153 mm=15,3 cm ;
27>15,3+10,7 donc on ne peut pas construire un triangle dont les côtés mesurent : 2,7 dm ; 153 mm et 10,7 cm.

d. 0,042 km=42 m ; 7 513 mm=7,513 m ;
42<7,513+34,5 donc on peut construire un triangle dont les côtés mesurent : 0,042 km ; 7 513 mm et 34,5 m.

Exercice 39



Commentaires : pour ces constructions n'ont été utilisés que le compas (et la règle non graduée).

a. (*BC*) est la médiatrice de [*AD*] si
- *D* est le symétrique de *A* par rapport à (*BC*)

ou

- *D* est le 2^{e} point d'intersection des cercles de centres *B* et *C*, passant par *A*.

b. (*CA*) est la médiatrice de [*BE*] si
- *E* est le symétrique de *B* par rapport à (*CA*)

ou

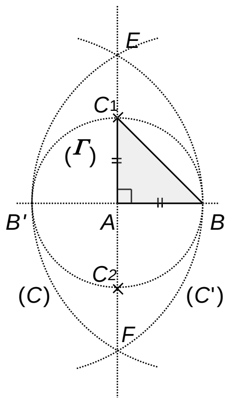
- *E* est le 2^{e} point d'intersection des cercles de centres *A* et *C*, passant par *B*.

c. (*AB*) est la médiatrice de [*CF*] si
- *F* est le symétrique de *C* par rapport à (*AB*)

ou

- *F* est le 2^{e} point d'intersection des cercles de centres *A* et *B*, passant par *C*.

Exercice 40



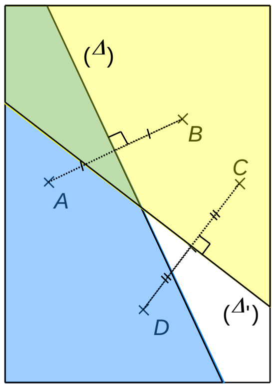
Données initiales : *A* et *B*.

Construction, uniquement avec le compas et la règle non graduée, d'un point *C* tel que *ABC* soit un triangle rectangle et isocèle en *A* :

- trace le cercle (Γ), de centre *A* et passant par *B*, qui recoupe (*AB*) en *B*' ;
- trace les cercles (*C*) et (*C*'), centrés respectivement en *B* et *B*', passant respectivement par *B*' et *B* ; ils se coupent en *E* et *F* ;
- la droite (*EF*), médiatrice de [*BB*'], coupe le cercle (Γ) en deux points C_1 et C_2 tels que ABC_1 et ABC_2 sont chacun un triangle rectangle et isocèle en *A*.

Exercice 41

1.



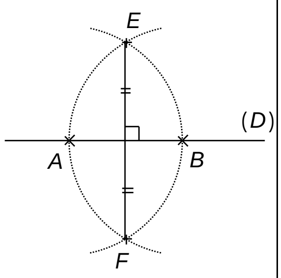
a. A, B, C et D sont 4 points non alignés.
b. (Δ) et (Δ') sont les médiatrices respectives de [AB] et [CD].

2.a. La partie du plan contenant les points plus près de A que de B est coloriée en bleue ou vert.

b. La partie du plan contenant les points plus près de C que de D est coloriée en jaune ou vert.

c. La partie du plan contenant les points à la fois plus près de A que de B et plus près de C que de D est coloriée en vert.

Exercice 42



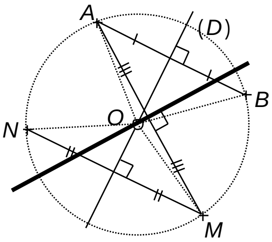
1. Une droite (D) et deux points A et B lui appartenant.

2. *Construction, uniquement avec le compas* de deux points E et F de façon que la droite (D) soit la médiatrice du segment [EF] :

● trace les cercles de centres A et B, passant respectivement par B et A ;

● ils se coupent en deux points E et F (qui conviennent).

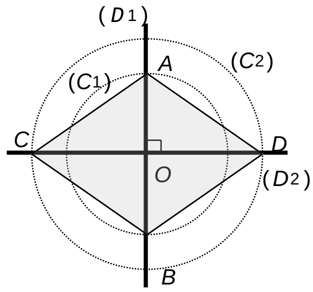
Exercice 43



1. La droite (D) étant médiatrice des segments [AB] et [MN], on a : (D)⊥(AB) et (D)⊥(MN) ; donc (AB)//(MN).

2.a. O étant le point d'intersection de la médiatrice de [AM] et de (D), c'est-à-dire le point d'intersection des médiatrices de [AM], [AB] et [MN], on a : $OA=OM$, $OA=OB$ et $OM=ON$.
b. Finalement : $OA=OB=OM=ON$.
c. Le cercle de centre O, passant par A, est circonscrit au quadrilatère $ABMN$.

Exercice 44



1.a. Les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires et sécantes en O.

b. Deux cercles (C_1) et (C_2), de centre O, coupent respectivement (D_1), en A et B, et (D_2), en C et D.

2.a. [AB] est un diamètre de (C_1), donc $OA=OB$;
la droite (CD), perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de [AB], est la médiatrice de [AB] ;
donc : $AC=BC$ et $AD=BD$.

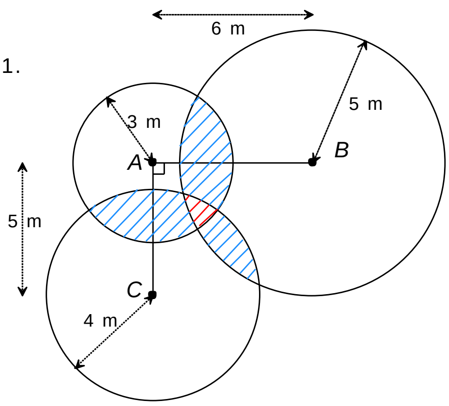
b. De la même façon, la droite (AB) est la médiatrice de [CD] ; donc : $AC=AD$.

c. Finalement le quadrilatère $ABCD$, dont les 4 côtés ont la même longueur, est un losange.

Activités d'intégration

Exercice 45 (Un problème de chèvre)

1.



2.a. Pour chaque chèvre, la limite de la zone qu'elle peut brouter est un cercle :

de centre A et de rayon 3 m (*3 cm sur le schéma*) pour la chèvre en A ;

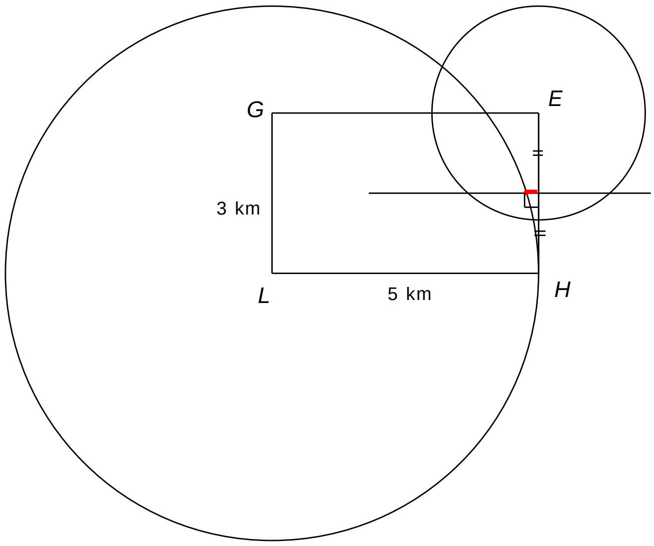
de centre B et de rayon 5 m (*5 cm sur le schéma*) pour la chèvre en B ;

de centre C et de rayon 4 m (*4 cm sur le schéma*) pour la chèvre en C ;

b. En bleu, les parties qui peuvent être broutées par exactement deux chèvres ; ce sont les parties communes à exactement deux disques.

3. En rouge, la zone où Wei peut installer un bac à eau où chaque chèvre pourra se rafraîchir ; c'est la partie commune aux trois disques.

Exercice 46 (La tour du parc)



Plan de situation

GLHE, dont les sommets constituent les points de rassemblement respectifs des Girafes, Lions, Hippopotames et Eléphants, est un rectangle tel que $GL=3$ km et $LH=5$ km.

La tour de guet, pour être à égale distance des points de rassemblement des éléphants et des hippopotames, doit être sur la médiatrice de [*EH*] ;

pour être à moins de 2 km de point de rassemblement des éléphants, elle doit être sur le disque de centre *E* et de rayon 2 km ;

pour être à plus de 5 km du point de rassemblement des lions, elle doit être à l'extérieur du disque de centre *L* et de rayon 5 km ;

Finalement la tour de guet doit être construite sur le segment colorié en rouge du plan ci-contre.

Exercice 47 (Jeu du triangle)

Le sac contient six bâtons de longueurs respectives (en cm) : 6, 10, 16, 20, 26 et 50.

1. Le bâton à ne jamais tirer est celui de longueur 50 cm ; en effet, les deux autres bâtons ne seront jamais assez longs pour pouvoir réaliser un triangle de dimensions ces trois longueurs (le plus long est 50 cm et la somme des deux autres est au plus de $20+26=46$ cm / inégalité triangulaire en défaut).
2. En ayant déjà tiré le bâton de 10 cm et celui de 16 cm, Farelle peut gagner si elle tire le bâton de 20 cm ; en effet : $20<10+16$; donc elle pourra réaliser un triangle de dimensions 10, 16 et 20.

Observation : seul ce dernier tirage permettra effectivement à Farelle de gagner.

	qui permettent de gagner :	qui permettent de rejouer :	qui permettent de perdre :
Tirages (avec 6)	6, 16 et 20 ($20<6+16$)	6, 10 et 16 ($16=6+10$) 6, 20 et 26 ($26=6+20$)	6, 10 et 20 ($20>6+16$) 6, 10 et 26 ($26>6+10$) 6, 10 et 50 ($50>6+10$) 6, 16 et 26 ($26>6+16$) 6, 16 et 50 ($50>6+16$) 6, 20 et 50 ($50>6+20$) 6, 26 et 50 ($50>20+26$)
Tirages (sans 6, avec 10)	10, 16 et 20 ($20<10+16$) 10, 20 et 26 ($26<10+20$)	10, 16 et 26 ($26=10+16$)	10, 16 et 50 ($50>10+16$) 10, 20 et 50 ($50>10+20$) 10, 26 et 50 ($50>10+26$)
Tirages (sans 6 et 10, avec 16)	16, 20 et 26 ($26<16+20$)		16, 20 et 50 ($50>16+20$) 16, 26 et 50 ($50>16+20$)
Tirages (sans 6, 10 et 16)			20, 26 et 50 ($50>20+26$)

2 *Propriétés des symétries*

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Rappels sur les symétries [1 p.20]	25, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38	45, 46	55
	Apprendre à construire le symétrique d'une figure [1 p.22]*	1, 2, 3, 4, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21	47, 48, 49, 51	61, 62, 63
	Apprendre à utiliser les tableaux de correspondance [2 p.23]*	5, 6, 7, 8		56
2	Symétrique d'un cercle [2 p.21]	26, 27, 28, 30	22, 23, 24	
3	Symétrique du milieu d'un segment [3 p.21]	31		
4	Symétriques de deux droites perpendiculaires [4 p.21]			53
5	Symétriques de deux droites parallèles [5 p.21]	39, 40		
	Apprendre à justifier avec les propriétés des symétries [3 p.24]	9, 10, 11, 12, 13, 41, 42, 43, 44	50, 52	54, 57, 58, 59, 60

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

1 Des propriétés connues

1. Les souvenirs de Nicole sont parfaitement corrects pour la symétrie axiale.
2. Pas de véritable erreur pour la symétrie centrale, mais deux propriétés sont à compléter :
   le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est parallèle ;
   le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment de même longueur et de support parallèle.

2 Symétrique d'un cercle

1.a. Dans une symétrie axiale, le symétrique d'un segment est un segment de même longueur ;
donc : $A'M'=AM$, $A'N'=AN$ et $A'P'=AP$;
or $AM=AN=AP=1$ cm ; donc : $A'M'=A'N'=A'P'=1$ cm.
b. Les points M', N' et P' appartiennent au cercle de centre A' et de rayon 1 cm.
c. Le symétrique du cercle ($\mathcal{C}$) [centre A, rayon 1] est le cercle ($\mathcal{C}'$) [centre A', même rayon].
2.a. Dans une symétrie centrale, le symétrique d'un segment est un segment de même longueur ;
donc : $T'K'=TK$ et $T'L'=TL$;
or $TK=TL=2{,}5$ cm; donc : $T'K'=T'L'=2{,}5$ cm.
b. Les points K' et L' appartiennent au cercle de centre T' et de rayon 2,5 cm

3 Symétries et milieux

Dans une symétrie centrale (partie 1) comme dans une symétrie axiale (partie 2) le cumul des deux propriétés "*le symétrique d'une droite est une droite*" et "*le symétrique d'un segment est un segment de même longueur*" permet d'affirmer que "*le symétrique du milieu d'un segment est le milieu de son segment symétrique*".

4 Symétries et droites perpendiculaires

Dans une symétrie axiale (partie 1) comme dans une symétrie centrale (partie 2) la propriété "*le symétrique d'un angle est un angle de même mesure*" permet d'affirmer que "*les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires*".

5 Symétries et droites parallèles

1. Démonstration de la propriété "*dans une symétrie axiale, les symétriques de deux droites parallèles sont deux droites parallèles*", obtenue en complétant la partie surlignée en jaune :

Les droites (D_1) et (Δ) sont perpendiculaires.
Or, les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
Donc les droites (D_1') et (Δ') sont perpendiculaires.
De la même façon, (D_2') et (Δ') sont perpendiculaires.
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors ces deux droites sont parallèles.
On en déduit que (D_1') et (D_2') sont parallèles.

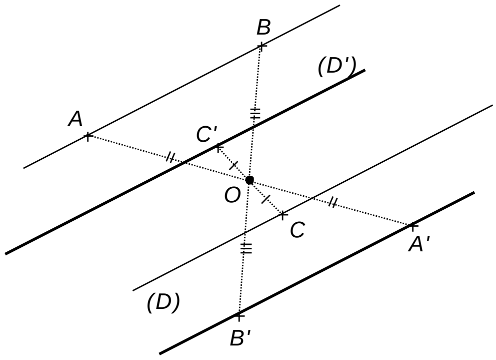
2. Démonstration de la propriété "*dans une symétrie centrale, les symétriques de deux droites parallèles sont deux droites parallèles*" en utilisant les propriétés P_1 "*le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est parallèle*" et P_2 "*si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles*" :

(D'), symétrique de (D) par rapport à O, est parallèle à (D) [d'après P_1] donc aussi à (Δ) [d'après P_2] ;
(Δ'), symétrique de (Δ) par rapport à O, est parallèle à (Δ) [d'après P_1] ;
Finalement (D') et (Δ'), toutes deux parallèles à (Δ), sont parallèles entre elles [d'après P_2].

Méthodes et savoir-faire

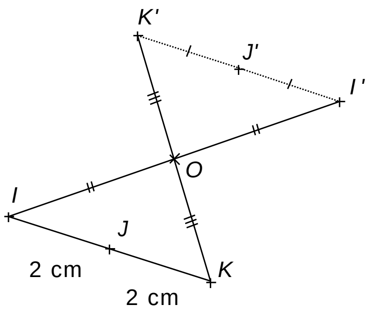
1 Apprendre à construire le symétrique d'une figure

Exercice 1



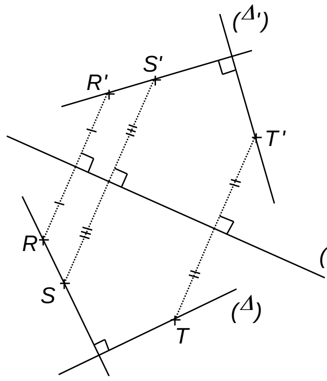
2.b. Si A', B' et C' sont les symétriques respectifs de A, B et C par rapport à O, alors :
- (A'B') est la droite symétrique de (AB) par rapport à O ;
- la droite (D'), passant par C' et parallèle à (D), est la symétrique de (D) par rapport à O.

Exercice 2



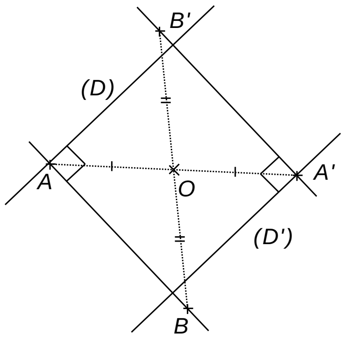
2.b. Si I' et K' sont les symétriques respectifs de I et K par rapport à O, alors J', symétrique de J par rapport à O, est le milieu du segment [I'K'].

Exercice 3



2.b. Si R', S' et T' sont les symétriques respectifs de R, S et T par rapport à la droite (D), alors (Δ'), symétrique de (Δ) par rapport à (D), est la droite passant par T' et perpendiculaire à la droite (R'S').

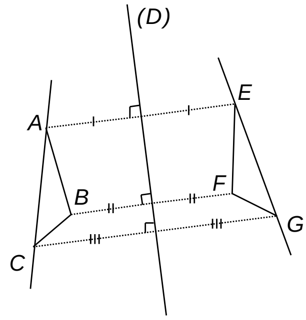
Exercice 4



2.b. Si A' et B' sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O, alors (D'), symétrique de (D) par rapport à O, est la droite passant par A' et perpendiculaire à la droite (A'B').

1 Apprendre à utiliser les tableaux de correspondance

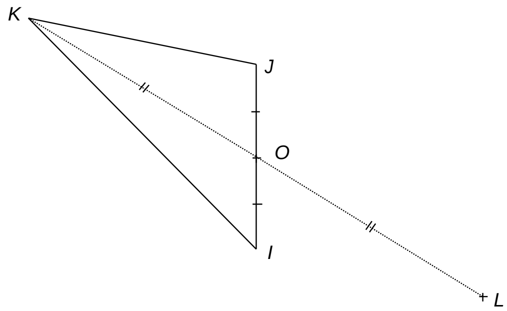
Exercice 5



2. Tableau de correspondance pour la symétrie par rapport à la droite (*D*) :

A	*C*	*B*	[*AB*]	[*FG*]	[*EG*]	*EFG*
E	*G*	*F*	[*EF*]	[*BC*]	[*AC*]	*ABC*

Exercice 6



2. Tableau de correspondance pour la symétrie de centre *O* :

I	*L*	*O*	[*IL*]	[*OI*]	[*KL*]	*IOK*
J	*K*	*O*	[*JK*]	[*OJ*]	[*LK*]	*JOL*

Exercice 7

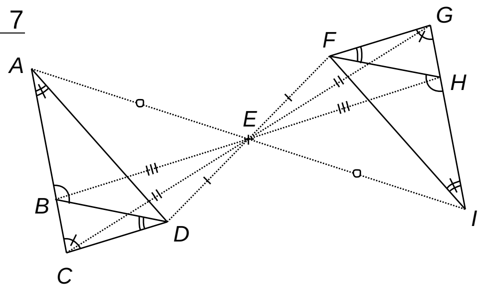
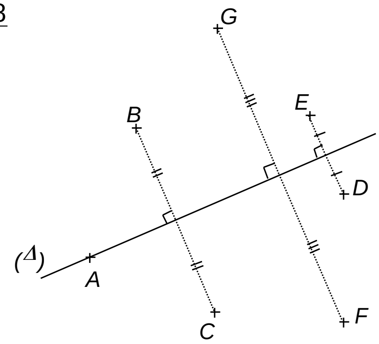


Tableau de correspondance pour la symétrie de centre *E* :

B	*F*	*E*	$\widehat{GFH}$	$\widehat{FGH}$	$\widehat{DAC}$	$\widehat{FHI}$
H	*D*	*E*	$\widehat{CDB}$	$\widehat{DCB}$	$\widehat{FIG}$	$\widehat{DBA}$

Exercice 8



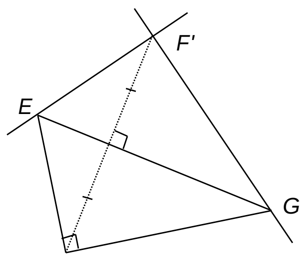
2. Ci-dessus une figure *possible*, satisfaisant aux données de l'exercice.
3. Tableau de correspondance pour la symétrie par rapport à la droite (Δ) :

A	*B*	*D*	(*BG*)	(*AF*)	(*BD*)	(*BF*)
A	*C*	*E*	(*CF*)	(*AG*)	(*CE*)	(*CG*)

1 Apprendre à justifier avec les propriétés des symétries

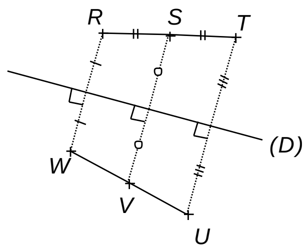
Exercice 9

1.



2. Les droites (*EF*') et (*GF*') sont perpendiculaires.
Justification : ce sont les symétriques, par rapport à la droite (*EG*), des deux droites (*EF*) et (*GF*) elles-mêmes perpendiculaires.

Exercice 10

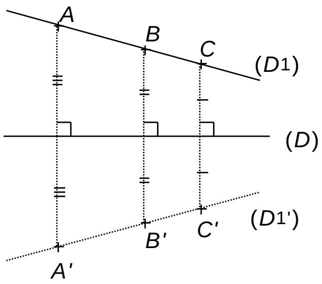


1. Tableau de correspondance pour la symétrie par rapport à la droite (*D*) :

R	*S*	*T*	[*RT*]
W	*V*	*U*	[*WU*]

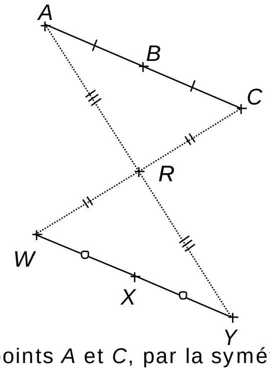
2. *V* est le milieu de [*WU*] ; en effet, si deux segments, [*RT*] et [*WU*], sont symétriques par rapport à une droite, alors leurs milieux sont aussi symétriques.

Exercice 11



2. Les points *A*, *B* et *C* sont alignés sur la droite (D_1). Leurs symétriques *A*', *B*' et *C*', par rapport à la droite (*D*), sont aussi alignés sur la droite (D_1'), symétrique de la droite (D_1).

Exercice 12



1. Les symétriques des points *A* et *C*, par la symétrie de centre *R*, sont respectivement *Y* et *W*.
2.a. Les milieux de deux segments symétriques sont eux-mêmes symétriques (symétrie centrale ou axiale).
b. On en déduit que les points *B* et *X* sont symétriques par rapport au point *R*.
c. *AB*=*BC*=*WX*=*XY*.

Exercice 13

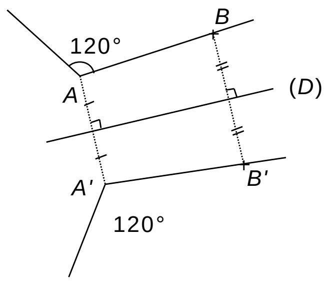
BE=2,3 cm.
Justification : deux cercles symétriques par rapport à une droite ont le même rayon.

Activités d'application

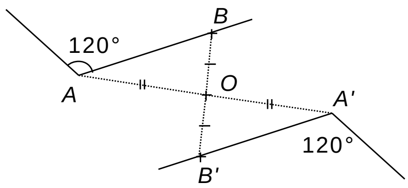
Constructions de symétriques

Exercice 14

2.

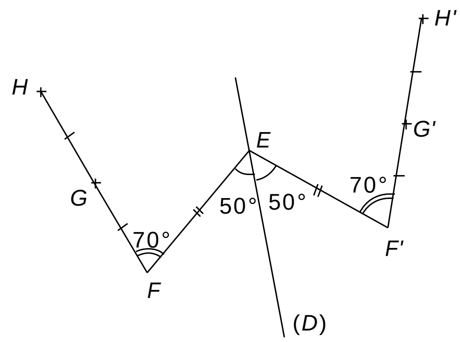


3.



Dans les deux cas, après avoir construit les points *A*' et *B*' (symétriques des points *A* et *B*), la construction du symétrique $\hat{A}'$ de l'angle $\hat{A}$, dont un premier côté est [*A*'*B*'), se fait *avec le rapporteur et la règle non graduée … en étant attentif à la position du second côté de cet angle*.

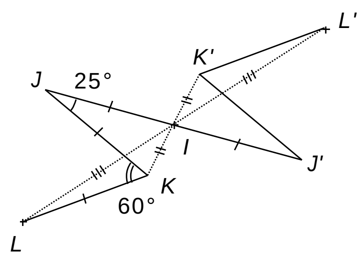
Exercice 15



EF'=*EF*=3 cm. *F*'*H*'=*FH*=4 cm.

La construction du symétrique de la figure initiale (*HGFE*) par rapport à la droite (*D*) se fait de proche en proche (*F*' puis *G*' puis *H*') *avec le rapporteur et la règle graduée*.

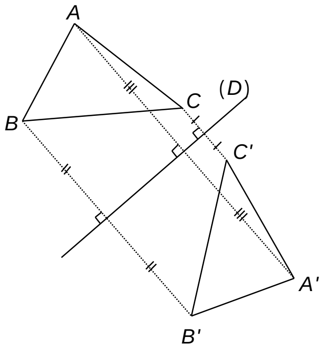
Exercice 16



La construction des symétriques *J*', *K*' et *L*' des points *J*, *K* et *L*, par rapport à *I*, *peut* se faire *en utilisant uniquement la règle graduée* (on *peut* aussi *utiliser le compas et la règle non graduée*).

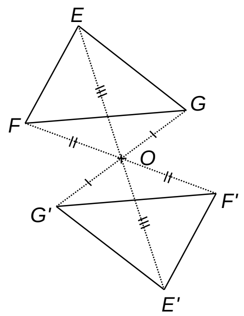
Exercice 17

1.



A'B'C' est le symétrique de *ABC* par rapport à (*D*).

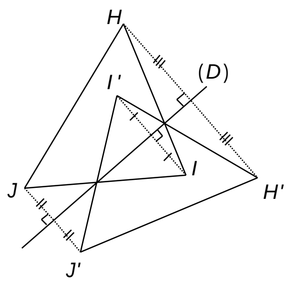
2.



E'F'G' est le symétrique de *EFG* par rapport à *O*.

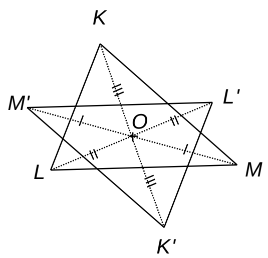
Exercice 18

1.



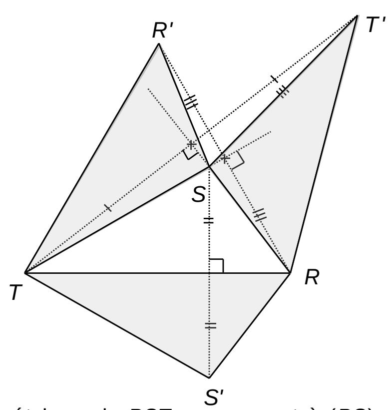
H'I'J' est le symétrique de *HIJ* par rapport à (*D*).

2.



K'L'M' est le symétrique de *KLM* par rapport à *O*.

Exercice 19



a. *RST'* est le symétrique de *RST* par rapport à (*RS*).
b. *R'ST* est le symétrique de *RST* par rapport à (*ST*).
c. *RS'T* est le symétrique de *RST* par rapport à (*TR*).

Exercice 20

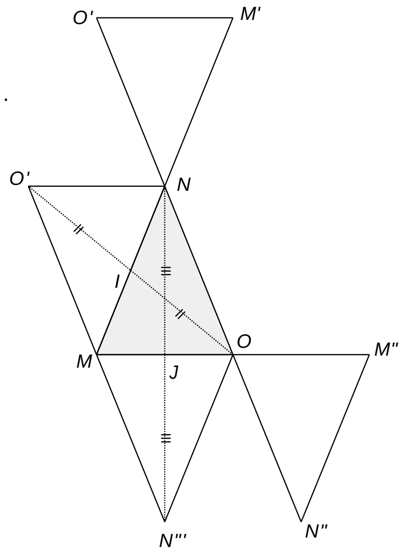
MN=*ON*=4 cm et *MO*=3 cm.

a. *M'NO'* est le symétrique de *MNO* par rapport à *N*.

b. *M''N''O* st le symétrique de *MNO* par rapport à *O*.

c. *NMO'* est le symétrique de *MNO* par rapport à *I*.

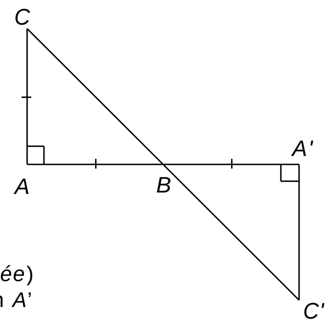
d. *ON'''M* est le symétrique de *MNO* par rapport à *J*.



Exercice 21

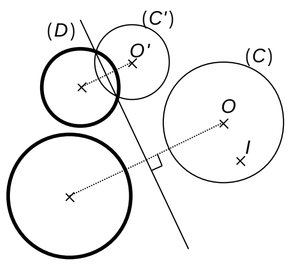
1. *ABC* est un triangle rectangle et isocèle en *A*.

2.a. Le symétrique du point *A* par rapport à *B* est le point *A'* intersection du cercle de centre *B* passant par *A* (*utilisation du compas*) et de la droite (*AB*) (*utilisation de la règle non graduée*).
b. Le symétrique du point *C* par rapport à *B* est le point *C'* intersection de la droite (*CB*) (*utilisation de la règle non graduée*) et de la droite perpendiculaire en *A'* à [*AA'*] (*utilisation de l'équerre*).



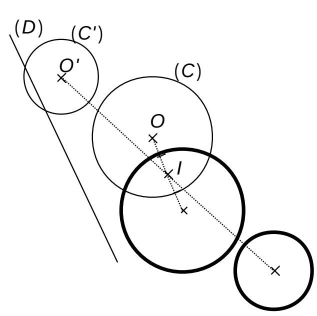
Exercice 22

2.a.



Construction des symétriques de (*C*) et (*C'*) par rapport à la droite (*D*).

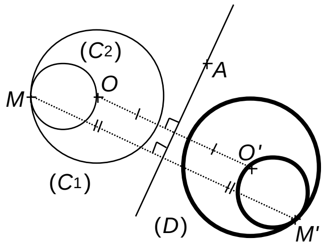
b.



Construction des symétriques de (*C*) et (*C'*) par rapport au point *I*.

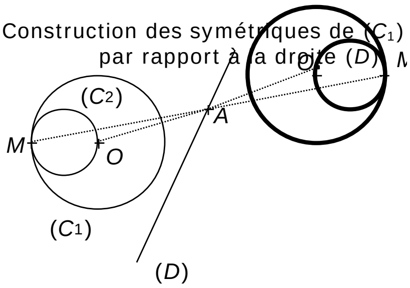
Exercice 23

2.a.



Construction des symétriques de (C_1) et (C_2) par rapport à la droite (D).

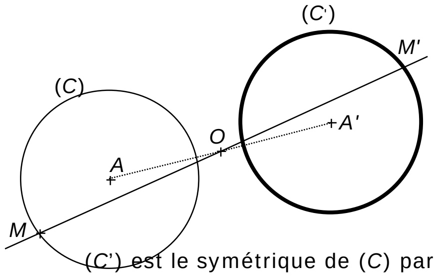
b.



Construction des symétriques de (C_1) et (C_2) par rapport au point A.

Exercice 24

2.

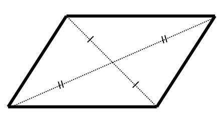
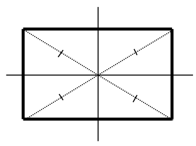
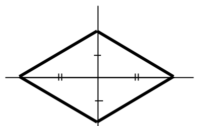
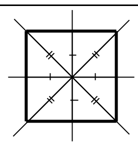


(C') est le symétrique de (C) par rapport O.

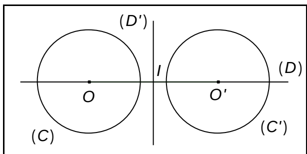
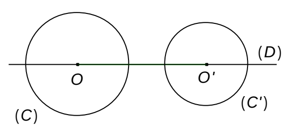
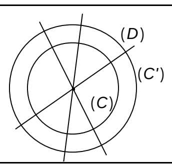
3. Le symétrique du point M par rapport à O est le point M' intersection du cercle (C') et de la droite (MO) (*utilisation de la règle non graduée*).

Axe et centre de symétrie

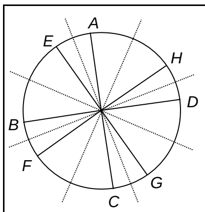
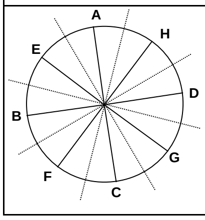
Exercice 25

	Tout parallélogramme admet : ● un centre de symétrie (le point d'intersection de ses diagonales).
	Tout rectangle admet : ● 1 centre de symétrie (le point d'intersection de ses diagonales), ● 2 axes de symétrie (les médiatrices de ses côtés).
	Tout losange admet : ● 1 centre de symétrie (le point d'intersection de ses diagonales), ● 2 axes de symétrie (ses diagonales).
	Tout carré admet : ● 1 centre de symétrie (le point d'intersection de ses diagonales), ● 4 axes de symétrie (ses diagonales et les médiatrices de ses côtés).

Exercice 26

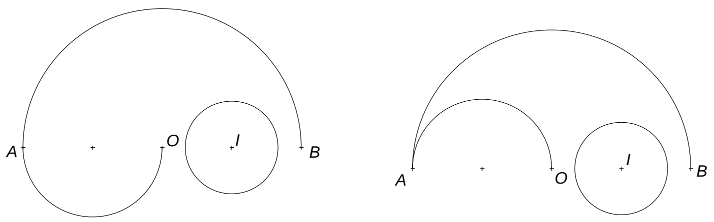
	La figure ci-contre admet : ● 1 centre de symétrie (le milieu du segment [OO']), ● 2 axes de symétrie (la droite (OO') et la médiatrice du segment [OO']).
	La figure ci-contre admet : ● 1 axe de symétrie (la droite (OO')).
	La figure ci-contre admet : ● 1 centre de symétrie (le centre commun des 2 cercles), ● une infinité d'axes de symétrie (tout les diamètres … communs aux deux cercles)

Exercice 27

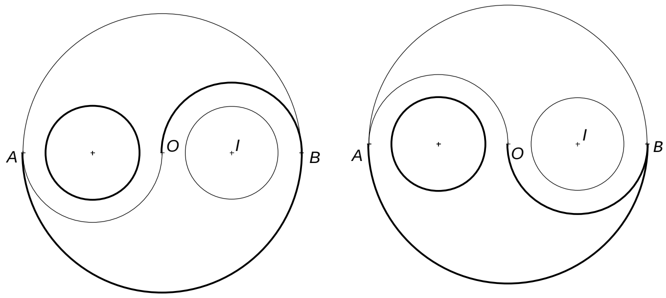
	La figure ci-contre, où [AC]⊥[BD] et [EF]⊥[FH], admet : ● 1 centre de symétrie (le centre du cercle), ● 4 axes de symétrie (les bissectrices, en pointillés, des angles $\widehat{AOE}$, $\widehat{EOB}$, $\widehat{BOF}$ et $\widehat{FOC}$).
	La figure ci-contre, où [AC]⊥[BD], [EF]⊥[FH] et $\widehat{AOE}$=45°, admet : ● 1 centre de symétrie (le centre du cercle), ● 8 axes de symétrie (les bissectrices, en pointillés, des mêmes angles et les diamètres [AC], [BD], [EF] et [FH]).

Exercice 28

1. Deux figures sont possibles (où OA=OB=6 cm, I milieu de [OB] et le cercle de centre I a pour rayon 2 cm).



2. Figures complétées avec le minimum d'éléments, de sorte que O en soit centre de symétrie.



Exercice 29

Les angles $\hat{S}$ et $\hat{S}'$ sont symétriques par rapport à (*D*), alors que les angles $\hat{R}$ et $\hat{R}'$ ne le sont pas.
En effet, dans le second cas, deux côtés des angles ne sont pas symétriques.

Exercice 30

I est centre de symétrie de la figure, puisque le symétrique par rapport à *I* du cercle (*C*) est le cercle (*C*').

Exercice 31

J est le milieu du segment [*MN*] ; *M* et *O*, d'une part, *N* et *P*, d'autre part, sont symétriques par rapport à (*D*).
Donc le point *I*, symétrique de *J* par rapport (*D*), est le milieu du segment [*OP*].

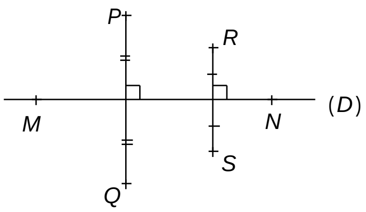
Exercice 32

1. Les triangles *FDE* et *ABC* sont symétriques par rapport à (*D*). En effet *F* et *A*, d'une part, *D* et *B*, d'autre part, sont symétriques par rapport à (*D*) (d'après le codage de la figure) ; *A* et *F* sont aussi symétriques, en raison de leurs positions relatives (de plus les deux triangles sont équilatéraux).
2. Les triangles *GIH* et *ABC* ne sont pas symétriques par rapport à *O*. En effet, en raison de leurs positions relatives, les points *I* et *B* ne sont pas symétriques par rapport à *O* (de plus *ABC* est équilatéral, alors que *GIH* ne l'est pas).

Tableaux de correspondance

Exercice 33

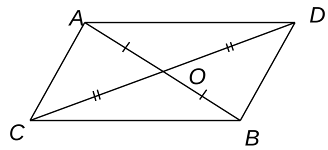
-(*MP*)-(*NR*)-(*PS*)—
Figure telle que le tableau ci-contre soit de correspondance pour la symétrie d'axe (*D*) :
-(*MQ*)-(*NS*)-(*RQ*)--



Exercice 34

(*AC*)	(*BC*)
(*DB*)	(*AD*)

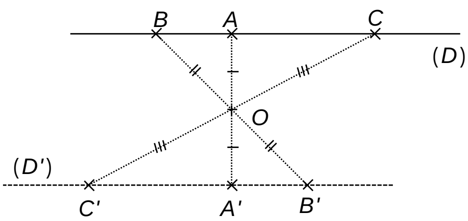
Figure telle que le tableau ci-contre soit de correspondance pour la symétrie de centre *O* :



Démonstrations

Exercice 35

1.

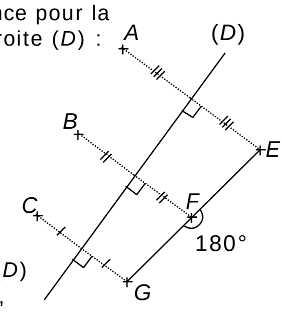


2. *A*', *B*' et *C*' sont alignés sur la droite (*D*'), symétrique de la droite (*D*) par rapport à *O*.

Exercice 36

1. Tableau de correspondance pour la symétrie par rapport à la droite (*D*) :

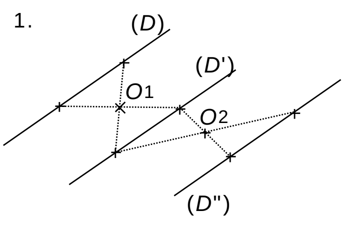
A	*B*	*C*	$\widehat{EFG}$
E	*F*	*G*	$\widehat{ABC}$



2. Les points *A*, *B* et *C*, symétriques par rapport à (*D*) des points alignés *E*, *F* et *G*, sont eux-mêmes alignés.

Exercice 37

1.



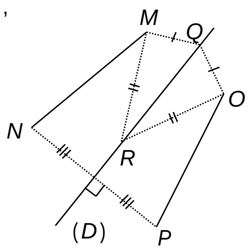
2. (*D*')//(*D*) et (*D*")//(*D*')

donc

(*D*")//(*D*)

Exercice 38

1. Les points *R* et *Q*, de la droite (*D*), sont équidistants des extrémités du segment [*MO*], donc (*D*) est la médiatrice du segment [*MO*].



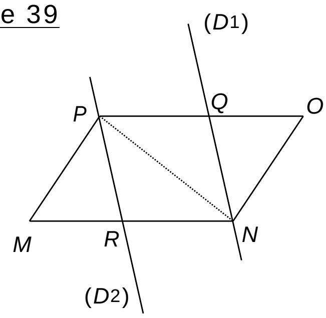
2.a.

M	*N*	*Q*	*R*	[*MN*]
O	*P*	*Q*	*R*	[*OP*]

b. Les segments [*MN*] et [*OP*] sont symétriques par rapport à la droite (*D*), donc *MN*=*OP*.

Exercice 39

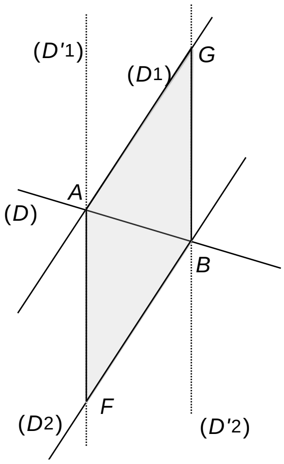
1.



2.a. *MNOP* est un parallélogramme donc (*MN*)//(*OP*).
b. Les droites (D_1) et (D_2), symétriques respectives de (*MN*) et (*OP*) par rapport à la droite (*NP*), sont aussi parallèles.
c. *QNRP*, quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, est donc un parallélogramme.

Exercice 40

1.

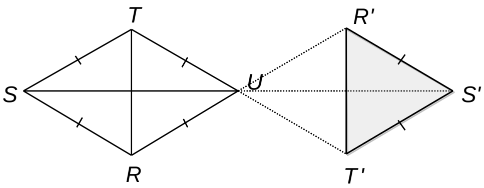


2.a (D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles ; donc les droites (D'_1) et (D'_2), symétriques respectives de (D_1) et (D_2) par rapport à la droite (D), sont aussi parallèles.

b. On en déduit que AFBG est un parallélogramme

Exercice 41

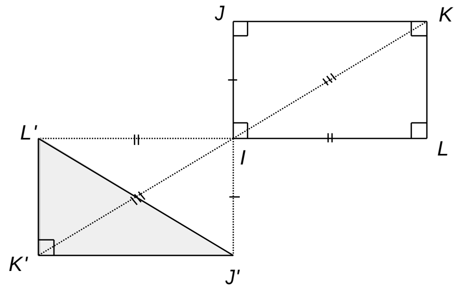
1.



2. Le triangle *R*'S'*T*' est isocèle en *S*'.
Justification : dans le losange *RSTU*, *TS*=*SR* ; dans la symétrie par rapport à *U*, *T*'S'=*TS* et *S*'*R*'=*SR* ; donc : *T*'*S*'=*S*'*R*'.

Exercice 42

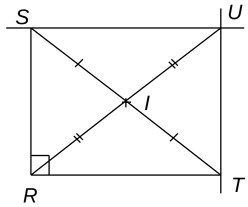
1.



2. Le triangle *J*'*K*'*L*' est rectangle en *K*'.
Justification : dans le rectangle *IJKL*, $\hat{K}$ =90° ; dans la symétrie par rapport à I, $\hat{K'} = \hat{K}$; donc $\hat{K'}$ =90°.

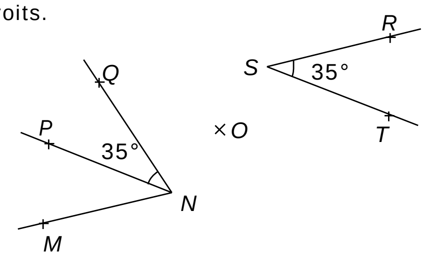
Exercice 43

1.



2.a. *I* est le milieu de [*ST*], donc *S* et *T* sont symétriques par rapport à *I*.
Comme *U* est le symétrique de *R* par rapport à *I*, on a :
● [*UT*] symétrique de [*RS*] donc (*RS*)//(*TU*) ;
● [*US*] symétrique de [*RT*] donc (*RT*)//(*SU*).
b. On en déduit que *RSUT* est un rectangle, puisque trois de ses angles sont droits.

Exercice 44



1. Les angles $\widehat{MNP}$ et $\widehat{RST}$, symétriques par rapport à *O*, ont la même mesure : 35°.

2. On en déduit que $\widehat{MNP}=\widehat{PNQ}$, c'est-à-dire que la demi-droite [*NP*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MNQ}$.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 45

● *A*' est le symétrique de *A* par rapport à la droite (*D*).
● *B* et *B*' sont symétriques par rapport à la droite (*D*).
● La droite (*D*) coupe le segment [*CC*'] en son milieu et lui est perpendiculaire.
● La droite (*D*) est la médiatrice de [*AA*'], [*BB*'] et [*CC*'].

Exercice 46

1. Le symétrique du triangle *MDK* par rapport :
● au point *M* est le triangle *MHI*,
● au point *K* est le triangle *EFK*,
● à la droite (*CG*) est le triangle *MBI*,
● à la droite (*HM*) est le triangle *MDJ*.
2. Le symétrique du triangle *GHF* par rapport :
● au point *M* est le triangle *CDB*,
● au point *L* est le triangle *MFH*,
● à la droite (*AE*) est le triangle *CBD*,
● à la droite (*GC*) est le triangle *GFH*.

Exercice 47

Aucune des figures n'admet de centre de symétrie :
a. la figure est constituée de 2 segments <u>non parallèles</u> ;
b. la figure est constituée de 2 cercles de rayons <u>différents</u> ;
c. la figure est constituée de deux angles dont deux côtés <u>ne sont pas parallèles</u> ;
d. la figure est constituée de deux demi-droites parallèles mais <u>de même sens</u>.

Exercice 48

Programme de construction :
Construis un carré *ABCD*.
Trace le segment [*AC*] puis construis son symétrique [*HC*] par rapport au point *C*.
Construis le symétrique *EFGD* de *ABCD* par rapport au point *D*.
Trace le segment [*AG*] puis construis son symétrique [*JG*] par rapport au point *G*.

Exercice 49

Programme de construction :
Construis un triangle *ABC*, rectangle en *C*.
La médiatrice du segment [*AB*] coupe le côté [*AB*] au point *E* et le côté [*AC*] au point *H*.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et la médiatrice du segment [*AB*] se coupent au point *F*.
Trace la demi-droite [*AF*).

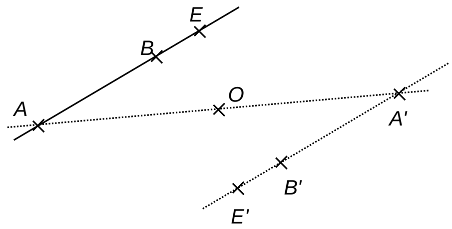
Exercice 50

● Aire du triangle $AEB = \frac{6 \times 3}{2} = 9$ cm² ;

● aire du triangle $FCB = \frac{3 \times 3}{2} = 4{,}5$ cm² ;

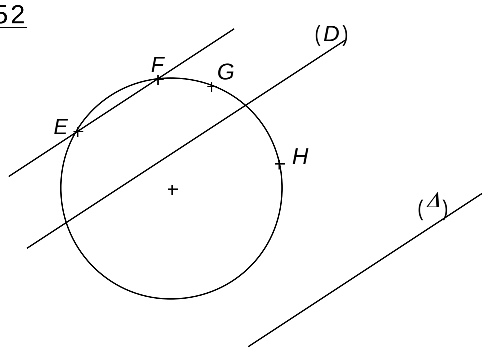
● aire du carré $EFCD = 3 \times 3 = 9$ cm².
1. Donc l'aire des figures *ABCD* et *A'B'C'D'* [symétrique de *ABCD* par rapport à (*EF*)] est égale à 9 + 4,5 + 9 = <u>22,5 cm²</u>.
Justification : dans une symétrie axiale, l'image d'une figure est une figure de mêmes dimensions.
2. L'aire du symétrique de la figure *A'B'C'D'* par rapport au point *B* est aussi égale à <u>22,5 cm²</u>.
Justification : dans une symétrie centrale, l'image d'une figure est une figure de mêmes dimensions.

Exercice 51



Le symétrique de *A* par rapport à *O* est le point d'intersection *A'* des droites (*AO*) et (*B'E'*).

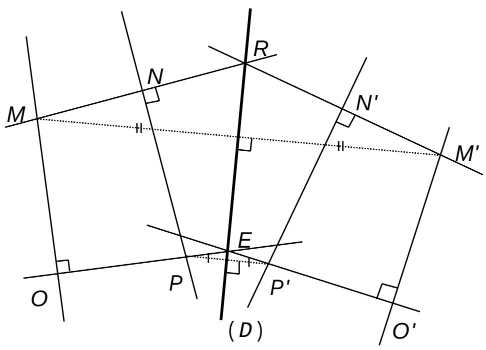
Exercice 52



1. *Enoncé* : Marque quatre points *E*, *F*, *G* et *H* sur un cercle. Soit (*D*) et (*Δ*) les symétriques respectives de la droite (*EF*) par rapport aux points *G* et *H*. Prouve que les droites (*D*) et (*Δ*) sont parallèles.
Solution : Les droites (*D*) et (*EF*) sont symétriques par rapport à *G*, donc (*D*)//(*EF*).
Les droites (*Δ*) et (*EF*) dont symétriques par rapport à *H*, donc (*Δ*)//(*EF*).
2. On en déduit que (*D*)//(*Δ*) [puisque ces deux droites sont parallèles à la même 3^{e} droite (EF)].

Exercices d'approfondissement

Exercice 53

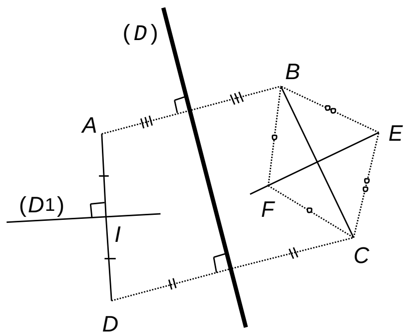


Après avoir construit les points *M'* et *P'*, symétriques respectifs de *M* et *P* par rapport à la droite (*D*),

● le point *N'*, symétrique de *N* par rapport à (*D*), est le point d'intersection de la droite (*RM'*) et de la perpendiculaire à cette droite passant par *P'* ;

● le point *O'*, symétrique de *O* par rapport à (*D*), est le point d'intersection de la droite (*EP'*) et de la perpendiculaire à cette droite passant par *M'*.
(*Utilisation, pour la construction de N' et O', de l'équerre et de la règle non graduée.*)

Exercice 54



Les droites (D_1) et (*EF*) sont symétriques par rapport à la droite (*D*).
Justification : les segments [*AD*] et [*BC*] sont symétriques par rapport à (*D*) ; donc (D_1) et (*EF*), médiatrices respectives de [*AD*] et [*BC*], sont aussi symétriques par rapport à (*D*).

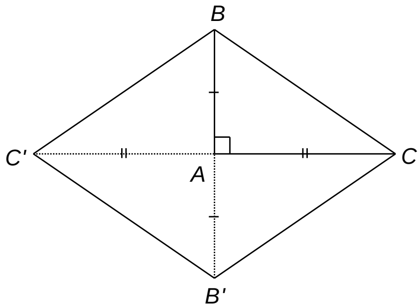
Exercice 55

1. Un polygone à cinq côtés ne peut pas avoir de centre de symétrie.

2. Sans centre de symétrie, un polygone ne peut pas avoir exactement deux axes de symétrie.

Exercice 56

1.



2.a. Tableau (1) de correspondance pour la symétrie d'axe (*AC*) :

A	*B*	*C*	*B'*	*C'*
A	*B'*	*C*	*B*	*C'*

b. Tableau (2) de correspondance pour la symétrie d'axe (*AB*) :

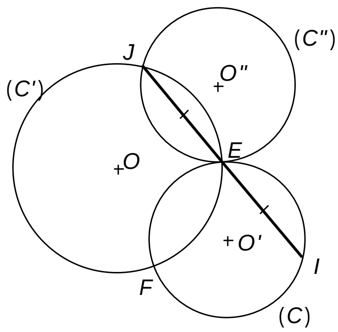
A	*B*	*C*	*B'*	*C'*
A	*B*	*C'*	*B'*	*C*

c. En alternant les 2 tableaux, on peut affirmer successivement que : *BC*=*CB'* (2^e et 3^e colonnes du tableau 1),
CB'=*B'C'* (3^e et 4^e colonnes du tableau 2),
B'C'=*C'B* (4^e et 5^e colonnes du tableau 1),
C'B=*BC* (2^e et 5^e colonnes du tableau 2),
donc : *BC*=*CB'*= *B'C'*=*C'B*.

d. On en déduit que le quadrilatère *BCB'C'* est un losange.

Exercice 57

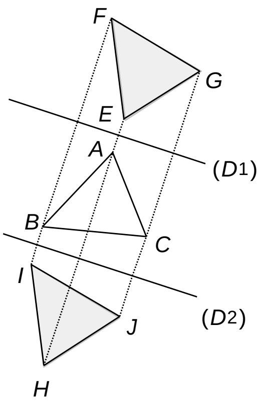
1. (*C*) et (*C'*) se coupent en *E* et *F*.
(*C''*) est le symétrique de (*C*) par rapport à *E*.



2. Si *J* est le second point d'intersection des cercles (*C'*) et (*C''*) (*E* étant le premier), la droite (*JE*) recoupe (*C*) au point symétrique de *J* par rapport à *E*, c'est-à-dire au point *I* cherché : *I* sur (*C*), *J* sur (*C'*) et *E* milieu de [*IJ*].

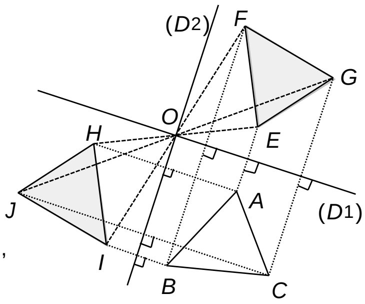
Exercice 58

1. Sur la figure ci-contre :
- $(D_1)//(D_2)$,
- *EFG* est le symétrique de *ABC* par rapport à (D_1),
- *HIJ* est le symétrique de *ABC* par rapport à (D_2).



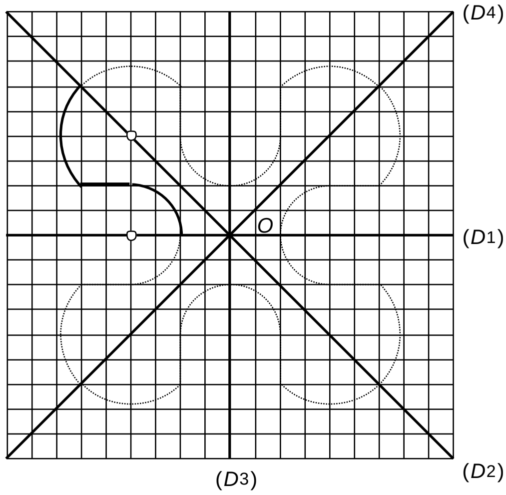
2. Les triangles *HIJ* et *EFG* ne sont pas symétriques :
a. ni par rapport à une droite ;
b. ni par rapport à un point.

3. Sur la figure ci-contre :
- $(D_1)\perp(D_2)$,
- *EFG* est le symétrique de *ABC* par rapport à (D_1),
- *HIJ* est le symétrique de *ABC* par rapport à (D_2).



Les triangles *HIJ* et *EFG :*
a. ne sont pas symétriques par rapport à une droite ;
b. sont symétriques par rapport au point d'intersection *O* de (D_1) et (D_2).

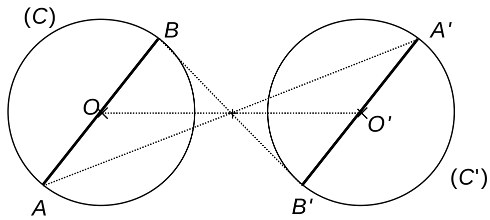
Exercice 59



2.a. Ci-dessus, la figure complétée avec le minimum d'éléments, de sorte que (D_1) et (D_2) en soit axes de symétrie.
b. La figure obtenue a en fait 4 axes de symétrie : (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4).
c. La figure obtenue a aussi 1 centre de symétrie : le point d'intersection *O* des 4 axes.

Exercice 60

1.



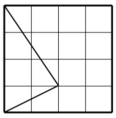
2.a.b. Les deux cercles ayant même rayon, ils sont symétriques par rapport au milieu *I* du segment [*OO'*]

c. Construction du point *I* :
- tracer un diamètre [*AB*] de (*C*) (*utilisation de la règle non graduée*) ;
- construire le diamètre [*A'B'*] de (*C'*), parallèle à [*AB*] (*utilisation de le règle non graduée et de l'équerre*) ;
- I est le point d'intersection de [*OO'*], [*AA'*] et [*BB'*] (*utilisation de la règle non graduée*).

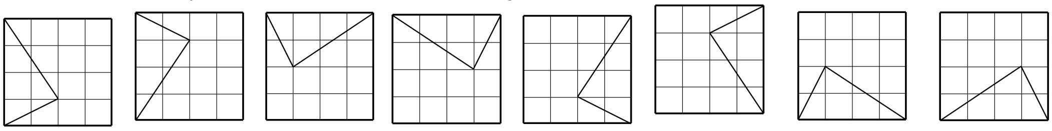
Activités d'intégration

Exercice 61 (Cartes transparentes superposables)

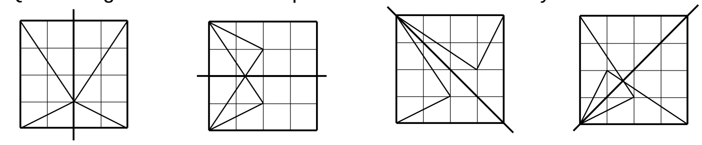
On suppose l'une des cartes dans la position ci-dessous :



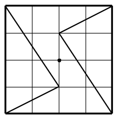
Il suffit alors de considérer les 8 positions différentes de la seconde carte, qui correspondent à 2 fois le nombre de positions du sommet du triangle non situé sur les bords de cette carte :



a) Quatre figures différentes présentent un axe de symétrie :

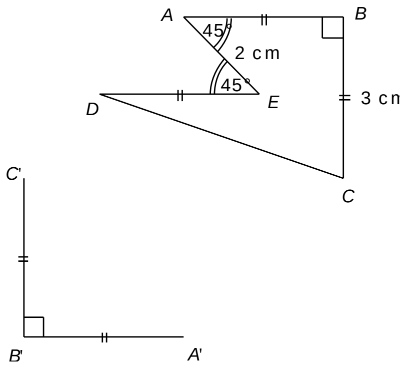


b) Une seule figure présente un centre de symétrie.



Exercice 62 (Construction à compléter)

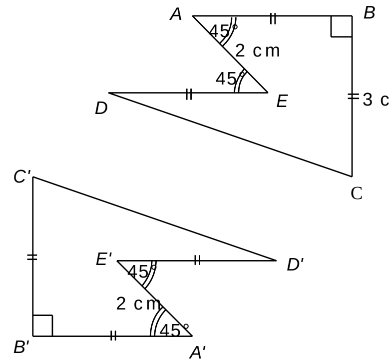
1. Etape 1



Nomme les sommets *A*', *B*' et *C*', en tenant compte des propriétés d'une symétrie centrale :

- symétrique de 2 droites perpendiculaires, pour placer *B*',
- parallélisme de 2 droites symétriques, pour placer *A*' et *C*'.

Etape 2



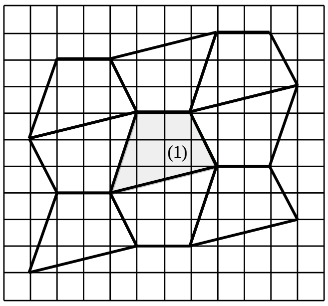
Place le point *E*', en tenant compte de la conservation des angles (45°) et des longueurs (2 cm) par une symétrie centrale, ainsi que du parallélisme de 2 droites symétriques.
Place le point *D*', en tenant compte de la conservation des angles (45°) et des longueurs (3 cm) par une symétrie centrale, ainsi que du parallélisme de 2 droites symétriques.

Vérification de la construction : les segments [*AA*'], [*BB*'], [*CC*'], [*DD*'] et [*EE*'] doivent avoir le même milieu … *I* !

2. $\widehat{B'A'E'} = 45°$ (conservation des angles par une symétrie centrale) ; $\widehat{B'A'C'} = 45°$ (*B*'*A*'*C*' est un triangle rectangle et isocèle en *B*'). On en déduit que les points *A*', *E*' et *C*' sont alignés (il en est de même pour les points *A*, *E* et *C*).

Exercice 63 (Pavages du plan)

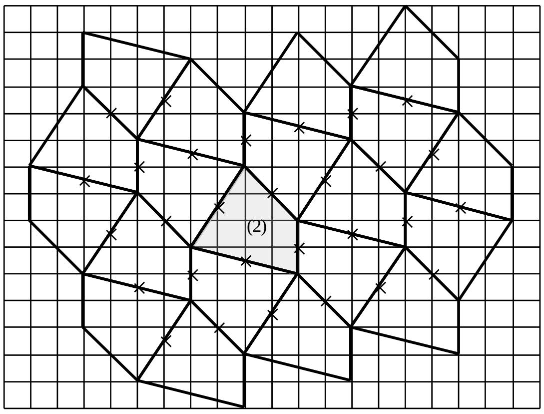
1.



Le pavage ci-dessus se fait de proche en proche :

- tout d'abord par symétries par rapport aux milieux des côtés du quadrilatère (1) ;
- puis par symétries par rapport aux milieux des quadrilatères obtenus précédemment ;
- …

2.



Le pavage du plan se fait de proche en proche et de la même façon.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Angles, adjacents, complémentaires et supplémentaires [1a et 1b p.34]	21, 23, 27, 28		68
2	Angles opposés par le sommet [1c p.34]	24, 25, 26		
3	Angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants [1d p.34]			74, 76
	Apprendre à utiliser des angles particuliers [1 p.36]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7		69, 72
4	Angles et droites parallèles : justifier que deux angles ont la même mesure [2a p.34]	29, 30, 31, 32, 33		
5	Angles et droites parallèles : justifier que deux droites sont parallèles [2b p.35]	34, 35, 36		
	Apprendre à utiliser les propriétés des angles [2 p.37]	8, 9, 12, 11, 12, 13, 37		
6	Angles et triangles : somme des angles d'un triangle [3a p.35]	41, 42, 43, 44	62	
7	Angles et triangles isocèles et équilatéraux [3b p.35]	47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 59, 60, 61	63	77
	Angles et triangles rectangles [3c p.35]	55, 56, 57, 58		
	Apprendre à utiliser les angles dans un triangle [3 p.38]	14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 38, 39, 40, 45, 46	64, 65, 66, 67	70, 71, 73, 75, 78

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

1 Angles complémentaires et supplémentaires

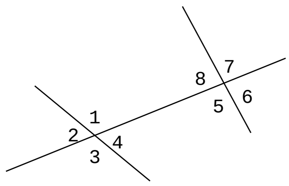
1. Angles dont la somme des mesures est égale à celle d'un angle droit : $\hat{A}$ et $\hat{D}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

2. Angles dont la somme des mesures est égale à celle d'un angle plat : $\hat{B}$ et $\hat{E}$, $\hat{D}$ et $\hat{F}$.

2 Angles opposés par le sommet

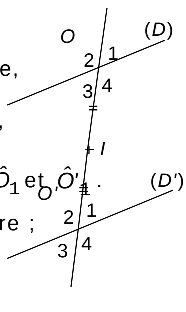
Découverte puis *démonstration* (à l'aide de la symétrie par rapport à un point) de l'égalité des mesures de deux angles opposés par le sommet.

3 Angles formés par deux droites et une sécante



Angles alternes-internes : 1 et 5 ; 4 et 8.
Angles alternes-externes : 2 et 6 ; 3 et 7.
Angles correspondants : 1 et 7 ; 2 et 8 ; 3 et 5 ; 4 et 6.

4 Angles et droites parallèles



1.a. (D)//(D') et I milieu du segment [OO'].
b. Dans la symétrie de centre I, le symétrique :
de O est O' ; de (D) est (D') ; de [IO) est [IO').
2.a. Deux angles alternes-internes ont toujours la même mesure, puisqu'ils sont symétriques par rapport à I.
b. Deux angles alternes-externes ont toujours la même mesure, puisqu'ils sont symétriques par rapport à I.
c. Parmi $\hat{O}_1$, $\hat{O}_3$ et $\hat{O}'_1$, sont correspondants les deux angles $\hat{O}_1$ et $\hat{O}'_1$.

Or : $\hat{O}_1$ et $\hat{O}_3$, opposés par le sommet, ont la même mesure ;

$\hat{O}'_1$ et $\hat{O}_3$,alternes-internes, ont la même mesure ;

donc : $\hat{O}_1$ et $\hat{O}'_1$ ont la même mesure.

5 Justifier que deux droites sont parallèles

1.a. Tableau de correspondance pour la symétrie de centre I :

O	$[Ot)$	$\widehat{tOu}$	$[Ou)$	(D)
O'	$[O't')$	$\widehat{t'O'u'}$	$[O'u')$	(D')

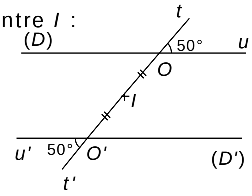


Figure a

b. On en déduit qu'avec deux angles alternes-externes de même mesure (ici 50°), on a : $(D)//(D')$.

2.

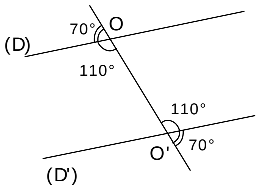


Figure b

Dans la figure ci-dessus, il y avait au départ deux angles alternes-internes de même mesure 110°.
Les deux angles (de mesure 70° car supplémentaires aux précédents) qui ont été marqués, sont alternes-externes ; donc, d'après la question précédente, on a : $(D)//(D')$.

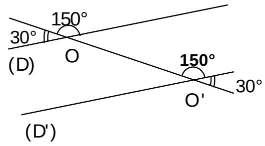


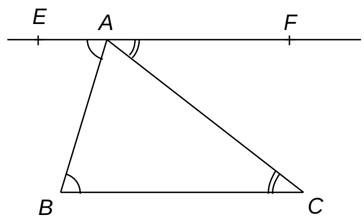
Figure c

Dans la figure ci-dessus, il y avait au départ deux angles correspondants de même mesure 150°.
Les deux angles (de mesure 30° car supplémentaires aux précédents) qui ont été marqués, sont alternes-externes ; donc, d'après la question précédente, on a : $(D)//(D')$.

3. *Pour que deux droites coupées par une sécante soient <u>parallèles</u>, il suffit que deux angles <u>alternes-externes</u>, ou <u>alternes-internes</u>, ou <u>correspondants</u> soient de même <u>mesure</u>.*

6 Somme des angles d'un triangle

$(EF)//(BC)$.



a. $mes\ \widehat{EAB} + mes\ \widehat{BAC} + mes\ \widehat{CAF} = 180°$ puisque les points E, A et F sont alignés.

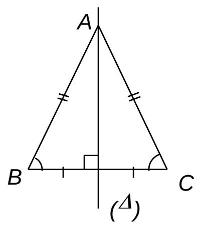
b. les deux droites parallèles (EF) et (BC) forment avec la sécante (AB) les angles alternes-internes $\widehat{EAB}$ et $\widehat{ABC}$; donc : $mes\ \widehat{EAB} = mes\ \widehat{ABC}$.

c. les deux droites parallèles (EF) et (BC) forment avec la sécante (AC) les angles alternes-internes $\widehat{FAC}$ et $\widehat{ACB}$; donc : $mes\ \widehat{FAC} = mes\ \widehat{ACB}$.

d. On en déduit que la somme des mesures des trois angles du triangle ABC est égale à 180°.

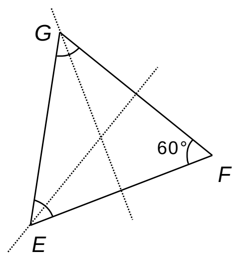
7 Angles et triangles particuliers

1. Triangle isocèle



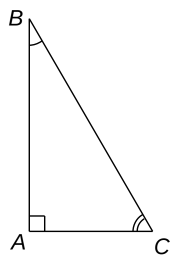
(Δ), droite passant par A, est axe de symétrie du triangle ABC ;
donc $AB=AC$ et le triangle ABC est isocèle en A.
De plus, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, symétriques par rapport à (Δ), ont même mesure.

2. Triangle équilatéral



Les trois angles du triangle ont la même mesure.
La somme de ces mesures étant égale à 180°, la mesure de chacun de ces angles est égale à 60°.

3. Triangle rectangle

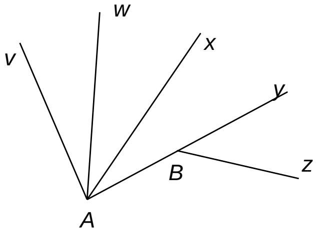


La somme des mesures des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 180-90=90°.
Ces deux angles sont complémentaires.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à utiliser des angles particuliers

Exercice 1



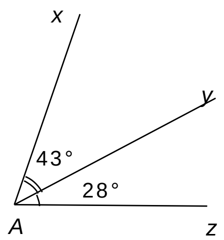
1.a. $\widehat{vAw}$ et $\widehat{xAy}$ sont adjacents à l'angle $\widehat{wAx}$.

b. $\widehat{wAx}$ et $\widehat{vAx}$ sont adjacents à l'angle $\widehat{xAy}$.

2. $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yBz}$ ne sont pas adjacents.

Exercice 2

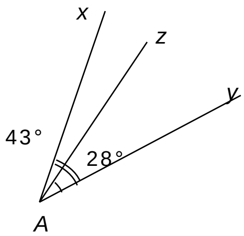
1.



$\widehat{vAw}$ et $\widehat{xAy}$ adjacents.

Mes $\widehat{vAw}=43+28=71°$.

2.



$\widehat{vAw}$ et $\widehat{xAy}$ non adjacents.

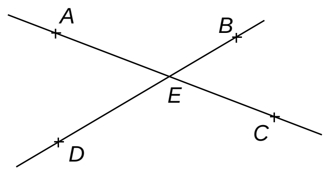
Mes $\widehat{vAw}=43-28=15°$.

Exercice 3

Angles supplémentaires : $\hat{A}$ et $\hat{D}$; $\hat{C}$ et $\hat{E}$.

Angles complémentaires : $\hat{A}$ et $\hat{H}$; $\hat{B}$ et $\hat{G}$; $\hat{E}$ et $\hat{F}$.

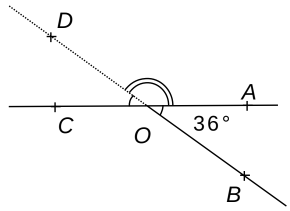
Exercice 4



Angles opposés par le sommet :

- $\widehat{AED}$ et $\widehat{BEC}$,
- $\widehat{AEB}$ et $\widehat{DEC}$.

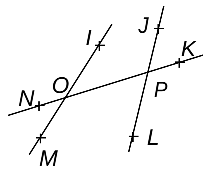
Exercice 5



2.b. *Mes* $\widehat{COD}=$ mes $\widehat{AOB}=36°$.

Mes $\widehat{DOA}=180-36=144°$.

Exercice 6



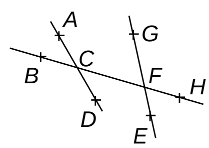
a. Angles alternes-internes : $\widehat{IOP}$ et $\widehat{OPL}$;

b. angles alternes-externes : $\widehat{ION}$ et $\widehat{LPK}$;

c. angles correspondants : $\widehat{MOK}$ et $\widehat{LPK}$;

d. angles opposés par le sommet : $\widehat{LPK}$ et $\widehat{JPN}$.

Exercice 7



a. Angles correspondants : $\widehat{DCH}$ et $\widehat{EFH}$;

b. angles alternes-internes : $\widehat{ACH}$ et $\widehat{EFC}$;

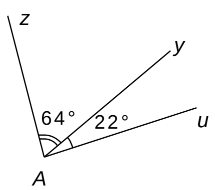
c. angles alternes-externes : $\widehat{BCD}$ et $\widehat{GFH}$;

d. angles opposés par le sommet : $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DCH}$.

1 Apprendre à utiliser les propriétés des angles

Exercice 8

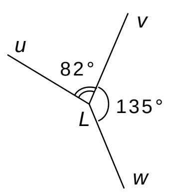
1.a.



$\widehat{uAy}$ et $\widehat{yAz}$ sont adjacents.

b. *Mes* $\widehat{uAz}=22+64$
$=86°$.

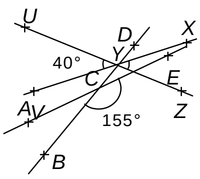
2.a.



$\widehat{vLw}$ et $\widehat{vLu}$ sont adjacents.

b. *Mes* $\widehat{uLw}=360-135-82$
$=143°$.

Exercice 9



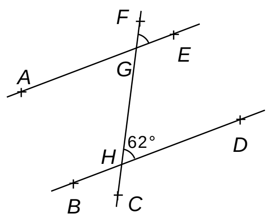
Les angles $\widehat{XYZ}$ et $\widehat{VYU}$, opposés par le sommet, ont la même mesure : 40°.

Exercice 10

1. *Mes* $\widehat{ACD}=155°$.

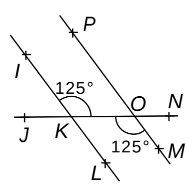
2. *Mes* $\widehat{DCE}=$ *mes* $\widehat{ACB}=180-155=25°$.

Exercice 11



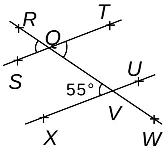
$(AE)//(BD)$ donc les angles correspondants $\widehat{FHD}$ et $\widehat{FGE}$ ont la même mesure : 62°.

Exercice 12



Les angles alternes-internes $\widehat{IKO}$ et $\widehat{KOM}$, formés par la sécante (JN) aux droites (IL) et (MP), étant de même mesure (125°), on a : $(IL)//(MP)$.

Exercice 13



$(TS)//(UX)$ donc les angles alternes-internes $\widehat{TQV}$ et $\widehat{XVR}$ ont la même mesure : 55° ;
Les angles opposés par le sommet $\widehat{TQV}$ et $\widehat{RQS}$ ont la même mesure : 55°.

1 Apprendre à utiliser les angles dans un triangle

Exercice 14

Si EFG est un triangle tel que $EF = 8$ cm, $mes\ \hat{E} = 55°$ et $mes\ \hat{F} = 40°$, alors $mes\ \hat{G} = \underline{85°}$.

Exercice 15

Si RST est un triangle tel que $RS = 4$ cm, $mes\ \hat{R} = 20°$ et $mes\ \hat{S} = 130°$, alors $mes\ \hat{T} = \underline{30°}$.

Exercice 16

Dans un triangle ABC, lorsque :

a. $mes\ \hat{A} = 37°$ et $mes\ \hat{B} = 134°$, alors $mes\ \hat{C} = \underline{9°}$;

b. $mes\ \hat{A} = 79°$ et $mes\ \hat{B} = 52°$, alors $mes\ \hat{C} = \underline{49°}$;

c. $mes\ \hat{A} = 125°$ et $mes\ \hat{B} = 44°$, alors $mes\ \hat{C} = \underline{11°}$;

d. $mes\ \hat{A} = 12°$ et $mes\ \hat{B} = 88°$, alors $mes\ \hat{C} = \underline{80°}$.

Exercice 17

Seul le triangle IJK, dont la somme des mesures de ses trois angles est égale à 180°, peut être construit.

Exercice 18

Les trois triangles ayant deux angles de même mesure, ils sont tous isocèles.

Exercice 19

Dans le triangle TUV, isocèle en U, $mes\ \hat{T} = mes\ \hat{V} = \underline{68°}$.

Dans le triangle XYZ, isocèle en Y, $mes\ \hat{X} = mes\ \hat{Z} = \underline{30°}$.

Dans le triangle MNO, isocèle en O,

$$mes\ \hat{M} = mes\ \hat{N} = \frac{180 - 62}{2} = \underline{59°}.$$

Exercice 20

Le triangle ABC est équilatéral, donc $mes\ \hat{A} = \underline{60°}$.

Activités d'application

Propriétés des angles

Exercice 21

a. $Mes\ \widehat{xMy} = 32 + 18 + 21 = 71°$.	b. $Mes\ \widehat{xMy} = 120 - 17 = 103°$.
c. $Mes\ \widehat{xMy} = 90 - 32 = 58°$.	d. $Mes\ \widehat{xMy} = 180 - (38 + 94) = 48°$.

Exercice 22

a. Angles complémentaires : $\hat{E}$ (37°) et $\hat{G}$ (53°) ;

b. Angles supplémentaires : $\hat{A}$ (32°) et $\hat{B}$ (148°), $\hat{D}$ (22°) et $\hat{F}$ (158°), $\hat{C}$ (143°) et $\hat{E}$ (37°), $\hat{G}$ (53°) et $\hat{I}$ (127°).

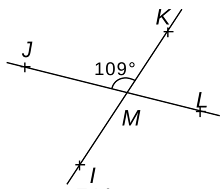
Exercice 23

1. Si $\widehat{zUv}$ et $\widehat{xAy}$ sont deux angles complémentaires et $mes\ \widehat{zUv} = 12°$, alors $mes\ \widehat{xAy} = 90 - 12 = 78°$.

2. Si $\widehat{tAs}$ et $\widehat{yBz}$ sont deux angles supplémentaires et $mes\ \widehat{yBz} = 136°$, alors $mes\ \widehat{tAs} = 180 - 136 = 44°$.

3. Si $mes\ \widehat{xEy} + mes\ \widehat{uFt} + mes\ \widehat{vGw} = 180°$, $mes\ \widehat{xEy} = 49°$ et $mes\ \widehat{vGw} = 41°$, alors $mes\ \widehat{uFt} = 180 - (49 + 41) = 90°$; donc $\widehat{uFt}$ est un angle droit.

Exercice 24

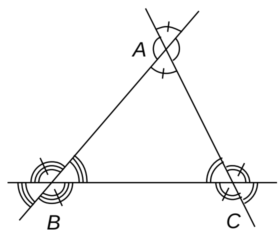


$\widehat{IML}$, angle opposé à $\widehat{KMJ}$, a même mesure : 109° ;

$\widehat{JMI}$, angle supplémentaire à $\widehat{KMJ}$, a pour mesure : $180 - 109 = 71°$;

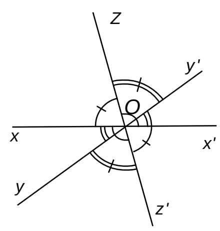
$\widehat{LMK}$, angle opposé à $\widehat{JMI}$, a même mesure : 71°.

Exercice 25



Avec trois droites sécantes en trois points distincts A, B et C, il y a six paires d'angles possibles ayant deux à deux la même mesure.

Exercice 26



Si (xx'), (yy') et (zz') sont les trois droites sécantes en O, parmi les paires d'angles ayant deux à deux la même mesure, sont codées sur la figure :

$\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'Oy'}$, $\widehat{xOz}$ et $\widehat{x'Oz'}$,

$\widehat{zOy'}$ et $\widehat{z'Oy}$, $\widehat{zOx'}$ et $\widehat{z'Ox}$

(chaque fois, deux angles opposés par le sommet … et il y en a d'autres !).

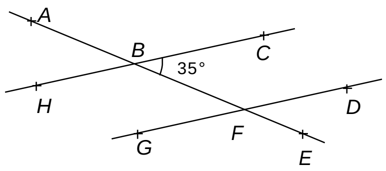
Exercice 27

Deux angles symétriques par rapport à une droite ayant la même mesure, on peut dire que les angles coloriés en rouge et bleu sont complémentaires.

Exercice 28

Deux angles symétriques par rapport à un point ayant la même mesure, on peut dire que les angles coloriés en rouge et jaune sont supplémentaires.

Exercice 29



Si (*HC*)//(*DG*) et *mes* $\widehat{CBF}$ = 35°, alors :

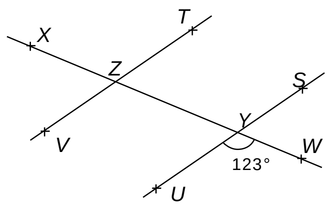
$\widehat{CBF}$ et $\widehat{BFG}$ sont alternes-internes, donc *mes* $\widehat{BFG}$ = 35° ;

$\widehat{CBF}$ et $\widehat{DFE}$ sont correspondants, donc *mes* $\widehat{DFE}$ = 35° ;

$\widehat{EFD}$ et $\widehat{ABH}$ sont alternes-externes, donc *mes* $\widehat{ABH}$ = 35° ;

$\widehat{EFD}$ et $\widehat{BFD}$ sont supplémentaires, donc *mes* $\widehat{BFD}$ = 175°.

Exercice 30



Si (*US*)//(*VT*) et *mes* $\widehat{UYW}$ = 123°, alors :

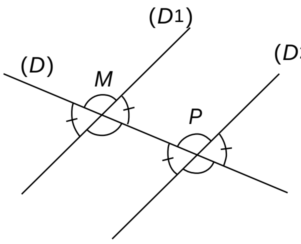
$\widehat{UYW}$ et $\widehat{TZX}$ sont alternes-externes, donc *mes* $\widehat{TZX}$ = 123° ;

$\widehat{UYW}$ et $\widehat{ZYU}$ sont supplémentaires, donc *mes* $\widehat{ZYU}$ = 57° ;

$\widehat{TZX}$ et $\widehat{SYZ}$ sont correspondants, donc *mes* $\widehat{SYZ}$ = 123° ;

$\widehat{ZYU}$ et $\widehat{TZY}$ sont alternes-internes, donc *mes* $\widehat{TZY}$ = 57°.

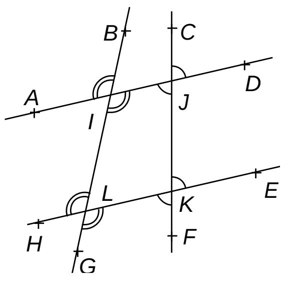
Exercice 31



Deux couleurs suffisent pour colorier les angles de même mesure de sommet M ou P.

Exercice 32

1. (*AD*)//(*HE*).



2.a. Les angles de même mesure que $\widehat{AIB}$ sont :

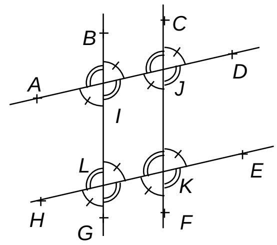
$\widehat{GID}$, $\widehat{HLB}$ et $\widehat{GLE}$.

b. Les angles de même mesure que $\widehat{JKE}$ sont :

$\widehat{HKF}$, $\widehat{AJF}$ et $\widehat{CJD}$.

Exercice 33

1. (*AD*)//(*HE*) et (*BG*)//(*CF*).



2.a. Les angles de même mesure que $\widehat{AIB}$ sont :

$\widehat{GID}$, $\widehat{HLB}$, $\widehat{GLE}$, $\widehat{AJC}$, $\widehat{FJD}$, $\widehat{HKC}$ et $\widehat{FKE}$.

b. Les angles de même mesure que $\widehat{JKE}$ sont :

$\widehat{HKF}$, $\widehat{AJF}$, $\widehat{CJD}$, $\widehat{ILE}$, $\widehat{HLG}$, $\widehat{AIG}$ et $\widehat{BID}$.

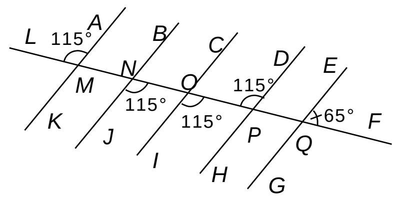
Exercice 34

a. Deux angles alternes-externes ont la même mesure (118°) donc (*BF*)//(*CE*).	b. Deux angles correspondants n'ont pas la même mesure (77° et 74°) donc (*QT*) non parallèle à (*XU*).
c. Deux angles alternes-internes ont la même mesure (21°) donc (*KO*)//(*LN*).	d. Deux angles alternes-externes n'ont pas la même mesure (91° et 89°) donc (*BF*) non parallèle à (*CE*).

Exercice 35

a. Deux angles alternes-internes ($\widehat{FGH}$ et $\widehat{GHC}$) ont la même mesure (80°) donc (*AC*)//(*FD*).	b. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles donc (*IM*)//(*JL*).

Exercice 36



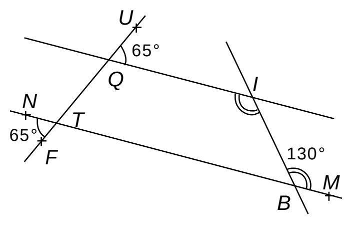
$\widehat{AML}$ et $\widehat{FNJ}$ sont deux angles alternes-externes de même mesure (115°) donc (*AK*)//(*BJ*).

Même justification pour (*AK*)//(*CI*).

$\widehat{AML}$ et $\widehat{DPL}$ sont deux angles correspondants de même mesure (115°) donc (*AK*)//(*DH*).

Même justification pour (*AK*)//(*EG*), après avoir remarqué que l'angle $\widehat{LQE}$ supplémentaire de l'angle $\widehat{EQF}$, a pour mesure 115°.

Exercice 37



Les angles $\widehat{UQI}$ et $\widehat{NTF}$, de même mesure (65°), sont deux angles alternes-externes formés par la droite (*FU*) sécante avec les droites (*QI*) et (*NM*) respectivement en *Q* et *T* ; donc (*QI*)//(*NM*).
On en déduit que la droite (*IB*), sécante à (*QI*) et (*NM*) respectivement en *I* et *B*, forme deux angles $\widehat{IBM}$ et $\widehat{QIB}$ alternes-internes de même mesure ; donc *mes* $\widehat{QIB}$ = 130°.

Constructions de figures

Recommandations pour toute construction :
- faire au préalable une figure à main levée ;
- préciser les instruments de géométrie utilisés, en donnant le programme de construction ;
- contrôler que la figure obtenue correspond aux consignes.

Exercices 38 et 39

La construction des huit triangles (quatre par exercice) connaissant :
- la mesure d'un angle et la longueur des deux côtés de cet angle (*méthode 1*),
- les mesures de deux angles et la longueur du côté commun à ces angles (*méthode 2*),

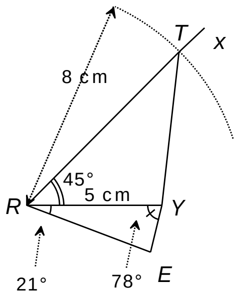
se fait *avec le rapporteur et la règle graduée*.

Exercice 40

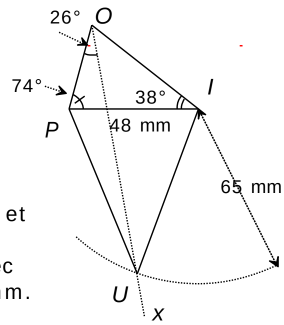
Si l'on se réfère aux 2 méthodes des exercices 38 et 39,
- construction de *BNCV* (et dans n'importe quel ordre) : *méthode 1* pour *NVB*, *méthode 2* pour *NVC* ;
- construction de *DFGH* (en commençant par *HFG*) : *méthode 2* pour *HFG*, puis *méthode 1* pour *HFD*.

Exercice 41

1. Construction de *ERTY*, *avec le rapporteur, la règle graduée et le compas* :
a. construire *RYE* tel que $RY=5$ cm, *mes* $\widehat{EYR}=78°$ et *mes* $\widehat{YRE}=21°$ (*méthode 2* des exercices 38 et 39) ;
b. *T* est le point d'intersection de la demi-droite [*Rx*), située de l'autre côté de *E* par rapport à (*RY*) et telle que *mes* $\widehat{YRx}=45°$, avec le cercle de centre *R*, de rayon 8 cm.



2. Construction de *UIOP*, *avec le rapporteur, la règle graduée et le compas* :
construire *PIO* tel que $PI=48$ mm, *mes* $\widehat{OPI}=74°$ et *mes* $\widehat{PIO}=38°$; (*méthode 2* des exercices 38 et 39)
b. *U* est le point d'intersection de la demi-droite [*Ox*), située entre [*OP*] et [*OI*] et telle que *mes* $\widehat{POx}=26°$, avec le cercle de centre *I*, de rayon 65 mm.



Calculs de mesures d'angles

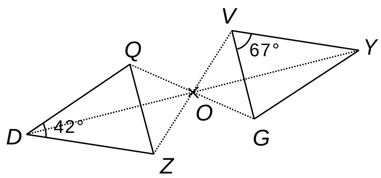
Exercice 42

Dans le triangle *BCS*, *mes* $\hat{C}=180-62-44=74°$.

Dans le triangle *TJQ*, *mes* $\hat{Q}=180-116-41=23°$.

Dans le triangle *ONW*, *mes* $\hat{W}=180-80-32=68°$.

Exercice 43



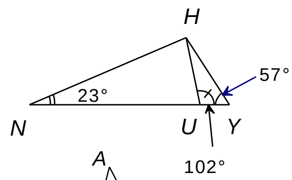
1. L'angle $\widehat{DZQ}$ est symétrique par rapport à *O* de l'angle $\widehat{YVG}$, donc : *mes* $\widehat{DZQ}=$ *mes* $\widehat{YVG}=67°$.

2. *Mes* $\widehat{DQZ}=180-42-67=71°$.

Exercice 44

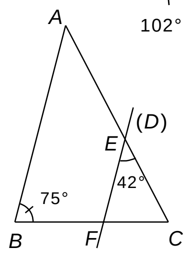
2. *mes* $\widehat{UHY}=180-102-57$
$=21°$.

mes $\widehat{UHN}=180-23-(180-102)$
$=79°$



Exercice 45

2. *mes* $\hat{C}=180-75-42$
$=63°$.



Exercice 46

Figure 1 : *mes* $\hat{T}=180-51-(180-116)$
$=65°$.

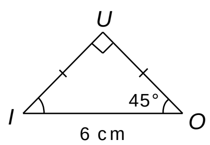
Figure 2 : *mes* $\hat{S}=180-48-(180-103)$
$=55°$.

Triangles particuliers

Exercice 47

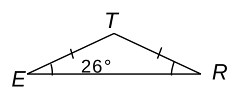
2.a. *Mes* $\hat{U}=180-45-45$
$=90°$.

(*UIO* est un triangle isocèle et rectangle en *U*.)



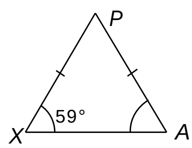
Exercice 48

1.



Mes $\hat{T}=180-2\times26=128°$.

2.



Mes $\hat{X}=180-2\times59=62°$.

Exercice 49

Dans *DHW*, triangle isocèle en *H*, *mes* $\hat{H}$ = 180-2×52=76°.

Dans *CJM*, triangle isocèle en *J*, *mes* $\hat{J}$ = 180-2×32=116°.

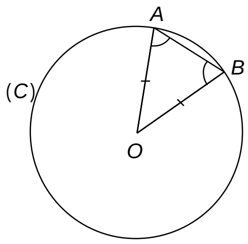
Dans *ONW*, triangle isocèle en *P*, *mes* $\hat{P}$ = 180-2×78=24°.

Exercice 50

OA=*OB*=rayon de (*C*).

Donc :

- *OAB* et un triangle isocèle en *O*,
- les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ ont la même mesure.

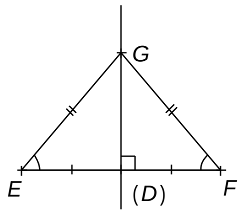


Exercice 51

Le point *G*, appartenant à la médiatrice de [*EF*], est équidistant de *E* et *F*, c'est-à-dire : *GE*=*GF*.

Le triangle *GEF* est isocèle en *G* et

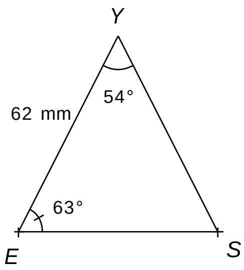
mes $\widehat{GEF}$ = *mes* $\widehat{GFE}$.



Exercice 52

2.a. *Mes* $\widehat{YSE}$=180-63-54=63° ; donc le triangle *YES* est isocèle en *Y*.

b. On en déduit que *YS*=*YE*=62 mm.

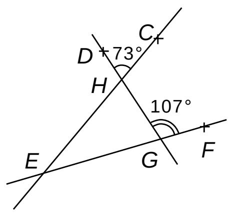


Exercice 53

- *Mes* $\widehat{EGH}$=180-107=73° ;
- $\widehat{EHG}$ et $\widehat{CHD}$ sont deux angles opposés par le sommet donc :

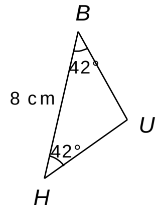
mes $\widehat{EHF}$ = *mes* $\widehat{CHD}$=73° ;

finalement, *EGH* est un triangle isocèle en *E* et *EH*=*EG*.



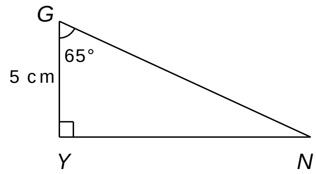
Exercice 54

BHU étant un triangle isocèle en *U*,
on a : *UB*=*UH*,
donc : *U* est sur la médiatrice de [*BH*].



Exercice 55

2. Mes $\hat{G}$ = 180-90-65
 = 25°.



Exercice 56

1. Si *DZS* est un triangle rectangle en *Z* tel que mes $\hat{S}$ = 31°, alors mes $\hat{D}$ = 180-90-31=59°.

2. Si *GLR* est un triangle rectangle en *G* tel que mes $\hat{R}$ = 76°, alors mes $\hat{L}$ = 180-90-76=14°.

Exercice 57

Si *OUI* est un triangle tel que *OU*=4,7 cm, *mes* $\hat{O}$ = 37° et *mes* $\hat{U}$ = 53°, alors *mes* $\hat{I}$ = 180-37-53=90°.

Donc *OUI* est rectangle en *I*.

Exercice 58

Si *ZEN* est un triangle rectangle en *Z* tel que *mes* $\hat{E}$ = 45°, alors *mes* $\hat{N}$ = 180-90-45=45°.

Donc *ZEN* est aussi isocèle.

Exercice 59

Si *ESW* et *RDX* sont deux triangles équilatéraux, alors la mesure de chacun de leurs angles est égale à 60°.

Exercice 60

2.a. Si *KLM* est un triangle isocèle en *K* et tel que *mes* $\hat{L}$ = 60°, alors : *mes* $\hat{M}$ = *mes* $\hat{L}$ = 60°,
mes $\hat{K}$ = 180-60-60=60°.

b. On en déduit que *KLM* est un triangle équilatéral.

Exercice 61

2.a. Si *POI* est un triangle tel que *mes* $\hat{P}$ = *mes* $\hat{O}$ = 60°, alors *mes* $\hat{I}$ = 180-60-60=60°.

b. On en déduit que *POI* est un triangle équilatéral.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 62

mes $\hat{S}$ = 180-43-35=102°.

Exercice 63

Comme *ABC* est isocèle en *A*, on a :

$$mes\,\hat{B} = mes\,\hat{C} = \frac{180-58}{2} = 61°.$$

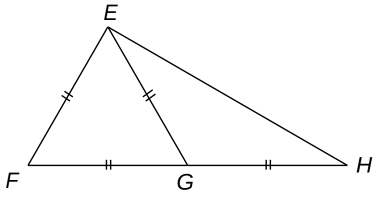
Exercice 64

1. « A coup sûr » :
a. triangles isocèles : *ABC*, *IGH*, *MNO*, *QPR* ;
b. triangles rectangles : *ABC*, *DEF*, *QPR* ;
c. triangles équilatéraux : *IGH*.

2. ● Un triangle *isocèle* qui a un angle mesurant *60°* est nécessairement équilatéral.
● Un triangle qua deux angles mesurant *45°* est nécessairement rectangle.
● Les triangles équilatéraux sont aussi des triangles *isocèles*.

Exercice 65

1.



2. *Mes* $\widehat{EGF}$=60°, car le triangle *FEG est équilatéral*.

G∈[*FH*], donc *mes* $\widehat{FGE}$+*mes* $\widehat{EGH}$*=180°*.

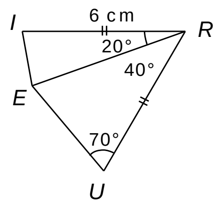
D'où *mes* $\widehat{EGH}$*=180-60=120°*.

3. *EFH* est un triangle rectangle en *E*.

Justification : mes *F*$\widehat{EH}$= $60+\dfrac{180-120}{2}=90°$.

Exercice 66

1.



2. *Consignes ordonnées*
a. Prouve que le triangle *REU* est isocèle.
b. Prouve que le point *R* appartient à la médiatrice du segment [*IE*].

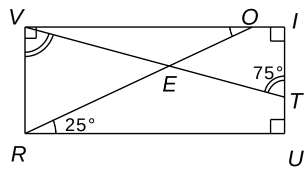
c. Calcule les mesures des angles $\widehat{RIE}$ et $\widehat{REI}$.

3. *Solution*
a. *REU* est isocèle en *R* car *mes* $\widehat{UER}$=180-70-40=70°.
b. Donc : *RU*=*RE* ; comme, par construction, *RU*=*RI*, on en déduit que *RE*=*RI* et *R* appartient à la médiatrice de [*IE*].

c. *Mes* $\widehat{RIE}$=*mes* $\widehat{REI}$= $\dfrac{180-20}{2}=80°$.

4.a. *RIU*, triangle isocèle dont un angle mesure 60°, est équilatéral (cf. exercice 64).
b. On en déduit que *IU*=*RU*=*RI* ; comme *RE*=*RI*, on peut dire que les diagonales de *RUEI* ont la même longueur.

Exercice 67

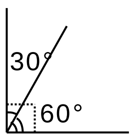
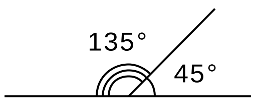
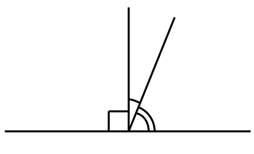
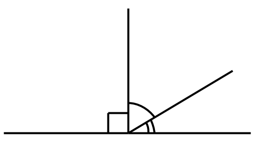


1.
● *Mes RVY*=*mes VTI*, car ce sont deux angles alternes-internes formés par les droites parallèles (*VR*) et (*TI*) coupées par la sécante (*VT*).
● *Mes VOR*=*mes ORU*, car *ce sont deux angles alternes-internes formés par les droites parallèles (VO) et (RU) coupées par la sécante (OR)*.

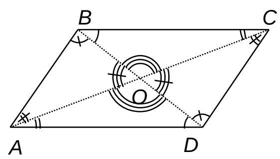
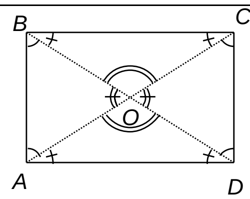
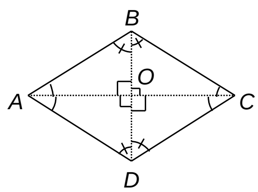
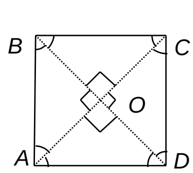
2. Pour *VOR*, *mes* $\hat{V}$ =90°, *mes* $\hat{O}$ =25°,
mes $\hat{R}$ =180-90-25=65°.
Pour *VER*, *mes* $\hat{V}$ =75°, *mes* $\hat{R}$ =65°,
mes $\hat{E}$ =180-75-65=40°.

Exercices d'approfondissement

Exercice 68

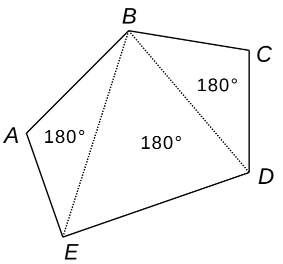
<table>
<tr><td>
Deux angles complémentaires dont l'un (60°) a une mesure deux fois plus grande que l'autre (30°).</td><td>
Deux angles supplémentaires dont l'un (135°) a une mesure trois plus grande que l'autre (45°).</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
Deux exemples (*il y en a d'autres*) pour trois angles dont la somme des mesures est 180° et tels que les deux angles de plus petites mesures soient complémentaires.</td></tr>
</table>

Exercice 69

Angles de même mesure dans un parallélogramme : $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$; $\widehat{CBD}$ et $\widehat{ADB}$; $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAD}$; $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BAC}$; $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$; $\widehat{AOD}$ et $\widehat{COB}$.	
Angles de même mesure dans un rectangle : $\widehat{DBC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAD}$ et $\widehat{BDA}$; $\widehat{ABD}$, $\widehat{DCA}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$; $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOD}$; $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$.	
Angles de même mesure dans un losange : $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOA}$; $\widehat{ABO}$, $\widehat{CBO}$, $\widehat{CDO}$ et $\widehat{ADO}$; $\widehat{BAO}$, $\widehat{BCO}$, $\widehat{DCO}$ et $\widehat{DAO}$.	
Angles de même mesure dans un carré : $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOA}$; $\widehat{OAB}$, $\widehat{OBA}$, $\widehat{OBC}$, $\widehat{OCB}$, $\widehat{OCD}$, $\widehat{ODC}$, $\widehat{ODA}$ et $\widehat{OAD}$.	

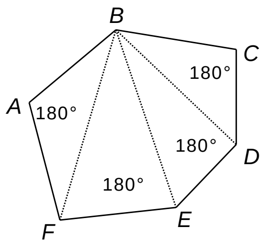
Exercice 70

1. Polygone à cinq côtés.



a. La somme des mesures des angles de chacun des triangles *BAE*, *BED* et *BDC* est égale à 180°.
b. On en déduit que la somme de tous les angles au sommet du pentagone *ABCDE* est : 3×180=540°.

2. Polygone à six côtés.



a. La somme des mesures des angles de chacun des triangles *BAF*, *BFE*, *BED* et *BDC* est égale à 180°.
b. On en déduit que la somme de tous les angles au sommet de l'hexagone *ABCDEF* est : 4×180=720°.

Exercice 71

1. Si *ABC* est un triangle isocèle en *A* tel que $mes\,\hat{A} = 30°$,
alors $mes\,\hat{B} = mes\,\hat{C} = \dfrac{180-30}{2} = 75°$.

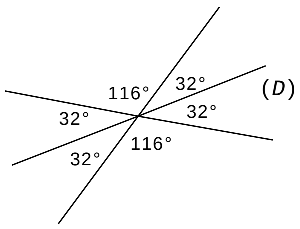
2. Si *EFG* est un triangle isocèle en *F* tel que $mes\,\hat{F} = 78°$,
alors $mes\,\hat{E} = mes\,\hat{G} = \dfrac{180-78}{2} = 51°$.

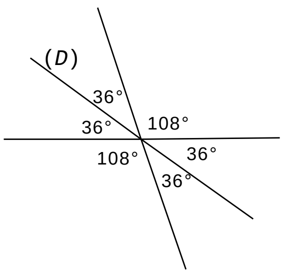
3. Si *IJK* est un triangle rectangle isocèle en *I*, alors
$mes\,\hat{J} = mes\,\hat{K} = \dfrac{180-90}{2} = 45°$.

4. Si *NOP* est un triangle isocèle en *O* tel que $mes\,\hat{O} = 60°$, alors *NOP* est un triangle équilatéral.

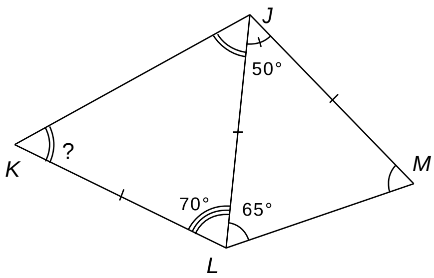
Exercice 72

(*D*) est axe de symétrie pour chaque figure.





Exercice 73



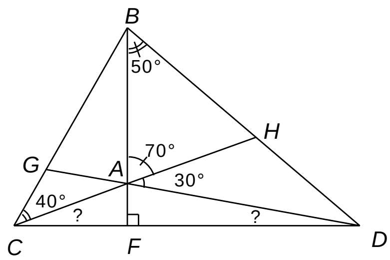
$Mes\,\widehat{JML} = 180-65-50 = 65°$, donc le triangle *JML* est isocèle en *J* et *JM*=*JL*.
Comme *JM*=*KL*, on en déduit que *LJ*=*LK*.
Le triangle *LJK* est alors isocèle en *L* :

$mes\,\widehat{JKL} = mes\,\widehat{KLJ} = \dfrac{180-70}{2} = \underline{55°}$.

Exercice 74

Sont parallèles :
- les droites (D_4) et (D_1), qui forment avec la droite sécante (Δ_2) deux angles alternes-externes de même mesure ;
- les droites (Δ_2) et (Δ_4) , qui forment avec la droite sécante (D_1) deux angles alternes-externes de même mesure.

Exercice 75



- $\widehat{CAF}$ et $\widehat{HAB}$, angles opposés par le sommet, ont la même mesure : 70° ;

donc, dans le triangle *ACF*, $mes\,\widehat{ACF} = 180-90-70 = 20°$.

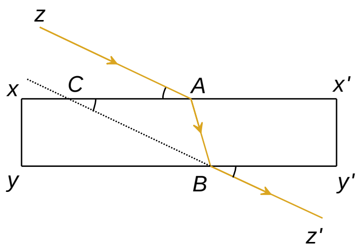
- $Mes\,\widehat{FAD} = 180-70-30 = 80°$;

Donc, dans le triangle *ADF*, $mes\,\widehat{ADF} = 180-90-80 = 10°$.

Finalement : $mes\,\widehat{ADC} = \underline{10}°$ et $mes\,\widehat{ACD} = 20°$.

Activités d'intégration

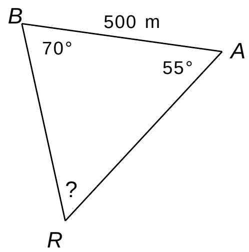
Exercice 76 (Rayons lumineux)



1. $\widehat{x'Cz'}$ et $\widehat{y'Bz'}$ sont deux angles correspondants, formés par la droite (*CB*) sécante aux droites parallèles (*xx*') et (*yy*') ; donc ces angles ont la même mesure.

2. On en déduit que les angles $\widehat{zAx}$ et $\widehat{x'Cz'}$ alternes-internes, formés par la droite (*xx*') sécante aux droites (*zA*) et (*Bz*'), sont de même mesure ;
donc (*zA*)//(*Bz*').

Exercice 77 (Le géomètre)

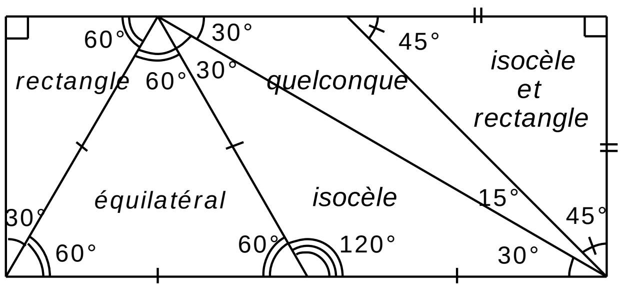


1. *Mes* $\widehat{BRA}$=180-55-70=55°.

2. Donc le triangle *BRA* est isocèle en *B* et *BA*=*BR*=500 m.

Exercice 78 (Jeu avec des triangles)

Modèles de triangle	isocèle	rectangle	isocèle et rectangle	équilatéral	quelconque
Couleurs	jaune	bleu	violet	orange	vert
Mesures des angles	120°, 30°, 30°	90°, 60°, 30°	90°, 45°, 45°	60°, 60°, 60°	135°, 30°, 15°



4 *Droites remarquables dans un triangle*

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit [1p.48]	28, 29, 30, 31, 32	43, 44	49, 53, 56, 59
2	Hauteurs d'un triangle [2 p.48]	19, 20, 26		51, 55
3, 4	Triangle rectangle et cercle circonscrit [3 p.49]	36, 37, 38, 39, 40, 41, 42	48	
5	Droites remarquables et triangle isocèle [4 p.49]	21, 24, 25, 27, 33		52, 60
	Droites remarquables et triangle équilatéral [5 p.49]	34		55
	Apprendre à utiliser des droites remarquables [1 p.50]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 17, 18, 22, 23		57, 58
	Apprendre à utiliser les cercles circonscrits [2 p.51]	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 35	45, 46, 47	50, 54

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer (Le vent transformé en électricité)

Construction d'un triangle équilatéral et de son cercle circonscrit.

1 Concours des médiatrices et cercle circonscrit

Partie A

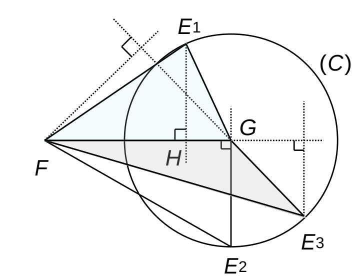
Découverte justifiée de la construction, avec les médiatrices de 2 côtés, du centre du cercle circonscrit à un triangle puis de ce cercle. *Cette activité nécessite beaucoup de soin*.

Partie B

Comment retrouver le centre d'un (arc de) cercle.

2 Des hauteurs et des triangles

1.



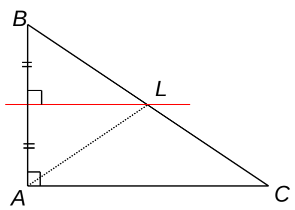
2. Il s'agit de placer un point E_1 sur le cercle (C), de façon que la hauteur du triangle E_1FG, issue de E_1, soit intérieure (pour partie) à ce triangle ; le triangle colorié en bleu convient (l'angle $\hat{G}$ est alors aigu).

3. Il s'agit de placer un point E_2 sur le cercle (C), de façon que la hauteur du triangle E_2FG, issue de E_2, soit confondue avec un côté de ce triangle ; si l'on veut [E_2G] comme côté confondu avec la hauteur, le triangle E_2FG doit être rectangle en G.

4. Il s'agit de placer un point E_3 sur le cercle (C), de façon que la hauteur du triangle E_3FG, issue de E_3, soit entièrement extérieure à ce triangle ; le triangle grisé convient (l'angle $\hat{G}$ est alors obtus).

Dans cette situation, la hauteur issue de F ne traverse pas non plus ce triangle.

3 Nouvelle propriété du triangle rectangle



ABC est un triangle rectangle en *A*.

La médiatrice de [*AB*] coupe [*BC*] en *L*.

1. L appartient à la médiatrice de [AB] donc L est équidistant de A et B, c'est-à-dire que le triangle LAB est isocèle en L. On en déduit que $mes\ \widehat{LAB} = mes\ \widehat{LBA}$ (1).

2.a. $\text{mes } \widehat{ABC} + \text{mes } \widehat{BCA} = 180 - mes\ \widehat{BAC} = 180 - 90 = 90°$.

b. $mes\ \widehat{BAL} + mes\ \widehat{LAC} = \text{mes } \widehat{BAC} = 90°$.

3.a. Donc $mes\ \widehat{LAC} = 90 - mes\ \widehat{BAL}$ et $mes\ \widehat{LCA} = mes\ \widehat{BCA} = 90 - \text{mes } \widehat{ABC}$;

or, d'après (1), $\underline{mes\ \widehat{BAL}} = mes\ \widehat{LAB} = mes\ \widehat{LBA} = \underline{mes\ \widehat{ABC}}$;

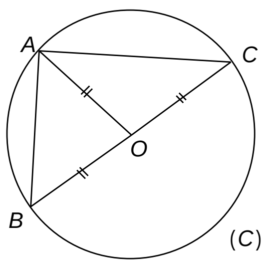
on en déduit que : $mes\ \widehat{LAC} = mes\ \widehat{LCA}$ et le triangle LAC est isocèle en L.

b. LAB isocèle en L, donc : $LA = LB$; LAC isocèle en L, donc : $LA = LC$; finalement : $LA = LB = LC$.

c. On en déduit que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, rectangle en A, est le point L.

d. L est le milieu du côté [BC].

4 Reconnaître un triangle rectangle



(C) est un cercle de centre O.
[BC] est un diamètre de (C).
$A \in (C)$.

1. $OA = OB$ donc OAB est un triangle isocèle en O et $mes\ \widehat{OBA} = mes\ \widehat{OAB}$;

De même : $mes\ \widehat{OAC} = mes\ \widehat{OCA}$.

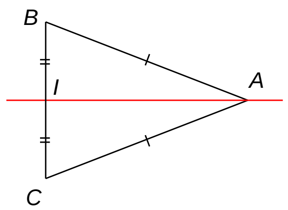
2. $mes\ \widehat{OBA} + mes\ \widehat{OAB} + mes\ \widehat{OAC} + mes\ \widehat{OCA} = 180°$ (somme des angles d'un triangle).

3.a. On en déduit que : $mes\ \widehat{BAC} = mes\ \widehat{OBA} + mes\ \widehat{OAC} = \frac{180}{2} = 90°$.

b. Le triangle ABC est rectangle en A.

5 Triangles ayant un ou des axes de symétrie

Partie A



ABC est un triangle isocèle en A.

I est le milieu de la base [BC].

Partie A

1.a. Les points I et A sont équidistants de B et C, donc (AI) est la médiatrice de [BC].

b. Les droites (AI) et (BC) sont alors perpendiculaires.

c. "Dans le triangle ABC isocèle en A, la droite (AI), médiatrice de [BC], est aussi la <u>perpendiculaire à (BC)</u> issue de <u>A</u>."

2.a. Le triangle ABC est isocèle en A, donc $mes\ \widehat{ABI} = mes\ \widehat{ACI}$;

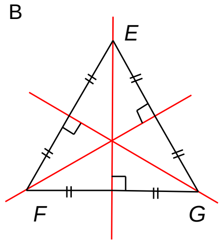
or $mes\ \widehat{BAI} = 180 - 90 - mes\ \widehat{ABI}$ et $mes\ \widehat{IAC} = 180 - 90 - mes\ \widehat{ACI}$;

on en déduit que : $mes\ \widehat{BAI} = mes\ \widehat{IAC}$.

b. "Dans le triangle ABC isocèle en A, la demi-droite [AI) est aussi la <u>bissectrice</u> de l'angle <u>$\hat{A}$</u>".

3. Dans la symétrie par rapport à la droite (AI), le symétrique du triangle ABC est lui-même ; (AI) est donc axe de symétrie du triangle ABC.

Partie B



Partie B

EFG et un triangle équilatéral.

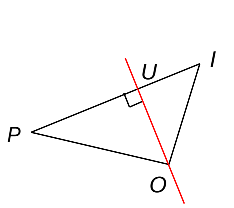
1. Ce triangle est isocèle trois fois.

2. On en déduit que ce triangle a trois axes de symétrie : ses hauteurs, qui sont en même temps médiatrices de ses côtés et bissectrices de ses angles.

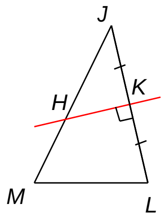
Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à utiliser les droites remarquables

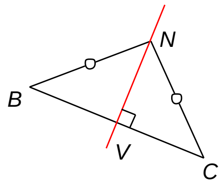
Exercice 1



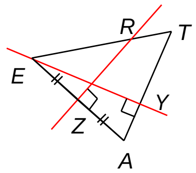
Dans le triangle *POI*, (*OU*) est la hauteur issue de *O*.



Dans le triangle *JLM*, (*HK*) est la médiatrice de [*JL*].

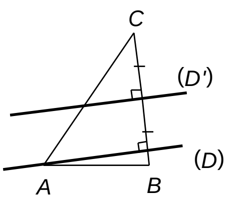


Dans le triangle *BCN*, isocèle en *N*, (*NV*) est à la fois la hauteur issue de *N* et la médiatrice de [*BC*].



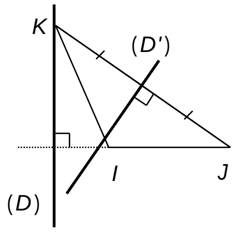
Dans le triangle *AET*, (*EY*) est la hauteur issue de *E* et (*RZ*) est la médiatrice de [*AE*].

Exercice 2



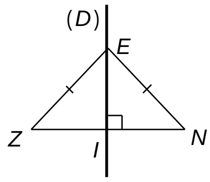
Dans le triangle *ABC*, où *AB*=4 cm, *BC*=5 cm et *CA*=6 cm :
- (*D*) est la hauteur issue de *A* ;
- (*D*') est la médiatrice du côté [*BC*].

Exercice 3



Dans le triangle *IJK*, où *IJ*=45 mm, *JK*=80 mm et *KI*=50 mm :
- (*D*) est la hauteur issue de *K* ;
- (*D*') est la médiatrice relative à [*KJ*].

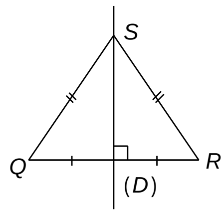
Exercice 4



1. *ZEN* est un triangle isocèle en *E*, tel que : *ZE*=*NE*=42 mm et *ZN*=58 mm.
2. La droite (*D*), perpendiculaire à (*ZN*) passant par *E*, est à la fois :
- la hauteur issue de *E*,
- la médiatrice du côté [*ZN*].

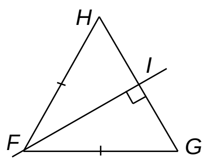
On en déduit que (*D*) coupe le segment [*ZN*] en son milieu *I*.

Exercice 5



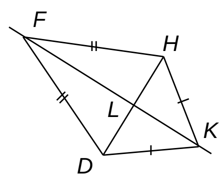
QSR étant un triangle isocèle en *S*, la médiatrice (*D*) de [*QR*] passe par *S* et est perpendiculaire à [*QR*].
Donc (*D*) est la hauteur issue de *S* dans le triangle *QSR*.

Exercice 6



1. *FGH* étant un triangle équilatéral, on a : *FH*=*FG*=*HG*.
2. La hauteur issue de *F* est aussi médiatrice de [*GH*].
Donc cette hauteur coupe [*GH*] en son milieu *I*.

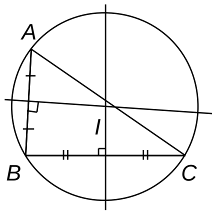
Exercice 7



1. *F* et *K* étant deux points équidistants des extrémités du segment [*HD*], (*FK*) est la médiatrice de [*HD*].
2. Dans les triangles *FHD* et *KHD*, isocèles en *F* et *K*, la médiatrice du côté commun [*HD*] est en même temps hauteur issue de *F* (dans *FHD*) et de *K* (dans *KHD*).

2 Apprendre à utiliser les cercles circonscrits

Exercice 8



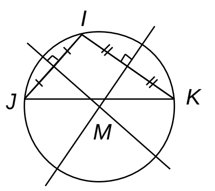
1. Ci-contre un triangle *ABC* tel que : *AB*=4 cm, *BC*=6 cm et *CA*=7 cm.

2. Le cercle circonscrit à *ABC* :
- a pour centre le point d'intersection *I* des médiatrices de 2 côtés,
- passe par l'un de ses sommets.

Commentaire : le centre du cercle circonscrit est à l'intérieur du triangle.

Exercice 9

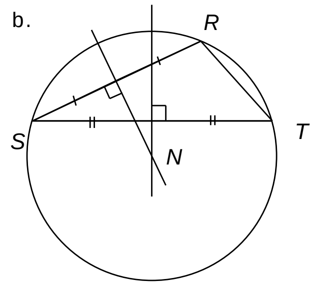
a.



Ci-dessus un triangle *IJK* tel que : *IJ*=35 mm, *JK*=56 mm et *KI*=42 cm.

Le cercle circonscrit à *IJK*
- est centré en *M*, point d'intersection des médiatrices de 2 côtés,
- passe par l'un de ses sommets.

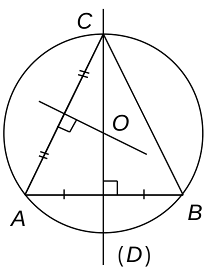
b.



Ci-dessus un triangle *RST* tel que : *RS*=7 cm, *ST*=9 cm et *TR*=4 cm.
Le cercle circonscrit à *RST*
- est centré en *N*, point d'intersection des médiatrices de 2 côtés,
- passe par l'un de ses sommets.

Commentaire : dans les deux cas, le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle.

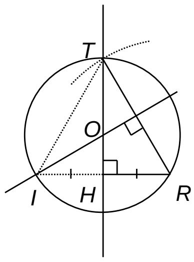
Exercice 10



1. Le segment [*AB*] étant tracé, pour obtenir un triangle *ABC*, isocèle en *C*, il faut placer *C* sur la médiatrice (*D*) de [*AB*].

2. Le cercle circonscrit à *ABC* :
- a pour centre le point d'intersection *O* de (*D*) et de l'une des deux autres médiatrices de *ABC*,
- passe par l'un de ses sommets.

Exercice 11



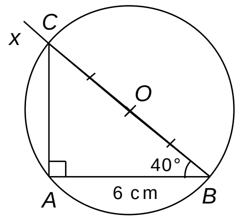
1. Ci-contre un triangle *TRH* rectangle en *H*, tel que : *RT*=5 cm et *RH*=2,5 cm (*).

2. Si *I* est le symétrique de *R* par rapport à (*TH*), alors *TRI* est un triangle équilatéral ; en effet :
- *TI*=*TR*=5 cm [ces deux segments sont symétriques par rapport à (*TH*)] ;
- *RI*=2×*RH*=5 cm.

3. Le cercle circonscrit à *TRI* :
- a pour centre le point d'intersection *O* de (*TH*) et de la hauteur issue de *I*,
- passe par l'un de ses sommets.

(*) *Programme de construction* d'un tel triangle :
- trace un segment [*RH*] de longueur 2,5 cm ;
- *T* est l'un des points d'intersection de la perpendiculaire en *H* à (*RH*) avec le cercle de centre *R* et de rayon 5 cm.

Exercice 12

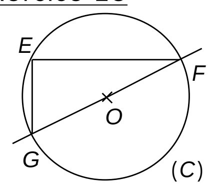


Ci-contre un triangle *ABC* tel que : *AB*=6 cm, $mes\ \hat{A}=90°$ et $mes\ \hat{B}=40°$ (*).

Le cercle circonscrit à *ABC* est le cercle de diamètre [*BC*].

(*) *Programme de construction* d'un tel triangle :
- trace un segment [*AB*] de longueur 6 cm ;
- *C* est le point d'intersection de la perpendiculaire en *A* à (*AB*) avec une demi-droite [*Bx*) telle que $mes\ \widehat{ABx}=40°$.

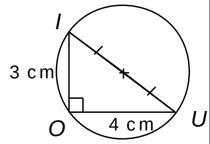
Exercice 13



1. [*FG*] est un diamètre de (*C*).

2. On en déduit que le triangle *EFG*, dont le sommet *E* appartient au cercle de diamètre [*FG*], est rectangle en *E*.

Exercice 14

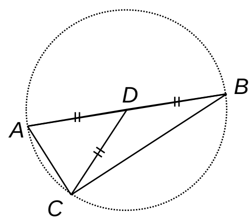


1. Ci-contre un triangle *OUI* rectangle en *O*, tel que *OU*=4 cm et *OI*=3 cm (*).

2. Le centre du cercle circonscrit au triangle *OUI*, rectangle en *O*, est le milieu de son hypoténuse [*UI*].

(*) La construction d'un tel triangle est immédiate.

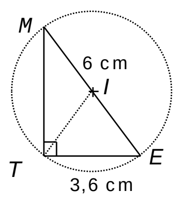
Exercice 15



Dans la figure ci-contre, on a :
- *AB*=54 m,
- *CD*=27 m,
- *D* milieu de [*AB*].

Le cercle de diamètre [*AB*] passe par *C*, donc le triangle *ABC* est rectangle en *C*.

Exercice 16



1. Ci-contre, *MET* est un triangle rectangle en *T*, tel que : *ET*=3,6 cm et *ME*=6 cm (*).

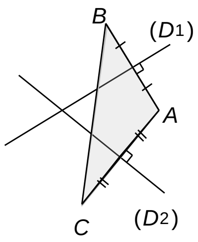
2. Le cercle circonscrit à ce triangle a pour diamètre son hypoténuse [*ME*]. Donc le milieu *I* de [*ME*] est centre de ce cercle et *IE*=*IM*=*IT*=3 cm.

(*) *Programme de construction* d'un tel triangle :
- trace un segment [*ET*] de longueur 3,6 cm ;
- *M* est l'un des points d'intersection de la perpendiculaire en *T* à (*ET*) avec le cercle de centre *E* et de rayon 6 cm.

Activités d'application

Problèmes de construction

Exercice 17

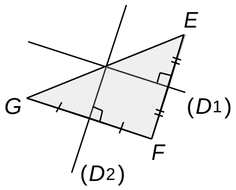


Données : A, (D_1) et (D_2).

● (D_1) est la médiatrice de $[AB]$, si B est le symétrique de A par rapport à (D_1).

● (D_2) est la médiatrice de $[AC]$, si C est le symétrique de A par rapport à (D_2).

Exercice 18

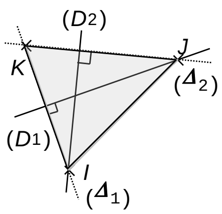


Données : G, (D_1) et (D_2).

● (D_2) est la médiatrice de $[FG]$, si F est le symétrique de G par rapport à (D_2).

● (D_1) est la médiatrice de $[EF]$, si E est le symétrique de F par rapport à (D_2).

Exercice 19

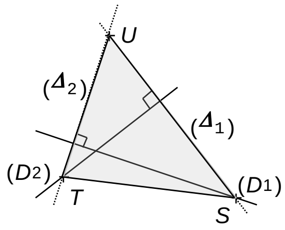


Données : I, J, (D_1) et (D_2).

● (D_1) est la hauteur issue de J d'un triangle IJK si K appartient à la droite (Δ_1) passant par I et perpendiculaire à (D_1) ;

● (D_2) est la hauteur issue de I d'un triangle IJK, si K appartient à la droite (Δ_2) passant par J et perpendiculaire à (D_2).

Exercice 20



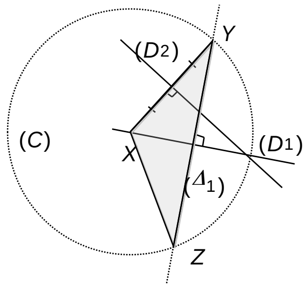
Données : U, (D_1) et (D_2).

(D_1) est la hauteur issue de S et (D_2) est la hauteur issue de T d'un triangle STU, si :

● S appartient à la droite (D_1) et à la droite (Δ_1) passant par U et perpendiculaire à (D_2) ;

● T appartient à la droite (D_2) et à la droite (Δ_2) passant par U et perpendiculaire à (D_1).

Exercice 21



Données : X, (D_1) et (D_2).

(D_1) est la hauteur issue de X et (D_2) est la médiatrice de $[XY]$ d'un triangle XYZ isocèle en X, si :

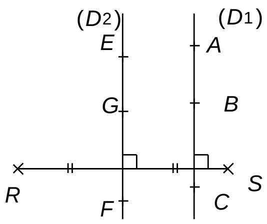
● Y est le symétrique de X par rapport à (D_2) ;

● Z appartient au cercle (C), centré en X et passant par Y, et à la droite (Δ_1) passant par Y et perpendiculaire à (D_1).

Commentaire : pour les problèmes de construction (exercices 17 à 21) :
● faire au préalable à main levée une figure respectant les consignes ;
● observer ensuite les propriétés de cette figure.

Droites remarquables

Exercice 22

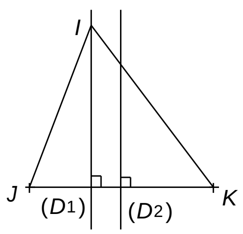


1. (D_1) est une droite perpendiculaire à (RS), (D_2) est la médiatrice de $[RS]$.

2.a. Les points A, B et C de (D_1) sont tels que (D_1) soit une hauteur de RSA, RSF et RSC ;

b. Les points E, F et G de (D_2) sont tels que (D_2) soit une médiatrice de RSE, RSF et RSG.

Exercice 23



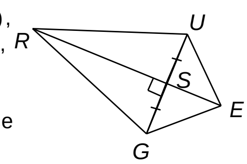
La droite (D_1), hauteur issue de I dans le triangle IJK, est perpendiculaire à la droite (JK).

La droite (D_2), médiatrice de $[JK]$, est perpendiculaire à la droite (JK).

On en déduit que $(D_1)//(D_2)$.

Exercice 24

1.a. Triangles pour lesquels une hauteur est tracée :
RUS, RSG, RUG (ont pour hauteur $[RS]$),
EUS, ESG, EUG (ont pour hauteur $[ES]$),
URE (a pour hauteur $[US]$),
GRE (a pour hauteur $[GS]$).

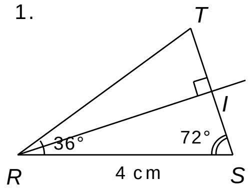


b. Triangles pour lesquels une médiatrice est tracée :
RUG, qui a pour médiatrice (RS),
EUG, qui a pour médiatrice (ES).

2. RUG et EUG, triangles pour lesquels une hauteur est en même temps médiatrice, sont les seuls triangles isocèles

Exercice 25

1.



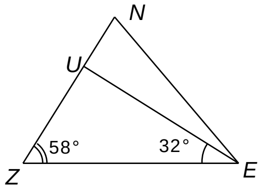
2.a. RST est un triangle isocèle en R ; en effet :

mes $\widehat{RTS} = 180 - 72 - 36 = 72°$.

b. Pour ce triangle, la hauteur issue de R est en même temps médiatrice du côté $[ST]$;
donc elle coupe $[ST]$ en son milieu I.

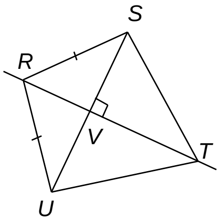
Exercice 26

1.



2. Dans le triangle *ZEU*,
mes $\hat{U}$ =180-58-32=90°.
Donc (*EU*)⊥(*ZN*) et (*EU*) est une hauteur de *ZEN*.

Exercice 27

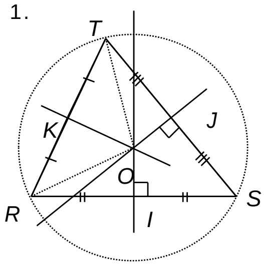


1. La droite (*RT*), perpendiculaire au segment [*SU*], passe par le point *R*, équidistant des extrémités de ce segment (*RS*=*RU*). Donc (*RT*) est la médiatrice de [*SU*] et coupe ce segment en son milieu *V*.

2. *T*, point de la médiatrice de [*SU*], est à son tour équidistant de *S* et *U* ; on en déduit que le triangle *STU* est isocèle en *T*.

Exercice 28

1.

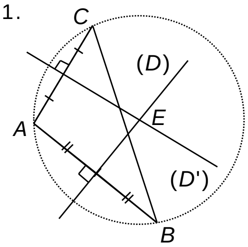


2.a. *O*, point d'intersection des médiatrices des deux côtés [*RS*] et [*ST*] du triangle *RST*, est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

b. *K* étant le milieu de [*TR*] et *O* étant équidistant des extrémités de ce segment, la droite (*KO*) est la médiatrice de [*TR*], donc (*KO*)⊥(*TR*).

Exercice 29

1.



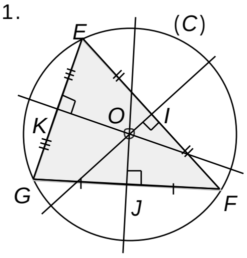
2. (*D*) et (*D*') sont les médiatrices des côtés [*AB*] et [*AC*] du triangle *ABC*.

Donc *E*, point d'intersection de deux médiatrices du triangle *ABC*, est le centre de son cercle circonscrit.

Cercles circonscrits

Exercice 30

1.

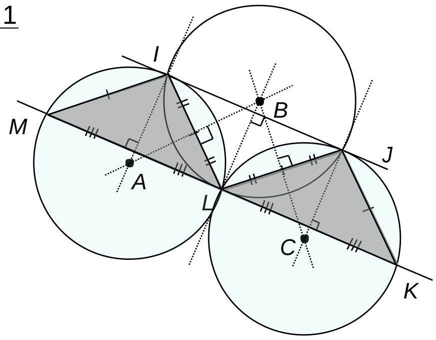


Dans la figure ci-contre :
- les points *E*, *F* et *G* sont sur le cercle (*C*), de centre *O* ;
- *I*, *J* et *K* sont les milieux respectifs de [*EF*], [*FG*] et [*GE*].

2. Les médiatrices du triangle *EFG* sont les droites (*OI*), (*OJ*) et (*OK*) *... que l'on trace à la règle uniquement*.

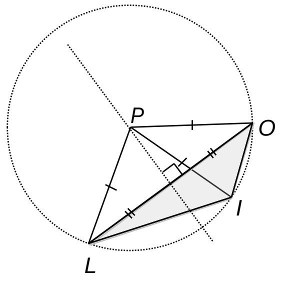
Exercice 31

1.



2. Les cercles circonscrits aux triangles *ILM*, *IJL* et *JKL* (isocèles en *I*, *L* et *J*) ont pour centres *A*, *B* et *C*, points d'intersection pour chaque triangle de deux médiatrices [sur la figure, l'une des médiatrices est la perpendiculaire en *I*, *L* et *J* à (*MK*)].

Exercice 32

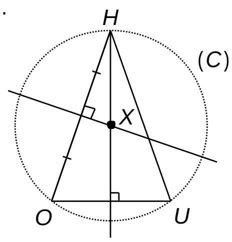


1. Comme *PL*=*PI*=*PO*, le cercle circonscrit à *LOI* a pour centre *P*.

2. Ce centre est le point d'intersection des médiatrices de *LOI*, en particulier *P* est sur la médiatrice de [*OL*].

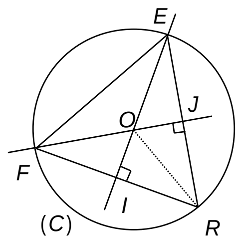
Exercice 33

1.



2. Dans le triangle *HOU*, isocèle en *H*, la hauteur issue de *H* est en même temps médiatrice du côté [*OU*].
On en déduit que *X*, point d'intersection de deux médiatrices de *HOU*, est le centre de son cercle circonscrit.
Donc le cercle de centre *X*, passant par *U*, passe par *H* et *O*.

Exercice 34

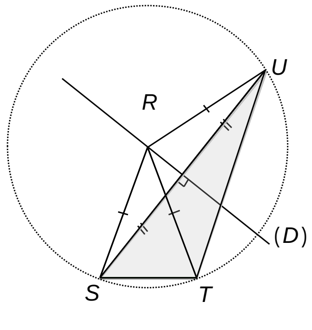


1. *O* est le centre du cercle circonscrit au triangle *FER*, donc : *OF*=*OE*=*OR*.
La droite (*EI*), perpendiculaire à (*FR*), passe par le point *O* équidistant des extrémités de [*FR*] ; donc (*EI*) est la médiatrice de [*FR*].
De même (*FJ*) est la médiatrice de [*ER*].

2. On en déduit que *EF*=*ER* et *FE*=*FR* ; donc *EF*=*FR*=*RE* et *FER* est un triangle équilatéral.

Exercice 35

1.



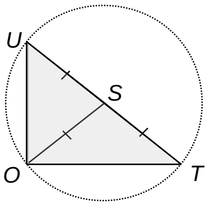
2. *RST* est un triangle isocèle en *R*, donc : *RS*=*RT* ;

U est le symétrique de *S* par rapport à (*D*) et *R*∈(*D*), donc : *RS*=*RU* ;

finalement : *RS*=*RT*=*RU* et *R* est le centre du cercle circonscrit au triangle *STU*.

Exercice 36

1.

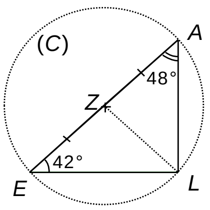


2.a. Le triangle *SOU* est isocèle en *S*, donc : *SU*=*SO*.
T est le symétrique de *U* par rapport à *S*, donc *S* est le milieu de [*UT*].
Finalement *SU*=*SO*=*ST* et *S* est le centre du cercle circonscrit au triangle *TOU*.

b. Les points *U*, *S* et *T* étant alignés, [*UT*] est un diamètre du cercle circonscrit à *TOU* ; on en déduit que ce triangle est rectangle en *O*.

Exercice 37

1.

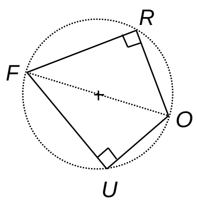


1. *LEA* est un triangle tel que :
mes $\hat{E}$ =42° et *mes* $\hat{A}$ =48° ;
mes $\hat{L}$ =180-42-48=90° donc *LEA* est rectangle en *L*.

2.a. *Z* est le milieu de [*AE*] ; (*C*) est le cercle de centre *Z*, passant par *L*.

b. Le cercle circonscrit au triangle *LEA*, rectangle en *L*, est le cercle de diamètre [*AE*] ; centré au milieu *Z* de [*AE*] et passant par *L*, ce cercle n'est autre que (*C*), qui finalement passe aussi par les points *E* et *A*.

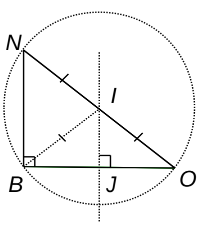
Exercice 38



Les triangles *RFO* et *UFO*, rectangles en *R* et *U*, ont le même cercle circonscrit : celui de diamètre [*FO*].

Pour tracer un cercle passant par les quatre sommets du quadrilatère *ROUE*, il suffit donc de construire son centre : le milieu de [*FO*].

Exercice 39



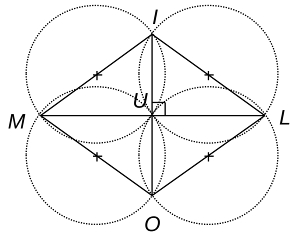
1. *BON*, triangle rectangle en *B*, a pour cercle circonscrit le cercle de diamètre [*ON*] ; donc *I*, milieu de [*ON*], est le centre de ce cercle.

2.a. *IO*=*IB* ; donc *BOI* est un triangle isocèle en *I*.

c. La perpendiculaire à (*BO*) passant par *I*, point équidistant des extrémités du segment [*BO*], est la médiatrice de ce segment ; elle le coupe en son milieu *J*.

Exercice 40

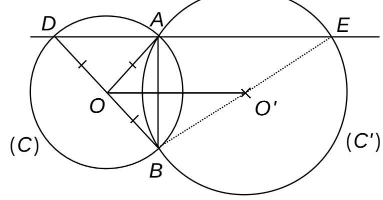
1.



2. *MILO* est un losange de centre *U*. Les cercles de diamètres [*MI*], [*IL*], [*LO*] et [*OM*] sont sécants en *U*.
Justification :
Les diagonales [*IO*] et [*LM*] du losange *MILO* sont perpendiculaires et sécantes en leur milieu *U*, donc les cercles circonscrits à chacun des 4 triangles *UMI*, *UIL*, *ULO* et *UOM*, rectangles en *U*, sont les cercles déjà tracés, qui passent donc par *U*.

Exercice 41

1.

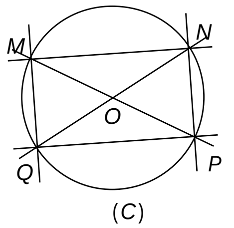


Sur la figure ci-contre :

- les cercles (*C*) et (*C*'), de centres respectifs *O* et *O*', sont sécants en *A* et *B* ;
- *D* est le symétrique de *B* par rapport à *O* ;
- (*DA*) coupe (*C*') en *E*.

2.a. Le cercle (*C*), circonscrit au triangle *BAD*, a pour diamètre [*BD*] ; donc *BAD* est rectangle en *A*.
b. On en déduit que les droites (*DA*) et (*AB*) sont perpendiculaires en *A* et que le triangle *BAE* est lui-même rectangle en *A* ; le cercle (*C*'), qui lui est circonscrit, a pour diamètre [*BE*] ; donc *O*' est le milieu de [*BE*].

Exercice 42



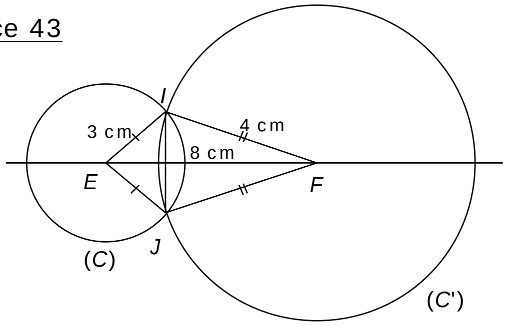
O est le centre du cercle (*C*).

1. En prenant 3 points parmi *M*, *N*, *P* et *Q*, on obtient toujours un triangle dont (*C*) est le cercle circonscrit et un côté est diamètre de ce cercle ; donc ils sont tous rectangles : *MNP*, *NPQ*, *PQM* et *QMN* (rectangles respectivement en *N*, *P*, *Q* et *M*).

2. *MNPQ* est alors un rectangle (de centre *O*) et il y a deux couples de droites parallèles : (*MN*)//(*PQ*) et (*NP*)//(*QM*).

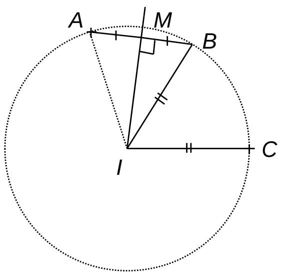
Exercice 43

1.



2. ● $EI=EJ$, car I et J sont sur le cercle (C) de centre E.
● $FI=FJ$, car I et J sont sur le cercle (C') de centre F.
● Les deux points E et F sont donc équidistants des points I et J. Par conséquent, la droite (EF) est la médiatrice du segment $[IJ]$.

Exercice 44



1. Sur la figure codée ci-contre :

● le point M est le milieu du segment $[AB]$;

● la droite (IM) est perpendiculaire à la droite (AB) ;

● la droite (IM) est donc aussi la médiatrice du segment $[AB]$;

● on en déduit que le point I est équidistant des points A et B.

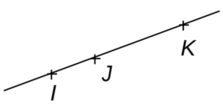
2. I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
En effet : $IA=IB$ (d'après 1.) et $IB=IC$ (d'après le codage de la figure) ; donc : $IA=IB=IC$.

Exercice 45

A

Par trois points, il ne passe pas toujours un cercle.

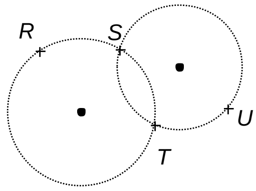
C'est le cas ci-dessous, où I, J et K sont alignés.



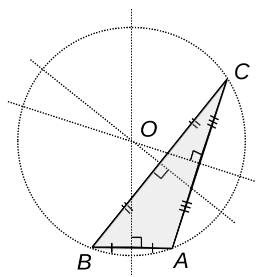
B

Par quatre points, il ne passe pas toujours un cercle.

C'est le cas ci-dessous, où le cercle circonscrit à R, S et T est différent de celui circonscrit à S, T et U.



Exercice 46

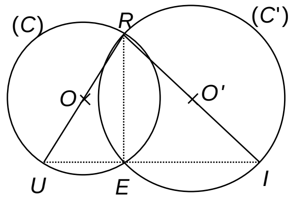


Le centre du cercle circonscrit à un triangle n'est pas toujours à l'intérieur du triangle
ou
au milieu d'un côté.

C'est le cas ci-contre, pour un triangle ABC, où $\hat{A}$ est un angle obtus
et
le centre O de son cercle circonscrit est à l'extérieur.

Exercice 47

1.



● $[RU]$ est un diamètre du cercle (C) et $E \in (C)$, donc le triangle RUE est rectangle en E, d'où $mes\ \widehat{REU}=90°$;

● $[RI]$ est un diamètre du cercle (C') et $E \in (C')$, donc le triangle REI est rectangle en E, d'où $mes\ \widehat{REI}=90°$;

● $mes\ \widehat{UEI}=mes\ \widehat{REU}+mes\ \widehat{REI}=90+90=180°$;

● donc $\widehat{UEI}$ est un angle plat, et les points U, E et I sont donc alignés dans cet ordre.

2.a. *Enoncé du problème* :

(C) et (C') sont deux cercles, de centres respectifs O et O', sécants en E et R.
U est le point de (C) diamétralement opposé au point R ;
I est le point de (C') diamétralement opposé au point R.

b. *Question du problème* :

Démontre que les points U, E et I sont alignés dans cet ordre.

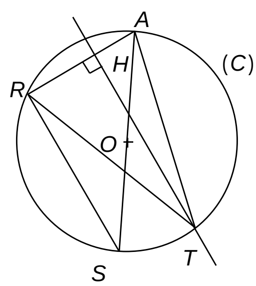
Exercice 48

1. Dans la figure ci-contre :

R, A et T sont trois points d'un cercle (C) de centre O ;

H est le pied de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par T ;

S est le point de (C) diamétralement opposé à A.

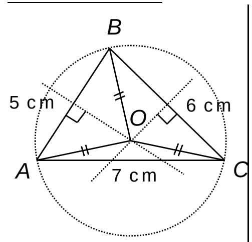


2.a. $(TH) \perp (RA)$ est l'affirmation justifiée par l'énoncé ci-dessus.

b. $(SR) \perp (RA)$ est une affirmation justifiée par la propriété : « si R est un point du cercle de diamètre $[SA]$, alors RSA est un triangle rectangle en A ».

3. $(SR)//(TH)$ est une affirmation justifiée par la propriété : « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors ces deux droites sont parallèles entre elles ».

Exercice 49

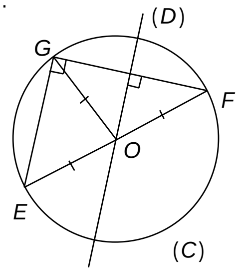


1. Ci-contre un triangle *ABC* tel que : *AB*=5 cm, *BC*=6 cm et *CA*=7 cm.

2. Le point *O*, équidistant de *A*, *B* et *C*, est le centre du cercle circonscrit à *ABC* ;
O est donc le point d'intersection de ses médiatrices, que l'on construit avec une règle et un compas.

Exercice 50

1.



Ci-dessus :
- [*EF*] diamètre de (*C*),
- *G*∈(*C*),
- (*D*)//(*EG*) et *O*∈(*D*).

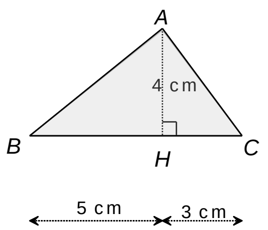
2. *EGF* est un triangle rectangle en *G* ; en effet le sommet *G* de ce triangle appartient au cercle de diamètre [*EF*].

3.a. (*EG*)⊥(*FG*) et (*D*)//(*EG*) donc : (*D*)⊥(*FG*).

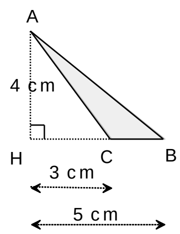
b. (*D*), droite perpendiculaire à (*FG*), passe par le point *O* équidistant de *F* et *G* ; donc (*D*) est la médiatrice du segment [*FG*]. En d'autres termes, (*D*) est axe de symétrie du triangle *GOF*.

Exercice 51

1.



2.

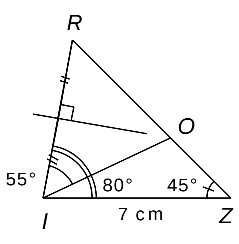


Ci-dessus deux triangles *ABC* tels que :
- (*AH*) est la hauteur issue de *A* ;
- *AH*=4 cm, *CH*=3 cm et *BH*=5 cm.

En 1, *H* est entre les points *B* et *C*.

En 2, les points *B* et *C* sont d'un même côté de *H*.

Exercice 52

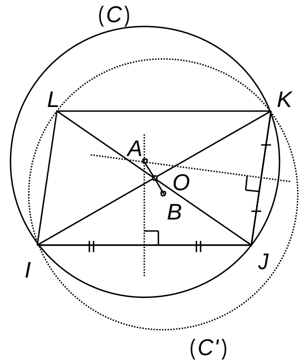


1.
- *RIZ* est un triangle tel que : *IZ*=7 cm, $mes\,\hat{I}$ =80° et $mes\,\hat{Z}$ =45°.
- *O*∈[*RZ*] et $mes\,\widehat{RIO}$=55°.

2. Dans le triangle *RIZ* :
$mes\,\hat{R}$ =180-80-45=55°.

Donc le triangle *RIO* est isocèle en *O* et la médiatrice de [*RI*] passe par *O*.

Exercice 53



IJKL est un parallélogramme de centre *O*, tel que : *IJ*=8 cm, *JK*=5 cm et *IK*=10 cm.

A est le centre du cercle (*C*), circonscrit au triangle *IJK*.

B est le symétrique de *A* par rapport à *O*.

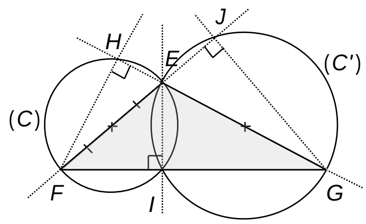
O étant centre de symétrie de *IJKL*, le triangle *KLI* est symétrique du triangle *IJK* par rapport à *O*.

Donc :
- le cercle (*C*'), circonscrit à *KLI*, est le symétrique par rapport à *O* du cercle (*C*), circonscrit à *IJK* ;
- le centre de (*C*') est le symétrique, par rapport à *O*, du centre de (*C*).

On en déduit que *B* est le centre du cercle (*C*'), circonscrit au triangle *IKL*.

Exercice 54

1. *EFG* est un triangle tel que : *EG*=7 cm, *EF*=5 cm, *FG*=10 cm.



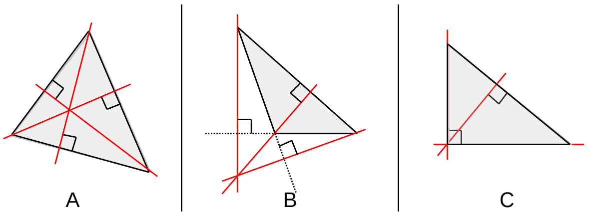
2.a. Si *H* est le point d'intersection du cercle (*C*), de diamètre [*EF*], et de la droite (*EG*), alors le triangle *HEF* (dont le cercle circonscrit a pour diamètre [*EF*]) est rectangle en *H*.
Donc (*FH*)⊥(*EG*) et *H*, qui appartient à (*EG*), est le pied de la hauteur du triangle *EFG*, issue de *F*.

b. Si *I* est le point d'intersection du cercle (C) et du segment [*FG*], alors le triangle *IEF* (dont le cercle circonscrit a pour diamètre [*EF*]) est rectangle en *I*.
Donc (*EI*)⊥(*FG*) et la droite (*EI*), *que l'on trace à la règle uniquement*, est la hauteur du triangle *EFG* issue de *E*.

3. Si *J* est le point d'intersection du cercle (*C*'), de diamètre [*EG*], et de la droite (*EF*), alors *J* est le pied de la hauteur du triangle *EFG*, issue de *G* ; la droite (*GI*), *que l'on trace à la règle uniquement*, est la hauteur du triangle *EFG*, issue de *G*.

Exercice 55

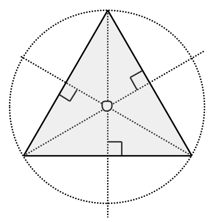
1. On ne peut pas tracer un triangle avec une seule hauteur en dehors du triangle. En effet :



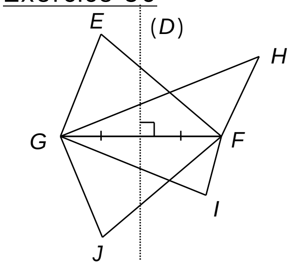
- ou bien aucune des hauteurs n'est en dehors du triangle, comme en A (où les 3 angles du triangle sont aigus) et comme en C (où le triangle est rectangle) ;
- ou bien deux des hauteurs sont en dehors du triangle, comme en B (où un angle du triangle est obtus).

2. Les hauteurs d'un triangle peuvent se croiser au centre de son cercle circonscrit.

C'est le cas pour tout triangle équilatéral.

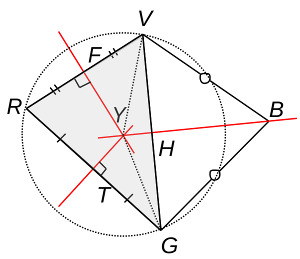


Exercice 56



Les centres des cercles circonscrits aux triangles *EFG*, *FGH*, *GFI* et *JFG* sont alignés sur la médiatrice (*D*) du côté [*GF*], commun à ces 4 triangles.

Exercice 57

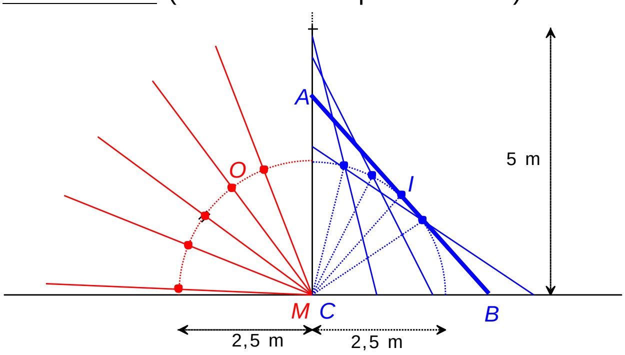


1. *Y* est le centre du cercle circonscrit au triangle *GRV*. En effet *Y* est le point d'intersection des médiatrices des côtés [*GR*] et [*RV*] de ce triangle.

2. *Y* (comme centre du cercle circonscrit à *GRV*) et *B* (selon le codage) sont équidistants de *V* et *G* ; donc la droite (*BY*), qui est la médiatrice de [*VG*], coupe ce segment en son milieu *H*.

Activités d'intégration

Exercice 58 (Les échelles qui tombent)



1. En basculant sans bouger son pied *M*, la trajectoire décrite par le milieu *O* de l'échelle *rouge* de Mariam est un quart de cercle de rayon 2,5 m.

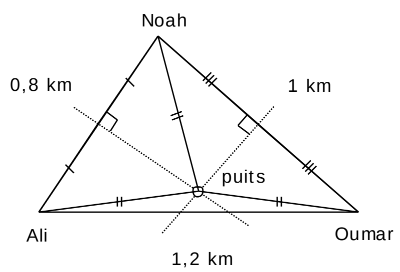
2. En glissant son pied *B* sur le sol tandis que le sommet *A* glisse le long du mur, l'échelle *bleue* de Oloa est telle que :
a. le triangle *ABC* est rectangle en *C* ;
b. le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le milieu de l'hypoténuse [*AB*] ;
c. comme $IC=IA=IB=\frac{5}{2}=2{,}5$ m, la trajectoire décrite par le milieu *I* de l'échelle d'Oloa est aussi un quart de cercle de rayon 2,5 m.

Exercice 59 (l'emplacement d'un puits)

1.a. Si les distances entre les trois fermes sont de 1,2 km, 0,8 km et 1 km, ces fermes sont les sommets d'un triangle puisque l'inégalité triangulaire est vérifiée : $1{,}2<1+0{,}8$.
b. Pour être à la même distance de chacune des fermes, l'emplacement du puits doit être au centre *O* du cercle circonscrit au triangle formé par les trois fermes.
2. 1,2 km = 120 000 cm, 0,8 km = 80 000 cm et 1 km = 100 000 cm ;

A l'échelle $\frac{1}{10\ 000}$:

1,2 km est représenté par 120 000÷10 000=12 cm,
0,8 km est représenté par 80 000÷10 000=8 cm,
1 km est représenté par 100 000÷10 000=10 cm.



Exercice 60 (Le centre du cercle)

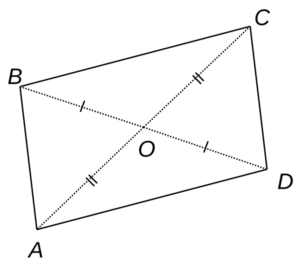
1.a. Le bord de la face supérieure de la pièce est le cercle circonscrit au triangle *TRI*.
b. Si *O* est le centre de la face supérieure, on a : *OT*=*OR*=*OI*.
c. Le point *O*, centre du cercle circonscrit au triangle *TRI*, est le point d'intersection de deux médiatrices de ce triangle.
2. Si le triangle *TRI* est isocèle en *R*, alors la droite (*RO*) est axe de symétrie pour ce triangle.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
	Rappels sur le parallélogramme [1 p.60]	21, 22, 24, 40, 41	42, 43, 46, 47	53,
1, 2	Parallélogramme et centre de symétrie [2 p.60]	29		
2	Reconnaître un parallélogramme par ses diagonales [3 p.60]	22, 27, 31, 32, 34, 35, 39		
3, 4	Reconnaître un parallélogramme par ses côtés [4 p.61]	26, 33, 37, 39		
5	Reconnaître un parallélogramme par ses angles [5 p.61]	23, 28,, 30, 36, 38		51, 52,
	Apprendre à construire un parallélogramme [1 p.62]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 25	44,	48,
	Apprendre à reconnaître un parallélogramme [2 p.63]	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20	45,	49, 50, 54

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

1 Centre de symétrie d'un parallélogramme



1. Le centre *O* d'un parallélogramme *ABCD* est le point d'intersection de ses diagonales, qui se coupent en leur milieu (*résultat établi en 6*[e]).
2.a. Puisque *O* est le milieu de [*AC*] et [*BD*], *C* et *D* sont les symétriques respectifs de *A* et *B* par rapport à *O*.
b. On en déduit que les symétriques respectifs des segments [*AB*] et [*AD*] par rapport à *O* sont les segments [*CD*] et [*CB*].
c. Le point *O* est donc un centre de symétrie pour le parallélogramme *ABCD*.

2 Quadrilatère ayant un centre de symétrie

1. Sur les quatre quadrilatères proposés, trois ont des diagonales qui se coupent en leur milieu et trois (les mêmes) ont un centre de symétrie : *EFGH*, *ABCD* et *IJKL*.

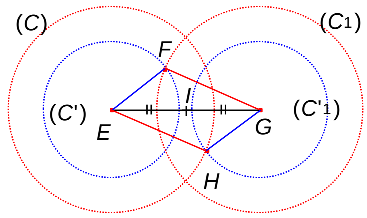
2.a. Tableau de correspondance pour la symétrie de centre *O* et le quadrilatère *ABCD*

A	*B*	(*AB*)	(*CD*)
C	*D*	(*CD*)	(*AB*)

b. On en déduit que : (*AB*)//(*CD*) ; de même : (*AD*)//(*BC*).
c. Donc *ABCD* est un parallélogramme.

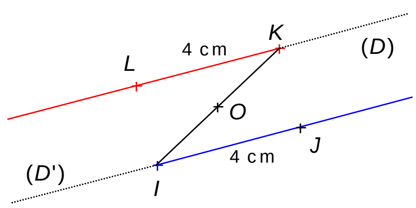
3. *Si un quadrilatère a ses <u>diagonales</u> qui se coupent en leur <u>milieu</u>, alors c'est un parallélogramme.*
Si un quadrilatère non croisé possède un <u>centre</u> de <u>symétrie</u>, alors c'est un <u>parallélogramme</u>.

3 Quadrilatères et côtés opposés (1)



Sur la figure ci-contre, les cercles rouges ont le même rayon, ainsi que les cercles bleus.
1. Les côtés opposés (de même couleur) du quadrilatère *EFGH* sont de même longueur.
2. Le symétrique de *E* par rapport à *I* est *G*, de (*C'*) est (C'_1), de (C_1) est (*C*), de *F* est *H*.
3.a. Finalement *I* est centre de symétrie pour le quadrilatère *EFGH*.
b. Donc le quadrilatère *EFGH* est un parallélogramme (*d'après l'activité précédente*).

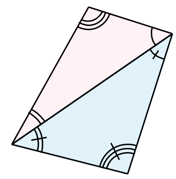
4 Quadrilatères et côtés opposés (2)



1.c. *IJKL* semble être un parallélogramme.
2.b. Si *O* est le milieu de [*IK*], alors le symétrique de *I* par rapport à *O* est *K*.
c. Le symétrique de la demi-droite [*IJ*) par rapport à *O* est la demi-droite [*KL*) ; comme *IJ*=*KL*=4 cm, le symétrique de *J* par rapport à *O* est *L*.
d. On en déduit que *O* est centre de symétrie du quadrilatère non croisé *IJKL*, c'est-à-dire que *IJKL* est un parallélogramme (*d'après le résultat énoncé en 2.3*).

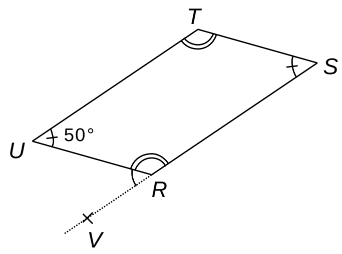
3. *Si un quadrilatère non croisé possède deux côtés opposés de même <u>longueur</u> et <u>de supports parallèles</u>, alors c'est un <u>parallélogramme</u>.*

5 Quadrilatères et angles opposés



1.a. La somme des mesures des angles marqués en rouge vaut 180°.
b. La somme des mesures des angles marqués en bleu vaut 180°.
c. On en déduit que la somme des mesures des angles d'un quadrilatère non croisé est égale à : 180+180=360°.

2. Dans le quadrilatère non croisé ci-contre, les angles opposés ont des mesures égales.



En particulier : a. $mes\ \widehat{URS} = mes\ \widehat{UTS}$.

b. $mes\ \hat{S} = mes\ \hat{U} = 50°$.

c. Or, d'après la question 1, $mes\ \hat{S} + mes\ \hat{U} + mes\ \widehat{URS} + mes\ \widehat{UTS} = 360°$.

Donc : $mes\ \widehat{URS} = mes\ \widehat{UTS} = \dfrac{360-50-50}{2} = \dfrac{260}{2} = 130°$.

2.a. Sachant que $V \in (RS)$ (et $V \notin [RS]$), on peut dire que les angles $\widehat{URS}$ et $\widehat{URV}$ sont supplémentaires ;

donc : $mes\ \widehat{URV} = 180 - 130 = 50°$.

b. L'angle $\hat{S}$ et l'angle $\widehat{URV}$, <u>correspondants</u> par rapport à la sécante (SR) aux deux droites (ST) et (RU), sont <u>de même mesure</u> (50°).

c. Donc : $(ST) // (RU)$.

d. L'angle $\hat{U}$ et l'angle $\widehat{URV}$, alternes-internes par rapport à la sécante (UR) aux deux droites (UT) et (RS), sont de même mesure (50°) ; donc : $(UT) // (RS)$.

e. Finalement le quadrilatère *RSTU* est un parallélogramme.

4. *Si un quadrilatère non croisé a ses angles opposés de la même <u>mesure</u>, alors c'est un <u>parallélogramme</u>.*

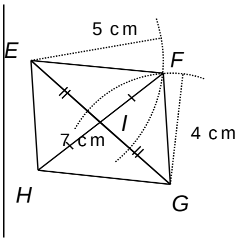
Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à construire un parallélogramme

Exercice 1

Construis un triangle *EFG* tel que : *EG*=7 cm, *EF*=5 cm et *GF*=4 cm.

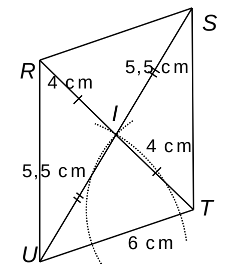
Le sommet *H* du parallélogramme *EFGH* est le symétrique du point *F* par rapport au milieu *I* du segment [*EG*].



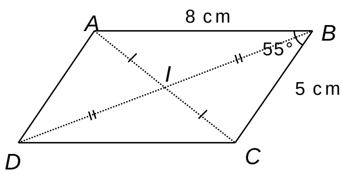
Exercice 2

Construis un triangle *UTI* tel que : *UT*=6 cm, *UI*=5,5 cm et *TI*=4 cm.

Les sommets *R* et *S* du parallélogramme *RSTU* sont les symétriques respectifs des points *T* et *U* par rapport à *I*.



Exercice 3



Construis un triangle *ABC* tel que :

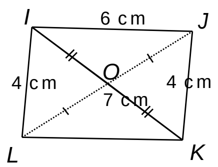
AB=8 cm, *BC*=5 cm et *mes* $\hat{B}$ =55°.

Le sommet *D* du parallélogramme *ABCD* est le symétrique du point *B* par rapport au milieu *I* du segment [*AC*].

Exercice 4

Construis un triangle *IJK* tel que : *IK*=7 cm, *IJ*=6 cm et *JK*=4 cm.

Le sommet *L* du parallélogramme *IJKL* est le symétrique du point *J* par rapport au milieu *O* du segment [*IK*].

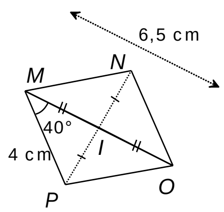


Exercice 5

Construis un triangle *MPO* tel que :

MP=4 cm, *MO*=6,5 cm et *mes* $\hat{M}$ =40°.

Le sommet *N* du parallélogramme *MNOP* est le symétrique du point *P* par rapport au milieu *I* du segment [*MO*].

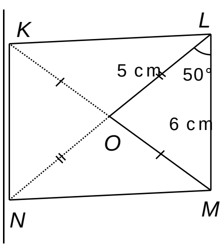


Exercice 6

Construis un triangle *LMO* tel que :

LM=6 cm, *LO*=5 cm et *mes* $\hat{L}$ =50°.

Les sommets *N* et *K* du parallélogramme *LMNK* sont les symétriques respectifs des points *L* et *M* par rapport à *O*.



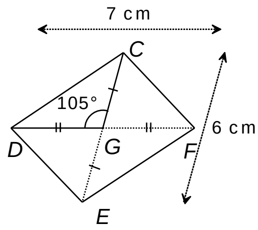
Recommandation pour les exercices 7 à 11 (comme pour tout exercice de construction et dans les exercices précédents la figure est donnée dans l'énoncé) : faire au préalable une figure à main levée.

Exercice 7

Construis un triangle *DGC* tel que :

GD=3,5 cm, *GC*=3 cm et *mes* $\hat{G}$ =105°.

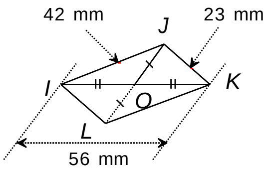
Les sommets *E* et *F* du parallélogramme *CDEF* sont les symétriques respectifs des points *C* et *D* par rapport à *G*.



Exercice 8

Construis un triangle *IJK* tel que : *IJ*=42 mm, *JK*=23 mm et *IK*=56 mm ; place le milieu *O* de [*IK*].

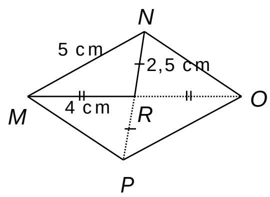
Le sommet *L* du parallélogramme *IJKL* est le symétrique du point *J* par rapport à *O*.



Exercice 9

Construis un triangle *MNR* tel que : *MN*=5 cm, *MR*=4 cm et *NR*=2,5 cm.

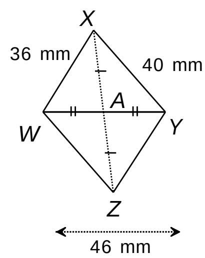
Les sommets *O* et *P* du parallélogramme *MNOP*, de centre *R*, sont les symétriques respectifs des points *M* et *N* par rapport à *R*.



Exercice 10

Construis un triangle *WXY* tel que : *WX*=36 mm, *WY*=46 mm et *XY*=40mm ; place le milieu *A* de [*WY*].

Le sommet *Z* du parallélogramme *WXYZ* est le symétrique du point *X* par rapport à *A*.

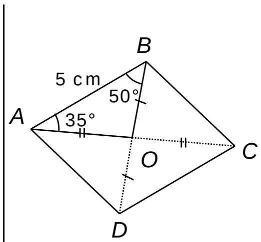


Exercice 11

Construis un triangle *AOB* tel que :

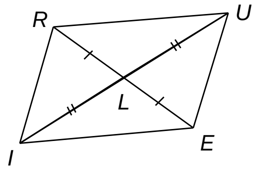
AB=5 cm, *mes* $\hat{A}$ =35° et mes $\hat{B}$ =50°.

Les sommets *C* et *D* du parallélogramme *ABCD*, de centre *O*, sont les symétriques respectifs des points *A* et *B* par rapport à *O*.



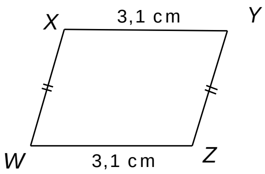
1 Apprendre à reconnaître les parallélogrammes

Exercice 12



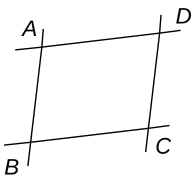
Les diagonales du quadrilatère *RUEI* se coupent en leur milieu.
Donc *RUEI* est un parallélogramme.

Exercice 13



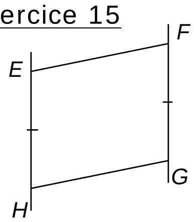
Les côtés opposés du quadrilatère non croisé *XYZW* ont la même longueur.
Donc *XYZW* est un parallélogramme.

Exercice 14



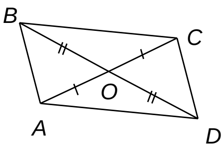
Les supports des côtés opposés du quadrilatère *ABCD* sont parallèles.
Donc *ABCD* est un parallélogramme.

Exercice 15



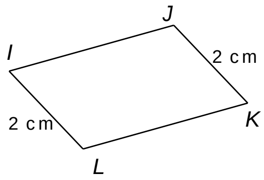
Les côtés opposés [*EH*] et [*FG*] du quadrilatère non croisé *EFGH* sont de même longueur et de supports parallèles.
Donc *EFGH* est un parallélogramme.

Exercice 16



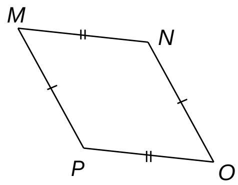
Les diagonales du quadrilatère *ABCD* se coupent en leur milieu *O*.
Donc *ABCD* est un parallélogramme.

Exercice 17



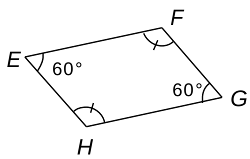
Les côtés opposés [IL] et [JK] du quadrilatère non croisé *IJKL* sont de même longueur et de supports parallèles.
Donc *IJKL* est un parallélogramme.

Exercice 18



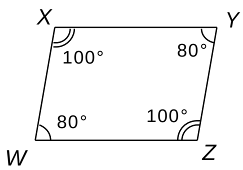
Les côtés opposés du quadrilatère non croisé *MNOP* sont de même longueur.
Donc *MNOP* est un parallélogramme.

Exercice 19



Les angles opposés du quadrilatère non croisé *EFGH* sont de même mesure.
Donc *EFGH* est un parallélogramme.

Exercice 20

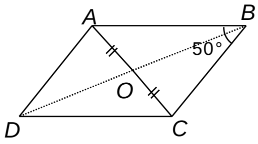


2. Les angles opposés du quadrilatère non croisé *WXYZ* sont de même mesure.
Donc *WXYZ* est un parallélogramme.

Activités d'application

Utiliser les propriétés

Exercice 21



Dans le parallélogramme *ABCD* de centre *O* :

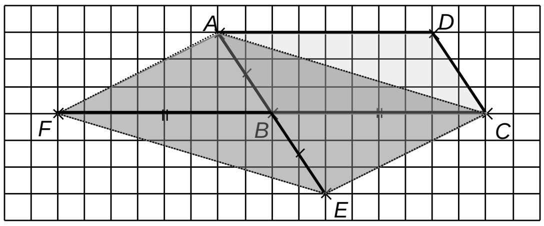
a. longueurs égales :
AB=*DC*, *AD*=*BC* (côtés opposés), *OA*=*OC* ;

b. *O* est le milieu de la diagonale [*BD*] ;

c. $mes\ \widehat{ADC} = mes\ \widehat{ABC} = 50°$ (angles opposés) ;

$mes\ \widehat{BAD} = mes\ \widehat{BCD} = 180-50 = 130°$ (angles consécutifs).

Exercice 22

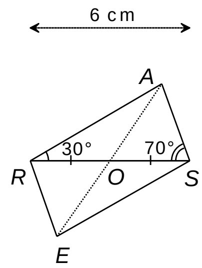


2.a. Pour que *ABCD* soit un parallélogramme, le sommet *D* doit être le point d'intersection de la droite passant par *C*, parallèle à (*BA*), et de la droite passant par *A*, parallèle à (*BC*) ;

b. pour que *ACEF* soit un parallélogramme de centre *B*, les sommets *E* et *F* doivent être les symétriques respectifs de *A* et *C*, par rapport à *B*.

Commentaire : utiliser les nœuds du quadrillage pour effectuer ces constructions.

Exercice 23



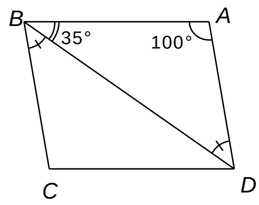
1. *RAS* est un triangle tel que :
- *RS*=6 cm,
- $mes\ \widehat{ASR} = 70°$ et $mes\ \widehat{ARS} = 30°$.

2.a. Le point *E*, tel que *RASE* soit un parallélogramme, est le symétrique de *A* par rapport au milieu *O* de [*RS*].

b. $mes\ \widehat{RAS} = 180-30-70 = 80°$;

$mes\ \widehat{ARE} = mes\ \widehat{ASE} = 180-80 = 100°$.

Exercice 24

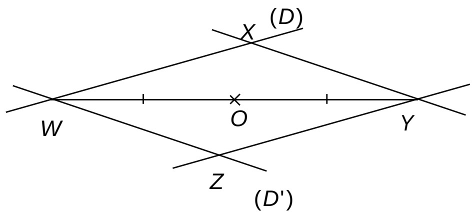


ABCD est un parallélogramme.

$mes\ \widehat{ABC} = 180-100 = 80°$.

$mes\ \widehat{DBC} = 80-35 = 45°$.

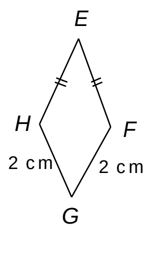
Exercice 25



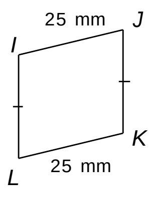
Pour construire le parallélogramme *WXYZ* de centre *O*, tel que *X*∈(*D*) et *Y*∈(*D*') :
- *Y* est le symétrique de *W* par rapport à *O* ;
- *X* est le point d'intersection de (*D*) avec la droite passant par *Y* et parallèle à (*D*') ;
- *Z* est le point d'intersection de (*D*') avec la droite passant par *Y* et parallèle à (*D*).

Reconnaître un parallélogramme

Exercice 26

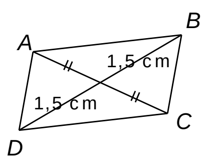


EFGH n'est pas un parallélogramme ; en effet ses côtés opposés ne sont pas nécessairement de même longueur.

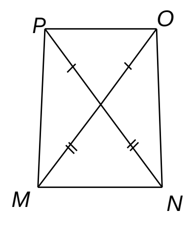


IJKL est un parallélogramme, puisque ce quadrilatère, non croisé, a ses côtés opposés de même longueur.

Exercice 27

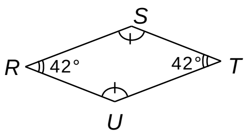


ABCD est un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en leur milieu.

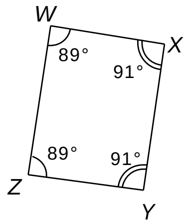


MNOP n'est pas un parallélogramme ; en effet ses diagonales ne se coupent pas nécessairement en leur milieu.

Exercice 28

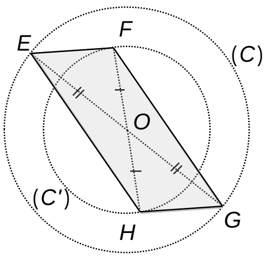


RSTU est un parallélogramme, puisque ce quadrilatère, non croisé, a ses angles opposés de même mesure.



IJKL n'est pas un parallélogramme ; en effet ses angles opposés n'ont pas la même mesure.

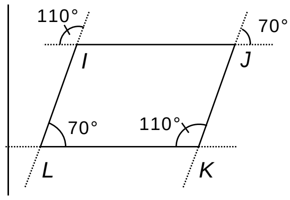
Exercice 29



1. Les diagonales de *EFGH* se coupent en leur milieu *O*. En effet :
- [*EG*] est un diamètre du cercle (*C*), de centre *O*.
- [*FH*] est un diamètre du cercle (*C'*), de centre *O*.

2. On en déduit que *EFGH* est un parallélogramme (de centre *O*).

Exercice 30

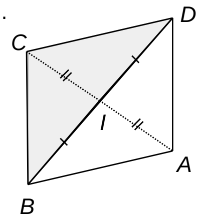


1. *Mes* $\widehat{LIJ}$ = 110° (angle opposé par le sommet à un angle de mesure 110°) et *mes* $\widehat{IJK}$ = 70° (angle opposé par le sommet à un angle de mesure 70°).

2. On en déduit que *IJKL* est un parallélogramme, puisque ce quadrilatère, non croisé, a ses angles opposés de même mesure.

Exercice 31

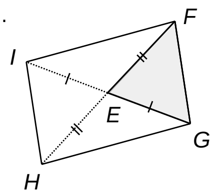
1.



2. Si *I* est le milieu de [*BD*] et *A* est le symétrique de *C* par rapport à *I*, alors les diagonales [*BD*] et [*CA*] du quadrilatère *ABCD* ont le même milieu *I*. Donc *ABCD* est un parallélogramme.

Exercice 32

1.

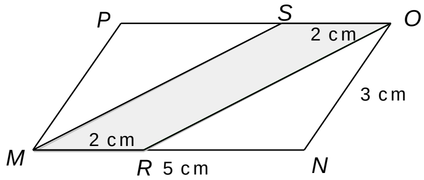


2. Si *H* et *I* sont les symétriques respectifs de *F* et *G* par rapport à *E*, alors les diagonales [*FH*] et [*GI*] du quadrilatère *FGHI* ont le même milieu *E*. Donc *FGHI* est un parallélogramme.

Petits problèmes

Exercice 33

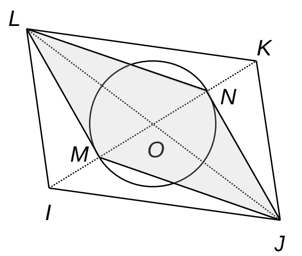
1.



2. *MROS* est un parallélogramme. En effet :
- *MNOP* est un parallélogramme, donc (*MN*)//(*PO*) ;
- par construction, *MR*=*OS*=2 cm et *MROS* est un quadrilatère non croisé ;
- finalement les côtés [*MR*] et [*SO*], du quadrilatère non croisé *MROS*, sont de même longueur et de supports parallèles ;
- on en déduit que *MROS* est un parallélogramme.

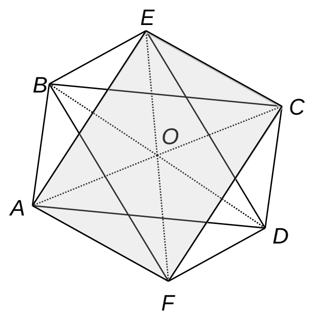
Exercice 34

1.



2. *JMLN* est un parallélogramme. En effet :
- *IJKL* est un parallélogramme de centre *O*, donc *O* est le milieu de la diagonale [*JL*] ;
- par construction, [*MN*] est un diamètre du cercle (*C*), de centre *O* ; donc *O* est le milieu de [*MN*] ;
- finalement les diagonales [*JL*] et [*MN*] du quadrilatère *JMLN* se coupent en leur milieu ;
- on en déduit que *JMLN* est un parallélogramme.

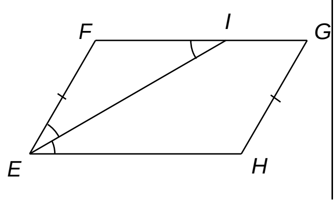
Exercice 35



1. *ABCD* est un parallélogramme donc les diagonales [*AC*] et [*BD*] ont le même milieu *O*.
BEDF est un parallélogramme donc les diagonales [*BD*] et [*EF*] ont le même milieu *O*.
Finalement [*AC*] et [*EF*] ont le même milieu.

2. On en déduit que *AECF* est un parallélogramme (de centre *O*).

Exercice 36



2.a. *EFGH* est un parallélogramme, donc (*FG*)//(*EH*) ; la droite (sécante) (*EI*) détermine avec ces deux droites (parallèles) deux angles alternes-internes de même mesure :

mes $\widehat{HEI}$ = *mes* $\widehat{FIE}$.

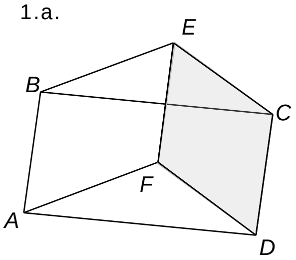
b. Comme [*EI*) est la bissectrice de l'angle $\hat{E}$ du parallélogramme *EFGH*, on a : *mes* $\widehat{HEI}$ = *mes* $\widehat{FEI}$;

on en déduit que : *mes* $\widehat{FIE}$ = *mes* $\widehat{FEI}$,
c'est-à-dire que le triangle *FEI* est isocèle en *F*.

c. *FEI* isocèle en *F*, donc : *FE*=*FI* ;
EFGH est un parallélogramme, donc : *FE*=*GH* ;
on en déduit que : *FI*=*GH*.

Exercice 37

1.a.



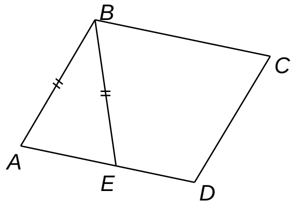
b. *EFDC* est un parallélogramme.

2.a. Dans le parallélogramme *ABCD*, *AB*=*DC* (longueur de côtés opposés) ;
dans le parallélogramme *ABEF*, *AB*=*FE* (longueur de côtés opposés ;
donc : *DC*=*FE*.

b. Dans le parallélogramme *ABCD*, (*AB*)//(*DC*) (supports de côtés opposés) ;
dans le parallélogramme *ABEF*, (*AB*)//(*FE*) (supports de côtés opposés ;
donc : (*DC*)//(*FE*).

c. Finalement le quadrilatère non croisé *EFDC* a deux côtés opposés de même longueur et de supports parallèles ; c'est un parallélogramme.

Exercice 38



ABCD est un parallélogramme.

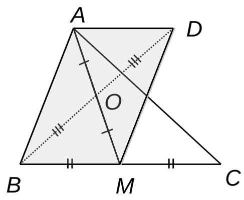
1. Le triangle *BAE* est isocèle en B, donc :
$mes\ \widehat{BAE} = mes\ \widehat{BEA}$.

2. Dans *ABCD*, les angles opposés $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BCD}$ ont la même mesure.

On en déduit que les angles $\widehat{BEA}$ et $\widehat{BCD}$ ont la même mesure.

Exercice 39

1.



2.a. *ADMB* est un parallélogramme. En effet, par construction, le milieu *O* de [*AM*] est aussi milieu de [*BD*] ; donc *ADMB* a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

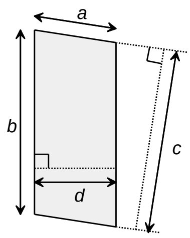
b. *MC*=*MB* (*M* milieu de [*BC*]) ;
AD=*BM* (longueur de 2 côtés opposés d'un parallélogramme) ;
donc : *AD*=*MC*.

Aires et périmètres

Exercice 40

1. Les formules qui permettent de calculer l'aire du parallélogramme coloré ci-contre sont :

bd et *ac*.

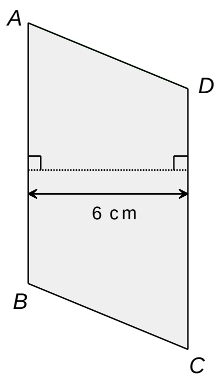


2.

a	*b*	*c*	*d*	Aire	Périmètre
8cm	12cm	6cm	4cm	48cm²	40cm
40cm	32cm	20cm	25cm	800cm²	144cm

Exercice 41

1.



2. Si le parallélogramme *ABCD* a pour aire 58,8 cm²,

alors : $AB = \dfrac{58{,}8}{6} = \underline{9{,}8\text{ cm}}$.

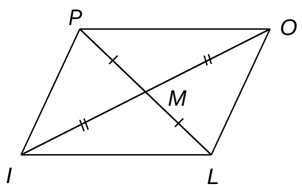
3. Si le parallélogramme *ABCD* a pour périmètre 32,6 cm, alors :

$AB + BC = \dfrac{32{,}6}{2} = 16{,}3$ cm,

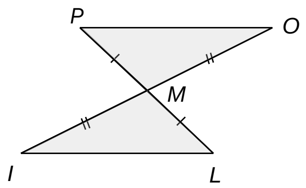
$BC = 16{,}3 - 9{,}8 = \underline{6{,}5\text{ cm}}$.

Exercice 42

Figure de référence

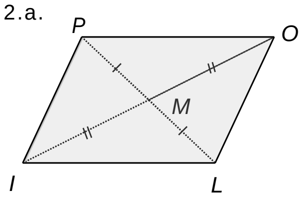


1.a.



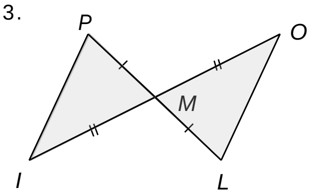
b. *POIL* est un quadrilatère croisé car ses côtés [*OI*] et [*PL*] se croisent.
c. *M* est centre de symétrie pour ce quadrilatère.

2.a.



b. *POLI* est un quadrilatère non croisé car ses côtés ne se croisent pas.
c. *POLI* est un parallélogramme, puisqu'il est non croisé et possède un centre de symétrie.

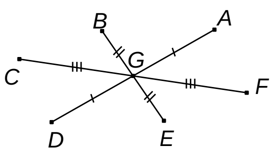
3.

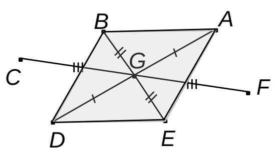


b. *PLOI* est un quadrilatère croisé car ses côtés [*OI*] et [*PL*] se croisent.
c. *M* est centre de symétrie pour ce quadrilatère.

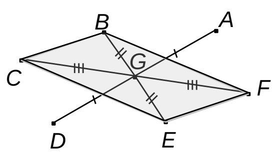
Exercice 43

Figure de référence

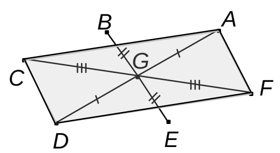




Parallélogramme *ABDF*.



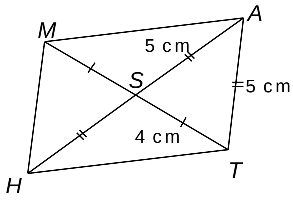
Parallélogramme *BCEF*.



Parallélogramme *CDFA*.

Exercice 44

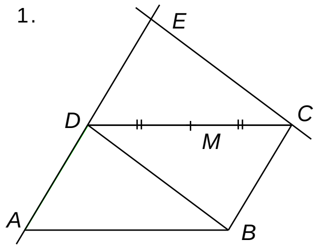
1.



2. *Programme de construction* :
❺ Construis un segment [*MT*] mesurant 5 cm.
❷ Place le milieu *S* du segment [*MT*].
❹ Construis un point *A* situé à 5 cm de *S* et à 5 cm de *T*.
❸ Construis le point *H* symétrique du point *A* par rapport au point *S*.
❶ Trace le quadrilatère *MATH*.

Exercice 45

1.

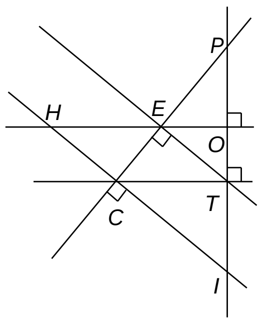


2.a. *DBCE* est un parallélogramme.

En effet (*raisonnement 2*) : (*DE*)//(*BC*) et (*DB*)//(*EC*).

b. Le *raisonnement 1* ne convient pas, car on ne sait pas que *M* est le milieu de [*EB*].

Exercice 46



1. Les 2 remarques du professeur sont justifiées.

2.a. (*ET*)//(*HC*) car ces deux droites sont perpendiculaires à la droite (*CE*).

b. (*HE*)//(*CT*) car ces deux droites sont perpendiculaires à la droite (*PI*).
On en déduit qu'avec ses côtés opposés parallèles, *HETC* est un parallélogramme.

c. [*CE*] et [*HT*], diagonales du parallélogramme *HETC*, ont le même milieu.

Exercice 47

On sait que *ABCD* est un parallélogramme.

(~~Si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur, alors c'est un parallélogramme~~.)

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longueur.

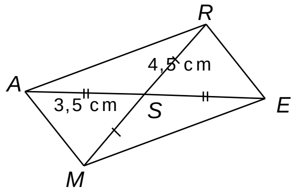
Donc, *AB*=*CD* et *AD*=*BC*.

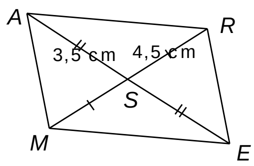
(*erreur dans le choix et l'énoncé de la propriété* !)

Exercices d'approfondissement

Exercice 48

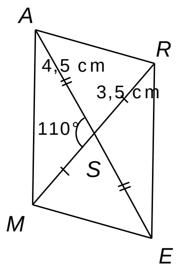
1. Voici deux parallélogrammes *MARE*, non superposables, tels que *MR*=7 cm et *AE*=9 cm :

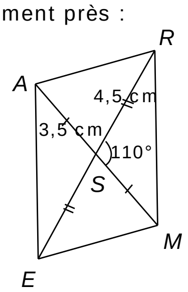




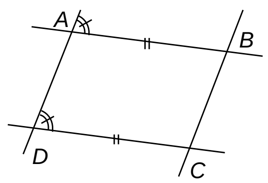
2. Tous les parallélogrammes *MARE* tels que :

MR=7 cm, *AE*=9 cm et *mes* $\widehat{MSA}$=110°,
sont superposables ... à un retournement près :

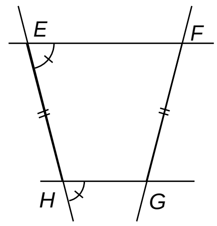




Exercice 49



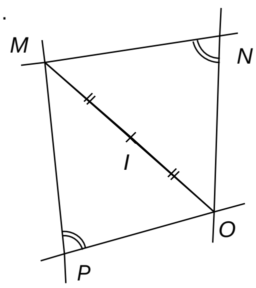
ABCD est un parallélogramme ; en effet :
- avec 2 angles correspondants de même mesure, on a (*AB*)//(*DC*) ;
- de plus *AB*=*DC* et *ABCD* n'est pas croisé.



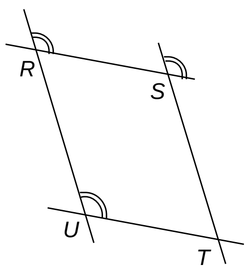
EFGH n'est pas nécessairement un parallélogramme : avec deux angles correspondants de même mesure, (*EF*)//(*HG*) ; <u>mais rien ne prouve que :</u> (*EH*)//(*FG*) (*EFGH* peut être un trapèze isocèle de bases [*EF*] et [*HG*]).

Exercice 50

1.



MNOP n'est pas nécessairement un parallélogramme : *I* est le milieu de [*MO*], <u>sans être celui</u> de [*PN*] (les points *P*, *N* et *I* peuvent ne pas être alignés).



RSTU est un parallélogramme ; en effet :
- avec 2 angles correspondants de même mesure, (*RS*)//(*UT*) ;
- de même (*RU*)//(*ST*).

Commentaire pour les exercices 49 et 50 : les "contre-exemples de parallélogramme" sont difficiles à réaliser !

Exercice 51

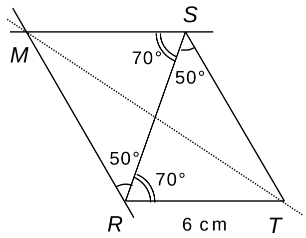
1.a. Dans le triangle *RST*

mes $\widehat{TRS}$=70° et *mes* $\widehat{RST}$=50°

revient à

mes $\widehat{TRS}$=70° et *mes* $\widehat{RTS}$=60°.

b. Pour placer le point *M*, utilise les données suivantes :
- $\widehat{RST}$ et $\widehat{RSM}$ sont adjacents,
- *mes* $\widehat{RSM}$=70°=*mes* $\widehat{TRS}$,
- *mes* $\widehat{SRM}$=50°=*mes* $\widehat{RST}$.



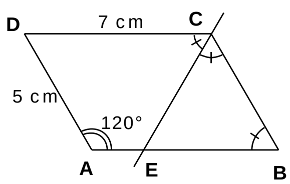
2.a. Les angles alternes-internes $\widehat{SRM}$ et $\widehat{RST}$, formés par la sécante (*RS*) aux droites (*RM*) et (*TS*), ont la même mesure (50°) ; donc : (*RM*)//(*TS*).

b. Les angles alternes-internes $\widehat{SRT}$ et $\widehat{RSM}$, formés par la sécante (*RS*) aux droites (*RT*) et (*MS*), ont la même mesure (70°) ; donc : (*RT*)//(*MS*).

c. On en déduit que *RTSM* est un parallélogramme et la droite (*MT*) passe par le milieu de la diagonale [*RS*].

Exercice 52

1.



ABCD est un parallélogramme

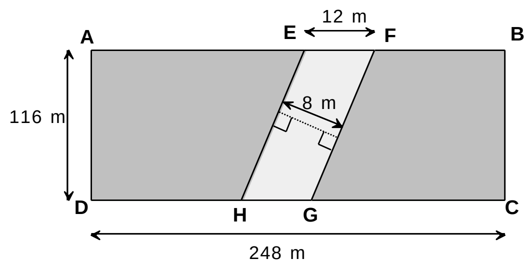
2. b. (*CE*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$, qui mesure 120° ; donc :

mes $\widehat{ECB}$=*mes* $\widehat{ECD}$=60° ;

or *mes* $\widehat{CBE}$=180-120=60° ;

on en déduit que *BCE* est un triangle équilatéral, de périmètre : 3×*BC*=3×5=<u>15 cm</u>.

Exercice 53

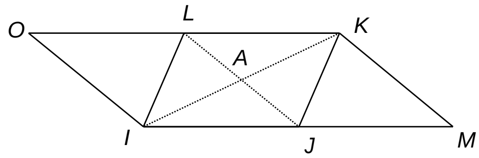


1. Aire du chemin : 12×116=<u>1 392 m²</u>.

2. Longueur du chemin : 1 392÷8=174 m.
Périmètre du chemin : 2×(12+174)=372 m.

Exercice 54

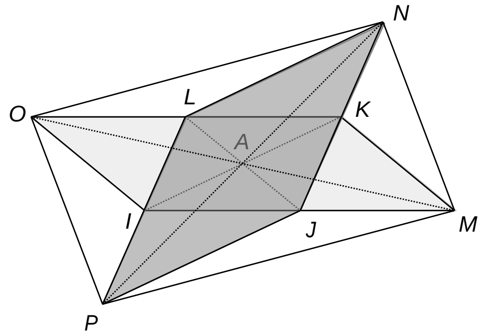
1. *IJKL* est un parallélogramme (de centre *A*) donc :
$IJ = LK$ et $(IJ)//(LK)$.



2.

Si *M* est le symétrique de *I* par rapport à *J*, alors :
$IM = 2 \times IJ$ et $(IM) = (IJ)$.
Si *O* est le symétrique de *K* par rapport à *L*, alors :
$OK = 2 \times LK$ et $(OK) = (LK)$.

Finalement, dans le quadrilatère *non croisé IMKO*, on a :
$IM = OK$ et $(IM)//(OK)$;
donc : *IMKO* est un parallélogramme.



3. De la même façon, on démontre que :
si *N* est le symétrique de *J* par rapport à *K*,
si *P* est le symétrique de *L* par rapport *I*,

alors : *LPJN* est un parallélogramme.

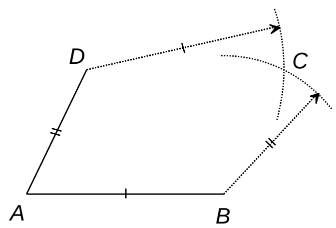
4. Dans le parallélogramme *IMKO*, les diagonales [*IK*] et [*MO*] se coupent en leur milieu : *A*.
Dans le parallélogramme *LPJN*, les diagonales [*LJ*] et [*PN*] se coupent en leur milieu : *A*.

Finalement les diagonales [*MO*] et [*PN*] du quadrilatère *MNOP* se coupent en leur milieu *A*.
On en déduit que *MNOP* est un parallélogramme (de centre *A*).

Activités d'intégration

Exercice 55 (Le parterre de fleurs)

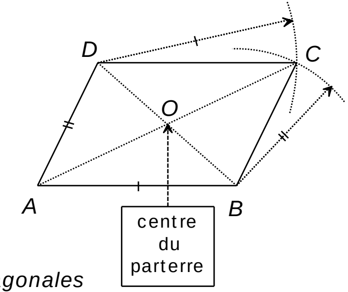
1. Pour déterminer le quatrième sommet *C* du parterre :



utiliser la corde et la propriété

"*si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur, alors c'est un parallélogramme*".

2. Pour placer la première fleur au centre *O* du parterre :



utiliser la corde et la propriété

"*un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieu*".

Exercice 56 (Découpe d'une planche)

C'est la propriété :

"*si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés de la même longueur et de supports parallèles, alors c'est un parallélogramme*"

qui prouve que le morceau central *ABA'B'* est un parallélogramme.

Exercice 57 (Le pantographe)

1.a. Comme quadrilatère non croisé, dont les côtés opposés ont la même longueur, *ABCD* est un parallélogramme.
b. On en déduit que les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles.
2. On suppose que : $DM = AP$.
a. Le quadrilatère *APDM* est aussi (et pour la même raison qu'en 1.) un parallélogramme.
b. *F*, milieu de la diagonale [*AD*] de ce parallélogramme, est aussi milieu de son autre diagonale [*PM*] ; c'est-à-dire que *P* et *M* sont toujours symétriques par rapport à *F*.

6 *Parallélogrammes particuliers*

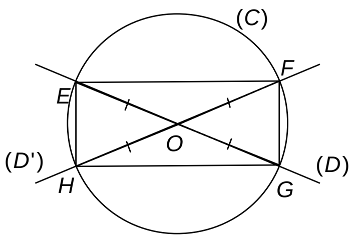
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
	Rectangle [1 p. 72]	22, 25		
	Losange [2 p. 72]	23, 26		
	Carré [3 p. 72]	24, 27		
1, 2	Reconnaître un rectangle [4 p. 73]	28, 29, 30, 31, 32		
	Apprendre à construire et à reconnaître un rectangle [1p. 75]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 41, 42		50, 52
3, 4, 5	Reconnaître un losange [5 p. 73]	33, 34, 35, 36, 37		
	Apprendre à construire et à reconnaître un losange [2p. 76]	8, 9, 10, 11, 12, 12, 14, 43		53
6	Reconnaître un carré [6 p. 74]			
	Apprendre à construire et à reconnaître un carré [3 p. 77]	15, 16, 17, 18, 19, 20, 21		49
	Récapitulatif [7 p. 74]	38, 39, 40	44, 45, 46, 47	48, 51, 54, 55, 56, 57, 58

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer

1 Rectangles et diagonales



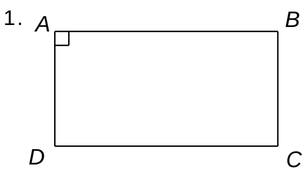
1.d. Les diagonales du quadrilatère *EFGH* se coupent en leur milieu *O*.
e. *EFGH* semble être un rectangle.

2.a. [*EG*] est un diamètre du cercle (*C*).
b. *F* et *H* appartiennent au cercle de diamètre [*EG*], donc les triangles *EGF* et *EGH* sont rectangles respectivement en *F* et *H*.
c. [*FH*] est un diamètre du cercle (*C*) ; *E* et *G* appartiennent au cercle de diamètre [*FH*], donc les triangles *FHE* et *FHG* sont rectangles respectivement en *E* et *G*.
d. On en conclut que le quadrilatère *EFGH* est un rectangle.

3. *Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu et de même longueur, alors c'est un rectangle.*

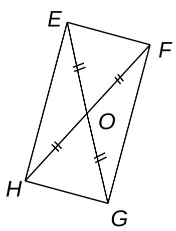
2 Rectangles et parallélogrammes

1.



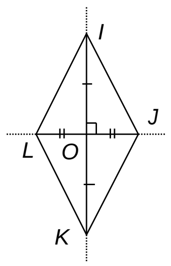
a. Sur la figure ci-contre, l'angle $\hat{A}$ du parallélogramme *ABCD* est droit.
b. $\hat{A}$ et $\hat{C}$, angles opposés de ce parallélogramme, ont même mesure ; donc $\hat{C}$ est droit ; $\hat{A}$ et $\hat{B}$, angles consécutifs de ce parallélogramme, sont supplémentaires ; donc $\hat{B}$ est droit.
c. En fait un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.

2.



a. Sur la figure ci-contre, les diagonales [*EG*] et [*FH*] du parallélogramme *EFGH*, qui se coupent en leur milieu *O*, ont la même longueur.
b. Les points *E*, *F*, et *G* appartiennent au cercle de diamètre [*EG*], donc $\hat{F}$ est droit.
c. En fait (et d'après l'activité précédente) un parallélogramme qui a ses diagonales de la même longueur est un rectangle.

3 Losanges et diagonales



1.a. La droite (*IK*) est la médiatrice du segment [*JL*] ; en effet, (*IJ*) est perpendiculaire à [*JL*] en son milieu *O*.

b. On en déduit que *IJ*=*IL* et *KJ*=*KL*.

2.a. La droite (*JL*) est la médiatrice du segment [*IK*] ; en effet, (*JL*) est perpendiculaire à [*IK*] en son milieu *O*. On en déduit que *IJ*=*KJ*.

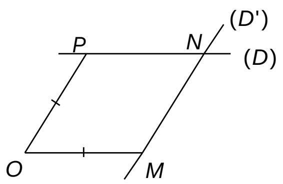
b. On en déduit que : *IJ*=*JK*=*KL*=*LI*.

c. Le quadrilatère *IJKL* est un losange.

3. *Si un quadrilatère a ses diagonales de même <u>milieu</u> et si leurs droites supports sont <u>perpendiculaires</u>, alors c'est un <u>losange</u>.*

4 Losanges et parallélogrammes (1)

1.



(*D*)//(*OM*)
(*D*')//(*OP*)

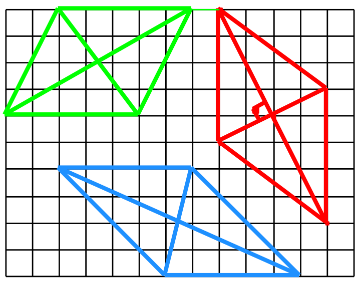
2.a. Les supports des côtés opposés du quadrilatère *OMNP* sont parallèles, donc *OMNP* est un parallélogramme.

b. On en déduit que : *OM*=*NP* et *OP*=*MN*.

3. Comme *OM*=*OP*, on a : *OM*=*OP*=*NP*=*MN*.

On peut donc affirmer qu'un parallélogramme, qui a deux côtés consécutifs de la même longueur, est un losange.

5 Losanges et parallélogrammes (2)

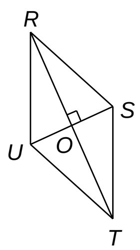


1.a. Les trois quadrilatères ci-contre sont des parallélogrammes.

b. On en déduit que leurs diagonales se coupent en leur milieu.

2.a. Seul le parallélogramme rouge a les supports de ses diagonales perpendiculaires.

b. Ce parallélogramme semble être un losange.



3. *RSTU* est un parallélogramme de centre *O*, dont les supports des diagonales sont perpendiculaires.

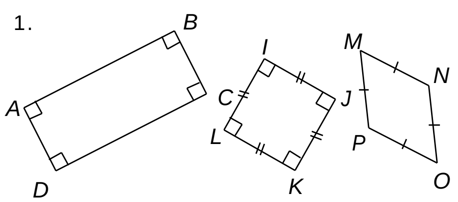
a. La droite (*RT*) est la médiatrice du segment [*US*] ; en effet, (*RT*)⊥(*US*) et le milieu *O* de la diagonale [*US*] appartient à (*RT*).

b. On en déduit que *UR*=*RS*.

c. Finalement et d'après l'affirmation de l'activité 4, le parallélogramme *RSTU*, qui a deux côtés consécutifs de la même longueur, est un losange.

6 carrés

1.



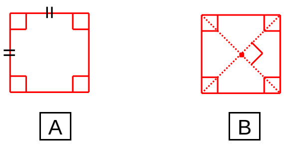
a. Oscar, qui voit deux rectangles, pense à *ABCD* et *IJKL*, en observant sur chacun d'eux le codage des quatre angles droits.

b. Léa, qui voit deux losanges, pense à *IJKL* et *MNOP*, en observant sur chacun d'eux le codage des quatre longueurs égales.

c. *IJKL* a été sélectionné deux fois.

d. A la fois rectangle et losange, *IJKL* est un carré.

2.



a. Les figures rouges, avec 4 angles droits, sont des rectangles.

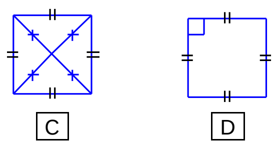
b. Ce sont aussi des losanges :

• A, parallélogramme avec 2 côtés consécutifs de même longueur ;

• B, parallélogramme dont le support de chaque diagonale (perpendiculaire à l'autre diagonale en son milieu) est la médiatrice de l'autre diagonale, c'est-à-dire parallélogramme dont les côtés sont de même longueur.

c. Chacun d'eux est donc un carré.

3.



a. Les figures bleues, avec 4 côtés de même longueur, sont des losanges.

b. Ce sont aussi des rectangles :

• C, parallélogramme avec des diagonales de même longueur ;

• D, parallélogramme avec un angle droit.

c. Chacun d'eux est donc un carré.

Méthodes et savoir-faire

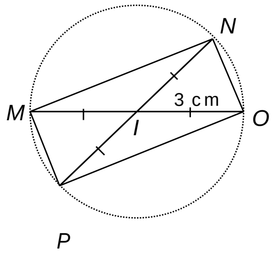
1 Apprendre à construire et à reconnaître un rectangle

Exercice 1

Trace un cercle de rayon 3 cm.

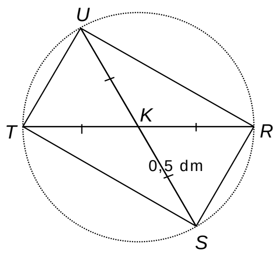
Construis deux diamètres [*MO*] et [*NP*] de ce cercle.

MNOP est un rectangle dont la diagonale [*MO*] mesure 6 cm.



Exercice 2

1.

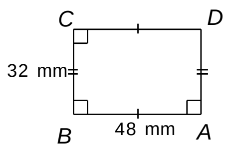


Trace un cercle de centre *K* et de rayon 0,5 dm.

Construis deux diamètres [*RT*] et [*SU*] de ce cercle.

RSTU est un rectangle de centre *K* tel que *KS*=0,5 dm.

2.



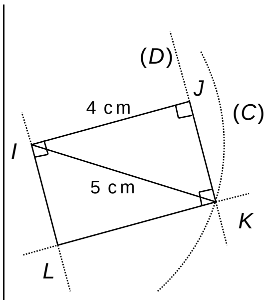
La construction d'un rectangle *ABCD*, tel que *AB*=48 mm et *C*=32 mm, est immédiate.

Exercice 3

Trace un segment [*IJ*], de longueur 4 cm. Construis :
- la droite (*D*) perpendiculaire en *J* à (*IJ*) ;
- le cercle (*C*) de centre *I* et de rayon 5 cm.

K est l'un des deux points d'intersection de (*D*) et de (*C*) ;

La construction de *L*, tel que *IJKL* soit un rectangle, est alors immédiate.



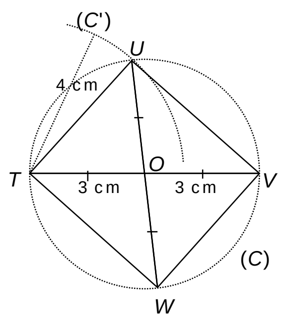
Exercice 4

1. Sur un cercle (*C*), de centre *O* et de rayon 3 cm, construis un diamètre [*TV*].

Trace le cercle (*C*') de centre *T* et de rayon 4 cm.

U étant l'un des points d'intersection de (*C*) et de (*C*'), construis le point *W* symétrique de *U* par rapport à *O*.

TUVW est un rectangle, puisque ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur ;
de plus *TU*=4cm et *TV*=6 cm

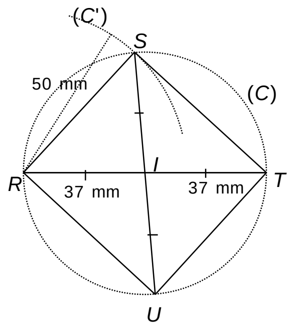


2. Sur un cercle (*C*), de centre *I* et de rayon 37 mm, construis un diamètre [*RT*].

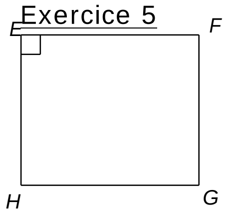
Trace le cercle (*C*') de centre *R* et de rayon 50 mm.

S étant l'un des points d'intersection de (*C*) et de (*C*'), construis le point *U* symétrique de *S* par rapport à *I*.

RSTU est un rectangle, puisque ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur ;
de plus *RS*=50mm et *IS*=37 mm.



Exercice 5

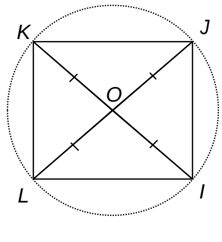


EFGH est un parallélogramme tel que (*EF*)⊥(*EH*).

Dans un parallélogramme :
- les angles opposés ont la même mesure, donc (*GF*)⊥(*GH*) ;
- deux angles consécutifs sont supplémentaires, donc (*HE*)⊥(*HG*) et (*FE*)⊥(*FG*).

Finalement *EFGH* est un rectangle.

Exercice 6



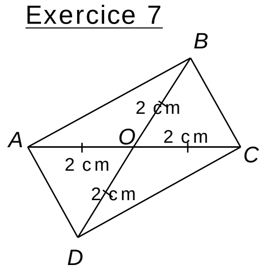
IJKL est un parallélogramme tel que *IK*=*JL* ; soit *O* son centre.

Dans un parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu, donc *OI*=*OK*=*OJ*=*OL* et les sommets *I*, *J*, *K* et *L* appartiennent à un même cercle de centre *O*.

J étant sur le cercle de diamètre [*IK*], le triangle *IJK* est rectangle en *J* ; de même les triangles *JKL*, *KLI* et *LIJ* sont rectangles respectivement en *K*, *L* et *I*.

Finalement *IJKL* est un rectangle.

Exercice 7



1. Les diagonales du quadrilatère *ABCD* se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

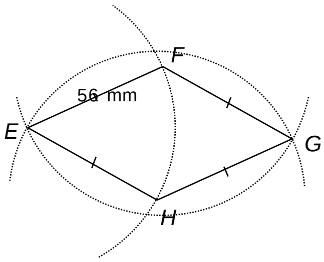
2. On en déduit que *ABCD* est un rectangle.

Exercice 8

Construis un cercle de centre *E* et de rayon 56 mm. Place deux points *F* et *H* sur ce cercle.

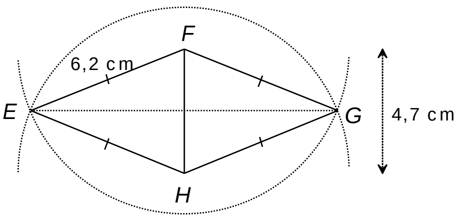
Les cercles de centres *F* et *H*, passant par *E*, se coupent en un 2e point *G*.

EFGH est un losange tel que *EF*=56 mm.



Exercice 9

1.



Trace un segment [*HF*] de longueur 4,7 cm.

Les cercles de centres *F* et *H*, de rayon 6,2 cm, se coupent en *E* et *G*.

EFGH est un losange tel que *EF*=6,2 cm et *HF*=4,7 cm.

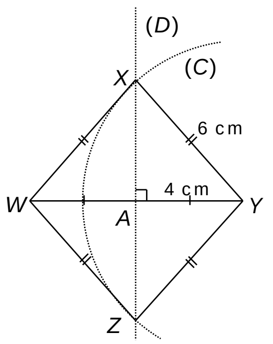
2. Trace un segment [*AY*] de longueur 4 cm.

Construis :
- la droite (*D*), perpendiculaire en *A* à (*AY*) ;
- le cercle (*C*), de centre *Y* et de rayon 6 cm.

(*D*) et (*C*) se coupent en *X* et *Z*.

Construis le point *W* symétrique de *Y* par rapport à *A*.

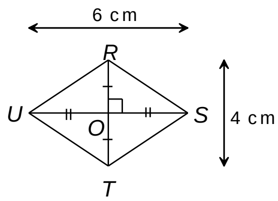
WXYZ est un losange de centre *A* tel que *XY*=6 cm et *AY*=4 cm.



Exercice 10

Construis deux segments [*RT*] et [*SU*] perpendiculaires, sécants en leur milieu et de longueurs respectives 4 cm et 6cm.

RSTU est un losange.

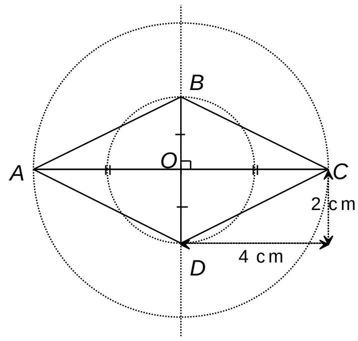


Exercice 11

1. Trace deux cercles de même centre *O*, de rayons respectifs 4 cm et 2 cm.

Trace :
- sur le 1er cercle un diamètre [*AC*] ;
- sur le 2e cercle un diamètre [*BD*], perpendiculaire à [*AC*].

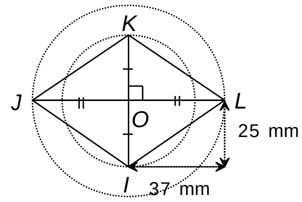
ABCD est un losange tel que *AC*=8 cm et *BD*=4 cm.



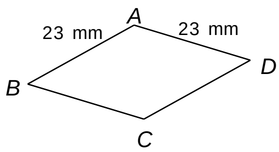
2. Trace deux cercles de même centre *O*, de rayons respectifs 25 mm et 37 mm.

Trace :
- sur le 1er cercle un diamètre [*IK*] ;
- sur le 2e cercle un diamètre [*JL*], perpendiculaire à [*IK*].

IJKL est un losange tel que *OK*=25 mm et *OL*=37 mm.



Exercice 12

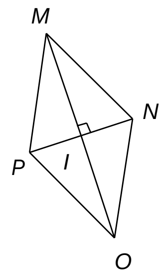


ABCD est un parallélogramme tel que *AB*=*AD*=23 mm.

Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur donc : *DC*=*AB* et *BC*=*AD*.

Finalement *AB*=*BC*=*CD*=*DA* et *ABCD* est un losange.

Exercice 13

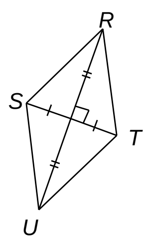


1. *MNOP* est un parallélogramme tel que (MO)⊥(NP).

2. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. Donc la droite (*MO*), qui passe par le milieu de [*NP*] et est perpendiculaire à ce segment, est sa médiatrice ; on en déduit que : *MN*=*MP*.

Finalement *MNOP*, parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur ; est un losange (*exercice précèdent*).

Exercice 14



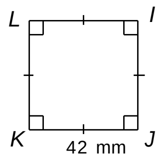
RSTU, quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, est un parallélogramme (*propriété du parallélogramme*).

RSTU, parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, est un losange (*exercice précédent*).

3 Apprendre à construire et à reconnaître un carré

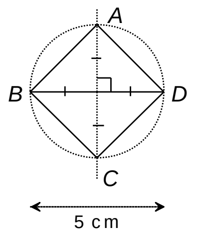
Exercice 15

La construction d'un carré *IJKL*,
tel que *IJ*=42 mm, est immédiate.



Exercice 16

1.

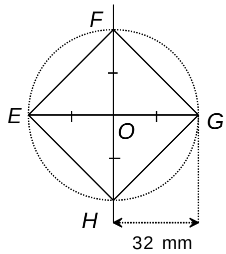


Trace un segment [*BD*] de longueur 5 cm.

Construis le cercle de diamètre [*BD*], qui coupe la médiatrice de ce segment en *A* et *C*.

ABCD est un carré tel que *BD*=5 cm.

2.

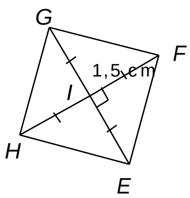


Trace un segment [*OG*] de longueur 32 mm.

Construis le cercle de centre *O* et de rayon *OG*, qui coupe :
- la droite (*OG*) en un 2^{e} point *E* ;
- la médiatrice de [*GE*] en *F* et *H*.

EFGH est un carré de centre *O*, tel que *OG*=32 mm.

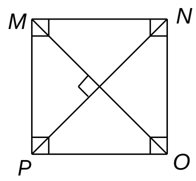
Exercice 17



1. Les diagonales [*GE*] et [*FH*] de *EFGH* se coupent en leur milieu, donc *EFGH* est un parallélogramme.

2. Les diagonales [*GE*] et [*FH*] du parallélogramme *EFGH* ont la même longueur et ont des supports perpendiculaires, donc *EFGH* est à la fois un rectangle et un losange : c'est un carré.

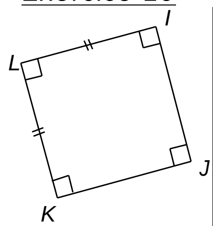
Exercice 18



MNOP est un rectangle, donc un parallélogramme, dont les supports des diagonales (*MO*) et (*NP*) sont perpendiculaires. Donc *MNOP* est aussi un losange.

Rectangle et losange, *MNOP* est un carré.

Exercice 19

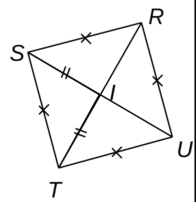


1. Avec 4 angles droits, *IJKL* est un rectangle.

2. Parallélogramme (*puisque rectangle*) avec deux côtés consécutifs de même longueur, *IJKL* est aussi un losange.

Rectangle et losange, *IJKL* est un carré.

Exercice 20

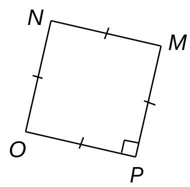


1. Avec 4 côtés de même longueur, *RSTU* est un losange.

2. Parallélogramme (*puisque losange*) avec deux "demi-diagonales" de même longueur (*IS*=*IT*) c'est-à-dire deux diagonales de même longueur, *RSTU* est aussi un rectangle.

Losange et rectangle, *RSTU* est un carré.

Exercice 21



Parallélogramme (*puisque losange*) avec un angle droit (en *P*), *MNOP* est aussi un rectangle (exercice 5).

Losange et rectangle, *MNOP* est un carré.

Activités d'application

Tracés de quadrilatères particuliers

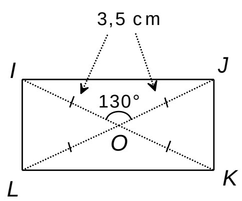
Exercice 22

Trace un triangle *OIJ* tel que :

mes $\widehat{IOJ}$=130°, *OI*=*OJ*=3,5 cm.

Construis les points *K* et *L*, symétriques respectifs de *I* et *J*, par rapport à *O*.

Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, *IJKL* est un rectangle.



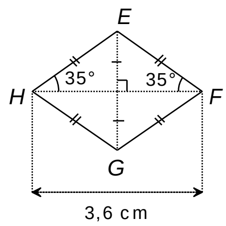
Exercice 23

Trace un triangle EHF tel que :

HF=3,6 cm, mes $\widehat{EHF}$=mes $\widehat{EFH}$=35°.

Construis le point *G*, symétrique de *E* par rapport à (*HF*).

Quadrilatère dont les côtés ont la même longueur, *EFGH* est un losange.



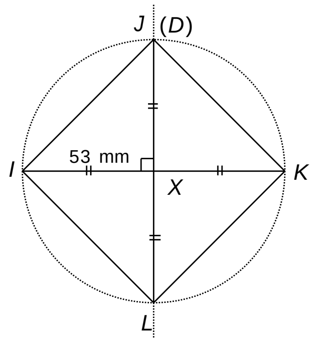
Exercice 24

1. I et X sont deux points tels que IX=53 mm.

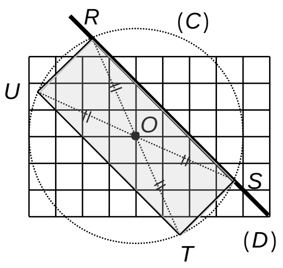
2. Construis le point K, symétrique de I par rapport à X.

Sur la médiatrice (D) de [IK], place les points J et L tels que XI=XL=53 mm.

Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu X, ont la même longueur et sont perpendiculaires, $IJKL$ est un carré de centre X.



Exercice 25

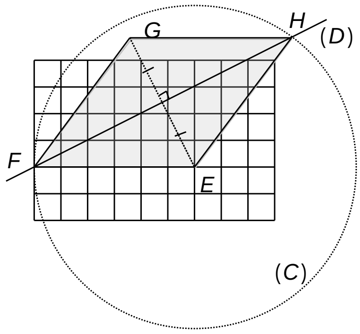


Trace le cercle (C), de centre O et de rayon 2 cm.

Si :
- (C) coupe (D) en R et S,
- T et U sont les symétriques respectifs de R et S par rapport à O,

alors $RSTU$ est un rectangle de centre O, tel que R et S sont sur (D) et OR=2 cm.

Exercice 26

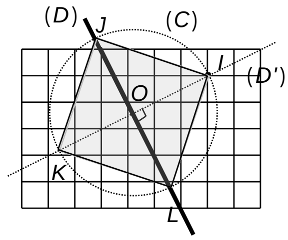


Trace le cercle (C), de centre E et de rayon 3 cm.

Si :
- (C) coupe (D) en F et H,
- G est le symétrique de E par rapport à (D),

alors $EFGH$ est un losange tel que F et H sont sur (D) et EF=3 cm.

Exercice 27



Trace la droite (D') passant par I et perpendiculaire en O à (D).

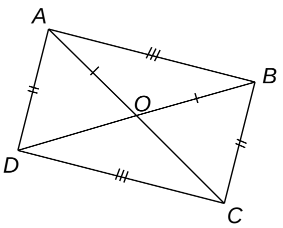
Trace le cercle (C), de centre O et passant par I.

Si :
- (C) recoupe (D') en K,
- (C) coupe (D) en J et L,

alors $IJKL$ est un carré tel que J et L sont sur (D).

Reconnaître un rectangle

Exercice 28

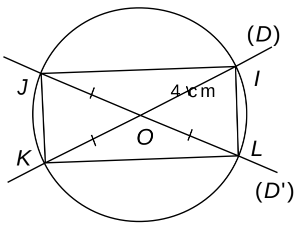


1. $ABCD$ est un quadrilatère non croisé, dont les côtés opposés ont la même longueur, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Parallélogramme avec deux "demi-diagonales" de même longueur (OA=OB) c'est-à-dire deux diagonales de même longueur, $ABCD$ est aussi un rectangle.

Exercice 29

1.

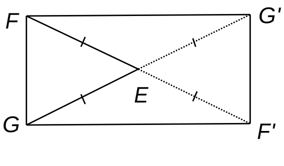


2.a. Les diagonales du quadrilatère $IJKL$ se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

b. On en déduit que $IJKL$ est un rectangle.

Exercice 30

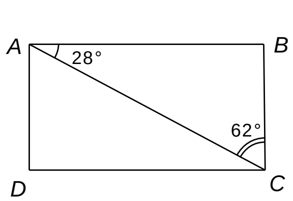
1.



2. EFG est un triangle isocèle en E donc EF=EG ;
F' et G' symétriques respectifs de F et G par rapport à E donc EG'=EG et EF'=EF ;
finalement : EF=EG=EF'=EG'.

Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, $FGF'G$' est un rectangle.

Exercice 31

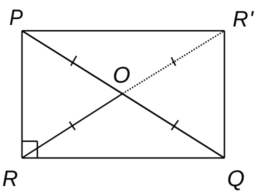


1. mes $\widehat{ABC}$=180-28-62=90°.

2. Parallélogramme dont un angle est droit, $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 32

1.



2.a. PQR est un triangle rectangle en R, donc le milieu O du côté [PQ] est centre du cercle circonscrit à ce triangle : OP=OQ=OR ;

R' est le symétrique de R par rapport à O, donc : OR=OR' ;

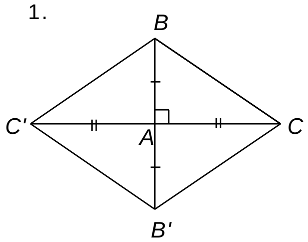
finalement : OP=OQ=OR=OR'.

b. Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, $PRQR$' est un rectangle.

Reconnaître un losange

Exercice 33

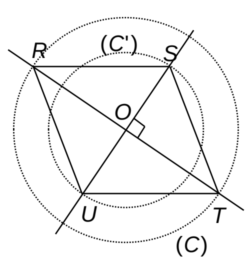
1.



2.a. Les diagonales du quadrilatère *BCB'C'* ont :
- même milieu *A* (puisque *B'* et *C'* sont les symétriques respectifs de *B* et *C* par rapport à *A*) ;
- des supports perpendiculaires (puisque *ABC* est un triangle rectangle en *A*).

b. On en déduit que *BCB'C'* est un losange.

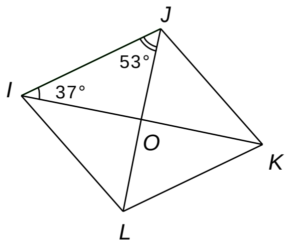
Exercice 34



1. Les diagonales du quadrilatère *RSTU* ont :
- même milieu *O* (puisque [*RT*] et [*SU*] sont diamètres respectifs de (*C*) et (*C'*), cercles de centre *O*) ;
- des supports perpendiculaires (par construction).

2. On en déduit que *RSTU* est un losange.

Exercice 35



IJKL est un parallélogramme de centre *O*.

1. mes $\widehat{IOJ}$=180-37-53=90°.

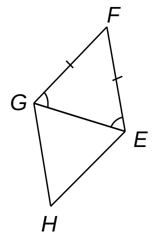
2. *IJKL* est un parallélogramme dont les supports de ses diagonales sont perpendiculaires ; on en déduit que *IJKL* est un losange.

Exercice 36

EFGH est un parallélogramme tel que :

mes $\widehat{GEF}$= mes $\widehat{EGF}$.

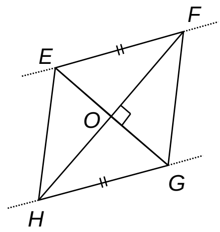
1.



2.a. Avec deux angles de même mesure, le triangle *EFG* est isocèle en *F*.

b. On en déduit que *EFGH*, parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont la même longueur (*FG*=*FE*), est un losange.

Exercice 37



(*EF*)//(*HG*)

1. *EFGH* est un quadrilatère non croisé, dont les deux côtés opposés [*EF*] et [*HG*] ont :
- la même longueur,
- des supports parallèles ;

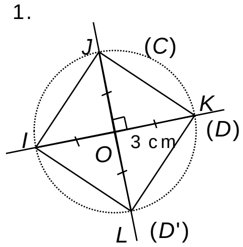
donc *EFGH* est un parallélogramme.

2. Les diagonales de ce parallélogramme ont des supports perpendiculaires ; donc *EFGH* est un losange.

Reconnaître un carré

Exercice 38

1.

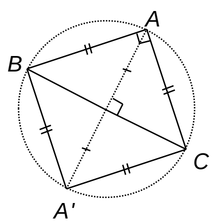


2.a. Les diagonales de *IJKL* :
- ont le même milieu *O*,
- sont de même longueur,
- ont des supports perpendiculaires.

b. On en déduit que *IJKL* est un rectangle et un losange, c'est-à-dire un carré de centre *O*.

Exercice 39

1.

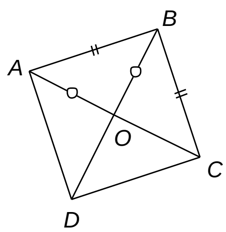


2. Le triangle *ABC* est rectangle et isocèle en *A*.
A' est le symétrique de *A* par rapport à (*BC*).

ABA'C, qui a 4 côtés de même longueur, est un losange ;

ce losange, qui a un angle droit, est un carré.

Exercice 40



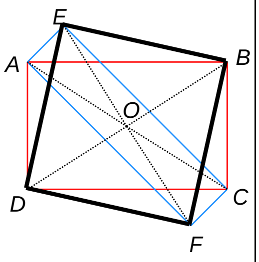
ABCD est un parallélogramme de centre *O*.

Ce parallélogramme, qui des "demi-diagonales" (donc des diagonales) de même longueur, est un rectangle.

Ce parallélogramme, qui a deux côtés consécutifs de même longueur, est un losange.

Finalement *ABCD* est un carré.

Exercice 41



ABCD et *AECF* sont des rectangles.

1.a. Les diagonales du rectangle *ABCD* ont même longueur : $AC=BD$;
Les diagonales du rectangle *AECF* ont même longueur : $AC=EF$.

b. On en déduit que : $BD=EF$.

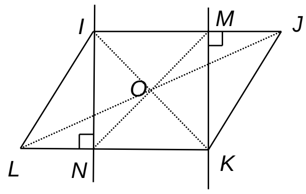
2. Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu ; donc :
- *O* est le milieu de [*AC*] et [*BD*],
- *O* est le milieu de [*AC*] et [*EF*] ;

finalement [*BD*] et [*EF*] ont le même milieu *O*.

3. *BEDF* est un quadrilatère dont les diagonales ont :
- le même milieu *O*,
- la même longueur ;

on en déduit que *BEDF* est un rectangle.

Exercice 42



IJKL est un parallélogramme de centre *O*.

2.a. *IJKL* est un parallélogramme, donc : $(IM)//(NK)$;
$(KM)\perp(IM)$ et $(IN)\perp(KN)$,
donc: $(KM)//(IN)$.

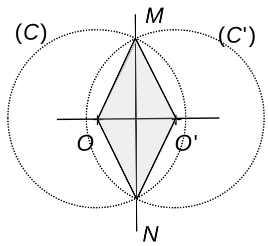
On en déduit que *IMKN* est un parallélogramme.

Avec un angle droit, *IMKN* est un rectangle.

b. *O*, centre du parallélogramme *IJKL*, est le milieu de [*IK*] ;
dans le rectangle *IMKN*, les diagonales [*IK*] et [*MN*] ont le même milieu ;
donc *O* est le milieu de [*MN*].

Exercice 43

1.



Les cercles (*C*) et (*C*') de centre *O* et *O*' ont le même rayon.

2.a. *OMO'N* est un losange ;
en effet ses côtés sont de même longueur (le rayon commun aux deux cercles).

b. (*OM*) et (*O'N*), supports de deux côtés opposés du losange *OMO'N*, sont deux droites parallèles ;
de même (*ON*) et (*O'M*) sont deux droites parallèles.

c. (*OO*') et (*MN*), supports des diagonales du losange *OMO'N*, sont deux droites perpendiculaires.

Exercice 44

1.a. *Un losange qui a un angle droit est un carré.*
Un losange qui a ses diagonales de même longueur est un carré.

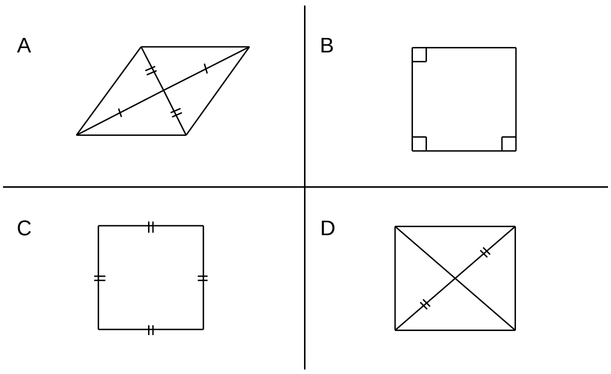
b. *Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.*
Un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur est un rectangle.

2.a. Un parallélogramme est un carré lorsque ses diagonales sont de même longueur et ont des supports perpendiculaires.

b. Un parallélogramme est un carré lorsque deux côtés consécutifs sont de même longueur et ses diagonales sont de même longueur.

Exercice 45

1.



La figure A est un parallélogramme, puisque c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.

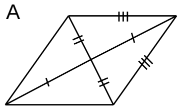
La figure B est un rectangle, puisque c'est un quadrilatère dont trois angles sont droits.

La figure C est un losange, puisque c'est un quadrilatère dont les côtés sont de même longueur.

La figure D n'est pas, au vu des codages, un polygone particulier.

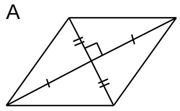
2.

A



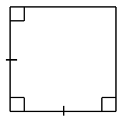
A est un losange, puisque c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et deux côtés consécutifs sont de même longueur.

A



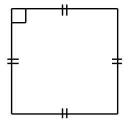
A est un losange, puisque c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et ont des supports perpendiculaires.

B



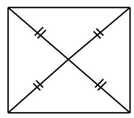
B est un carré, puisque c'est un quadrilatère dont trois angles sont droits et deux côtés consécutifs sont de même longueur.

C



C est un carré, puisque c'est un quadrilatère dont les côtés sont de même longueur et un angle est droit.

D



D est un rectangle, puisque c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur.

Exercice 46

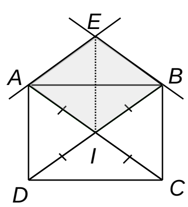
1. On sait que *BEAU* a quatre côtés de même longueur.
Propriété : Si un quadrilatère a quatre côtés de la même longueur, alors c'est un losange.
Donc *BEAU* est un losange.

2. On sait que *ABCD* est un parallélogramme et que $AB = AD$.
Propriété : Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
Donc *ABCD* est un losange.

3. On sait que *EFGH* est un parallélogramme,
mes $\widehat{FGH} = 90°$ et $(EG) \perp (FH)$.
Propriété : Si un parallélogramme a un angle droit et les supports de ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.
Donc : *EFGH* est un carré.

Exercice 47

1.



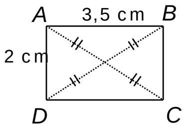
ABCD rectangle de centre *I*, $(AE) // (BD)$ et $(BE) // (AC)$.

2.a. *AEBI* est un losange ; en effet :

- on sait que ses côtés opposés ont des supports parallèles [$(AE) // (BI)$ et $(EB) // (AI)$] ;
- de plus, les deux côtés consécutifs $[IA]$ et $[IB]$, ("demi-diagonales" du rectangle *ABCD*) ont la même longueur.

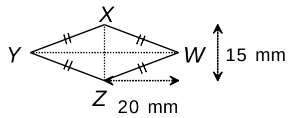
Exercices d'approfondissement

Exercice 48



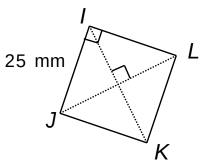
1. *ABCD* est un rectangle ; en effet ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

2. Aire de *ABCD* : 3,5×2=<u>7 cm²</u>.



1. *XYZW* est un losange ; en effet ses côtés ont la même longueur.

2. Aire de *XYZW* :
15×20=<u>300 mm²</u>.

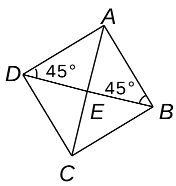


(*IJ*)//(*LK*)
(*IL*)//*KJ*)

1. *IJKL* est un carré ; en effet c'est un parallélogramme, qui a un angle droit (*rectangle*) et des diagonales de supports perpendiculaires (*losange*).

2. Aire de *IJKL* : 25×25=<u>625 mm²</u>.

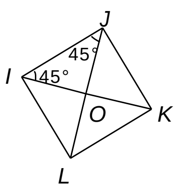
Exercice 49



ABCD est un parallélogramme.

D'après la figure ci-contre, *ABD* est un triangle rectangle et isocèle en *A*.

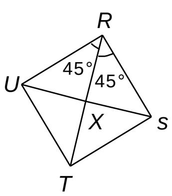
Donc le parallélogramme *ABCD*, qui a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur, est un carré



IJKL est un parallélogramme.

D'après la figure ci-contre, *OIJ* est un triangle rectangle et isocèle en *O*.

Donc le parallélogramme *IJKL*, qui a des diagonales de même longueur et de supports perpendiculaires, est un carré



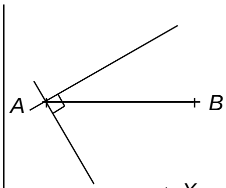
URST est un parallélogramme.

D'après la figure, *URS* est un triangle rectangle en *R* ; donc *URST* est un rectangle.

Dans ce rectangle, diagonales et "demi-diagonales" ont même longueur :
XR=*XU* ;
donc :
● *XRU* est un triangle isocèle et rectangle en *X*.
● le rectangle *URST*, qui a ses diagonales de supports perpendiculaires, est un carré.

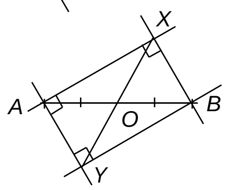
Exercice 50

Trace (*avec l'équerre*) deux droites passant par *A* et perpendiculaires entre elles.



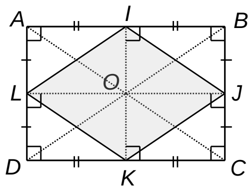
Trace (*avec la règle et l'équerre*) les droites passant par *B* et perpendiculaires aux droites précédemment tracées.

On obtient un rectangle *AXBY*, dont les diagonales se coupent en leur milieu *O*.



Exercice 51

1. Dans la figure ci-contre :
● *ABCD* est un rectangle de centre *O* ;
● *I*, *J*, *K* et *L* sont les milieux respectifs de [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*].



2.a. La droite (*IK*), axe de symétrie de *ABCD* et médiatrice commune des côtés [*AB*] et [*CD*], est perpendiculaire à ces côtés.
La droite (*JL*), axe de symétrie de *ABCD* et médiatrice commune des côtés [*BC*] et [*DA*], est perpendiculaire à ces côtés.

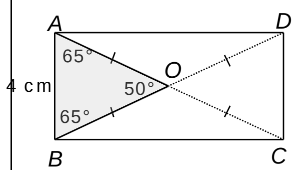
b. *IJKL* est un losange. En effet :
● [*AB*] et [*CD*] étant des segments symétriques par rapport à *O*, leurs milieux le sont aussi ; donc *O* est le milieu de [*IK*] ; de même *O* est le milieu de [*JL*] ;
● d'après 2.a, [*IK*] et [*JL*] ont des supports perpendiculaires ;
● on en déduit que les diagonales de *IJKL* sont sécantes en leur milieu et ont des supports perpendiculaires.

Exercice 52

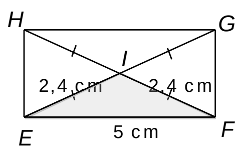
1. Construis un triangle *OAB*, isocèle en *O*, tel que :
● *AB*=4 cm,
● $mes\ \hat{A} = mes\ \hat{B} = 65°$.

Construis les points *C* et *D*, symétriques respectifs de *A* et *B* par rapport à *O*.

ABCD est un rectangle de centre *O*, tel que :
● *AB*=4 cm,
● $mes\ \widehat{AOB} = 50°$.



2. Tracer un rectangle *EFGH* de centre *I* tel que *IE*=2,4 cm et *EF*=5 cm, suppose que l'on puisse construire un triangle *IEF*, isocèle en *I*, tel que :
IE=*IF*=2,4 cm et *EF*=5 cm ;
<u>ce qui est impossible</u> (5>2,4+2,4).



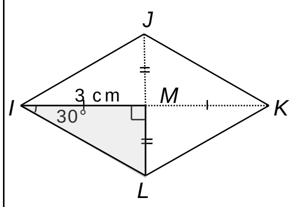
Exercice 53

1. Construis un triangle *IML*, rectangle en *M*, tel que :

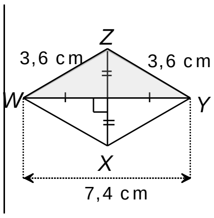
$IM=3$ cm et mes $\hat{I}=30°$.

Construis les points *K* et *J*, symétriques respectifs de *I* et *L* par rapport à *M*.

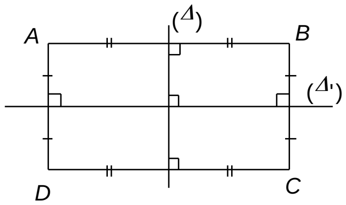
IJKL est un losange de centre *M* tel que : $IM=3$ cm et *mes* $\widehat{LIJ}=60°$.



2. Tracer un losange *WXYZ* tel que $WY=7{,}4$ cm et $ZY=3{,}6$ cm, suppose que l'on puisse construire un triangle *WZY*, isocèle en *Z*, tel que :
$ZW=ZY=3{,}6$ cm et $WY=7{,}4$ cm ;
<u>ce qui est impossible</u> ($7{,}4>3{,}6+3{,}6$).



Exercice 54



1.a. $(\Delta)\perp(\Delta')$, $A\notin(\Delta)$ et $A\notin(\Delta')$.
b. Pour que *ABCD* ait (Δ) et (Δ') comme axes de symétrie :
B peut être le symétrique de *A* par rapport à (Δ),
D peut être le symétrique de *A* par rapport à (Δ'),
C doit alors être à la fois le symétrique de *D* par rapport à (Δ) et le symétrique de *B* par rapport à (Δ').

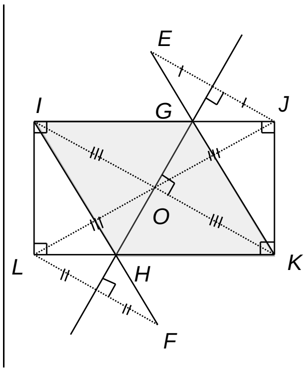
2. Dans ces conditions :
$(AB)\perp(\Delta)$, $(DC)\perp(\Delta)$ et $(\Delta')\perp(\Delta)$ donc $(AB)//(DC)//(\Delta')$;
$(AD)\perp(\Delta')$, $(BC)\perp(\Delta')$ et $(\Delta)\perp(\Delta')$ donc $(AD)//(BC)//(\Delta)$;
Finalement *ABCD* est un rectangle.

Commentaire : *B* peut être le symétrique de *A* par rapport à (Δ') et *D* peut être le symétrique de *A* par rapport à(Δ) ; on démontre que *ABCD* est toujours un rectangle.

Exercice 55

IJKL est un rectangle de centre *O*.

(*D*), médiatrice de [*IK*], coupe (*IJ*) en *G*, coupe (*KL*) en *H*.



1.a. *K* et *E* sont les symétriques respectifs de *I* et *J* par rapport à (*D*), donc la droite (*KE*) est symétrique de la droite (*IJ*) par rapport à (*D*) ;
I et *F* sont les symétriques respectifs de *K* et *L* par rapport à (*D*), donc la droite (*IF*) est symétrique de la droite (*KL*) par rapport à (*D*).

b. Comme (*IJ*) et (*KL*) sont parallèles, leurs symétriques par rapport à (*D*) le sont aussi, donc (*KE*) et (*IF*) sont parallèles.

c. Le symétrique par rapport à (*D*) du point *G*, qui appartient à (*D*) et à (*IJ*), est lui-même et appartient au symétrique de (*IJ*), c'est-à-dire (*KE*) ; donc $G\in(KE)$.
Le symétrique par rapport à (*D*) du point *H*, qui appartient à (*D*) et à (*KL*), est lui-même et appartient au symétrique de (*KL*), c'est-à-dire (*IF*) ; donc $H\in(IF)$.

d. $G\in(IJ)$, $H\in(KL)$ et $(IJ)//(KL)$, donc : $(IG)//(KH)$;
$G\in(KE)$, $H\in(IF)$ et $(KE)//(IF)$, donc : $(KG)//(IH)$;
On en déduit que *IGKH* est un parallélogramme.

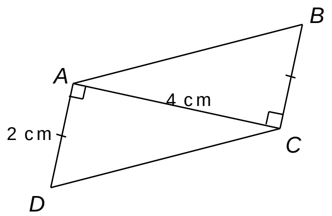
2. Les diagonales de *IGKH* sont [*IK*] et [*GH*] ;
le support de [*GH*] est la droite (*D*), médiatrice de [*IK*] ;
donc les diagonales du parallélogramme *IGKH* ont des supports perpendiculaires.

3. On en déduit que *IGKH* est un losange.

Activités d'intégration

Exercice 56 (Jeu avec les triangles)

1.

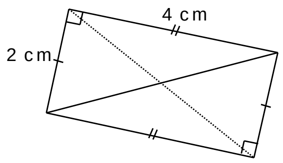


a. Dans cette disposition, les droites (*AD*) et (*CB*) déterminent avec la sécante (*AC*) des angles alternes-internes droits ;
donc (*AD*)//(*BC*).

Le quadrilatère non croisé *ABCD*, dont les côtés opposés [*AD*] et [*BC*] sont de même longueur et ont des supports parallèles, est un parallélogramme.

b. Aire de ce parallélogramme : 2×4=8 cm².

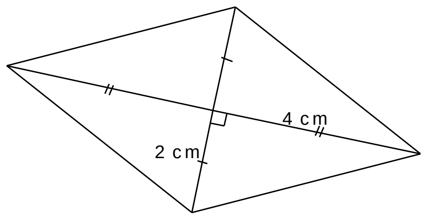
2.



Dans cette disposition, on obtient un rectangle puisqu'il s'agit d'un quadrilatère non croisé, qui a un angle droit et dont les côtés opposés ont la même longueur.

Les diagonales de ce rectangle ont même longueur que le côté opposé à l'angle droit de chaque triangle.

3.



a. Pour obtenir un losange (non carré) il faut utiliser quatre triangles rectangles et les disposer comme ci-dessus.

c. Les diagonales de ce losange sont constituées de 2 fois chaque côté de l'angle droit du triangle rectangle.
Donc les dimensions de ces diagonales sont : 4 cm et 8 cm

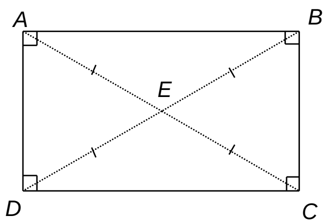
Exercice 57 (Quadrilatères à volonté)

1.a. Le fil *BOIS* représente toujours un parallélogramme, puisque c'est un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu.
b. Lorsque les deux morceaux de bois sont perpendiculaires, ce parallélogramme est un losange puisque ses diagonales ont des supports perpendiculaires.

2.a. Si *BI*=*OS*, les diagonales ont la même longueur et *BOIS* est un rectangle.
b. Lorsque les deux morceaux de bois sont perpendiculaires, ce rectangle est un carré puisque ses diagonales ont des supports perpendiculaires.

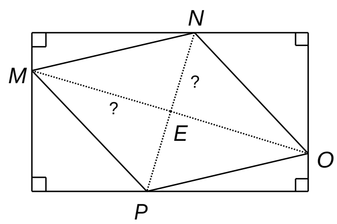
Exercice 58 (Installations électriques)

1.



a. Le rectangle *ABCD* a ses diagonales qui se coupent en leur milieu *E* ; donc *EC*=*EA*=4 m.
b. Longueur de câble nécessaire pour la totalité de l'installation : *EA*+*EB*+*EC*+*ED*=<u>16 m</u>.

2.



Pour avoir la longueur de câble nécessaire pour l'installation, deux mesures depuis le point *E* sont au minimum nécessaires : *EM* et *EN*.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2	Trapèze [1 p.85]	11, 12, 13	22	28, 29, 30, 35
	Trapèzes particuliers [2 p.85]	9, 10, 14	20, 21, 23, 24	27, 31, 36
	Apprendre à construire un trapèze [1p.86]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8		26
3, 4	Hexagone et octogone réguliers [3 p.85]	15, 16, 17, 18, 19	25	32, 33, 34, 37

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

1 Trapèzes

1. Les trapèzes sont des quadrilatères qui ont deux côtés parallèles.
2. Les trapèzes rectangles (5, 6, 7 et 8) ont deux angles droits ;
les trapèzes isocèles (1, 2, 3 et 4) ont les deux côtés non parallèles de même longueur.
3. *BUEA* (figure ci-contre) est un trapèze isocèle.
4. Dans le quadrilatère *BUEA*, les diagonales sont de même longueur et les angles à la base sont de même mesure.

2 Aire d'un trapèze

1.a. *ABCD* est un trapèze puisque les côtés [*AB*] et [*CD*] sont parallèles.
b. Le symétrique de *ABCD* par rapport à *O* est *NCBM*.
c. L'aire du trapèze *ABCD* est donc la moitié de l'aire du parallélogramme *AMND*.
2.a. L'aire du parallélogramme *AMND* est : $AM \times h = (AB+BM) \times h = (DC+AB) \times h$.
b. L'aire du trapèze est aussi : $\frac{1}{2}$(grande base+petite base)×hauteur.

3 Triangle équilatéral et hexagone

1. Les points *A*, *B* et *C* (figure 1) sont alignés, puisque $\widehat{ABC} = 60+60+60 = 180°$.
3.a. *A*, *E*, *D*, *C*, *G* et *F* (figure 2) appartiennent au cercle de centre *B* et de rayon $r = BA = BE = BD = BC = BG = BF$.
b. De plus $AE = ED = DC = CG = GF = FA = r$.
4. On en déduit la construction (*connue*) avec le compas et la règle de l'hexagone régulier.

4 Jeu à huit

Une découverte de l'octogone régulier …

Méthodes et savoir-faire

Apprendre à construire un trapèze

Exercice 1

Une figure possible … et immédiate !

Exercice 2

Programme de construction :
- trace un segment [*ST*], de longueur 7 cm ;
- trace, à 4 cm de ce segment, une droite (*D*) qui lui est parallèle ;
- *U* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *S* et de rayon 9 cm ;
- *R* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *T* et de rayon 5 cm.

Exercice 3

Programme de construction :
- trace un segment [*ST*], de longueur 6 cm ;
- trace, à 3,5 cm de ce segment, une droite (*D*) qui lui est parallèle ;
- *U* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *T* et de rayon 5 cm ;
- *R* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *U* et de rayon 4 cm.

Exercice 4

Une figure possible … et immédiate !

Exercice 5

Programme de construction :
- trace un segment [*OP*], de longueur 5 cm ;
- trace, à 3 cm de ce segment, une droite (*D*) qui lui est parallèle ;
- *M* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *O* et de rayon 7 cm ;
- *N* est le point d'intersection de (*D*) avec le cercle de centre *P* et de rayon 7 cm.

Exercice 6

Programme de construction :
- trace un segment [*AD*], de longueur 6 cm ;
- trace un angle $\widehat{DAx} = 54°$, puis place sur son côté [*Ax*) le point *B* tel que *AB*=4 cm ;
- trace la droite (Δ) passant par *B* et parallèle à [*AD*] ;
- *C* est l'un des deux points d'intersection de (Δ) avec le cercle de centre *D* et de rayon 4 cm.

Exercice 7

Programme de construction :
- trace un segment [*YZ*], de longueur 6 cm ;
- trace les cercles (C_1) et (C_2), de centres *Y* et *Z*, de rayons respectifs 3 cm et 2 cm ;
- toute droite (*D*) [ou (*D*')], parallèle à [*YZ*] et sécante avec les deux cercles, coupe (C_1) en *X* [ou *X*'] et (C_2) en *W* [ou *W*'].

Exercice 8

Programme de construction :
- trace le triangle *ABC*, aux dimensions indiquées ;
- sur la droite, passant par *C*, parallèle à [*AB*] et du même côté que *A* par rapport à (*BD*), place le point *D* tel que *CD*=3 cm.

Trapèze

Exercice 9

2. *IJMN* est un trapèze isocèle.
Justification :
[*IJ*]//[*MN*], (*IN*) et (*JM*) non parallèles et *IN*=*JM*=5 cm.

Exercice 10

ABCD n'est pas un trapèze rectangle.
Justification :
mes $\hat{D}$ =360-119-62-90
=89°.

Exercice11

1. La sécante (*NO*) détermine, avec les droites parallèles (*MN*) et (*PO*), deux angles $\hat{N}$ et $\hat{O}$ (*indiqués sur la figure*) alternes-internes de même mesure ; donc les angles $\widehat{MNO}$ et $\widehat{PON}$ sont supplémentaires.

De même : les angles $\widehat{PMN}$ et $\widehat{MPO}$ sont supplémentaires.

2. On en déduit que la somme des mesures des quatre angles du trapèze est égale à 360°.

Exercice 12

1. L'angle en *A* du triangle *AOB* a pour mesure :
180-130-35=15 ;
donc les côtés [*AB*] et [*DC*] ne sont pas parallèles ;
comme les côtés [*AD*] et [*BC*] *ne paraissent pas non plus parallèles*, on peut dire que le quadrilatère *ABCD* n'est pas un trapèze.
2. L'angle en *D* du triangle *ODC* a pour mesure :
180-130-25=25° ; donc le triangle *ODC* est isocèle en *O*.

Exercice 13

Aire du trapèze *TROU* : $\dfrac{(6 + 3) \times 3}{2}$ =13,5 cm².

Aire du trapèze *CHAT* : $\dfrac{(1{,}8 + 6{,}2) \times 2{,}4}{2}$ =9,6 cm².

Exercice 14

Aire du premier trapèze : $\dfrac{(6{,}3 + 3{,}8) \times 1{,}9}{2}$ =9,6 cm².

Aire du second trapèze : $\dfrac{(11 + 5) \times 1{,}25}{2}$ =10 cm².

Hexagone et octogone réguliers

Exercice 15

1. Ci-contre, un hexagone régulier *ABCDEF*, inscrit dans un cercle de centre *O* de rayon 4 cm.

2.a. *AB*=4 cm.
b. Le périmètre de *ABCDEF* est égal à 4×6=24 cm.

3. Les six axes de symétrie sont :
● d'une part (*AD*), (*BE*) et (*CF*),
● d'autre part les médiatrices des couples de côtés parallèles ([*AB*] et [*DE*], [*BC*] et [*EF*], [*CD*] et [*FA*]).

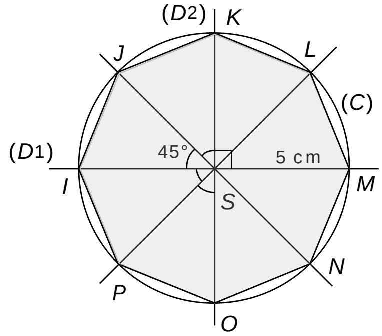
4.a. Mes$\widehat{ABO}$=60°.
Justification : *ABO* est un triangle équilatéral.
La somme des mesures des angles d'un hexagone régulier est : 12×60=720°.

Exercice 16

1. Ci-contre, un hexagone régulier *FGHIJK* de centre *O*.

2.a. *FGHO*, quadrilatère dont les côtés ont la même longueur, est un losange.
b. (*FH*) est un axe de symétrie pour ce losange.
c. Les triangles *FGH* et *FHO*, symétriques par rapport à (*FH*), ont la même aire.

3. Aire(*FGHIJK*)=6×aire(*FHO*),
aire(*FHJ*)=3×aire(*FHO*),
donc : $\dfrac{\text{aire}(FGHIJK)}{\text{aire}(FHJ)}$ =2.



Exercice 17

1. Ci-contre un octogone régulier *ABCDEFGH* (de centre *O*).
● 4 axes de symétrie sont tracés sur la figure : (*AE*), (*BF*), (*CG*) et (*DH*) ;
● *O* est le centre de symétrie.

2.a. $\widehat{AOB}=45°$, donc :

● $\widehat{ABO}=\dfrac{180-45}{2}=67{,}5°$,

● $\widehat{ABC}=2\times\widehat{ABO}=180-45=135°$.

b. La somme des mesures des angles d'un octogone régulier est : $8\times135=1\,080°$.

Exercice 18

En suivant les consignes de l'exercice, on obtient un octogone régulier *IJKLMNOP*.

Exercice 19

Reprendre la construction de l'exercice 18, avec un cercle de rayon 4 cm.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 20

Sur la figure :
1. *CDEF* est un losange (côtés de même longueur),
DEGH est un rectangle (diagonales de même longueur et sécantes en leurs milieux),
ABCD est un carré (diagonales de même longueur, perpendiculaires et sécantes en leurs milieux).
2. *AGEB* et *EFCI* sont des trapèzes rectangles.
3. *EHAD*, *EHAB* et *GABD* sont des trapèzes n'ayant aucune autre particularité.

Exercice 21

1. Dans le triangle *ACD*, on peut calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$: 180-106-44=30° ;
dans le triangle *ABC*, on peut calculer la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$: 180-98-52=30°.
2. *ABCD* est un trapèze, de bases [*AB*] et [*DC*] ; car les angles alternes-internes $\widehat{ACD}$ et $\widehat{CAB}$ ont la même mesure.
3. Si $\widehat{ABC}=136°$ et $\widehat{ACB}=14°$, *ABCD* est un trapèze isocèle de grande base [*DC*].

Exercice 22

EB=4-3=1 cm ;

aire du trapèze *EBCD*= $\dfrac{4+1}{2}\times 3{,}5=8{,}75$ cm² ;

aire du trapèze *EFCD*= $8{,}75+\dfrac{4\times3{,}5}{2}=15{,}75$ cm² ;

aire du trapèze *AFCD*= $\dfrac{3+4+1+4}{2}\times 3{,}5=21$ cm².

Exercice 23

ABDC est un trapèze isocèle.
En effet :
● les côtés [*AC*] et [*BD*], perpendiculaires à (*D*), sont parallèles entre eux ;
● les côtés [*AB*] et [*CD*], symétriques par rapport à (*D*), sont de même longueur.

Exercice 24

Etape 1
OA=*OB* car *A* et *B* appartiennent au cercle (*C*), de centre *O*.
IA=*IB* car *I* est le milieu de [*AB*].
La droite (*OI*) est donc la médiatrice de la corde [*AB*].
On en déduit que $(OI)\perp(AB)$.
Etape 2
(*IC*) n'étant pas parallèle à (*OD*), pour conclure que *OICD* est un trapèze, il faut prouver que (*OI*)//(*DC*).
C appartient au cercle (*C*'), de diamètre [*BD*], donc le triangle *BCD* est rectangle en *C*.
Finalement $(OI)\perp(AB)$ et $(DC)\perp(AB)$ donc (*OI*)//(*DC*)
Etape 3
OICD a deux côtés, [*OI*] et [*DC*], parallèles entre eux et perpendiculaires au côté [*IC*] ; donc *OICD* est un trapèze rectangle.

Exercice 25

1. Ci-contre, *ABCDEF* est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre *O*.

ACE et *BDF* sont deux triangles équilatéraux.

2. Une fois construit l'hexagone *ABCDEF*, dans un cercle de centre *O* :

● la figure A s'achève en utilisant une règle non graduée ;

● la figure B s'achève en utilisant un compas.

Exercice 26

a. Il existe plusieurs trapèzes dont les bases mesurent 5 cm et 3 cm, la hauteur étant de 4 cm.
b. Il existe plusieurs trapèzes isocèles dont la grande base mesure 6 cm et les côtés de supports sécants mesurent 3 cm.
c. Il n'existe qu'un seul trapèze rectangle dont les bases mesurent 5 cm et 2 cm, la hauteur étant de 4 cm.
Les 2 exemples suivants sont superposables ... après retournement de l'un d'eux :
Finalement, il est certain que seuls les trapèzes de type c sont superposables.

Exercice 27

1. $\widehat{OAD}=\widehat{OBC}=\widehat{ODA}=\widehat{OCB}$

$$=\frac{180-54}{2}=63°.$$

2. *ABCD* est un trapèze isocèle car :
● $(AB)//(BC)$ (angles correspondants égaux) ;
● $AB=DC$ (différence entre les rayons).

Exercice 28

$$\text{Aire}(ABCD)=\text{aire}(ABC)+\text{aire}(ADC)$$
$$=\frac{AB\times h}{2}+\frac{CD\times h}{2}$$
$$=\frac{(CD+AB)\times h}{2}$$

Si $AB=3$ m $=30$ dm, $CD=50$ dm et $h=21$ cm $=2{,}1$ dm,

alors l'aire$(ABCD)=\dfrac{(50+30)\times 2{,}1}{2}=84$ dm².

Exercice 29

ABCD est un trapèze d'aire 15 cm² ; sa grande base [*AB*] mesure 8 cm et sa petite base [*CD*] mesure 4 cm.
1. Soit h la hauteur de ce trapèze ;

on a : $\dfrac{(8+4)\times h}{2}=15.$

C'est-à-dire : $6\times h=15$
$h=2{,}5$ cm.

2. Ci-contre, le trapèze construit.

Exercice 30

$\text{Aire}(EFGH)=\dfrac{(7+3)\times 4}{2}=20$ cm² ;

donc $\text{aire}(FAG)=\dfrac{1}{4}\,\text{aire}(EFGH)$
$=5$ cm².

Comme $\text{aire}(FAG)=\dfrac{4\times AG}{2}$, on en déduit que :

$AG=2{,}5$ cm.

Exercice 31

2.a. $\text{mes}\widehat{KOP}=\text{mes}\widehat{OPK}$ donc le triangle *PKO* est isocèle en *K*.

b. On en déduit que (*KI*), droite passant par *K* et le milieu du côté [*OP*], est la médiatrice de [*OP*].

c. $(KI)\perp(OP)$, puisque (*KI*) est la médiatrice de [*OP*] ;
$[NM]//[OP]$, puisque *MNOP* est un trapèze de grande base [*OP*] ;
donc : $(MN)\perp(KI)$ ou $(MN)\perp(KJ)$.

Les angles $\widehat{KMJ}$ et $\widehat{KPO}$ ont la même mesure [angles correspondants formés par la sécante (*MP*) aux deux droites parallèles (*NM*) et (*OP*)].

De même les angles $\widehat{KNJ}$ et $\widehat{KOP}$ ont la même mesure.

Donc les angles $\widehat{KMJ}$ et $\widehat{KNJ}$ ont la même mesure.

d. Dans le triangle *MKN*, isocèle en *K*, la droite (*KJ*), perpendiculaire à [*MN*], est la médiatrice de [*MN*].

3.a La droite (*JI*), médiatrice de [*OP*] et [*NM*], est axe de symétrie pour le trapèze *MNOP*.

b. Les points *M* et *N*, d'une part, *P* et *O*, d'autre part, sont symétriques par rapport à (*JI*) donc $MP=NO$ et $MO=NP$.

Exercice 32

1. Dans l'hexagone régulier ci-contre, *F* appartient au cercle de diamètre [*AD*]

donc $\widehat{AFD}$ est un angle droit.

2. L'angle *f* mesure 90°.

Les angles *a* et *h* ont pour mesure 60° (*OAF* et *DOC* sont des triangles équilatéraux).

Les angles *e* et *g* ont pour mesure 120°.

L'angle *g* mesure 30° (dans le triangle *EFD*, isocèle en *E*, l'angle en *E* mesure 120°).

Exercice 33

1. Carré avec les milieux de chacun de ses côtés.

2.a.	b.
Octogone régulier ayant, parmi ses sommets, les milieux des côtés du carré.	Octogone régulier ayant, parmi ses sommets, les sommets du carré.

Ces 2 constructions sont faites, sur le carré initial, uniquement avec la règle non graduée et le compas.

Exercice 34

ABCDEFGH est un octogone régulier, dont la longueur des côtés est 5 cm.

Justification :

● le triangle *RAB*, dont le sommet *R* appartient à la médiatrice de [*AB*] et au cercle de diamètre [*AB*], est rectangle et isocèle en *R* ;

● en suivant toutes les consignes de la construction :

- la droite (RI) est axe de symétrie de toute la figure (triangle RAB et octogone $ABCDEFGH$) ;

- le point O appartient à la droite (RI) et est centre de symétrie de l'octogone $ABCDEFGH$;

- les sommets de cet octogone appartiennent au cercle de centre O, passant par A et B ;

● l'octogone sera régulier si, de plus,
$\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD}=\widehat{DOE}=\widehat{EOF}=\widehat{FOG}=\widehat{GOH}=\widehat{HOA}=45°$:

- J et K étant les milieux de [AH] et [BC], le quadrilatère $JRKO$ (avec 3 angles droits et 2 côtés consécutifs de même longueur) est un carré ;

- l'angle droit $\widehat{JOK}$ est partagé en 4 angles égaux à 22,5° ;

on en déduit que :

$\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{HOA}=45°$,

puis, par symétrie de centre O, $\widehat{EOF}=\widehat{FOG}=\widehat{DOE}=45°$,

enfin $\widehat{COD}=\widehat{GOH}=\dfrac{360-6\times 45}{2}=45°$.

Activités d'intégration

Exercice 35 (La banderole)

1. Avec seulement deux côtés parallèles, chaque quadrilatère coloré est un trapèze.

2. Il n'y a pas de quadrilatère pour lequel Safi a utilisé davantage de peinture que pour les autres ; en effet, avec des bases et une hauteur identiques dans chaque trapèze, l'aire de chacun d'eux est la même : $\frac{(12 + 20) \times 15}{2} = 240$ cm².

Exercice 36 (Tableau à encadrer)

1.a. Chaque pièce constituant le cadre est un trapèze isocèle.
Justification : le cadre est symétrique par rapport aux droites (D) et (D').

b. D'après les dimensions indiquées sur le dessin (en particulier une même largeur de 10 cm pour les 4 éléments du cadre) la mesure des angles de chaque quadrilatère (ou trapèze) est de 45° sur la grande base et de 135° sur la petite base.

2. En mettant bout à bout les quatre pièces du cadre (comme le montre le schéma ci-dessus) on voit que la longueur de la planchette doit être de : $60 \times 4 + 10 = 40 \times 2 + 80 \times 2 + 10 = 250$ cm.

3. Deux méthodes (*l'une pouvant être utilisée pour vérifier l'autre*) permettent de déterminer l'aire de la surface à peindre :

● mesurer l'aire des 4 trapèzes : $2 \times \frac{(60 + 40) \times 10}{2} + 2 \times \frac{(80 + 60) \times 10}{2} = 2\,400$ cm².

● mesurer l'aire de la partie "parallélogramme" de la planchette à découper : $(4 \times 60) \times 10 = 2\,400$ cm².

Exercice 37 (Les belles assiettes)

1.a. OAI, OIG et OGD sont 3 triangles équilatéraux, dont les côtés mesurent 12 cm,
OEJ, OJH et OHF sont 3 triangles équilatéraux, dont les côtés mesurent 9 cm,
donc : $AD = 2 \times 12 = 24$ cm et $EF = 2 \times 9 = 18$ cm.

b. Aire du trapèze $ABCD$: $\frac{(12 + 24) \times (2,6 + 7,8)}{2} = 187,2$ cm².

c. Aire totale de l'assiette : $2 \times 187,2 = 374,4$ cm².

2.a. Aire de la partie intérieure : $2 \times \frac{(9 + 18) \times 7,8}{2} = 210,6$ cm² ; aire de la bordure : $6 \times \frac{(9 + 12) \times 2,6}{2} = 163,8$ cm².

(*Vérification* : $210,6 + 163,8 = 374,4$.)

b. Les prévisions de l'artisan ne sont pas vérifiées.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Prisme droit (description) [1 p. 94]	7, 8, 15, 16, 17, 18	34, 36, 39	40
2	Prisme droit (patrons) [2 p. 95]	19, 22, 23, 24	35	
	Apprendre à construire un patron de prisme droit [1 p. 96]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 20, 21	38	47, 50
3	Aire latérale et aire totale d'un prisme droit [3 p. 95]	25, 26, 27, 28, 29		41, 42, 43
4	Volume d'un prisme droit [4 p. 95]	30, 31, 32, 33	37, 38	51, 52
	Apprendre à calculer aires et volume d'un prisme droit [2 p. 97]	9, 10, 11, 12, 13, 14		44, 45, 46, 47, 48, 49

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer (découper un pavé droit)

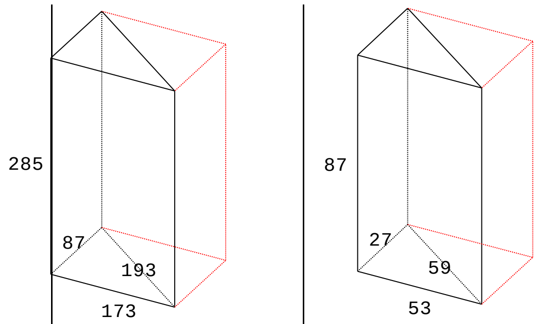
1. Dimensions du Flatiron : $173 \times 30{,}5 \approx 5\,276{,}5$ cm ≈ 53 m,
$87 \times 30{,}5 \approx 2\,653{,}5$ cm ≈ 27 m,
$193 \times 30{,}5 \approx 5\,886{,}5$ cm ≈ 59 m,
$285 \times 30{,}5 \approx 8\,692{,}5$ cm ≈ 87 m.

2. Dimensions du pavé droit : 53 m, 27 m et 87 m.

3. Les murs extérieurs sont des rectangles ;
la base et le toit sont des triangles rectangles.

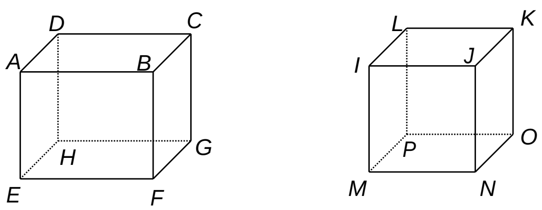
4.a. Volume de cet immeuble : $\dfrac{27 \times 53 \times 87}{2} \approx 62\,248{,}5$ m^3 ;

b. Quantité d'eau pour le remplir : $\approx 62\,248\,500$ L.



dimensions de l'immeuble en pieds — dimensions de l'immeuble en mètres

1 Vocabulaire des solides (rappel)



ADHE est une *face* ;

[*IK*] est … ;

LKOP est une *face* ;

I est un *sommet* ;

G est un *sommet* ;

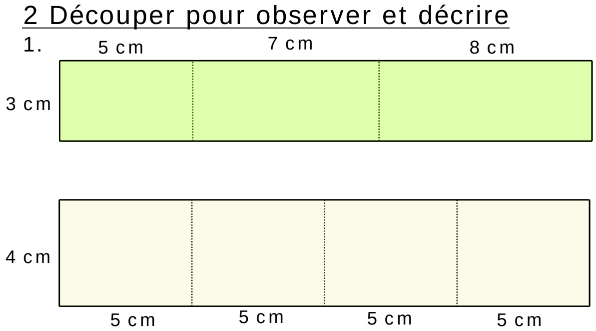
[*LP*] est une *arête* ;

DBFH est … ;

[*AF*] est ….

2 Découper pour observer et décrire

1.



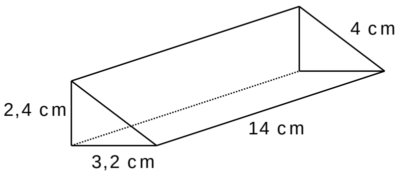
2.a. Le prisme droit vert a 3 faces latérales ;
le prisme droit jaune a 4 faces latérales.
b. Ces faces latérales sont des rectangles.

3.a. Le prisme droit vert a 3 arêtes latérales ;
le prisme droit jaune a 4 arêtes latérales.
b. Les arêtes latérales du prisme droit vert ont même longueur : 3 cm ;
les arêtes latérales du prisme droit jaune ont même longueur : 4 cm ;
c. Hauteur du prisme vert : 3 cm ; hauteur du prisme jaune : 4 cm.

4. Les bases du prisme droit vert sont des triangles superposables.

5. Les bases du prisme droit jaune sont des losanges superposables.

3 Un presse papier



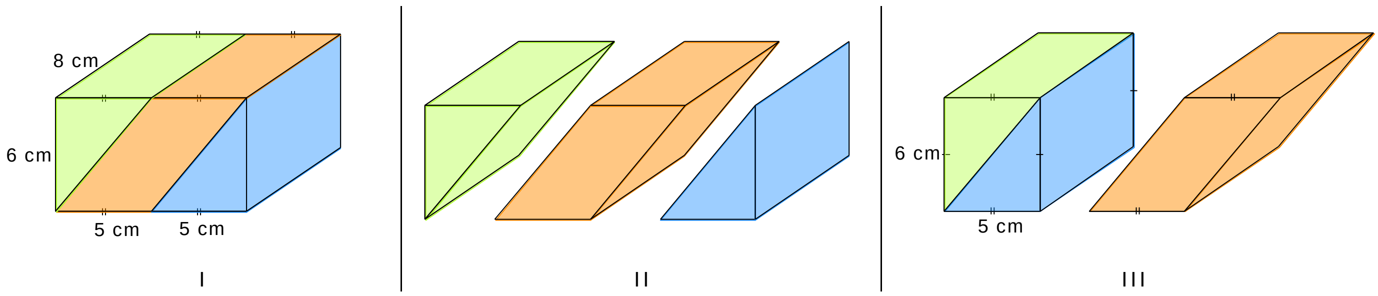
1. Le calcul 2,4×14+3,2×14+4×14 donne l'aire des faces latérales du prisme droit.

2.a. 2,4×14+3,2×14+4×14=(2,4+3,2+4)×14.
b. Le calcul 2,4+3,2+4 donne le périmètre d'une base du prisme droit.
c. *L'aire latérale d'un prisme droit se calcule en multipliant le périmètre d'une base par la hauteur du prisme.*

3.a. En posant son presse-papier sur l'une de ses faces triangulaires, l'aire de la surface en contact avec la table est : $\dfrac{3,2 \times 2,4}{2}$ =3,84 cm².

b. Aire totale des cinq faces de ce presse-papier : (2,4+3,2+4)×14+2×3,84=142,08 cm².

4 Un pavé droit en morceaux



1. En coupant (I → II) le pavé droit, on obtient trois solides :
- deux (vert et bleu) prismes droits, qui ont pour bases des triangles superposables,
- un (orange) prisme droit, qui a pour bases des parallélogrammes.

2.a. Volume du pavé droit : 10×6×8=480 cm^3.
b. En regroupant (II → III) les prismes vert et bleu (de volumes égaux) on obtient un nouveau pavé droit, de volume égal à la moitié de celui du pavé initial ; donc :
- le volume du solide orange est égal à $\dfrac{1}{2}$ du volume du pavé droit initial ;
- le volume de chacun des solides vert et bleu est égal à $\dfrac{1}{4}$ du volume du pavé droit initial.

c. On en déduit que les volumes des prismes vert, orange et bleu sont respectivement de 120 cm^3, 240 cm^3 et 120 cm^3.

4.a.

Solide	vert	orange
Aire d'une base (en cm²)	15	30
Volume du solide (en cm^3)	120	240

b. Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité ; en effet, les volumes s'obtiennent en multipliant les aires par 8.

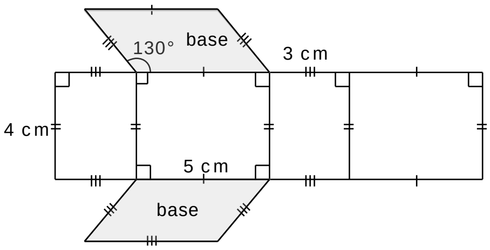
c. Pour ces solides, le coefficient de proportionnalité (8) n'est autre que la hauteur commune à chacun d'eux.

4. Le volume *V* d'un prisme droit est égal au produit de l'aire *B* d'une de ses bases et de sa hauteur *h* : *V*=*B*×*h*
(*les calculs étant effectués dans la même unité de longueur*).

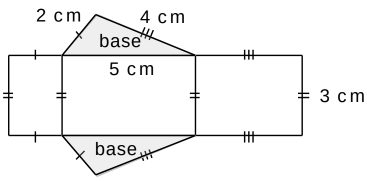
Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à construire un patron de prisme droit

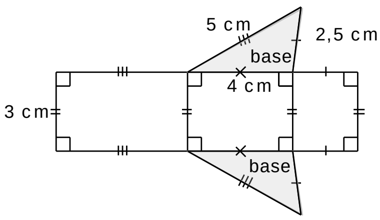
Exercice 1



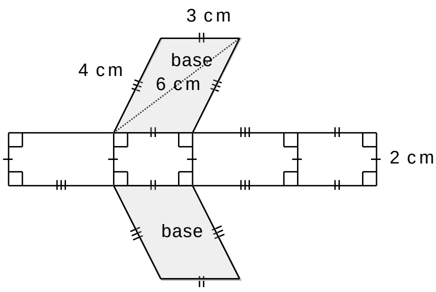
Exercice 2



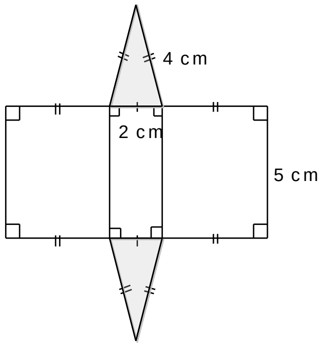
Exercice 3



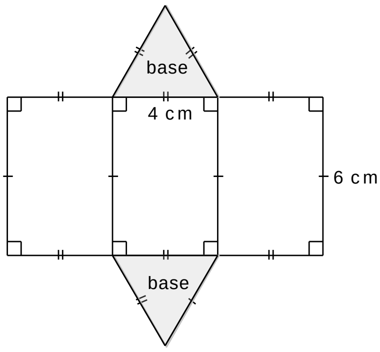
Exercice 4



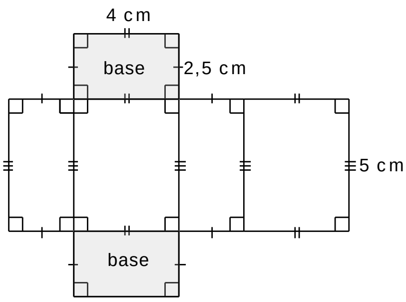
Exercice 5



Exercice 6

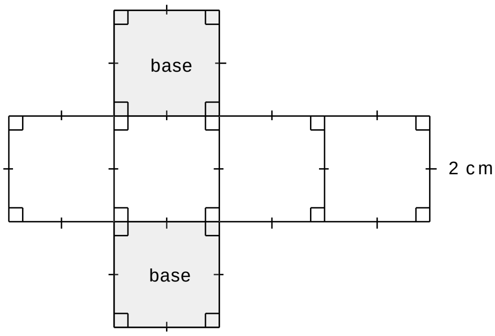


Exercice 7



Ce solide est aussi appelé *pavé droit*.

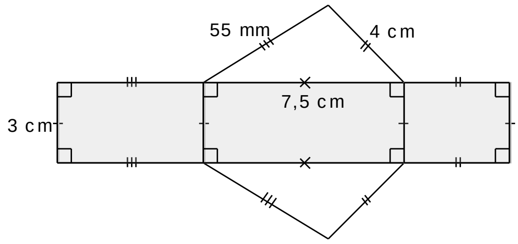
Exercice 8



Ce solide est aussi appelé *cube*.

2 Apprendre à calculer aires et volume d'un prisme droit

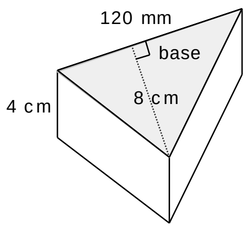
Exercice 9



Aire latérale du prisme droit de patron ci-dessus :

$5{,}5 \times 3 + 7{,}5 \times 3 + 4 \times 3 = \underline{51\ \text{cm}^2}$.

Exercice 10

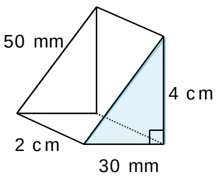


1. Aire d'une base du prisme droit ci-contre : $\dfrac{8 \times 12}{2} = \underline{48\ \text{cm}^2}$.

2. Volume de ce prisme droit :

$48 \times 4 = \underline{192\ \text{cm}^3}$.

Exercice 11



Ce prisme droit a :

- pour base le triangle rectangle colorié (longueurs des côtés de l'angle droit : 3cm et 4 cm, longueur du 3^e^ côté : 5 cm) ;
- pour hauteur 2 cm.

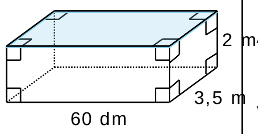
Aire d'une base : $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6\ \text{cm}^2$;

aire latérale : $(5+3+4) \times 2 = 24\ \text{cm}^2$;

aire totale : $6+6+24 = \underline{36\ \text{cm}^2}$.

Volume : $6 \times 2 = \underline{12\ \text{cm}^3}$.

Exercice 12



Ce prisme droit est un *pavé droit*.

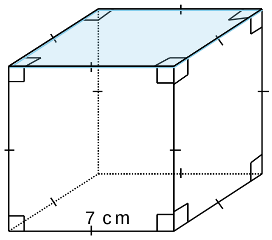
Aire totale :

$2 \times 6 \times 3{,}5 + 2 \times 6 \times 2 + 2 \times 3{,}5 \times 2 = \underline{80\ \text{m}^2}$.

Volume :

$6 \times 3{,}5 \times 2 = \underline{42\ \text{m}^3}$.

Exercice 13



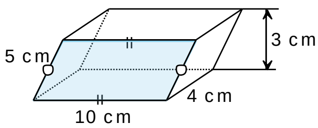
Ce prisme droit est un *cube*.

Aire totale :

$6 \times 7 \times 7 = 6 \times 49 = \underline{294\ \text{cm}^2}$.

Volume : $7 \times 7 \times 7 = \underline{343\ \text{cm}^3}$.

Exercice 14



Ce prisme droit a :

- pour base le parallélogramme colorié (longueurs des côtés : 5 cm et 10 cm ; hauteur associée au côté de 10 cm de long : 3 cm),
- pour hauteur 4 cm.

Aire d'une base : $10 \times 3 = 30\ \text{cm}^2$;

aire latérale : $2 \times (10 \times 4) + 2 \times (5 \times 4) = 120\ \text{cm}^2$;

aire totale : $30+30+120 = \underline{180\ \text{cm}^2}$.

Volume : $30 \times 4 = \underline{120\ \text{cm}^3}$.

Activités d'application

Décrire des prismes droits

Exercice 15

Parmi les 7 solides proposés, 4 sont des prismes droits :

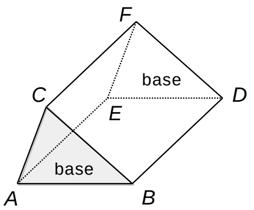
$\boxed{1}$ dont les bases sont des rectangles ;
ce prisme est d'ailleurs un pavé droit ;

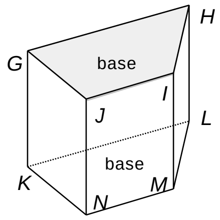
$\boxed{2}$ dont les bases sont des hexagones ;

$\boxed{5}$ dont les bases sont des triangles ;

$\boxed{7}$ dont les bases sont des quadrilatères.

Exercice 16





1.a. Nombre de faces : 5 ;
b. nombre d'arêtes : 9 ;
c. nombre de sommets : 6.

2.a. Bases :
ABC et *EDF* ;

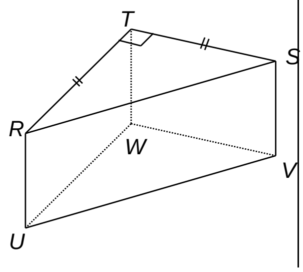
b. faces latérales :
ABDE, *BCFD* et *ACFE*.

1.a. Nombre de faces : 6 ;
b. nombre d'arêtes : 12 ;
c. nombre de sommets : 8.

2.a. Bases :
GHIJ et *KLMN* ;

b. faces latérales :
GHLK, *HIML*, *IJMN* et *JGKN*.

Exercice 17



1. Droites, support des arêtes du prisme droit ci-contre, perpendiculaires à (*ST*) :
(*RT*), (*WT*) et (*VS*).

2.a. *RTS* est un triangle rectangle et isocèle en *T* donc :

$$mes\ \widehat{TRS} = \frac{180 - 90}{2} = 45°.$$

b. $\widehat{TSR}$, $\widehat{WUV}$ et $\widehat{WVU}$ sont les angles qui mesurent aussi 45°.

Exercice 18

1.

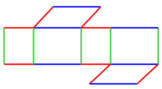
Prismes droits	1	2	3	4
Nombre de sommets d'une base	3	4	5	7
Nombre de côtés d'une base	3	4	5	7
Nombre de sommets du prisme	6	8	10	14
Nombre de faces du prisme	5	6	7	9
Nombre d'arêtes du prisme	9	12	15	21

2. *Si une base d'un prisme droit possède n côtés, alors ce prisme a 2n sommets, n+2 faces et 3n arêtes.*

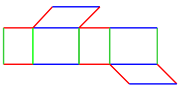
Patrons de prismes droits

Exercice 19

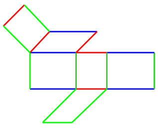
1.



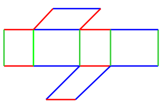
2.



3.

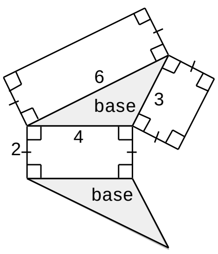


4.



$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$ sont des patrons de prismes droits.

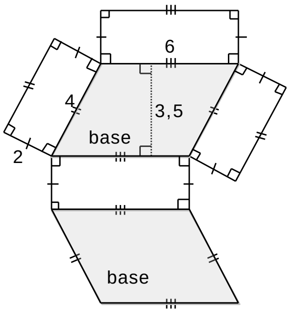
Exercice 20



Patron d'un prisme droit :

- de bases des triangles dont les côtés mesurent 4 cm, 6 cm et 3 cm,
- de hauteur 2 cm.

Exercice 21

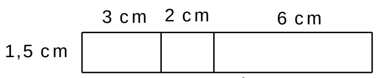


Patron d'un prisme droit :

- de bases des parallélogrammes (dimensions en cm indiquées sur la figure),
- de hauteur 2 cm.

Commentaires : d'autres patrons sont possibles.

Exercice 22



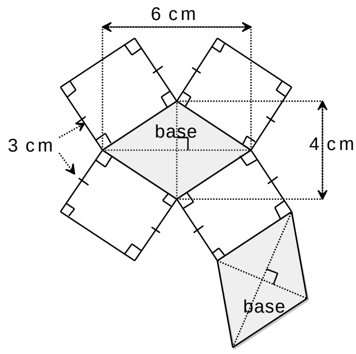
Pour terminer le patron de prisme droit à base triangulaire ci-dessus, il faut tracer un triangle de dimensions 6, 3 et 2 (en cm) ; ce qui est impossible puisque : 6>3+2 (inégalité triangulaire en défaut).

Exercice 23

Ci-contre un patron du prisme droit :

- de bases des losanges dont les diagonales mesurent 6 cm et 4 cm ;
- de hauteur 3 cm.

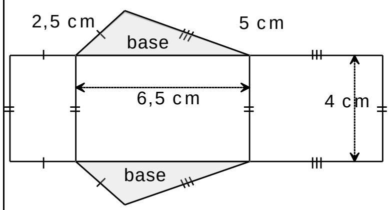
Commentaires : les 4 faces latérales sont des rectangles superposables.



Exercice 24

Ci-contre un patron du prisme droit :

- de bases des triangles dont les côtés mesurent 2,5 cm, 6,5 cm et 5 cm (périmètre 14 cm) ;
- de hauteur 4 cm.



Calculs d'aires

Exercice 25

Les trois prismes droits ont la même hauteur h ;

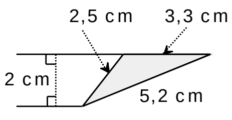
leurs bases respectives ont le même périmètre ; en effet :
- périmètre du carré : $4 \times 3 = 12$ cm ;
- périmètre de l'hexagone régulier : $6 \times 2 = 12$ cm ;
- périmètre du triangle équilatéral : $3 \times 4 = 12$ cm ;

donc ces trois prismes droits ont la même aire latérale :

$\underline{12 \times h}$.

Exercice 26

Ci-contre l'une des bases triangulaires d'un prisme droit de hauteur 6 cm.



Pour ce prisme droit :

a. périmètre d'une base : $5{,}2 + 2{,}5 + 3{,}3 = \underline{11 \text{ cm}}$;

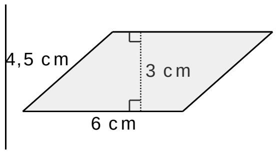
b. aire d'une base : $\dfrac{3{,}3 \times 2}{2} = \underline{3{,}3 \text{ cm}^2}$;

c. aire latérale : $11 \times 6 = \underline{66 \text{ cm}^2}$;

aire totale : $2 \times 3{,}3 + 66 = \underline{72{,}6 \text{ cm}^2}$.

Exercice 27

Ci-contre l'une des bases (parallélogramme) d'un prisme droit de hauteur 7 cm.



Pour ce prisme droit :

a. périmètre d'une base : $2 \times 4{,}5 + 2 \times 6 = \underline{21 \text{ cm}}$;

b. aire d'une base : $3 \times 6 = \underline{18 \text{ cm}^2}$;

c. aire latérale : $21 \times 7 = \underline{147 \text{ cm}^2}$;

aire totale : $2 \times 18 + 147 = \underline{183 \text{ cm}^2}$.

Exercice 28

Pour un prisme droit de 10 cm de hauteur, dont les bases sont des losanges : de côtés 4 cm ; de diagonales 6,4 cm et 4,8 cm ;

a. périmètre d'une base : $4 \times 4 = \underline{16 \text{ cm}}$;

b. aire d'une base : $4 \times \dfrac{3{,}2 \times 2{,}4}{2} = \underline{15{,}36 \text{ cm}^2}$;

c. aire latérale : $16 \times 10 = \underline{160 \text{ cm}^2}$;

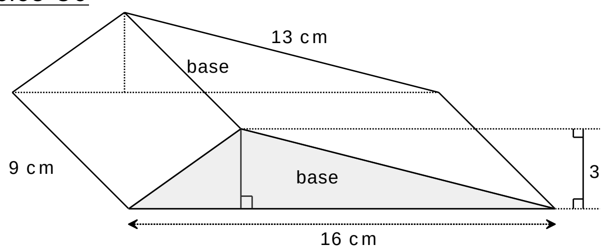
aire totale : $2 \times 15{,}36 + 160 = \underline{190{,}72 \text{ cm}^2}$.

Exercice 29

Prismes droits	1	2	3
Hauteur du prisme	3 cm	4 cm	6 cm
Périmètre d'une base	18 cm	12,5 cm	12,5 cm
Aire d'une base	15 cm²	10 cm²	7,5 cm²
Aire latérale	54 cm²	50 cm²	75 cm²
Aire totale	84 cm²	70 cm²	90 cm²

Volume de prismes droits

Exercice 30



1. Le prisme droit ci-dessus a des bases triangulaires (dont l'une est grisée) ; pour calculer son volume, la longueur 13 cm est inutile.

2. Volume de ce prisme droit : $\dfrac{16 \times 3}{2} \times 9 = \underline{216 \text{ cm}^3}$.

Exercice 31

Volume de chaque brique (trous compris) :

$40 \times 8 \times 16 = 5\,120 \text{ cm}^3$;

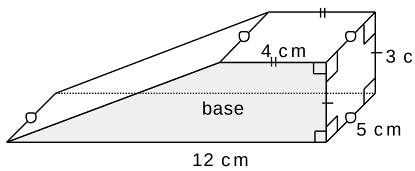
volume d'un trou :

$40 \times 3 \times 4 = 480 \text{ cm}^3$;

volume d'argile qui constitue chaque brique :

$5\,120 - 3 \times 480 = \underline{3\,680 \text{cm}^3}$.

Exercice 32



La cale ci-contre est un prisme droit :
- de hauteur 5 cm,
- de bases (dont l'une est grisée) des trapèzes rectangles (dimensions indiquées sur la figure).

Volume de cette cale : $\dfrac{(12 + 4) \times 3}{2} \times 5 = 24 \times 5 = \underline{120 \text{ cm}^3}$.

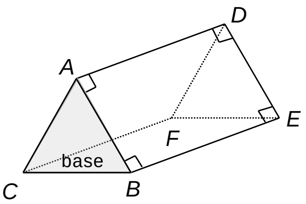
Exercice 33

1. Volume du pichet :

$0{,}9 \times 1{,}7 = \underline{1{,}53 \text{ dm}^3}$.

2. $1 \text{ dm}^3 = 1$ L donc ce pichet contient 1,5 L d'eau.

Exercice 34



Le prisme droit ci-contre, à bases triangulaires (grisée pour l'une d'elles) schématise le toit de la maison.

1.a. Le plancher du premier étage (*BCFE*) correspond à l'une de ses faces latérales.

b. La partie du toit représentée par *ABED* est dans la réalité un rectangle.

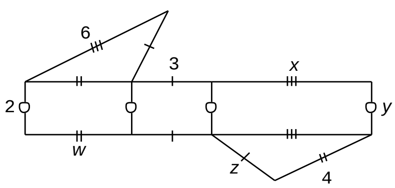
2. Faces contenant :
- le sommet *F* : *BCFE*, *ACFD* et *DEF* ;
- l'arête [*BE*] : *BCFE* et *ABED* ;
- l'arête [*DF*] : *DEF* et *ACFD*.

3.

	(*AB*)	(*AC*)	(*BC*)	(*AD*)
(*DF*)		//		⊥
(*FE*)			//	
(*DE*)	//			⊥
(*CF*)		⊥	⊥	//
(*BC*)			//	

Exercice 35

1. Il s'agit de construire le patron d'un prisme droit :
- de hauteur 2 cm ;
- de bases les triangles de côtés 6 cm, 3 cm et 4 cm.



2. En associant les côtés du patron qui formeront la même arête, on obtient : $x=6$ cm ; $y=2$ cm ; $z=3$ cm ; $w=4$ cm.

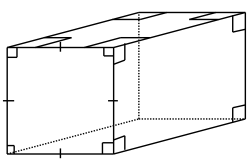
Exercice 36

1.

"*Tout prisme droit à base rectangulaire est un pavé droit.*" est une propriété <u>vraie</u>.

"*Tout prisme droit à base carrée est un cube.*" est une propriété <u>fausse</u>.

2. La propriété fausse peut être illustrée par un prisme à base carrée dont la hauteur n'est pas égale au côté du carré.



Ce prisme est aussi un pavé droit.

Exercice 37

Chaque élève doit être en mesure de reconstituer et d'utiliser le tableau de conversion suivant :

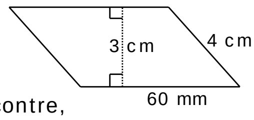
dm^3			cm^3			mm^3		
hL	daL	L	dL	cL	mL			
	3	4	6	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0			
		6	0	0	0			
		0	5	5	0			
			1	8	0			
				1	0			
					1			

1. 34,6 dm^3=34 600 cm^3=34 600 000 mm^3=3 460 cL.

2. 5 hl=500 000 cm^3 ; 6 L=6 000 cm^3 ;
0,55 L=550 cm^3 ; 1,8 dL=180 cm^3 ;
1 cL=10 cm^3; 1 mL=1 cm^3.

Exercice 38

1. Pour calculer le volume V d'un prisme droit
- de hauteur 35 mm,
- de base le parallélogramme ci-contre,

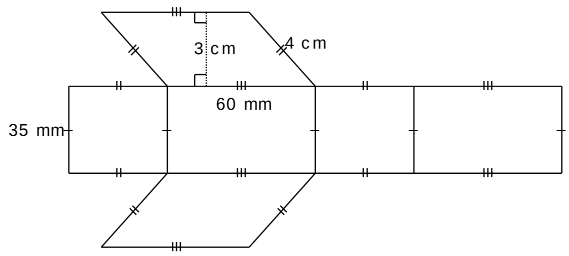


V=3×4×3,5 est un calcul erroné (*en effet 3 cm n'est pas la hauteur associée au côté de longueur 4 cm*) ;

V=60×3×35 est un calcul erroné (*en effet les longueurs ne sont pas exprimées dans la même unité*).

2. Calcul correct du volume : V=3×6×3,5=<u>63 cm^3</u>=<u>6,3 cL</u>.

3.



Ci-dessus un patron du prisme droit.

Exercice 39

1. Une fois montée, la tente rappelle un prisme droit à base triangulaire.

2.a. Le schéma de gauche donne les dimensions de la face latérale du prisme droit, en contact avec le sol.
b. L'unité de longueur sous-entendue est le cm.

3. La hauteur de la tente ne correspond pas à la hauteur du solide mathématique ;
- la hauteur de la tente est : <u>100 cm</u> ;
- la hauteur du solide mathématique est : <u>210 cm</u>.

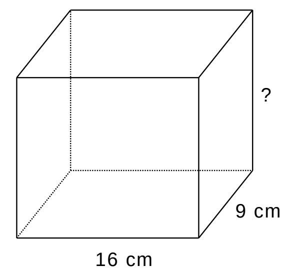
4. • (130×100)÷2=♥ donne l'aire d'une base du prisme droit ;

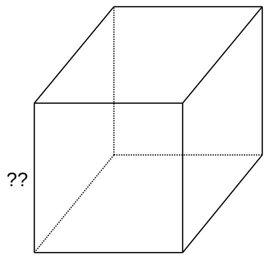
• (2×120)×210=♠ donne l'aire des faces latérales qui ne sont pas en contact avec le sol ;

• ♠+(130×210)=♣ donne l'aire latérale du prisme droit ;

• 210×♥=♦ donne le volume du prisme droit.

Exercice 40





Si dans un pavé droit :
- deux côtés mesurent 16 cm et 9 cm,
- la longueur totale des arêtes est égale à 156 cm,

alors la longueur du 3e côté de ce pavé droit est :

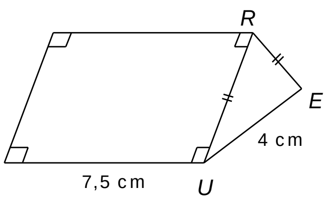
$?=\dfrac{156-4\times16-4\times9}{4}=\dfrac{156-64-36}{4}=\dfrac{56}{4}=\underline{14\text{ cm}}$.

Si dans un cube la longueur totale des arêtes est égale à 156 cm, alors la longueur du côté de ce cube est :

$??=\dfrac{156}{12}=\underline{13\text{ cm}}$.

Donc le pavé droit est le solide le plus haut.

Exercice 41



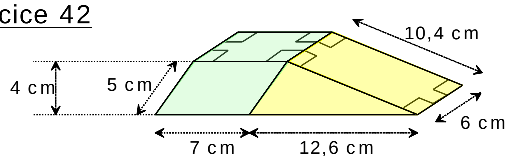
Si l'aire latérale du prisme droit ci-contre est égale à 120 cm², alors le périmètre du triangle *RUE* est :

$\dfrac{120}{7{,}5}=16$ cm ;

RUE est un triangle isocèle en *R*, donc :

$RU=RE=\dfrac{16-4}{2}=\underline{6\text{ cm}}$.

Exercice 42



1. Aire latérale du prisme droit vert (de bases les parallélogrammes dont les côtés mesurent 5 cm et 7 cm) :
5×6+7×6+5×6+7×6=<u>144 cm²</u>.

2. Aire latérale du prisme droit jaune (de bases les triangles dont les côtés mesurent 5 cm, 12,6 cm et 10,4 cm) :
5×6+12,6×6+10,4×6=<u>168 cm²</u>.

3. Aire latérale du nouveau prisme droit :
5×6+7×6+10,4×6+12,6×6+7×6=<u>252 cm²</u>.

Observations : la donnée d'une hauteur (4 cm) de la base du prisme droit vert n'est d'aucune utilité ; quant à l'aire latérale du nouveau prisme, elle n'est pas égale à la somme des aires des deux autres.

Exercice 43

1. L'aire latérale d'un prisme droit de hauteur 6 cm, dont une base a pour périmètre 14 cm, est : 14×6=<u>84 cm²</u>.
2. Si un prisme droit, de hauteur 10 cm, a une aire latérale de 156 cm² et si chacune de ses bases est un triangle équilatéral, alors la longueur d'un côté de ce triangle est : (156÷10)÷3=<u>5,2 cm</u>.

Exercice 44

Un prisme droit, à base carrée de côté 5 cm, a pour aire totale 170 cm².

1. Aire latérale de ce prisme : 170-2×5×5=<u>120 cm²</u> ;
hauteur de ce prisme : 120÷(4×5)=<u>6 cm</u>.

2. Volume de ce prisme : 5×5×6=150 cm^3.

Commentaire : ce prisme droit est un pavé droit.

Exercice 45

Un prisme droit, à base carrée de côté 4 cm, a pour volume 80 cm^3.

1. Hauteur de ce prisme : 80÷(4×4)=<u>5 cm</u>.

2. Aire latérale de ce prisme : 5×(4×4)=<u>80 cm²</u> ;
Aire totale : 80+2×4×4=<u>112 cm²</u>.

Commentaire : ce prisme droit est un pavé droit.

Exercice 46

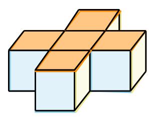
Un prisme droit a pour volume 168 cm^3.
Sa hauteur est de 7 cm ; l'une de ses bases est un triangle *EFG*, rectangle en *E* et tel que *EG*=4 cm.

Aire de *EFG* : 168÷7=24 cm.

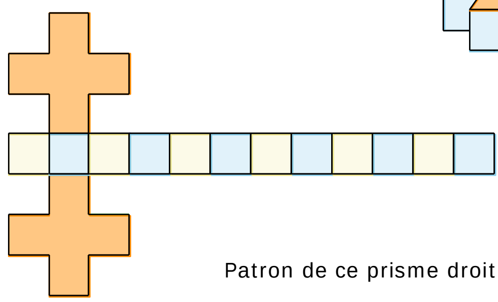
Si *EF*= ?? alors $\dfrac{4\times ??}{2}=24$; donc $EF=\dfrac{24\times2}{4}=\underline{12\text{ cm}}$.

Exercice 47

Le prisme droit ci-contre est constitué de 5 cubes de 1,5 cm d'arête.



1.



Patron de ce prisme droit.

2. Aire latérale de ce prisme droit : 12×1,5×1,5=<u>27 cm²</u>.

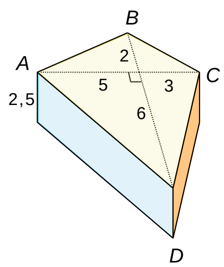
3. Volume de ce prisme droit : 5×1,5×1,5×1,5=<u>16,875cm^3</u>.

Exercice 48

Aire d'une base de ce prisme droit :

$\dfrac{2\times5}{2}+\dfrac{2\times3}{2}+\dfrac{6\times5}{2}+\dfrac{6\times3}{2}=32$ cm².

Volume de ce prisme droit :
32×2,5=<u>80 cm^3</u>.



Exercice 49

Volume du prisme droit : 30×30×12=10 800 mm^3 ;

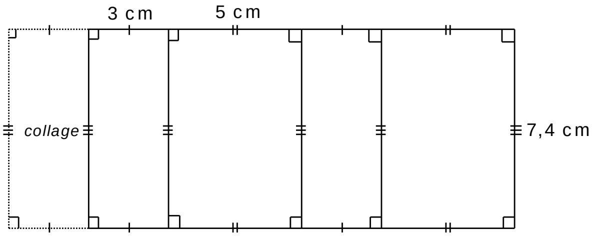
volume du cylindre : π×15×15×12= 8 478 mm^3 ;

donc volume du solide : 19 278 mm^3.

Activités d'intégration

Exercice 50 (Fabriquer des boîtes d'allumettes)

1. Patron de l'étui :



2. Tiroir

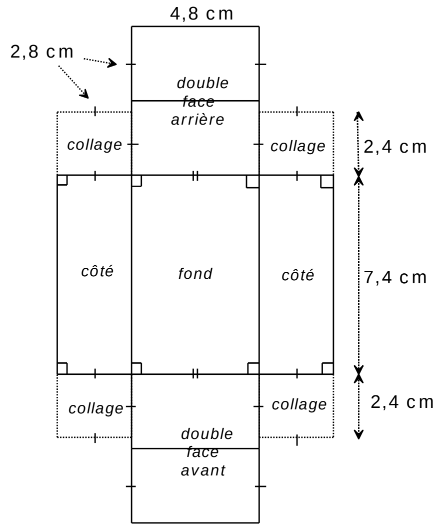
a. Dimensions :

face avant : 5-0,1-0,1=4,8 cm sur 3-0,2=2,8 cm ;

fond : 7.4 cm sur 5-0,1-0,1=4,8 cm ;

côté : 7,4 cm sur 3-0,2=2,8 cm.

b. Patron :



Exercice 51 (Des cubes et des boîtes)

1. Aire totale de la boîte de dimensions 16cm×15cm×7cm : 2×16×15+2×16×7+2×15×7=914 cm² ;
aire totale de la boîte de dimensions 12cm×12cm×10cm : 2×12×12+2×12×10+2×12×10=768 cm² ;
c'est la première boîte qui nécessitera, pour être recouverte de papier décoratif, la plus grande surface de papier.

2. Volume de la boîte de dimensions 16cm×15cm×7cm : 16×15×7=1 680 cm^3 ;
volume de la boîte de dimensions 12cm×12cm×10cm : 12×12×10=1 440 cm^3 ;
c'est la première boîte qui a la plus grande contenance.

3. Dans la boîte de dimensions 16cm×15cm×7cm, Yene pourra ranger : 8×7×3=168 cubes de 2 cm de côté ;
dans la boîte de dimensions 12cm×12cm×10cm, Yene pourra ranger : 6×6×5=180 cubes de 2 cm de côté ;
c'est la seconde boîte qui permettra à Yene de ranger tous ses cubes.

Exercice 52 (Les beaux vases)

1. Ayant la même hauteur *h*, le vase qui a la plus grande contenance est celui dont la base a la plus grande aire ;
aire de la base carrée du vase "pavé droit" : 12×12=144 cm² ;
aire de la base triangulaire de l'autre vase : $\frac{16 \times 16}{2}=128$ cm² ;
donc Tella doit acheter le vase "pavé droit".

2. 3,6 L=3 600 cm^3, donc la hauteur *h* du vase acheté est : $\frac{3\ 600}{144}=25$ cm.