CARGO

Collection de Mathématiques

4^e

Guide pédagogique

ISBN : 978-2-7531-0461-7

1 *Triangle rectangle : propriétés métriques*

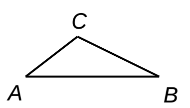
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Triangle rectangle [1 p 9]			
2, 3	Propriété de Pythagore [2 p 9]	12, 13, 14, 15, 16, 17	37, 38, 39, 40	44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52
	Apprendre à calculer une longueur dans un triangle rectangle, à l'aide de la propriété de Pythagore [1 p …]	**1, 2, 3, 4, 5**		
4, 5				
6	Propriété réciproque de Pythagore [3 p 9]	18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36	41, 42, 43	53, 54
	Apprendre à justifier qu'un triangle est rectangle ou pas [2 p …]	**6, 7, 8, 9, 10, 11**		
7	Relation métrique déduite de l'aire d'un triangle rectangle [4 p 9]	25, 26, 27		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

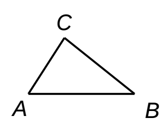
Activités de découverte

Pour démarrer **Construire deux murs perpendiculaires**

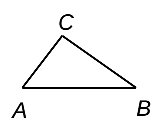
1. Représentation des trois triangles *ABC* à l'échelle $\frac{1}{10}$



CA=9 cm, *CB*=12 cm
AB=18 cm



CA=9 cm, *CB*=12 cm
AB=14 cm

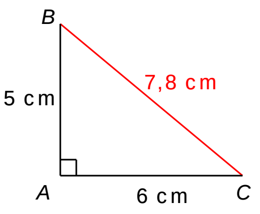


CA=9 cm, *CB*=12 cm
AB=15 cm

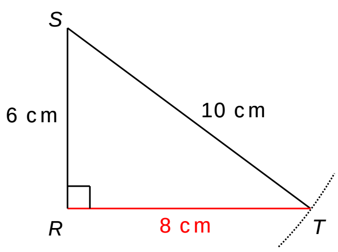
2. La longueur pour laquelle les deux murs semblent être perpendiculaires entre eux est : 1,5 m.

1 **Longueurs dans un triangle rectangle**

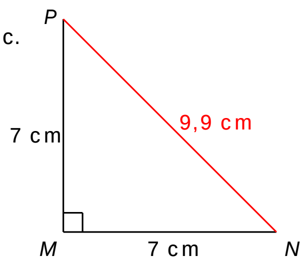
1.a.



b.



c.



2. Dans le triangle *ABC*, rectangle en *A*, tel que *AB*=5 cm et *AC*=6 cm, la longueur inconnue est *BC*≈7,8 cm ;
BC est le plus grand côté.

Dans le triangle *RST*, rectangle en *R*, tel que *RS*=6 cm et *ST*=10 cm, la longueur inconnue est *TR*=8 cm ;
ST est le plus grand côté.

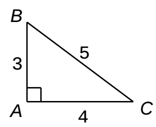
Dans le triangle *MNP*, rectangle et isocèle en *M*, tel que *MN*=7 cm, la longueur inconnue est *NP*≈9,9 cm ;
NP est le plus grand côté.

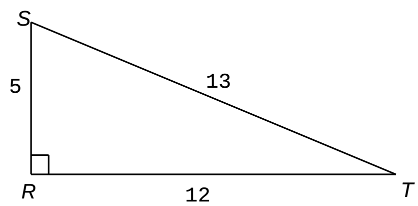
3. *Si un triangle est rectangle, alors le plus grand côté est opposé à l'angle droit.*

2 **Propriété de Pythagore : expérimentation**

1. Dans le triangle *ABC* rectangle en *A* avec *AB*=3 cm et *AC*=4 cm :
BC=5 cm ; $AB^2+AC^2 = BC^2 = 25$.

2. Dans le triangle *RST* rectangle en *R* avec *RS*=5 cm et *RT*=12 cm :
ST=13 cm ; $RS^2+RT^2 = ST^2 = 169$.





3 **Propriété de Pythagore : démonstration**

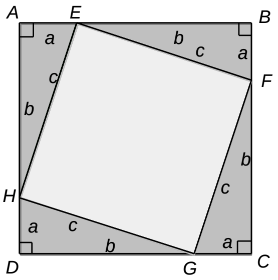


figure 1

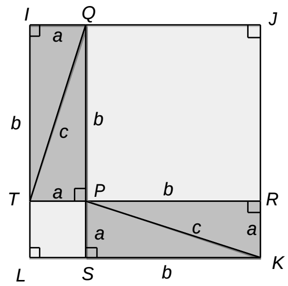


figure 2

1. **Figure 1** :

a. *EFGH*, quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur *c*, est un losange.

b. Dans le triangle *AEH*, rectangle en *A*, les angles $\widehat{AEH}$ et $\widehat{AHE}$ sont complémentaires ;

dans les triangles *AEH* et *BFE* superposables, mes $\widehat{AHE}$ = mes $\widehat{BEF}$;

finalement les angles $\widehat{AEH}$ et $\widehat{BEF}$ sont complémentaires.

c. On en déduit que : mes $\widehat{HEF}$ = mes $\widehat{AEB}$ - (mes $\widehat{AEH}$ + mes $\widehat{BEF}$) = 180 - 90 = 90° ;
le losange *EFGH*, qui a un angle droit, est en fait un carré.

d. Aire du carré *EFGH* : $\underline{c^2}$.

2. **Figure 2** :

a. Les quadrilatères *PQJR* et *PSLT*, ayant chacun quatre angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur, sont des carrés.

b. Aire du carré *PQJR* : $\underline{b^2}$; aire du carré *PSLT* : $\underline{a^2}$.

3.a. Les carrés *ABCD* et *IJKL*, superposables, ont la même aire ; les quatre triangles rectangles de la figure 1 et les quatre triangles rectangles de la figure 2, superposables, ont la même aire.

Or : aire(*EFGH*) = aire(*ABCD*) - 4 × aire(*AEH*) et aire(*PQJR*) + aire(*PSLT*) = aire(*IJKL*) - 4 × aire(*IQT*) ;
on en déduit que : aire(*EFGH*) = aire(*PQJR*) + aire(*PSLT*).

b. L'égalité précédente peut s'écrire : $\underline{c^2 = a^2 + b^2}$.

c. Propriété de Pythagore : *si un triangle est rectangle, alors le carré de <u>la longueur de son plus grand côté</u> est égal à la somme des carrés des <u>longueurs des deux autres côtés</u>*.

4 **Des carrés à connaître (rappels)**

1.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n^2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

2.a. $10^2 = 100$, $100^2 = 10\ 000$, $1\ 000^2 = 1\ 000\ 000$.

b. $140^2 = (14 \times 10)^2 = 14^2 \times 10^2 = 196 \times 100 = 19\ 600$.

c. $300^2 = (3 \times 100)^2 = 3^2 \times 100^2 = 9 \times 10\ 000 = 90\ 000$;
$2\ 000^2 = (2 \times 1\ 000)^2 = 2^2 \times 1\ 000^2 = 4 \times 1\ 000\ 000 = 4\ 000\ 000$.

3.a. $0{,}1^2 = 0{,}01$; $0{,}01^2 = 0{,}000\ 1$; $0{,}001^2 = 0{,}000\ 001$.

b. $0{,}7^2 = (7 \times 0{,}1)^2 = 7^2 \times 0{,}1^2 = 49 \times 0{,}01 = 0{,}49$;

$0{,}13^2 = (13 \times 0{,}01)^2 = 13^2 \times 0{,}01^2 = 169 \times 0{,}000\ 1 = 0{,}016\ 9$;

$0{,}004^2 = (4 \times 0{,}001)^2 = 4^2 \times 0{,}001^2 = 16 \times 0{,}000\ 001 = 0{,}000\ 016$.

5 **Découvrir les touches** $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **ou** $\frac{\sqrt{\ }}{x^2}$ **des calculatrices**

Partie A

1. Les longueurs des côtés des carrés d'aire 36 m², 81 cm² et 0,25 dm² sont respectivement 6 m, 9 cm et 0,5 dm.

2.a. Il n'est pas facile de donner (de tête) la longueur du côté d'un carré d'aire 60,84 cm².
b. Avec une calculatrice, on obtient : 7,8 cm.
c. De plus : $7{,}8^2 = 60{,}84$.
d. On en déduit que la longueur du côté d'un carré d'aire 60,84 cm² est égale à 7,8 cm.

Partie B Un carré a pour aire 71 cm².

1. La longueur du côté de ce carré est comprise entre 8 cm et 9 cm, puisque $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$.

2. Avec une calculatrice, on obtient : 8,426 149 773 ;
Oloa et Noah ont raison :
- le côté du carré ne peut pas mesurer exactement 8,426 149 883 cm, car le carré de ce nombre se termine par 9 ;
- une valeur approchée, au millimètre prés, de la longueur du côté de ce carré est 8,4 cm.

6 **Propriété réciproque de Pythagore**

1.

Numéro du triangle	Longueur du plus grand côté *a*	Longueurs des deux autres côtés *b* et *c*		a^2	b^2+c^2	Le triangle semble-t-il rectangle ? Oui ou non
1	50	30	40	2 500	2 500	Oui
2	24	10	20	576	500	Non
3	39	15	36	1 521	1 521	Oui
4	30	20	20	900	800	Non
5	50	14	48	2 500	2 500	Oui
6	27	24	14	729	772	Non

2.a. Lorsque le triangle semble rectangle, on constate que : $a^2=b^2+c^2$.

b. Lorsque le triangle ne semble pas rectangle, on constate que : $a^2\neq b^2+c^2$.

c. Conjecture (admise) : *si dans un triangle le carré du <u>plus grand côté</u> est égal à la somme des carrés des <u>deux autres côtés</u>, alors ce triangle est <u>rectangle au sommet opposé au plus grand côté</u>.*

7 **Autre relation métrique et triangle rectangle**

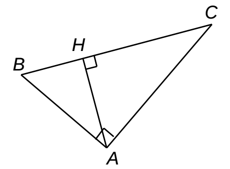
1. Formule permettant de calculer l'aire d'un triangle quelconque : (longueur d'un côté × la hauteur associée) ÷ 2.

2. S'agissant d'un triangle *ABC* rectangle en *A*, dont *H* est le pied de la hauteur issue de *A* :

a. la hauteur associée au côté [*AB*] de ce triangle étant *AC*, son aire est : $\dfrac{AB \times AC}{2}$;

b. la hauteur associée au côté [*BC*] de ce triangle étant *AH* ; son aire est : $\dfrac{BC \times AH}{2}$;

c. on en déduit que : $AB \times AC = BC \times AH$.



Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à calculer une longueur dans un triangle rectangle à l'aide de la propriété de Pythagore

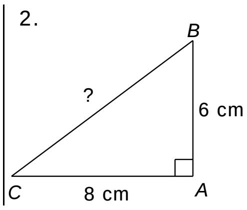
Exercice 1

1.
a. L'hypoténuse du triangle *ABC*, rectangle en *A*, est [*BC*].

b. D'après la propriété de Pythagore, on a : $BC^2=AB^2+AC^2$.

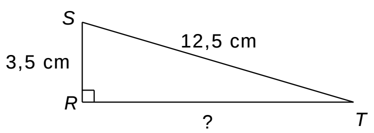
c. On a donc $BC^2=6^2+8^2=100=10^2$; c'est-à-dire : $BC=$<u>10 cm</u>.

2.



Exercice 2

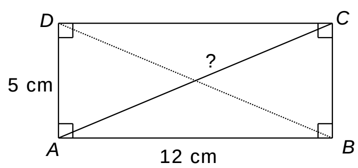
1.



2. L'hypoténuse du triangle *RST*, rectangle en *R*, est [*ST*].
D'après la propriété de Pythagore, on a : $ST^2=RS^2+RT^2$.
On a donc : $RT^2=ST^2-RS^2=12{,}5^2-3{,}5^2=144=12^2$;
c'est-à-dire : $RT=$<u>12 cm</u>.

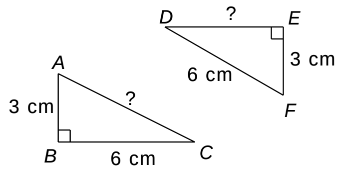
Exercice 3

1.



2. Dans le rectangle *ABCD*, $AC=BD$.
Or [*BD*] est l'hypoténuse du triangle *ABD*, rectangle en *A*.
Donc, d'après la propriété de Pythagore, on a :
$BD^2=AB^2+AD^2=12^2+5^2=169=13^2$.
On obtient : $AC=13$ cm.

Exercice 4



D'après la propriété de Pythagore, on a :

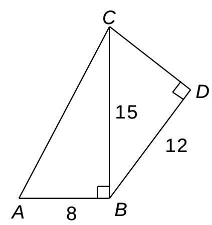
● dans le triangle *ABC*, rectangle en *B*,
$AC^2=AB^2+BC^2=45$ donc $AC=\sqrt{45}\approx$ <u>6,7 cm</u> ;

●dans le triangle *DEF*, rectangle en *E*,
$DE^2=DF^2-EF^2=27$ donc $DE=\sqrt{27}\approx$ <u>5,2 cm</u>.

Exercice 5

1. Le triangle *ABC* est rectangle en *B*, donc, d'après la propriété de Pythagore, on a : $AC^2=BA^2+BC^2$, c'est-à-dire : $AC^2=8^2+15^2=289$;
on obtient : $AC=\sqrt{289}=$<u>17</u>.

2.a. Le triangle *BCD* est rectangle en *D*, donc, d'après la propriété de Pythagore, on a : $BC^2=DB^2+DC^2$, c'est-à-dire : $CD^2=15^2-12^2=81$;
on obtient : $CD=\sqrt{81}=$<u>9</u>.



b. Périmètre de la figure : 8+12+9+17=<u>46 cm</u>.

3.a. Aire(*ABC*) : $\dfrac{8\times 15}{2}=60$ cm² ; aire(*BCD*) : $\dfrac{9\times 12}{2}=54$ cm².

b. Aire de la figure : 60+54=<u>114 cm²</u>.

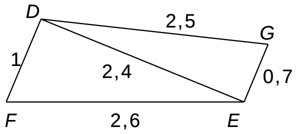
2 Apprendre à justifier qu'un triangle est rectangle ou pas

Exercice 6

a. $AC^2 = 25^2 = 625$; $AB^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$.
On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *ABC* est rectangle en *B*.

b. $BC^2 = 50^2 = 2\,500$; $AB^2 + AC^2 = 14^2 + 48^2 = 196 + 2\,304 = 2\,500$.
On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *ABC* est rectangle en *A*.

Exercice 7



1.
$DE^2 + DF^2 = 2{,}4^2 + 1^2 = 6{,}76$;
$EF^2 = 2{,}6^2 = 6{,}76$;
on a : $EF^2 = DE^2 + DF^2$;
donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *DEF* est rectangle en *D*.

$DE^2 + EG^2 = 2{,}4^2 + 0{,}7^2 = 6{,}25$; $DG^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$;
on a : $DG^2 = DE^2 + EG^2$;
donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *DEG* est rectangle en *E*.

2. Les droites (*DF*) et (*GE*), perpendiculaires à la même droite (*DE*), sont parallèles entre elles.

Exercice 8

$SA^2 + AB^2 = 1{,}2^2 + 0{,}9^2 = 2{,}25$; $SB^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$;
On a : $SB^2 = SA^2 + AB^2$;
donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *SAB* est rectangle en *A*. ; c'est-à-dire que le piquet [*AS*] est perpendiculaire à la droite (*AB*).

Exercice 9

a. $MN^2 = 15^2 = 225$; $NP^2 + MP^2 = 10^2 + 11^2 = 100 + 121 = 221$.
On a : $MN^2 \neq NP^2 + MP^2$; [*MN*] étant le plus grand côté du triangle *MNP*, ce triangle n'est pas rectangle.

b. $MP^2 = 13^2 = 169$; $MN^2 + NP^2 = 11^2 + 7^2 = 121 + 49 = 170$.
On a : $MP^2 \neq MN^2 + NP^2$; [*MP*] étant le plus grand côté du triangle *MNP*, ce triangle n'est pas rectangle.

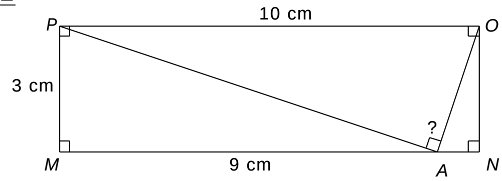
Exercice 10

$AB^2 = 17^2 = 289$; $CA^2 + CB^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$.
On a : $AB^2 \neq CA^2 + CB^2$; [*AB*] étant le plus grand côté du triangle *ABC*, ce triangle n'est pas rectangle.

$EG^2 = 40^2 = 1\,600$; $FE^2 + FG^2 = 23^2 + 33^2 = 529 + 1\,089 = 1\,618$.
On a : $EG^2 \neq FE^2 + FG^2$; [*EG*] étant le plus grand côté du triangle *EFG*, ce triangle n'est pas rectangle.

Exercice 11

1.a.



b. Le triangle *OPA* semble rectangle en *A*.

2.a. $OA^2 = NO^2 + NA^2 = 3^2 + 1^2 = 10$; $PA^2 = MP^2 + MA^2 = 3^2 + 9^2 = 90$.
b. Constat : $AO^2 + AP^2 = 100 = OP^2$; d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *OPA* est bien rectangle en *A*.

Activités d'application

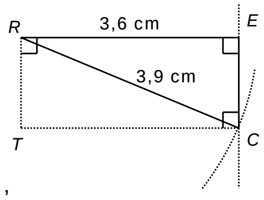
Calculs dans un triangle rectangle

Exercice 12

1. *ABC* est un triangle rectangle en *A* tel que :
$AB=8$ cm et $BC=17$ cm.
D'après la propriété de Pythagore :
$AC^2=17^2-8^2=289-64=225$; donc $AC=\sqrt{225}=\underline{15\text{ cm}}$.

2. *OMN* est un triangle rectangle en *M* tel que :
$OM=20$ cm et $MN=21$ cm.
D'après la propriété de Pythagore :
$ON^2=20^2+21^2=400+441=841$; donc $ON=\sqrt{841}=\underline{29\text{ cm}}$.

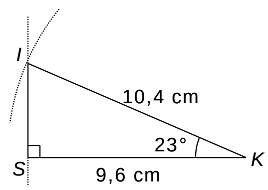
Exercice 13



1. Construction du rectangle *RECT*, tel que $RE=3{,}6$ cm et $RC=3{,}9$ cm :
● trace un segment [*RE*] tel que $RE=3{,}6$ cm ;
● *C* est l'un des points d'intersection du cercle de centre *R*, de rayon 3,9 cm, et de la droite perpendiculaire en *E* à (*RE*) ;
● *T* est le point d'intersection de la droite perpendiculaire en *C* à (*CE*) et de la droite perpendiculaire en *R* à (*RE*).

2. $EC^2=RC^2-RE^2=3{,}9^2-3{,}6^2=15{,}21-12{,}96=2{,}25$;
donc : $EC=\sqrt{2{,}25}=\underline{1{,}5\text{ cm}}$.
On en déduit que le périmètre du rectangle *RECT* est :
$3{,}6\times2+1{,}5\times2=\underline{10{,}2\text{ cm}}$.

Exercice 14

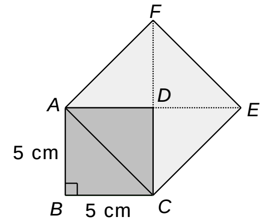


Construction du triangle *SKI*, rectangle en *S*, tel que $SK=9{,}6$ cm et $KI=10{,}4$ cm :
● trace un segment [*SK*] tel que $SK=9{,}6$ cm ;
● *I* est l'un des points d'intersection du cercle de centre *K*, de rayon 10,4 cm, et de la droite perpendiculaire en *S* à (*SK*).

2. $SI^2=KI^2-SK^2=10{,}4^2-9{,}6^2=108{,}16-92{,}16=16$;
donc : $SI=\sqrt{16}=\underline{4\text{ cm}}$.

3. Si mes $\widehat{SKI}=23°$, alors mes $\widehat{SIK}=180-90-23=\underline{67°}$.

Exercice 15



1. Aire($ABCD$) $=AB^2=5^2=\underline{25\text{ cm}^2}$.

2. *Preuve « géométrique »* :
aire($ACEF$) $=4\times$aire(ACD)
$=2\times$aire($ABCD$).

Preuve « numérique » :
d'après la propriété de Pythagore, dans le triangle *ABC*, rectangle en *B*,
$AC^2=5^2+5^2=50$;
donc : aire($ACEF$) $=AC^2=50\text{ cm}^2=2\times$aire($ABCD$).

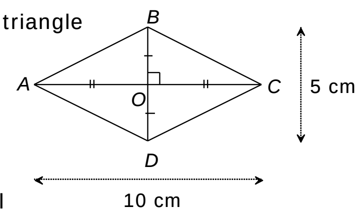
Exercice 16

Dans le triangle *ABC*, rectangle en *A* avec $AB=2$ cm et $AC=19$ cm, on a :
$BC^2=2^2+19^2=4+361=365$.

Dans le triangle *NOP*, rectangle en *N* avec $NO=13$ cm et $NP=14$ cm, on a :
$OP^2=13^2+14^2=169+196=365$.

Donc ces deux triangles rectangles ont des hypoténuses [*BC*] et [*OP*] de même longueur.

Exercice 17



ABCD est un losange. Dans le triangle *AOB*, rectangle en *O*,
$AB^2=AO^2+OB^2=5^2+2{,}5^2$
$=25+6{,}25=31{,}25$;

donc : $AB=\sqrt{31{,}25}\approx\underline{5{,}6\text{ cm}}$.

Le périmètre de *ABCD* est égal (au millimètre près) à : $4\times5{,}6\approx\underline{22{,}4\text{ cm}}$.

Nature d'un triangle

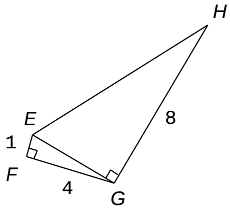
Exercice 18

EFGH est un rectangle tel que : $EF = 13$ cm et $FG = 8$ cm.

1. Longueur de ses diagonales : $EG = \sqrt{13^2 + 8^2} \approx$ 15,3 cm.

2. Longueur de son cercle circonscrit : $\pi \times EG \approx$ 48 cm.

Exercice 19

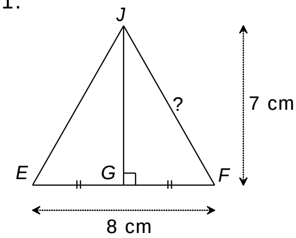


1. D'après la propriété de Pythagore,
$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 1^2 + 4^2 = 17$.

2. On en déduit, d'après la propriété de Pythagore, que :
$EH^2 = EG^2 + GH^2 = 17 + 64 = 81$;
donc : $EH = \sqrt{81} = 9$ cm.

Exercice 20

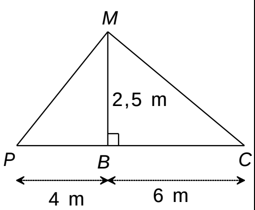
1.



2. Le triangle *EFJ* n'est pas équilatéral ; en effet, d'après la propriété de Pythagore, on a :

$$JF = \sqrt{GF^2 + GJ^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \neq 8 \text{ cm.}$$

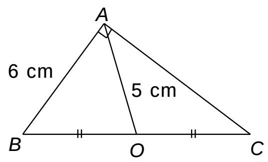
Exercice 21



Hauteur de l'arbre : $PM + MC$;
d'après la propriété de Pythagore,

$$PM + MC = \sqrt{4^2 + 2{,}5^2} + \sqrt{6^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{22{,}25} + \sqrt{42{,}25} \approx 4{,}7 + 6{,}5 \approx 11{,}2 \text{ m.}$$

Exercice 22



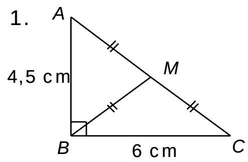
1. Dans le triangle *ABC*, la droite (*AO*), qui passe par le milieu *O* de [*BC*], est la médiane issue de *A*.

2. Le cercle circonscrit au triangle *ABC*, rectangle en *A*, a :
- pour centre *O*, milieu de l'hypoténuse [*BC*] ;
- pour rayon $OA = OB = OC = 5$ cm.

On en déduit que :
- $BC = 10$ cm ;
- $AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm.

Exercice 23

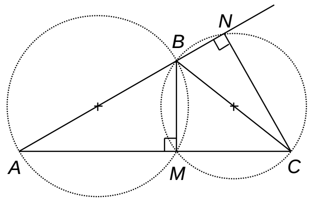
1.



2. Si *M* est le milieu de l'hypoténuse [*AC*] du triangle *ABC*, rectangle en *A*, alors le cercle circonscrit à *ABC* a pour centre *M* et $MA = MC = MB = \frac{AC}{2}$.

Or, d'après la propriété de Pythagore, on a :
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ cm.
Donc : $BM = 3{,}75$ cm.

Exercice 24



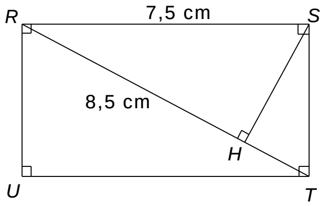
1. Le triangle *ABC* est tel que :
$AB = 4$ cm,
$AC = 6$ cm,
$BC = 3{,}2$ cm.

2. Le point *M*, tel que $M \in (AC)$ et $MA^2 + MB^2 = AB^2$, est (d'après la réciproque de la propriété de Pythagore) rectangle en *M* ; *M* est donc le second point d'intersection de la droite (*AC*) avec le cercle de diamètre [*AB*].

Le point *N*, tel que $M \in (AB)$ et $NC^2 + NB^2 = CB^2$, est (d'après la réciproque de la propriété de Pythagore) rectangle en *N* ; *N* est donc le second point d'intersection de la droite (*AB*) avec le cercle de diamètre [*BC*]

Relation métrique déduite de l'aire d'un triangle

Exercice 25

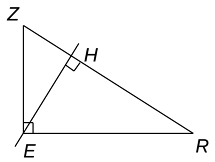


1. D'après la propriété de Pythagore :
$ST = \sqrt{8{,}5^2 - 7{,}5^2} = 4$ cm.

2. Dans le triangle *RST*, rectangle en *S*, on a :
$SR \times ST = RT \times SH$;

donc : $SH = \frac{7{,}5 \times 4}{8{,}5} = \frac{30}{8{,}5} \approx 3{,}5$ cm.

Exercice 26



1.a. *ZER* est un triangle rectangle en *E*.

b. Pour ce triangle la droite (*EH*) est la hauteur issue de *E*.

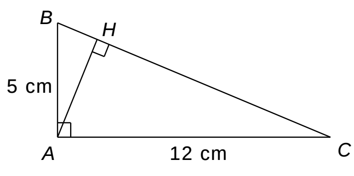
c. On a : $EZ \times ER = RZ \times EH$.

2. On donne : $EZ = 15$ cm, $ZR = 25$ cm et $EH = 12$ cm.

a. $ER = \frac{RZ \times EH}{EZ} = \frac{25 \times 12}{15} = 20$ cm.

b. $ER = \sqrt{ZR^2 - EZ^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ cm.

Exercice 27



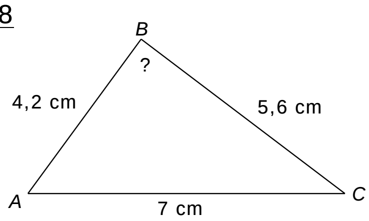
1. $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.

2. $AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$ cm.

Etude de triangles

Exercice 28

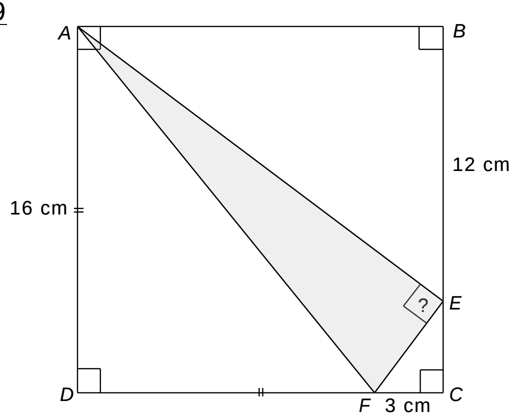
1.



2. $AB^2 + BC^2 = 4,2^2 + 5,6^2 = 17,64 + 31,36 = 49$;
$AC^2 = 7^2 = 49$;
donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, *ABC* est un triangle rectangle en *B*.

3. Périmètre de *ABC* : <u>16,8 cm</u> ;
aire de *ABC* : $\dfrac{4,2 \times 5,6}{2} = \underline{11,76\ \text{cm}^2}$.

Exercice 29

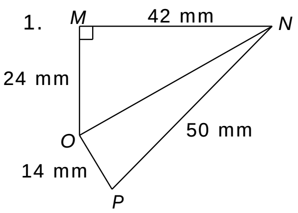


1. $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = \underline{400}$;
$EF^2 = EC^2 + CF^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = \underline{25}$;
$AF^2 = AD^2 + DF^2 = 16^2 + 13^2 = 256 + 169 = \underline{425}$.

2. On a : $AF^2 = AE^2 + EF^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *AEF* est rectangle en *E*.

Exercice 30

1.



2. D'après la propriété de Pythagore : $ON^2 = OM^2 + MN^2$
$= 24^2 + 42^2$
$= 2\,340$;
donc : $ON = \sqrt{2\,340} \approx 48,4$ cm
et [*PM*] est le plus grand côté du triangle *ONP*.

Comme $ON^2 + OP^2 = 14^2 + 2\,340 = 2\,536 \neq PN^2$,
on peut dire que *PON* n'est pas un triangle rectangle.

Exercice 31

Un triangle *ABC* tel que *AB* = 3 mm = 0,3 cm, *BC* = 4 cm et *CA* = 5 cm, qui n'existe pas (inégalité triangulaire non vérifiée : 5 > 4 + 0,3), ne peut pas être rectangle.

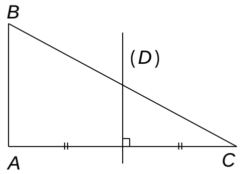
Exercice 32

1. Si *AB* = 1 dm = 10 cm, *AC* = 24 cm et *BC* = 26 cm, alors [*BC*] est le plus grand côté du triangle *ABC* ;
de plus : $BC^2 = 26^2 = 676$,
$AB^2 + AC^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$;
donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et *ABC* est un triangle <u>rectangle en *A*</u>.

2. Si *AB* = 1,5 m = 15 dm, *AC* = 170 cm = 17 dm et *BC* = 8 dm, alors [*AC*] est le plus grand côté du triangle *ABC* ;
de plus : $AC^2 = 17^2 = 289$,
$BA^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$;
donc $AC^2 = BA^2 + BC^2$ et *ABC* est un triangle <u>rectangle en *B*</u>.

Exercice 33

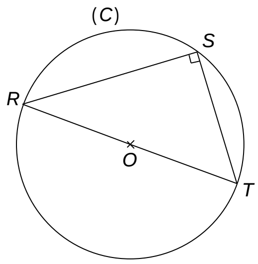
1.



2. Si *ABC* est tel que *AB* = 3,2 cm, *AC* = 6 cm, *BC* = 6,8 cm, alors :
$BC^2 = 6,8^2 = 46,24$;
$AB^2 + AC^2 = 3,2^2 + 6^2 = 46,24$.

Donc ce triangle est rectangle en *A* et la médiatrice (*D*) du segment [*AC*] est parallèle à la droite (*AB*).

Exercice 34

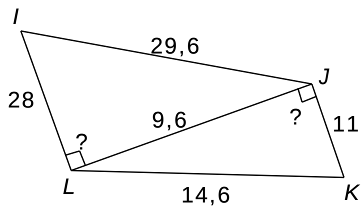


1.a. Le segment [*RT*] est un diamètre du cercle (*C*), circonscrit au triangle *RST*.

b. On en déduit que ce triangle est rectangle en *S*.

2. Si *ST* = 3,6 cm et *RT* = 6 cm, alors
$RS = \sqrt{RT^2 - ST^2} = \sqrt{6^2 - 3,6^2}$
$= \sqrt{23,04} = 4,8$ cm.

Exercice 35

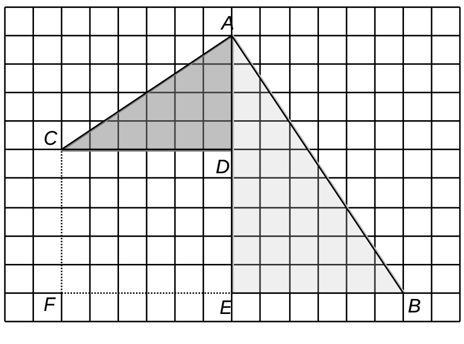


$28^2 + 9,6^2 = 876,16$ et $29,6^2 = 876,16$;
donc, d'après la propriété de Pythagore, le triangle *ILK* est rectangle en *L*.

$11^2 + 9,6^2 = 213,16$ et $14,6^2 = 213,16$;
donc, d'après la propriété de Pythagore, le triangle *KJL* est rectangle en *J*.

On en déduit que les droites (*IL*) et (*JK*), perpendiculaires à la même droite (*LJ*), sont parallèles.

Exercice 36



1.a. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle *BCF*, rectangle en *F*, on a :
$BC^2 = FB^2 + FC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$;
donc : $BC = \sqrt{169} = \underline{13}$.

b. $AC^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = \underline{52}$; $AB^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = \underline{117}$.

2. On a : $BC^2 = AC^2 + AB^2$; donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *ABC* est rectangle en *A*, c'est-à-dire : $(AB) \perp (AC)$.

Bien comprendre, mieux rédiger

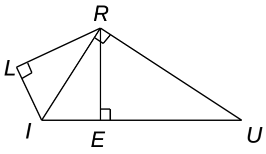
Exercice 37 **Repérer les hypoténuses**

Dans le triangle *LIR*, rectangle en *L*, on a : $IR^2=LI^2+LR^2$.

Dans le triangle *RIU*, rectangle en *R*, on a : $IU^2=RI^2+RU^2$.

Dans le triangle *EIR*, rectangle en *E*, on a : $IR^2=EI^2+ER^2$.

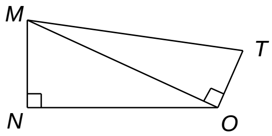
Dans le triangle *ERU*, rectangle en *E*, on a : $RU^2=ER^2+EU^2$.



Exercice 38 **Différentes bonnes réponses**

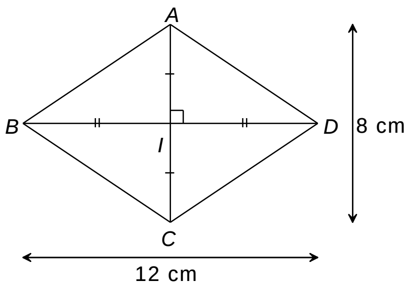
a. $MO^2=MN^2+NO^2$;

b. $MO^2=MT^2-TO^2$.



Exercice 39 **Suivre un modèle de rédaction**

1. Il est demandé de calculer le périmètre du losange *ABCD*, de centre *I* et tel que :
- $AC=8$ cm,
- $BD=12$ cm.



2. Solution :

« *ABCD est un losange, donc :*
- *ses diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires en I. Par conséquent, le triangle ABI est rectangle en I.*
- *ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu I, d'où :*

$IA=\dfrac{AC}{2}=4$ *cm et* $IB=\dfrac{BD}{2}$ 6 *cm.* »

3.a. D'après la propriété de Pythagore,

$$AB=\sqrt{IA^2+IB^2}=\sqrt{52}.$$

b. Donc le périmètre de *ABCD* est : $4\sqrt{52}\approx 28{,}8$ cm.

Exercice 40 **Avant de calculer**

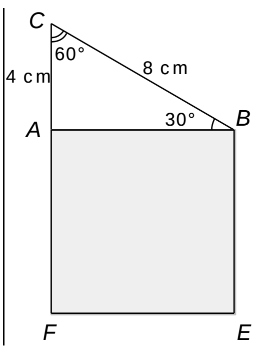
mes $\widehat{BAC}=180-(30+60)=90°$;

ABC est donc un triangle rectangle en *A*, d'hypoténuse [*BC*].

L'aire du carré *ABEF* est égale à AB^2 ; or, d'après la propriété de Pythagore :

$AB^2=BC^2-AC^2=64-16=48$.

Donc : aire(*ABEF*) = 48 cm².



Exercice 41 **Repérer les bons côtés**

Correction du travail de Denis :

$AC^2-AB^2=25^2-7^2=625-49=576$.

$BC^2=24^2=576$.

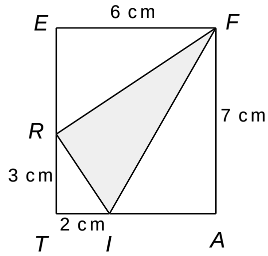
Je constate que $AC^2-AB^2=BC^2$.

Donc, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, *ABC* est un triangle rectangle en *B*.

Exercice 25 **Suivre les conseils du professeur**

Question

Le triangle *RIF* est-il rectangle ?



Solution

RTI est un triangle rectangle en *T* ;
donc, d'après la propriété de Pythagore,
$RI^2=RT^2+TI^2=3^2+2^2$
$RI^2=9+4=13$.

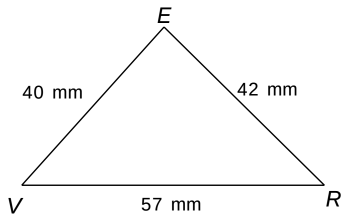
REF est un triangle rectangle en *E* ;
donc, d'après la propriété de Pythagore,
$RF^2=RE^2+EF^2=4^2+6^2$
$RF^2=16+36=52$.

IAF est un triangle rectangle en *A* ;
donc, d'après la propriété de Pythagore,
$IF^2=IA^2+AF^2=4^2+7^2$
$IF^2=16+49=65$.

[*IF*] est le plus grand côté du triangle *RIF* ;
$IF^2=65$ et $RI^2+RF^2=13+52=65$;
donc $IF^2=RI^2+RF^2$ et, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *RIF* est rectangle en *R*.

Exercice 26 **Ne pas se contenter d'une figure**

1.a.

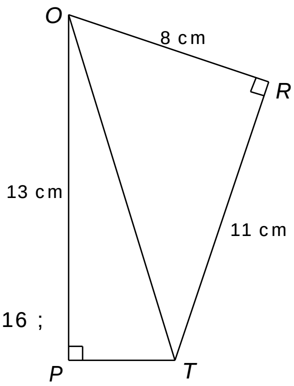


b. Le triangle *VER* semble effectivement rectangle en *E*.

2. En réalité *VER* n'est pas un triangle rectangle, car (*d'après la réciproque de la propriété de Pythagore*) le carré de la longueur de son plus grand côté ($57^2=3\,249$) est *différent* de la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés ($40^2+42^2=1\,600+1\,764=3\,364$).

Exercices d'approfondissement

Exercice 44 La même hypoténuse



1. D'après la propriété de Pythagore, dans les deux triangles *POT* et *ROT*, rectangles respectivement en *P* et *R*, on a :

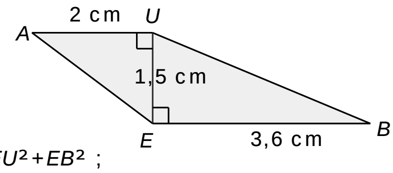
$OT^2=RO^2+RT^2$ et $OT^2=PO^2+PT^2$,

$OT^2=8^2+11^2$ et $OT^2=13^2+PT^2$,

$OT^2=185$ et $OT^2=169+PT^2$.

2. On en déduit que : $PT^2=185-169=16$; c'est-à-dire : $PT=$ 4 cm.

Exercice 45 Périmètre et aire d'un trapèze



D'après la propriété de Pythagore, dans les deux triangles *AUE* et *UEB*, rectangles respectivement en *U* et *E*, on a :

$AE^2=UA^2+UE^2$ et $UB^2=EU^2+EB^2$;

$AE^2=2^2+1{,}5^2$ et $UB^2=1{,}5^2+3{,}6^2$;

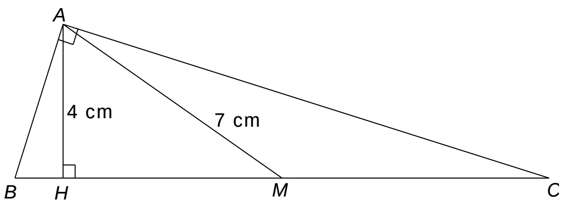
$AE^2=6{,}25$ et $UB^2=15{,}21$.

Donc : $AE=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$ et $UB=\sqrt{15{,}21}=3{,}9$.

1. Périmètre du trapèze : $2+2{,}5+3{,}6+3{,}9=$ 12 cm.

2. Aire du trapèze : $\dfrac{2\times 1{,}5}{2}+\dfrac{1{,}5\times 3{,}6}{2}=1{,}5+2{,}7=$ 4,2 cm².

Exercice 46 Calculs en cascade



1. Dans le triangle *ABC*, rectangle en *A*, le milieu *M* de l'hypoténuse [*BC*] est le centre de son cercle circonscrit ; donc $MA=MB=MC$ et $BC=14$ cm.

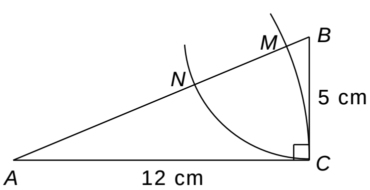
2. $HM=\sqrt{AM^2-AH^2}=\sqrt{49-16}=\sqrt{33}\approx$ 5,7 cm ;

$BH=BM-HM\approx 7-\sqrt{33}\approx$ 1,3 cm ;

$AB=\sqrt{BH^2+AH^2}\approx\sqrt{1{,}3^2+4^2}\approx\sqrt{17{,}69}\approx$ 4,2 cm ;

$AC=\sqrt{CH^2+AH^2}\approx\sqrt{12{,}7^2+4^2}\approx\sqrt{177{,}29}\approx$ 13,4 cm.

Exercice 47 Par soustraction



Dans le triangle *ABC*, rectangle en *C*, on a :

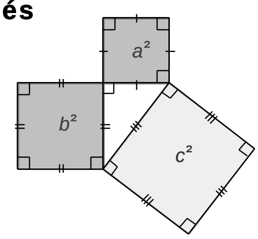
$AB=\sqrt{12^2+5^2}$

$=\sqrt{169}=13$ cm.

On en déduit que : $BM=13-12=$ 1 cm et $AN=13-5=$ 8 cm ;

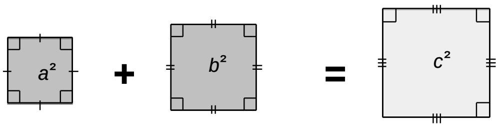
donc : $MN=13-1-8=$ 4 cm.

Exercice 48 Un défi de carrés

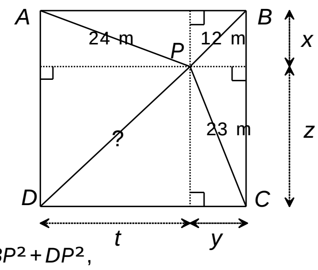


En construisant un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont *a* et *b*, l'hypoténuse de ce triangle est *c* tel que $c^2=a^2+b^2$ (propriété de Pythagore).

C'est-à-dire que la somme des aires des deux carrés, de côtés *a* et *b*, est égale à l'aire du carré de côté *c*.



Exercice 49 Pythagore puissance 4

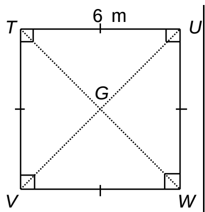


1. D'après la propriété de Pythagore :

- $AP^2=x^2+t^2$ et $CP^2=y^2+z^2$, donc : $AP^2+CP^2=x^2+y^2+z^2+t^2$;
- $BP^2=x^2+y^2$ et $DP^2=z^2+t^2$, donc : $BP^2+DP^2=x^2+y^2+z^2+t^2$.

2. On en déduit que : $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$,
c'est-à-dire : $DP^2=AP^2+CP^2-BP^2=24^2+23^2-12^2$
$=576+529-144=961$,
donc : $DP=\sqrt{961}=$ 31 m.

Exercice 51 Une demi-diagonale



La longueur minimale de la laisse, pour que le chien atteigne sa gamelle, doit être égale à *TG*.
Or, dans le triangle *TVW*, rectangle en *V*, $TW=\sqrt{TV^2+VW^2}=\sqrt{72}$ cm.

Donc : $TG=\dfrac{TW}{2}\approx 4{,}2$ m (au dm près).

Exercice 51
Les lunules d'Hippocrate (400 avant J.-C.)

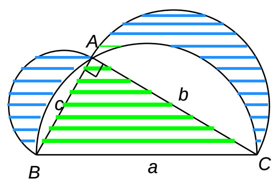
1. Aire d'un demi-disque de diamètre *d* :

$$\frac{1}{2}\times\pi\times\frac{d}{2}\times\frac{d}{2}=\frac{\pi\, d^2}{8}$$

2.a. Aire totale de la figure :

$\dfrac{b\,c}{2}+\dfrac{\pi\, b^2}{8}+\dfrac{\pi\, c^2}{8}$.

b. Aire du demi disque de diamètre [*BC*] : $\dfrac{\pi\, a^2}{8}$.



c. L'aire totale des lunules (en bleu) étant la différence entre l'aire totale de la figure et l'aire du demi-disque de diamètre [*BC*], cette aire est égale à :

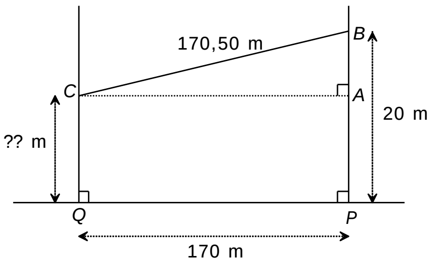
$$\frac{b\,c}{2}+\frac{\pi\, b^2}{8}+\frac{\pi\, c^2}{8}-\frac{\pi\, a^2}{8}=\frac{b\,c}{2}+\frac{\pi}{8}\left(b^2+c^2-a^2\right)=\frac{b\,c}{2},$$

(car, d'après la propriété de Pythagore pour le triangle *ABC* rectangle en *A*, on a : $a^2=b^2+c^2$) ; c'est-à-dire que l'aire des lunules est égale à l'aire du triangle.

Activités d'intégration

Exercice 52 Les tyroliennes

Schéma illustratif de la situation :



P et Q sont les pieds des deux arbres plantés perpendiculairement à un sol horizontal (*d'où les angles droits en P et Q*).

La distance entre les deux arbres est $PQ = 170$ m (que l'on retrouve en AC).

La tyrolienne, de longueur 170,50 m, est fixée :
- en B sur le premier arbre, à 20 m du sol ;
- en C sur le second arbre.

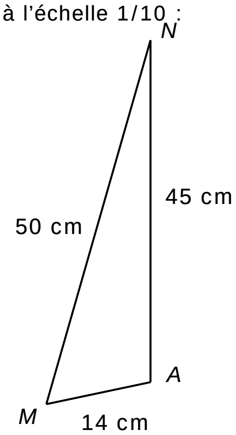
D'après la propriété de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en A,

on a : $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{170{,}5^2 - 170^2} = \sqrt{170{,}25} \approx 13$ m.

On en déduit que le point de fixation de la tyrolienne, sur le second arbre, est à : $20 - 13 \approx$ <u>7 m</u> du sol.

Exercice 55 Une étagère ensorcelée

1.a. Schéma du triangle AMN à l'échelle 1/10 :



b. Le triangle AMN n'est pas rectangle car :

[MN] est son plus grand côté,

$MN^2 = 50^2 = 2\,500$,

$AM^2 + AN^2 = 14^2 + 45^2$
$= 196 + 2\,025$
$= 2\,221$,

d'après les calculs ci-dessus : $MN^2 \neq AM^2 + AN^2$.

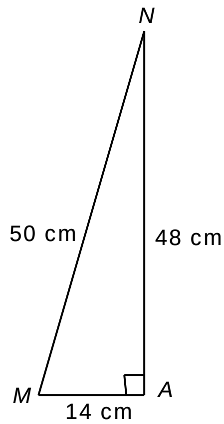
c. L'étagère n'étant pas horizontale, les stylos posés dessus roulent et tombent au sol !

2.a. Pour empêcher les stylos de rouler, il faut « relever » le point N :

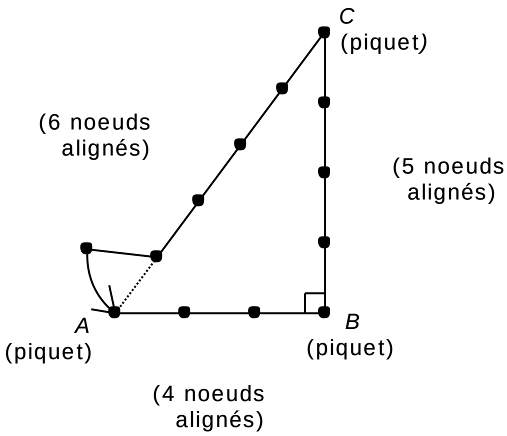
- de façon que l'étagère soit horizontale ;
- c'est-à-dire de façon que le triangle AMN soit rectangle en A.

b. Pour cela, il faut que :
$AN^2 = MN^2 - AM^2$
$= 50^2 - 14^2$
$= 2\,500 - 196$
$= 2\,304$;

c'est-à-dire :
$AN = \sqrt{2\,304} =$ <u>48 cm</u>.



Exercice 52 La méthode égyptienne



1. Pour obtenir un triangle rectangle, avec une corde à 13 nœuds (les distances entre deux nœuds consécutifs étant toutes égales) :

aligner (à l'aide de trois piquets en A, B et C) 4, 5 et 6 nœuds (13 nœuds en tout) de façon à ce que le premier nœud et le dernier nœud de la corde soient au même piquet (A par exemple).

2. Dans la situation décrite ci-dessus et d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

2 *Distance et cercles*

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Distance d'un point à une droite [1 p 20]	13, 14, 15, 16, 17, 18	39, 44	45, 46, 48, 53
	Apprendre à calculer la distance d'un point à une droite [1 p 22]	**1, 2, 3, 4, 5**		
2	Positions relatives d'une droite et d'un cercle [2 p 20]	20	42	
	Tangente à un cercle [3 p 20]	19, 21, 22, 23, 24, 25	38, 41, 43, 44	47, 49, 51
	Apprendre à construire des tangentes à un cercle [2 p 23]	**6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**		48
3	Distance entre deux droites parallèles [4 p 21]			
4, 5	Bissectrice et égalité de distances [5 p 21]	28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37	40, 44	50, 52, 53

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer **Champ de vision**

1. La portée du champ de vision de l'observateur est de : $2,6 \times 200 = 520$ m.

2. Si l'observateur se tourne :

a. il verra l'éléphant, situé à $2,5 \times 200 = 500$ m ;

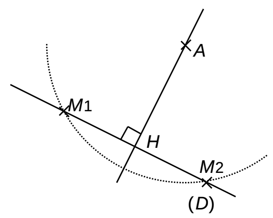
b. il verra la girafe, située à $2,6 \times 200 = 520$ m ;

c. il ne verra pas la gazelle, située à $2,8 \times 200 = 560$ m.

3. En effectuant un tour sur lui-même, la figure géométrique illustrant l'ensemble du champ de vision de l'observateur est un disque (centré en l'observateur, de rayon 2,5 cm).

1 **Distance d'un point à une droite**

Observation

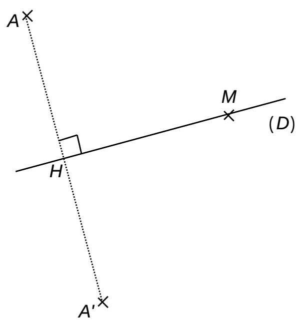


1. Le cercle de centre A, passant par M_1, recoupe la droite (D) en un deuxième point M_2 tel que $AM_2 = AM_1$.

2. H, point d'intersection de (D) et de la droite qui passe par A et est perpendiculaire à (D), semble être plus proche de A que tous les autres points de (D).

Démonstration

1.



2.a. Les points A, H et A' sont alignés sur la droite passant par A et perpendiculaire à (D), donc $AA' = AH + HA'$;

A' et H sont les symétriques respectifs de A et H par rapport à (D),
donc le segment [$A'H$] est le symétrique du segment [AH] par rapport à (D),
donc : $AH = HA'$;

d'après l'inégalité triangulaire, on a : $AA' \leq AM + MA'$;

A' et M sont les symétriques respectifs de A et M par rapport à (D),
donc le segment [$A'M$] est le symétrique du segment [AM] par rapport à (D),
donc : $AM = MA'$;

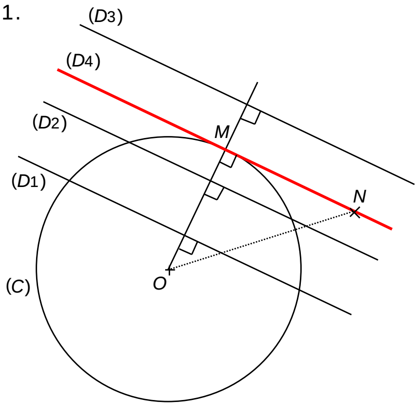
finalement : $AA' = AH + HA' = 2AH$, $AM + MA' = 2AM$ et $2AH \leq 2AM$.

b. Lorsque M appartient à (D) et est distinct de H, les points A, M et A' ne sont pas alignés ; d'après l'inégalité triangulaire, on a : $AA' < AM + MA'$, $2AH < 2AM$ et $AH < AM$.

Propriété *Si H est le pied de la perpendiculaire à la droite (D) passant par A, alors ce point H est le point de la droite (D) le plus proche de A.*

2 **Positions d'une droite et d'un cercle**

1.



$M \in (\mathcal{C})$.

2. Le cercle ($\mathcal{C}$) et la droite (D_1) ont 2 points communs ;
Le cercle ($\mathcal{C}$) et la droite (D_2) ont 2 points communs ;
Le cercle ($\mathcal{C}$) et la droite (D_3) n'ont pas de point commun.

Observation d'une position particulière

a. (D_4) est la droite perpendiculaire à (OM) en M.
b. Le cercle ($\mathcal{C}$) et la droite (D_4) semblent n'avoir qu'un seul point commun : M.

Démonstration

a. N est un point de la droite (D_4), distinct du point M ; dans le triangle OMN, rectangle en M, l'hypoténuse est le plus grand côté ; donc : $OM<ON$.
b. OM étant égal au rayon de ($\mathcal{C}$), ON est strictement supérieur à ce rayon et $N \notin (\mathcal{C})$.
c. Finalement le cercle ($\mathcal{C}$) et la droite (D_4) n'ont effectivement qu'un seul point en commun : M.

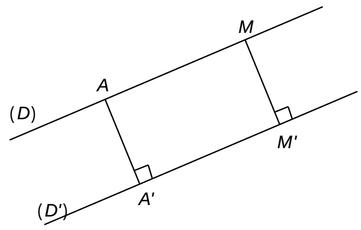
Vocabulaire : on dit que (D_4) est <u>la tangente au cercle ($\mathcal{C}$) au point M</u>.

3 **Distance et droites parallèles**

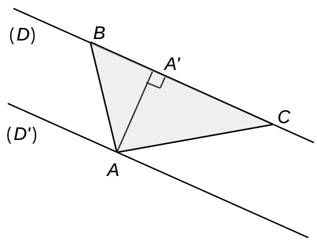
1.a. Les droites (AA') et (MM'), perpendiculaires à la même droite (D'), sont parallèles entre elles.

b. Le quadrilatère $AA'MM'$, dont les supports des côtés opposés sont parallèles, est un parallélogramme ; le parallélogramme $AA'MM'$, qui a un angle droit (en A' ou en M') est un rectangle.

c. Les côtés opposés [AA'] et [MM'] du rectangle $AA'MM'$, qui sont perpendiculaires à la droites (D'), ont la même longueur ;
donc la distance du point M à la droite (D') est toujours égale à AA' ;
c'est-à-dire que la distance du point M à la droite (D') ne dépend pas de la position de M sur (D) ; on l'appelle : *distance entre les droites* (D) *et* (D').



2.



a. La distance AA' entre les droites parallèles (D) et (D') représente la hauteur relative au côté [BC] du triangle ABC.

b. Aire du triangle ABC : $\dfrac{AA' \times BC}{2}$.

c. Si l'aire du triangle ABC est égale à 8 cm² et BC=5 cm,

alors : $AA' = \dfrac{2 \times 8}{5}$ = <u>3,2 cm</u>.

4 **De la bissectrice à l'équidistance [propriété directe]**

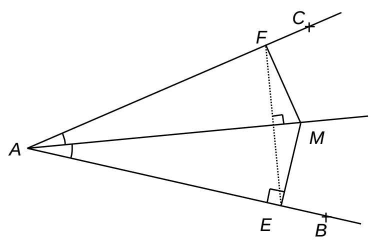
2.a. L'axe de symétrie de l'angle $\widehat{BAC}$ est la bissectrice (AM) de cet angle.

b. Le point E appartient à la droite (AB) donc le point F, symétrique de E par rapport à (AM), appartient à la droite (AC) symétrique de (AB) par rapport à (AM).

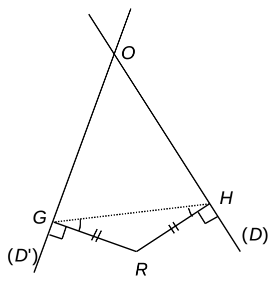
c. Deux angles symétriques par rapport à une droite ont la même mesure ;
(AB) et (AC) sont symétriques par rapport à (AM), (ME) et (MF) sont symétriques par rapport à (AM) ; comme (ME)⊥(AB) alors <u>(MF)⊥(AC)</u> ;

Deux segments symétriques par rapport à une droite ont la même longueur ;
E et F sont symétriques par rapport à (AM), $M \in (AM)$ donc M est son propre symétrique par rapport à (AM) et <u>$ME=MF$</u>.

Propriété *Si un point <u>appartient</u> à la bissectrice d'un <u>angle</u>, alors ce point est à égale <u>distance</u> des supports des <u>côtés</u> de cet angle.*



5 **De l'équidistance à la bissectrice [propriété réciproque]**



Dans la figure ci-contre, le point R est situé à égale distance des droites (D) et (D') ; c'est-à-dire, puisque (RH)⊥(D) et (RG)⊥(D'), $RH=RG$.

1.a. Le triangle RHG est isocèle en R, donc les angles $\widehat{RHG}$ et $\widehat{RGH}$ ont la même mesure.

b. Mes $\widehat{OHG}$=90-mes $\widehat{RHG}$, mes $\widehat{OGH}$=90-mes $\widehat{RGH}$; donc : mes $\widehat{OHG}$=mes $\widehat{OGH}$.

c. Finalement le triangle OHG est isocèle en O.

3.a. D'après ce qui précède, $RH=RG$ et $OH=OG$; donc la droite (OR) est la médiatrice de [GH].
b. Dans le triangle OHG, isocèle en O, la médiatrice de la base [GH] est aussi la bissectrice de l'angle principal $\widehat{GOH}$.

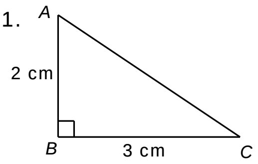
Propriété *Si un point est à égale <u>distance</u> des supports des côtés d'un angle, alors ce point appartient à la <u>bissectrice</u> de cet angle.*

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à Calculer la distance d'un point à une droite

Exercice 1

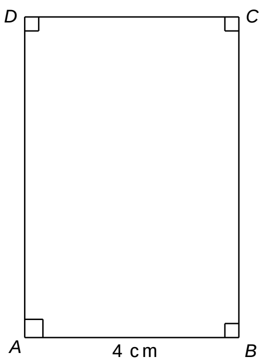
1.



2. La distance du point A à la droite (BC) est : $AB = 2$ cm.

3. La distance du point C à la droite (AB) est : $BC = 3$ cm.

Exercice 2



1. La distance du point A à la droite (BC) est : $AB = 4$ cm.

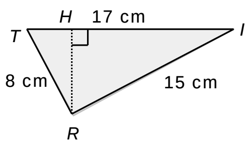
2. Si le périmètre de ce rectangle est égal à 20 cm, alors : $2 \times 4 + 2 \times AD = 20$ cm ;

donc : $AD = \dfrac{20 - 2 \times 4}{2} = 6$ cm.

a. La distance du point D à la droite (AB) est : $DA = 6$ cm.

La distance du point C à la droite (AB) est : $CB = 6$ cm.

Exercice 3



1. TIR est un triangle rectangle en R car : $TI^2 = 17^2 = 289$, $RT^2 + RI^2 = 8^2 + 15^2 = 289$.

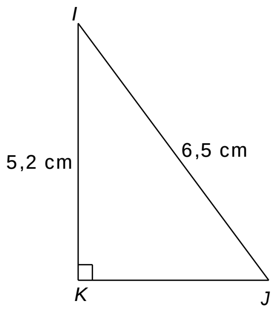
2. La distance du point I à la droite (TR) est : $IR = 15$ cm.

3. La distance du point R à la droite (TI) est égale à la hauteur issue du sommet de l'angle droit : RH ;

or $RT \times RI = TI \times RH$, donc $RH = \dfrac{RT \times RI}{TI} = \dfrac{15 \times 8}{17} \approx$ <u>7,1 cm</u>.

Exercice 4

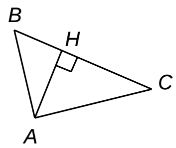
1.



2. La distance du point I à la droite (JK) est : $IK = 52$ mm.

3. La distance du point J à la droite (IK) est égale à la longueur du côté $[JK]$ de l'angle droit ;
Or, d'après la propriété de Pythagore dans le triangle IJK rectangle en K, on a :
$JK^2 = IJ^2 - IK^2 = 6{,}5^2 - 5{,}2^2$
$= 42{,}25 - 27{,}04 = 15{,}21$,
Donc : $JK = \sqrt{15{,}21} =$ <u>3,9 cm</u>.

Exercice 5



$AB = 1{,}5$ cm
$AC = 2$ cm
$BC = 2{,}5$ cm

1. ABC est un triangle rectangle en A car : $BC^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$; $AC^2 + AB^2 = 1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25$.

2.a. Aire de ABC : $\dfrac{AB \times AC}{2} =$ <u>1,5 cm²</u>.

b. L'aire de ABC est aussi : $\dfrac{AH \times BC}{2}$;

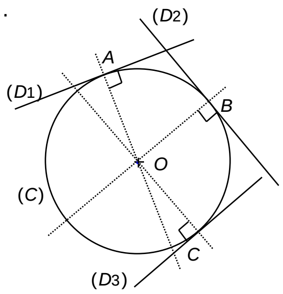
on en déduit que : $AH = \dfrac{2 \times 1{,}5}{2{,}5} =$ <u>1,2 cm</u>.

3. Distance du point C à la droite (AB) : $CA =$ <u>2 cm</u> ;
distance du point B à la droite (AC) : $BA =$ <u>1,5 cm</u> ;
distance du point A à la droite (BC) : $AH =$ <u>1,2 cm</u>.

2 Apprendre à construire des tangentes à un cercle

Exercice 6

1.

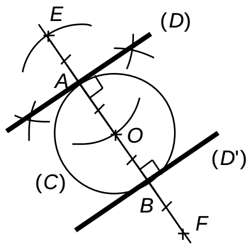


2.

Construction des tangentes (D_1), (D_2) et (D_3) à ($\mathcal{C}$) en *A*, *B* et *C*, à l'aide d'une règle et d'une équerre.

Exercice 7

1.



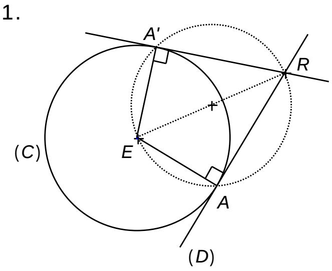
[*AB*] est un diamètre du cercle ($\mathcal{C}$).

2. Construction des tangentes (*D*) et (*D*') à ($\mathcal{C}$) en *A* et *B*, à l'aide d'une règle et d'un compas : si *E* et *F* sont les symétriques de *O* par rapport à *A* et *B*, alors (*D*) et (*D*') sont les médiatrices de [*OE*] et [*OF*].

3. Les droites (*D*) et (*D*'), perpendiculaires en *A* et *B* à la droite (*AB*), sont parallèles entre elles.

Exercice 8

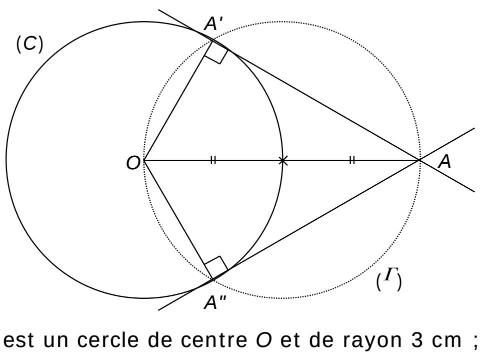
1.



2. Si le cercle de diamètre [*ER*] recoupe ($\mathcal{C}$) au point *A*', la deuxième tangente à ($\mathcal{C}$) qui passe par le point *R* est la droite (*RA*').

Exercice 9

1.

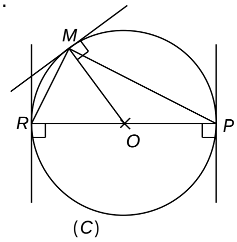


($\mathcal{C}$) est un cercle de centre *O* et de rayon 3 cm ;
OA = 6 cm ;
(Γ) est le cercle de diamètre [*OA*].

2. Si *A*' et *A*'' sont les points d'intersection de ($\mathcal{C}$) et (Γ), alors (*AA*') et (*AA*'') sont les deux tangentes à ($\mathcal{C}$) qui passent par *A*.

Exercice 10

1.

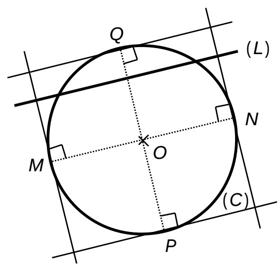


2. Si *O* est le milieu de [*RP*], alors :

- les tangentes à ($\mathcal{C}$) en *R* et *P* sont les droites perpendiculaires à (*RP*) respectivement en *R* et *P* ;
- la tangente à ($\mathcal{C}$) en *M* est la droite perpendiculaire à (*OM*) en *M*.

Exercice 11

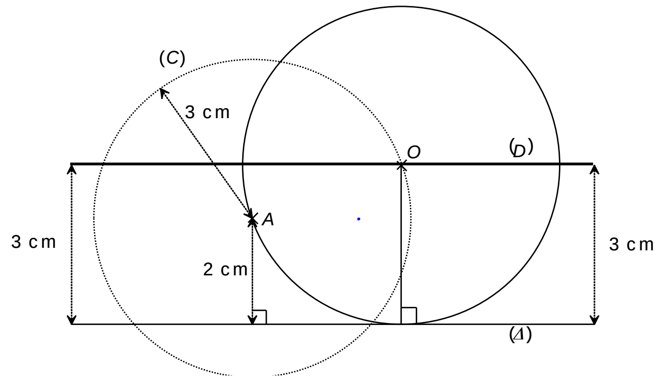
1.



2.a. Si *P* et *Q* sont les points d'intersection de ($\mathcal{C}$) avec la droite passant par *O* et perpendiculaire à (*L*), alors les tangentes à ($\mathcal{C}$) parallèles à la droite (*L*) passent par *P* et *Q* ;

b. si *M* et *N* sont les points d'intersection de ($\mathcal{C}$) avec la droite passant par *O* et parallèle à (*L*), alors les tangentes à ($\mathcal{C}$) perpendiculaires à la droite (*L*) passent par *M* et *N*.

Exercice 12



1. **Données** : une droite (Δ) et un point *A* à 2 cm de (Δ).

2. Pour construire un cercle de centre *O*, de rayon 3 cm, passant par *A* et tangent à (Δ) :

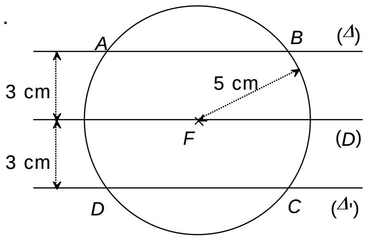
- tracer la droite (*D*) parallèle à (Δ), située du même côté que *A* par rapport à (Δ) et telle que la distance entre (Δ) et (*D*) soit égale à 3 cm ;
- tracer le cercle ($\mathcal{C}$) de centre *A* et de rayon 3 cm ;
- le centre *O* d'un cercle cherché est l'un des deux points d'intersection de (*D*) avec ($\mathcal{C}$).

Activités d’application

Distance d’un point à une droite

Exercice 13

1.

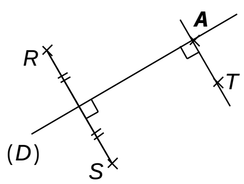


Les points situés à 3 cm de la droite (*D*) sont les points des droites (*Δ*) et (*Δ*’), parallèles à (*D*) et telles que la distance de chacune d’elles à (*D*) soit égale à 3 cm.

2. Les 4 points situés à 3 cm de (*D*) et à 5 cm de *F* sont les points d’intersection de (*Δ*) et (*Δ*’) avec le cercle de centre *F* et de rayon 5 cm.

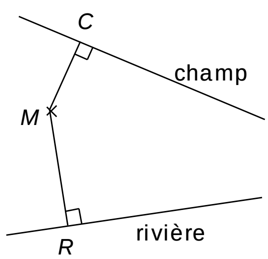
Exercice 14

1.



2. Le point *A* à égale distance de *R* et de *S*, le plus près possible de *T*, est le pied de la perpendiculaire à la médiatrice (*D*) du segment [*RS*] passant par *T*.

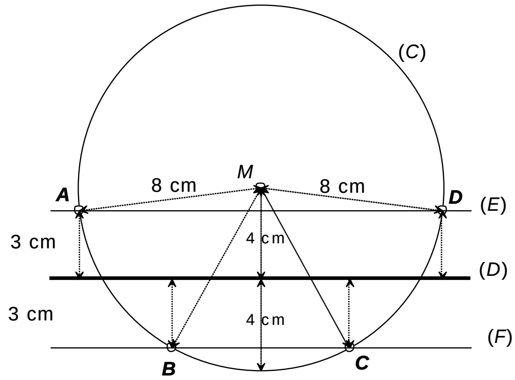
Exercice 15



M désignant la maison, le chemin le plus court allant de la limite du champ au bord de la rivière, en passant par la maison, est *CM* suivi de *MR*, où :

- *C* est le pied de la perpendiculaire à la limite du champ passant par *M* ;
- *R* est le pied de la perpendiculaire à la limite de la rivière passant par *M*.

Exercice 16



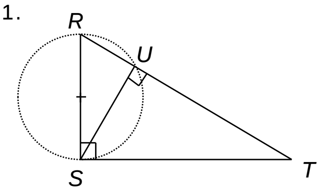
Dans la figure ci-dessus :

- le point *M* est à 4 cm de la droite (*D*) ;
- les droites (*E*) et (*F*) sont parallèles à (*D*) ; la distance entre (*D*) et (*E*) est égale à 3 cm, ainsi que la distance entre (*D*) et (*F*) ; ces deux droites constituent l’ensemble de tous les points situés à 3 cm de (*D*) ;
- (*C*) est le cercle de centre *M* et de rayon 8 cm ; ce cercle est l’ensemble de tous les points situés à 8 cm de *M*.

Finalement les points *A*, *B*, *C* et *D*, intersection des droites (*E*) et (*F*) avec le cercle (*C*), sont les quatre points situés à 8 cm du point *M* et à 3 cm de la droite (*D*).

Exercice 17

1.

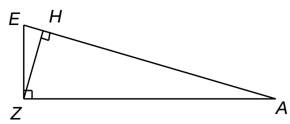


2.a. Le point *U* appartient au cercle de diamètre [*RS*], donc le triangle *RUS* est rectangle en *U*, c’est-à-dire $(SU)\perp(RT)$.

b. La distance du point *S* à la droite (*RT*) est *SU*.

3. L’hypoténuse d’un triangle rectangle étant le plus long de ses côtés, on a : $SU<RS<RT$.

Exercice 18



AZE est un triangle rectangle en *Z* tel que : $AZ=24$ cm.

1. La distance de *A* à la droite (*EZ*) est : $AZ=\underline{24\text{ cm}}$.

2. Aire de $AZE=\dfrac{ZE\times AZ}{2}$,

donc : $\dfrac{ZE\times 24}{2}=84\text{ cm}^2$;

la distance de *E* à la droite (*AZ*) est : $ZE=\dfrac{84\times 2}{24}=\underline{7\text{ cm}}$.

3. $AE^2=ZA^2+ZE^2=24^2+7^2=625$,

donc : $AE=\sqrt{625}=\underline{25\text{ cm}}$;

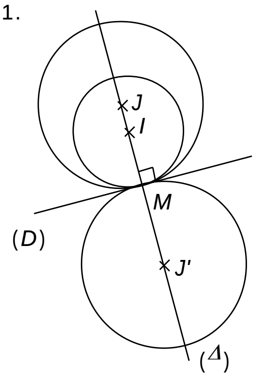
de plus $ZH\times AE=ZA\times ZE$,

donc : $ZH=\dfrac{ZA\times ZE}{AE}=\dfrac{24\times 7}{25}=\underline{6{,}72\text{ cm}}$.

Tangente à un cercle

Exercice 19

1.



$M \in (D)$.

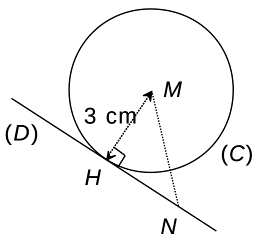
2.a. Le centre d'un cercle passant par *M* et tangent à la droite (*D*) doit être situé sur la droite (Δ), perpendiculaire en *M* à (*D*).

b. Si *I*, *J* et *J'* sont les points de (Δ) tels que $MI = 2$ cm, $MJ = 3$ cm et $MJ' = 3$ cm, alors :

- le cercle de centre *I* passant par *M* est tangent à (*D*) et a pour rayon 2 cm ;
- les cercles de centres *J* et *J'* passant par *M* sont tangents à (*D*) et ont pour rayon 3 cm.

Exercice 20

1.

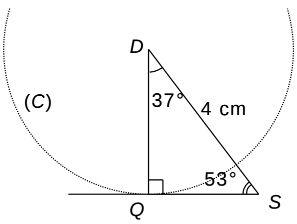


2.a. Le cercle ($\mathcal{C}$), de centre *M* et de rayon 3 cm, est tangent en *H* à la droite (*D*).

b. En effet pour tout point *N*, appartenant à (*D*) et distinct de *H*, on a $MN > 3$ cm ;
donc $N \notin (\mathcal{C})$, c'est-à-dire (*D*) et ($\mathcal{C}$) ont un seul point commun.

Exercice 21

1.



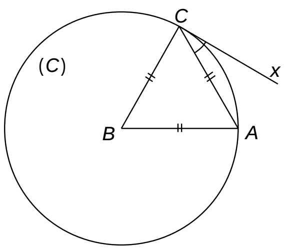
2.a. ($\mathcal{C}$) est le cercle de centre *D* et de rayon *DQ*.

b. La droite (*SQ*) est tangente à ($\mathcal{C}$) en *Q* car :

mes $\widehat{DQS} = 180 - 37 - 53 = 90°$.

Exercice 22

1.



mes $\widehat{ACx} = 30°$.

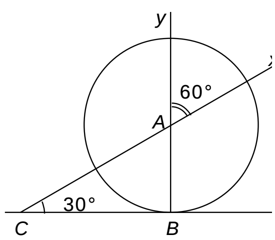
2.a. ($\mathcal{C}$) est le cercle de centre *B* passant par *A*.

b. Dans le triangle équilatéral *ABC* :

- $BC = BA$ donc ($\mathcal{C}$) passe aussi par *C* ;
- mes $\widehat{BAC} = 60°$

donc mes $\widehat{BCx} = 30 + 60 = 90°$, et la droite support de [*Cx*) est tangente en *C* à ($\mathcal{C}$).

Exercice 23



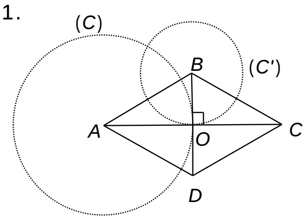
B appartient au cercle ($\mathcal{C}$) de centre *A*.

Mes $\widehat{ABC} = 180 - 60 - 30 = 90°$;

donc la droite (*BC*) est tangente au cercle de centre *A* passant par *B*.

Exercice 24

1.

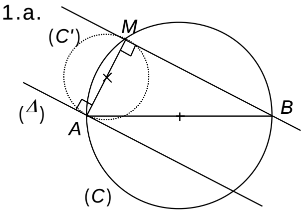


2. Dans le losange *ABCD* les diagonales (*AC*) et (*BD*) sont des droites perpendiculaires en *O*.

On en déduit que la droite (*AC*) est tangente à ($\mathcal{C}'$) en *O* et que la droite (*BD*) est tangente à ($\mathcal{C}$) en *O*.

Exercice 25

1.a.



b. *M* est un point du cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre [*AB*].

c. ($\mathcal{C}'$) est le cercle de diamètre [*AM*].

d. La droite (Δ) est la tangente en *A* à ($\mathcal{C}'$).

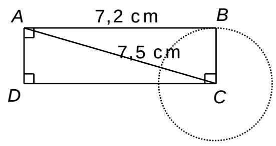
2. $M \in (\mathcal{C})$ donc *MAB* est un triangle rectangle en *M* et $(MB) \perp (AM)$.

(Δ) tangente en *A* au cercle de diamètre [*AM*], donc $(\Delta) \perp (AM)$.

Finalement les droites (Δ) et (*AM*) sont parallèles.

Exercice 26

1.



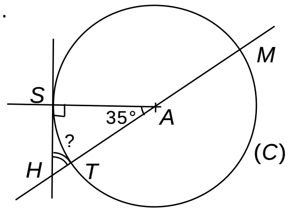
Le quadrilatère *ABCD*, qui a 3 angles droits, est un rectangle ; donc *ABC* est un triangle rectangle en *B*.

2. Le rayon du cercle de centre *C*, tangent à (*AB*), est :

$CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{7{,}5^2 - 7{,}2^2} = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ cm.

Exercice 27

1.



a. [*MT*] est un diamètre du cercle ($\mathcal{C}$) de centre *A*.

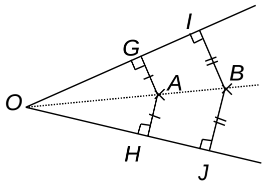
b. *S* est un point de ($\mathcal{C}$) tel que mes $\widehat{TAS} = 35°$.

c. La tangente en *S* à ($\mathcal{C}$) coupe (*MT*) en *H*.

2. Mes $\widehat{AHS} = 180 - 90 - 35 = \underline{55°}$.

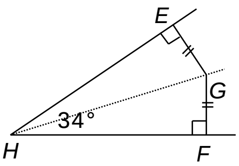
Bissectrice et équidistance

Exercice 28



Les points *A* et *B* étant équidistants des côtés de l'angle en *O*, ils appartiennent à la bissectrice de cet angle ; c'est-à-dire que les points *O*, *A* et *B* sont alignés.

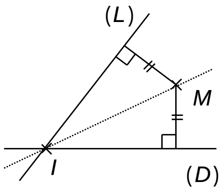
Exercice 29



Le point *G* étant équidistant des côtés de l'angle en *H*, la droite (*HG*) est bissectrice de cet angle ; donc : mes $\widehat{EHG} = 17°$,

mes $\widehat{EGH} = 180 - 90 - 17 = 73°$.

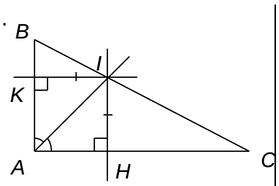
Exercice 30



La droite (*L*), symétrique de la droite (*D*) par rapport à la droite (*IM*), passe par *I* et est telle que *M* soit à égale distance de (*D*) et (*L*).

Exercice 31

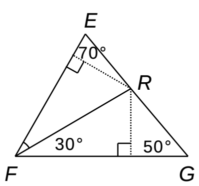
1.



a. *ABC* est un triangle rectangle en *A*.
b. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe [*BC*] en *I*.
c. La parallèle à (*AB*), passant par *I*, coupe (*AC*) en *H*.
d. La parallèle à (*AC*), passant par *I*, coupe (*AB*) en *K*.

2.a. Le quadrilatère *AHIK*, qui a 3 angles droits, est un rectangle.
b. *I* appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc *IK* = *IH* ; le rectangle *AHIK*, qui a deux côtés consécutifs de même longueur, est un carré.

Exercice 32

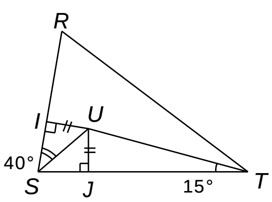


1. Mes $\widehat{EFG} = 180 - 50 - 70 = 60°$;

mes $\widehat{EFR} = 60 - 30 = 30°$.

2. Le point *R*, qui appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{EFG}$, est à égale distance des droites (*FE*) et (*FG*).

Exercice 33



1. Le point *U* étant équidistant des côtés de l'angle $\widehat{RST}$, la droite (*SU*) est bissectrice de cet angle ; donc :

mes $\widehat{USJ}$ = mes $\widehat{USI} = 40°$.

2. Mes $\widehat{IUS} = 180 - 90 - 40 = 50°$,

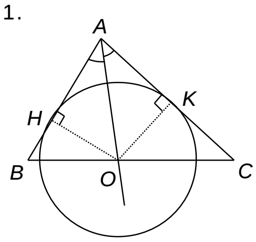
mes $\widehat{SUJ} = 180 - 90 - 40 = 50°$,

mes $\widehat{JUT} = 180 - 90 - 15 = 75°$;

or $50 + 50 + 75 = 175°$; donc les points *T*, *U* et *I* ne sont pas alignés.

Exercice 34

1.

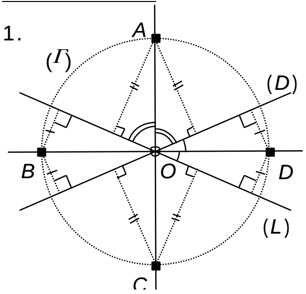


2. Tout cercle tangent aux droites (*AB*) et (*AC*) est centré sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Celui centré sur le segment [*BC*] a pour centre le point d'intersection *O* de cette bissectrice avec [*BC*] ; il passe par les pieds *H* et *K* des perpendiculaires respectives aux droites (*AB*) et (*AC*) passant par *O*.

Exercice 35

1.

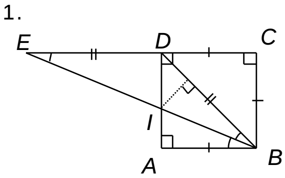


Les droites (*D*) et (*L*) sont sécantes en *O*.

2. Les points situés à 3 cm de *O* et équidistants de (*D*) et (*L*) sont les 4 points d'intersection *A*, *B*, *C* et *D* du cercle (*Γ*), de centre *O* et de rayon 3 cm, avec les deux bissectrices des quatre angles que forment les droites (*D*) et (*L*).

Exercice 36

1.



ABCD est un carré.
DE = *DB*.
I est le point d'intersection de (BE) et (*AD*).

2.a *DEB* est un triangle isocèle en *D*, donc :

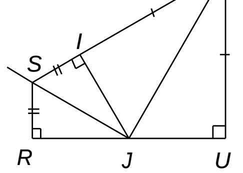
mes $\widehat{DEB}$ = mes $\widehat{EBD}$;

(*ED*)//(*BA*), donc les angles alternes-internes $\widehat{DEB}$ et $\widehat{ABE}$ ont la même mesure.

b. On en déduit que [*BE*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABD}$.

3. *I*∈(*BE*) donc *I* est à égale distance des droites (*AB*) et (*BD*).

Exercice 37



Les points *R*, *J* et *U* sont alignés.

1.a. Le point *S* est équidistant des droites (*JI*) et (*JR*), donc [*JS*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IJR}$.

b. Le point *T* est équidistant des droites (*JI*) et (*JU*), donc [*JT*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IJU}$.

2. On en déduit que :

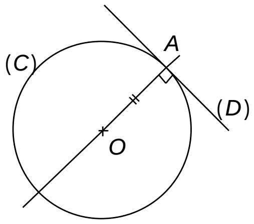
mes $\widehat{SJT} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{RJU} = 90°$;

c'est-à-dire que *SJT* est un triangle rectangle en *J*.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 38 **Droite et cercle**

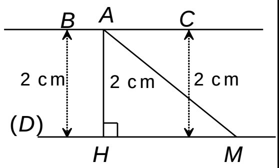
1.



2. La droite (*D*) est tangente en *A* à (*C*).

(*D*) et (*C*) ont un seul point en commun.

Exercice 39 **Distance d'un point à une droite**

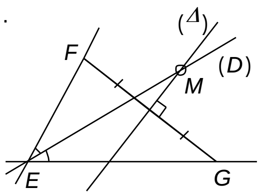


1.a. $AH<AM$.
b. *AH* est la distance du point *A* à la droite (*D*).

2. Si *B* et *C* sont deux autres points situés du même côté que *A* par rapport à (*D*), à 2 cm de (*D*), alors $(BC)//(HM)$ [et $A\in(BC)$].

Exercice 40 **A propos d'équidistance**

1.



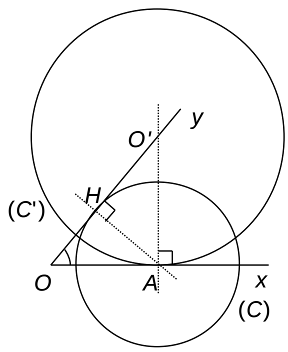
2.a. Les points équidistants des droites (*EF*) et (*EG*) sont sur la bissectrice (*D*) de l'angle en *E*.

b. Les points équidistants des points *F* et *G* sont sur la médiatrice (Δ) du segment [*FG*].

3. Lorsque *EFG* n'est pas isocèle en *E*, (*D*) et (Δ) sont sécantes en un point *M*, qui est à la fois équidistant des droites (*EF*) et (*EG*) et équidistant des points *F* et *G*.

Exercice 41 **Programmes de constructions**

1.



mes $\widehat{xOy}=50°$
$A\in[Ox)$ et $OA=4$ cm

2. Construction du cercle (*C*) de centre *A* et tangent à [*Oy*) :

- tracer la droite passant par *A* et perpendiculaire à[*Oy*), droite qui coupe [*Oy*) en *H* ;

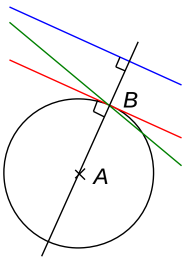
(*C*) est le cercle de centre *A* passant par *H*.

3. Construction du cercle (*C*') centré sur [*Oy*) et tangent en *A* à [*Ox*) :

- tracer la droite passant par *A* et perpendiculaire à [*Ox*), droite qui coupe [*Oy*) en *O*' ;

(*C*') est le cercle de centre *O*' passant par *A*.

Exercice 42 **A la recherche d'erreurs**

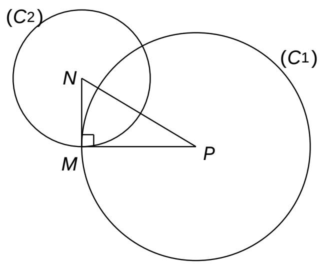


1. La réponse de Léa est fausse car la droite bleue n'a pas de point commun avec le cercle.

2. La réponse de Chloé est fausse car la droite verte a deux points communs avec le cercle.

3. La droite rouge est effectivement une tangente au cercle car cette droite a un seul point commun avec ce cercle.

Exercice 43 **Triangle rectangle et tangentes**



Le triangle *MNP*, rectangle en *M*, est tel que :
$MN=3$ cm, $MP=5$ cm.

2.a. $(MN)\perp(MP)$.

b. La distance de *P* à (*MN*) est égale à 5 cm.

c. La distance de *N* à (*MP*) est égale à 3 cm.

3. (*NM*) est la tangente en *M* au cercle (C_1), de centre *P* et de rayon [*PM*], car (*NM*) est la droite perpendiculaire en *M* à (*PM*) ;

(*PM*) est la tangente en *M* au cercle (C_2), de centre *N* et de rayon [*NM*], car (*PM*) est la droite perpendiculaire en *M* à (*NM*).

Exercice 44 **Le bon mot**

1. La tangente en *A* à un cercle de centre *O* est la droite perpendiculaire en *A* à la droite support du rayon [*OA*].

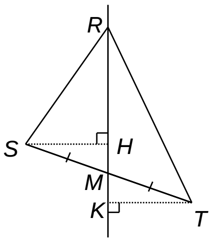
2. Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est à la même distance des côtés de l'angle.

3. La distance à une droite (*D*) d'un point *A* qui n'appartient pas à cette droite (*D*) est *AH* avec *H* le point de (*D*) tel que (*AH*) soit perpendiculaire à (*D*).

4. Si un point *A* est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

Exercices d'approfondissement

Exercice 45 Distances comparables



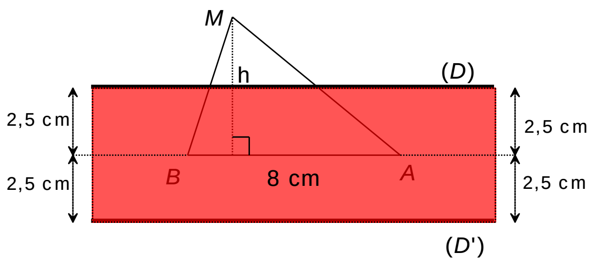
(RM) est la médiane issue de R dans le triangle RST donc :

- M est le milieu du segment [ST] et les points S et T sont symétriques par rapport au point M ;
- la droite (RM), qui passe par M, est sa propre symétrique par rapport au point M.

On en déduit que les droites perpendiculaires à (RM), passant respectivement par S et T, sont symétriques par rapport à M, ainsi que H et K, leurs points d'intersection avec (RM) ; finalement les segments [SH] et [TK], symétriques par rapport à M, sont de même longueur, c'est-à-dire que les points S et T sont à la même distance de la droite (RM).

Exercice 46 Aire limitée

1.



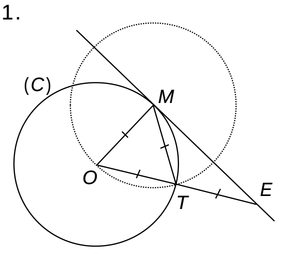
2. Aire $AMB = \dfrac{h \times BC}{2} = 4h$.

3.a. Pour que l'aire de ABM soit égale à 10 cm², il faut que $h = 2{,}5$ cm, c'est-à-dire que M soit placé sur l'une des deux droites (D) et (D') situées à 2,5 cm de la droite (AB).

Pour que l'aire du triangle ABM soit inférieure ou égale à 10 cm², il faut que $h \leq 2{,}5$ cm, c'est-à-dire que M soit placé entre les deux droites (D) et (D') [zone rouge sur la figure].

Exercice 47 Une tangente sans équerre

1.



2.a. Le triangle TOM est équilatéral.
Donc chacun de ces angles mesure 60°.

b. Dans le triangle TME, isocèle en T, on a :

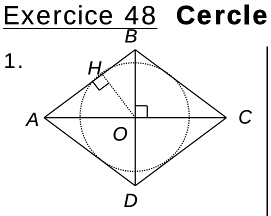
mes $\widehat{MTE} = 180 - 60 = 120°$;

mes $\widehat{TME}$ = mes $\widehat{TEM}$
$= \dfrac{180-120}{2} = 30°$.

c. Finalement le triangle MOE est rectangle en M, c'est-à-dire que la droite (ME) est la tangente au cercle (C) en M.

Exercice 48 Cercle inscrit dans un losange

1.



$ABCD$ est un losange de centre O, tel que $AC = 4$ cm et $BD = 3$ cm.

2. $AB^2 = AO^2 + OB^2$
$= 2^2 + 1{,}5^2 = 6{,}25$;
donc : $AB = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ cm ;
périmètre de $ABCD$ = <u>10 cm</u>.

3.a. Aire de $AOB = \dfrac{2 \times 1{,}5}{2}$
$=$ <u>1,5 cm²</u>.

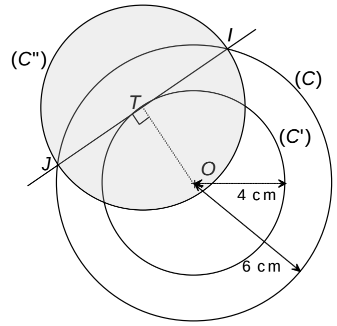
b. Si H est le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par O, l'aire de AOB est aussi égale à $\dfrac{AB \times OH}{2}$;

donc : $OH = \dfrac{2 \times 1{,}5}{2{,}5}$ = <u>1,2 cm</u>.

4. Le cercle de centre O, tangent à chacun des côtés du losange, passe par le point H.

Exercice 49 Des aires comparables

1.



2. Si R est le rayon du cercle (C"), alors :

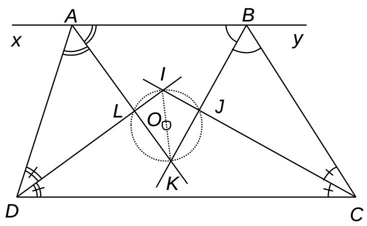
a. $R^2 = OI^2 - OT^2$
$= 6^2 - 4^2 = 20$;

b. l'aire du disque limité par (C") est égale à 20π.

3.a. Aire de la couronne circulaire limitée par (C) et (C') : $6^2\pi - 4^2\pi = 20\pi$.

b. Les aires calculées précédemment sont donc égales.

Exercice 50 Trapèze et bissectrices



1.a. (AB)//(CD), donc les angles alternes-internes $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CBy}$ ont la même mesure.

b. On en déduit que mes $\widehat{ABC}$ + mes $\widehat{BCD}$ = 180°.

c. Donc : mes$\widehat{JBC}$ + mes$\widehat{JCB} = \dfrac{1}{2}$(mes$\widehat{ABC}$ + mes$\widehat{BCD}$) = 90°,

c'est-à-dire : BJC est un triangle rectangle en J.

2. De la même façon, on démontre que ALD est un triangle rectangle en L.

3. Les cercles circonscrits aux triangles KJI et KLI, rectangles en J et L, ont le même diamètre : [KI] ; donc un même cercle, de centre le milieu O du segment [KI], passe par les quatre points I, J, K et L

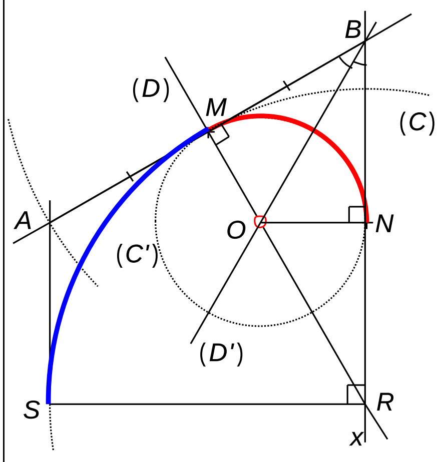
Activités d'intégration

Exercice 51 **Construction architecturale**

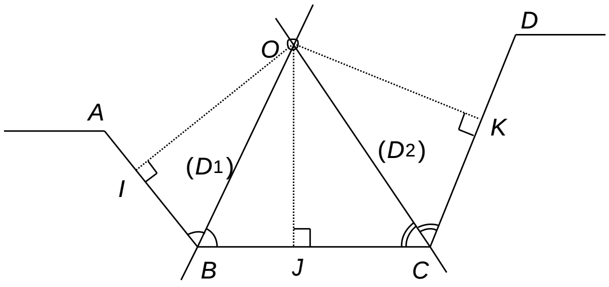
Construction d'un arc rampant *SMN* (*SM en bleu*, *MN en rouge*) :

- placer un point *B* et tracer la droite verticale (*Bx*) ;
- placer un point *A* tel que :
  - mes $\widehat{ABx}=60°$,
  - $AB=12$ cm ;
- construire la médiatrice (*D*) du segment [*AB*];
(*D*) coupe [*AB*] en son milieu *M* et (*Bx*) en *R* ;
- déterminer le point d'intersection *S* de la droite passant par *A* et parallèle à (*BR*) avec la droite perpendiculaire à (*BR*) en *R* ; la droite (*SR*), qui est perpendiculaire à la droite (*BR*) en *R*, est aussi perpendiculaire à la droite (*AS*) en *S* ;
le cercle ($\mathcal{C}$), de centre *R* et passant par *M*, est tangent en *M* à (*AB*) et en *S* à (*AS*) ;
l'arc *SM* (*en bleu*) est la portion entre *S* et *M* de ($\mathcal{C}$) ;

- construire la bissectrice (*D'*) de l'angle $\widehat{ABR}$;
si (*D'*) coupe (*D*) au point *O*, alors le cercle ($\mathcal{C}'$), de centre *O* et passant par *M*, est tangent en *M* à (*AB*) et en *N* à (*BR*) ;
l'arc *MN* (*en rouge*) est la portion entre *M* et *N* de ($\mathcal{C}'$).



Exercice 52 **Implantation d'un abreuvoir**



1.a. Pour être à égale distance des droites (*AB*) et (*BC*),

l'abreuvoir doit se situer sur la bissectrice (D_1) de l'angle $\widehat{ABC}$.

b. Pour être à égale distance des droites (*BC*) et (*CD*),

l'abreuvoir doit se situer sur la bissectrice (D_2) de l'angle $\widehat{BCD}$.

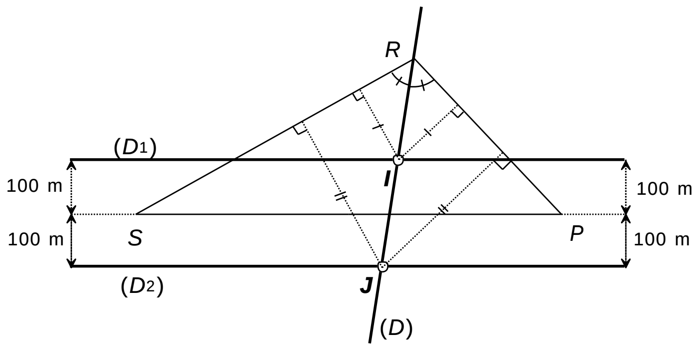
2. Finalement l'abreuvoir doit se situer au point d'intersection *O* de (D_1) et (D_2).

3. Pour être le plus près possible de l'abreuvoir :

- le portail de la clôture [*AB*] doit être installé en *I*, pied de la perpendiculaire à (*AB*) passant par *O* ;
- le portail de la clôture [*BC*] doit être installé en *J*, pied de la perpendiculaire à (*BC*) passant par *O* ;
- le portail de la clôture [*CD*] doit être installé en *K*, pied de la perpendiculaire à (*CD*) passant par *O* ;

Exercice 53 **Chasse au trésor**

1.



$SP=800$ m, $RP=400$ m et $PS=600$ m.

2. Le trésor se situe à 100 m de la droite (*SP*), qui joint le sapin au puits ; donc le trésor appartient aux droites (D_1) et (D_2), parallèles à (*SP*) et dont la distance à (*SP*) est égale à 100 m.

Le trésor est à la même distance de la droite (*SR*), qui joint le sapin au rocher, que de la droite (*RP*), qui joint le rocher au puits ; donc le trésor appartient à la bissectrice (*D*) de l'angle $\widehat{SRP}$.

Finalement *I* et *J*, points d'intersection des deux droites (D_1) et (D_2) avec la droite (*D*), sont les deux emplacements possibles où Marie peut espérer trouver le trésor.

3 *Triangle, milieux et droites remarquables*

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Droite passant par les milieux de deux côtés [1a p 33]	11, 14, 17, 20	43, 44	49, 50, 58
2	Segment joignant les milieux de deux côtés [1b p 33]	15, 17	43	
3	Milieu d'un côté et parallèle au support d'un autre côté [2 p 33]	12, 13, 16, 17, 18, 19	44	49
	Apprendre à choisir et utiliser une propriété [1 p 35]	**1, 2, 3, 4**		
4	Bissectrices et cercle inscrit [3a p 33]	21, 22, 23, 24, 25	46, 47	51, 53, 56
	Apprendre à construire le cercle inscrit dans un triangle [2 p 36]	**5, 6, 7, 8, 9, 10**		
5	Hauteurs et orthocentre [3b p 34]	26, 27, 28, 29, 30, 31	47, 45, 48	50, 54
6	Médianes et centre de gravité [3c p 34]	32, 33, 34, 35, 36	47	52, 54, 55, 57
	Triangle isocèle, triangle équilatéral [4 p 34]	37, 38, 39, 40, 41, 42		50

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

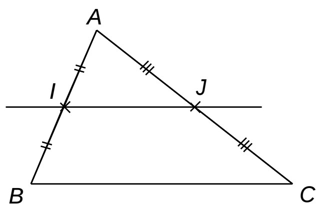
Activités de découverte

Pour démarrer **Point d'équilibre d'un triangle**

1. La droite passant par un sommet d'un triangle et le milieu du côté opposé est la médiane issue de ce sommet.
2. Le point d'équilibre d'un triangle (découpé dans une plaque cartonnée) est le point d'intersection de ces trois médianes.

1 **Droite passant par les milieux de deux côtés**

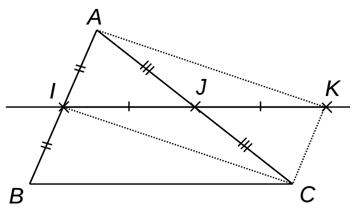
I milieu de [*AB*],
J milieu de [*AC*].



1. **Conjecture**

Il semble que (*IJ*)//(*BC*).

2. **Démonstration**



a. Soit *K* le point symétrique de *I* par rapport à *J*.

b. D'après la propriété 3 (*diagonales qui se coupent en leur milieu*) *IAKC* est un parallélogramme.

c. D'après la propriété 1 (*côtés opposés d'un parallélogramme*) *AI*=*CK* et (*AI*)//(*CK*).

d. Or *BI*=*AI* et (*BI*)//(*AI*) donc *BI*=*CK* et (*BI*)//(*CK*) ;
d'après la propriété 2 (*quadrilatère non croisé dont deux côtés opposés ont même longueur et des supports parallèles*) *BIKC* est un parallélogramme.

On en déduit que (*IK*)//(*BC*), c'est-à-dire : (*IJ*)//(*BC*).

3. **Propriété**

Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de <u>deux côtés</u>, alors elle est <u>parallèle</u> au support du troisième côté.

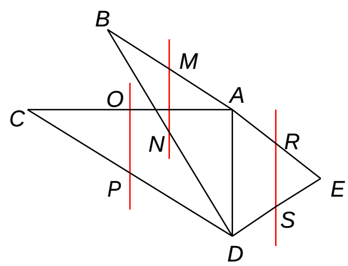
4. **Application**

Dans le triangle *BAD*, *M* est le milieu de [*BA*] et *N* est le milieu de [*BD*] ; donc, d'après la propriété ci-dessus, on a : (*MN*)//(*AD*).

Dans le triangle *CAD*, *O* est le milieu de [*CA*] et *P* est le milieu de [*CD*] ; donc, d'après la propriété ci-dessus, on a : (*OP*)//(*AD*).

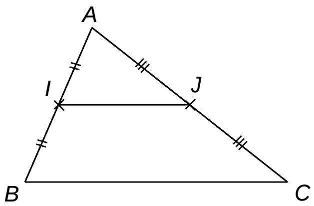
Dans le triangle *EAD*, *R* est le milieu de [*EA*] et *S* est le milieu de [*ED*] ; donc, d'après la propriété ci-dessus, on a : (*RS*)//(*AD*).

On en déduit que : (*MN*)//(*OP*)//(*RS*).



2 Segment d'extrémités les milieux de deux côtés

1. *I* milieu de [*AB*],
J milieu de [*AC*].



2. **Conjecture**

Il semble que $IJ=\frac{1}{2}BC$.

3. **Démonstration**

a. Soit *K* le milieu de [*BC*].

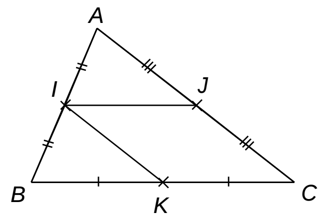
D'après la propriété énoncée dans l'activité précédente :

b. *I* milieu de [*AB*] et *J* milieu de [*AC*] donc (*IJ*) //(*BC*) ;

c. *I* milieu de [*BA*] et *K* milieu de [*BC*] donc (*IK*) //(*AC*).

d. On en déduit que (*IJ*)//(*KC*) et (*IK*)//(*JC*),
c'est-à-dire que *IJCK* est un parallélogramme.

e. Finalement : $IJ=KC=\frac{1}{2}BC$.



4. **Propriété**

Si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

5. **Application**

Dans le triangle *BAD*, *M* est le milieu de [*BA*] et *N* est le milieu de [*BD*] ;

donc, d'après la propriété ci-dessus, on a : $MN=\frac{1}{2}AD$.

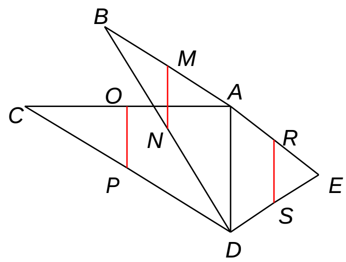
Dans le triangle *CAD*, *O* est le milieu de [*CA*] et *P* est le milieu de [*CD*] ;

donc, d'après la propriété ci-dessus, on a : $OP=\frac{1}{2}AD$.

Dans le triangle *EAD*, *R* est le milieu de [*EA*] et *S* est le milieu de [*ED*] ;

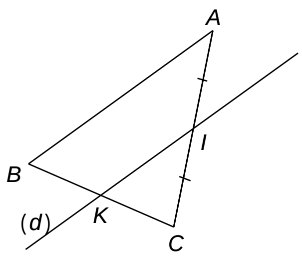
donc, d'après la propriété ci-dessus, on a : $RS=\frac{1}{2}AD$.

On en déduit que : *MN*=*OP*=*RS*.



3 Milieu d'un côté et parallèle au support d'un autre côté

I milieu de [*AC*],
La droite (*d*), qui passe par *I* et est parallèle à (*AB*),
coupe [*BC*] en *K*.



1. **Conjecture**

Il semble que
K est le milieu de [*BC*].

2. **Démonstration**

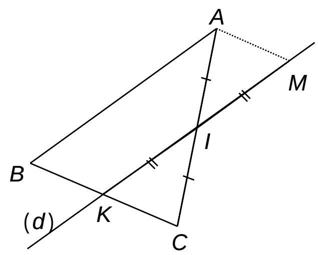
Soit *M* le point symétrique de *K* par rapport à *I*.

a. Le quadrilatère *AMCK* est un parallélogramme ;
en effet ses diagonales se coupent en leur milieu.

b. On en déduit que (*AM*)//(*BK*) puis que *AMKB*, dont
les côtés opposés sont parallèles, est un parallélogramme.

c. Dans le parallélogramme *AMCK*, les côtés opposés ont
la même longueur : *AM*=*KC* ;
dans le parallélogramme *AMKB*, les côtés opposés ont
la même longueur : *AM*=*BK*.

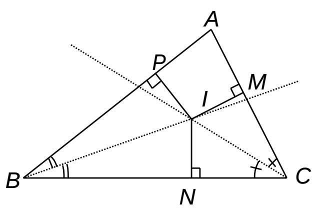
d. Finalement *KC*=*BK* et *K* est le milieu de [*BC*].



3. **Propriété**

Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

4 Cercle inscrit dans un triangle



I est le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

1.a. Le point *I*, qui appartient à la bissectrice de $\widehat{ABC}$, est équidistant des supports des côtés de cet angle ; donc *IP*=*IN*.

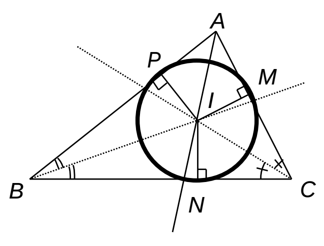
Le point *I*, qui appartient à la bissectrice de $\widehat{ACB}$, est équidistant des supports des côtés de cet angle ; donc *IN*=*IM*.

b. On en déduit que : *IP*=*IM*.

c. Le point *I*, qui est équidistant de (*AB*) et (*AC*), appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

d. Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.

2.a.

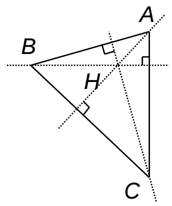


b. Le cercle, de centre *I* passant par *N*, passe aussi par *M* et *P*, puisque :
IN=*IM*=*IP*.

c. *N* appartient à ce cercle, de centre *I* ;
la droite (*BC*) est perpendiculaire en *N* à *IN* ;
donc (*BC*) est tangente à ce cercle en *N*.

Pour les mêmes raisons, (*AB*) et (AC) sont tangentes à ce cercle respectivement en *P* et *M*.

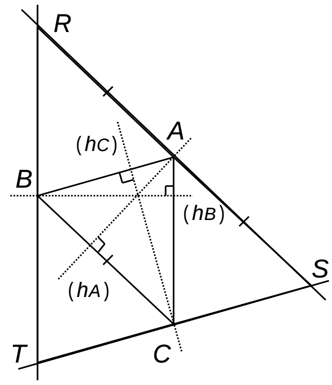
5 **Orthocentre d'un triangle**



Conjecture

Il semble que les trois hauteurs sont concourantes.

Démonstration



Dans la figure ci-contre :
(*RS*)//(*BC*), (*RT*)//(*AC*) et (*ST*)//(*AB*).

1.a. (*RA*)//(*BC*) et (*AC*)//(*RB*),
donc *ARBC* est un parallélogramme ;
(*AB*)//(*SC*) et (*BC*)//(*AS*),
donc *ABCS* est un parallélogramme.

b. On a : *RA*=*BC* et *BC*=*AS* ; donc : *RA*=*AS*.

c. Les points *R*, *A* et *S* étant alignés, on peut dire que *A* est le milieu du segment [*RS*].

2. Soit (h_A), (h_B) et (h_C) les hauteurs du triangle *ABC* issues respectivement de *A*, *B* et *C*.

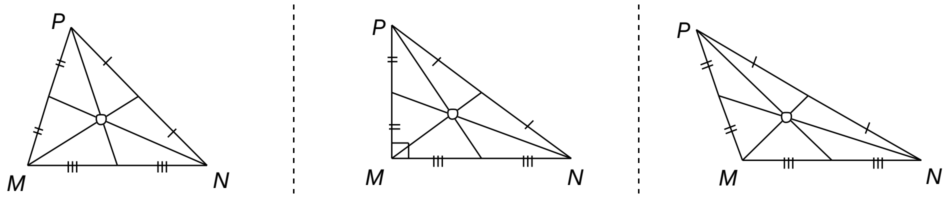
(*RS*)//(*BC*) donc la hauteur (h_A), qui passe par le milieu *A* de [*RS*] et est perpendiculaire à (*BC*), est en fait perpendiculaire à [*RS*] en son milieu ;
donc (h_A) est aussi la médiatrice du côté [*RS*] du triangle *RST*.

3.a. En admettant que les points *B* et *C* sont les milieux respectifs de [*RT*] et [*ST*], les droites (h_B) et (h_C) sont aussi les médiatrices respectives des côtés [*TR*] et [*TS*] du triangle *RST*.

b. Finalement les trois hauteurs de triangles *ABC*, qui sont aussi médiatrices du triangle *RST*, sont concourantes.

6 **Centre de gravité d'un triangle**

1.



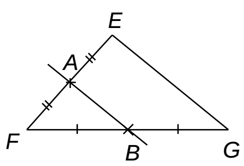
2. **Conjecture**

Il semble que les trois médianes d'un triangle sont concourantes

Méthodes et savoir-faire

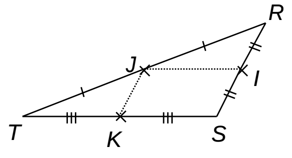
1 Apprendre à choisir et utiliser une propriété

Exercice 1



1. *A* et *B* sont les milieux des côtés [*FE*] et [*FG*] du triangle *EFG*.
2. (*AB*)//(*EG*) ; en effet si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté.

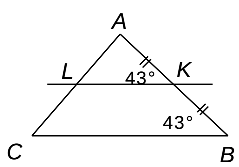
Exercice 2



1. *I* et *J* sont les milieux respectifs de [*RS*] et [*RT*] ; or, si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté ;
donc : a. (*IJ*)//(*ST*) ;
b. (*JK*)//(*RS*).

2. *IJKS* est un parallélogramme ; en effet ses côtés opposés sont parallèles.

Exercice 3

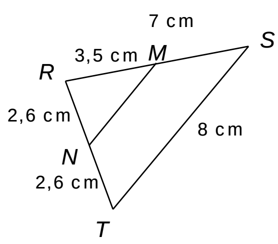


1. *K* est le milieu de [*AB*] ;
mes $\widehat{AKL}$ = mes $\widehat{ABC}$ = 43°.

2.a. Les angles $\widehat{AKL}$ et $\widehat{ABC}$, correspondants, ont la même mesure, donc : (*KL*)//(*BC*).

b. *L* est le milieu de [*AC*] ; car si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle au support d'un deuxième côté, alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

Exercice 4



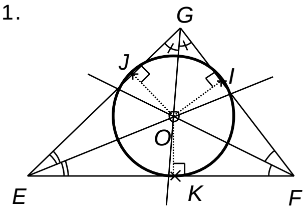
1. *M*∈[*RS*], *RM*=3,5 cm et *RS*=7 cm ; donc : *M* est le milieu de [*RS*] ;
N∈[*RT*], *RN*=*NT*=2,6 cm ; donc : *N* est le milieu de [*RT*].

2. *MN*=4 cm ; car, si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

2 Apprendre à construire le cercle inscrit dans un triangle

Exercice 5

1.



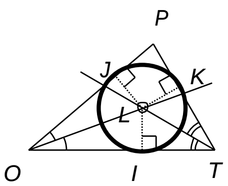
$EF = 10$ cm,
$EG = 8$ cm,
$FG = 7$ cm.

2. Construire (*à l'aide du compas, de la règle et selon la méthode proposée dans le savoir-faire*) les bissectrices de deux angles du triangle ; elles se coupent en *O*, qui est le point de concours des bissectrices des angles de ce triangle.

3. Soit *I*, *J* et *K* les pieds des perpendiculaires à chacun des côtés du triangle, passant par *O* ; le cercle, de centre *O* et passant par l'un de ces points, est le cercle inscrit dans le triangle *EFG*.

Exercice 6

1.



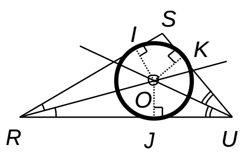
$OT = 7$ cm,
mes $\widehat{POT} = 40°$,
mes $\widehat{PTO} = 60°$.

2. Construire (*à l'aide du rapporteur et de la règle*) les bissectrices de deux angles du triangle ; elles se coupent en *L*, qui est le point de concours des bissectrices des angles de ce triangle.

3. Soit *I*, *J* et *K* les pieds des perpendiculaires à chacun des côtés du triangle, passant par *L* ; le cercle, de centre *L* et passant par l'un de ces points, est le cercle inscrit dans le triangle *POT.*

Exercice 7

1.



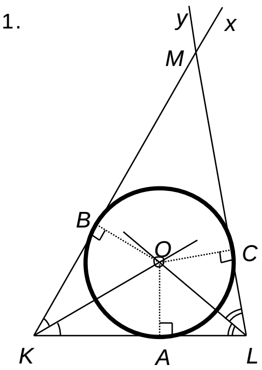
$RU = 6$ cm,
mes $\widehat{SRU} = 30°$,
mes $\widehat{RSU} = 100°$,
donc mes $\widehat{RUS} = 50°$.

2. Construire (*à l'aide du rapporteur et de la règle*) les bissectrices de deux angles du triangle ; elles se coupent en *O*, qui est le point de concours des bissectrices des angles de ce triangle.

3. Soit *I*, *J* et *K* les pieds des perpendiculaires à chacun des côtés du triangle, passant par *O* ; le cercle, de centre *O* et passant par l'un de ces points, est le cercle inscrit dans le triangle *RSU.*

Exercice 8

1.



$KL = 8$ cm,
mes $\widehat{OKL} = 30°$,
mes $\widehat{OLK} = 40°$.

2. Construire [*à l'aide du rapporteur, de la règle et du même côté par rapport à (KL)*] les demi-droites [*Kx*) et [*Ly*) telles que :

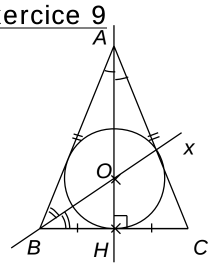
- (*KO*) soit bissectrice de $\widehat{LKx}$,
- (*LO*) soit bissectrice de $\widehat{KLy}$.

M est le point d'intersection de [*Kx*) et [*Ly*) ; en effet le point *O*, intersection de deux bissectrices du triangle *KLM*, est bien le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

3. Soit *A* est le pied de la perpendiculaire à (*KL*), passant par *O* ; le cercle, de centre *O* et passant par *A*, est le cercle inscrit dans *KLM.*

Exercice 9

1.



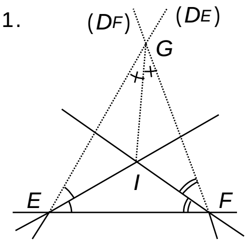
ABC est isocèle en *A*.

2. Si *H* est le milieu de [*BC*], alors (*AH*), médiane issue du sommet principal d'un triangle isocèle, est aussi bissectrice de l'angle en ce sommet.

3. Soit [*Bx*) la bissectrice de $\widehat{ABC}$; le point d'intersection *O* de (*AH*) et [*Bx*) est le centre du cercle inscrit dans le triangle *ABC*, qui passe par *H* [le pied de la perpendiculaire à (*BC*) passant par *O*].

Exercice 10

1.



$EF = 6$ cm,
mes $\widehat{IEF} = 30°$,
mes $\widehat{EFI} = 35°$.

2. Le point *G*, tel que *I* soit le centre du cercle inscrit dans le triangle *EFG*, est le point d'intersection des droites (D_E) et (D_F) symétriques de la droite (*EF*) respectivement par rapport à (*EI*) et à (*FI*).

3. Mes $\widehat{EGF} = 180\text{-}60\text{-}70 = 50°$;

mes $\widehat{EGI} = 25°$;

mes $\widehat{EIG} = 180\text{-}30\text{-}25 = 125°$;

mes $\widehat{EIF} = 180\text{-}30\text{-}35 = 115°$;

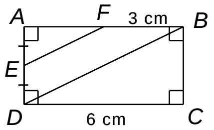
mes $\widehat{GIF} = 180\text{-}35\text{-}25 = 120°$.

(*vérification : 125+115+120=360.*)

Activités d'application

Droites parallèles et milieux

Exercice 11

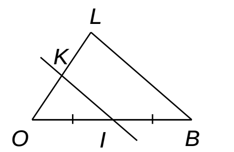


1. Dans le rectangle $ABCD$, les côtés opposés $[AB]$ et $[DC]$ ont la même longueur : 6 cm ; or $F \in [AB]$ et $FB = 3$ cm, donc F est milieu de $[AB]$.

2. Dans le triangle ABD, F milieu de $[AB]$ et E milieu de $[AD]$; donc : $(EF)//(BD)$.

Exercice 12

1.

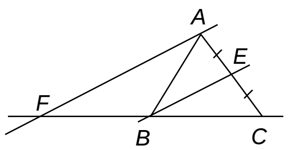


$BO = 6$ cm, $OL = 4$ cm, $LB = 5$ cm.

2. Dans le triangle OLB, la droite, qui passe par le milieu I du côté $[BO]$ et est parallèle à (BL), coupe le côté $[LO]$ en son milieu K.

Exercice 13

1.



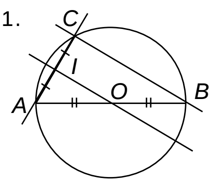
a. E est le milieu de $[AC]$.

b. La parallèle à (BE) passant par A coupe (BC) en F.

2. Dans le triangle ACF, la droite (EB) passe par le milieu du côté $[AC]$ et est parallèle au support du côté $[AF]$; cette droite coupe donc le troisième côté $[CF]$ en son milieu B.

Exercice 14

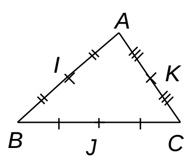
1.



2.a. O, centre du cercle de diamètre $[AB]$, est milieu de $[AB]$;
de plus I est milieu de $[AC]$;
or, dans un triangle la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté ; donc : $(IO)//(BC)$.

b. Le sommet C du triangle ABC appartient au cercle de diamètre $[AB]$, donc ce triangle est rectangle en C.
$(AC)\perp(BC)$ et $(IO)//(BC)$ donc : $(IO)\perp(AC)$.

Exercice 15



$AB = 5$ cm,
$AC = 4$ cm,
$BC = 6$ cm.

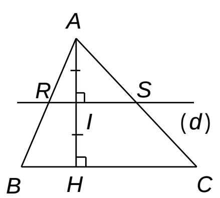
1. I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

2.a. Si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté ;
donc : $JK = 2{,}5$ cm.

b. Périmètre de IJK : $2{,}5 + 2 + 3 = 7{,}5$ cm.

Exercice 16

1.



(AH) hauteur issue de A ;

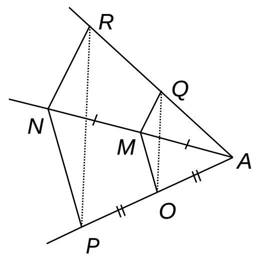
(d) médiatrice de $[AH]$.

2.a. $(d)\perp(AH)$ et $(BC)\perp(AH)$, donc : $(d)//(BC)$.

b. Dans le triangle ABH, (d) [droite passant par le milieu I de $[AH]$ et parallèle à (BH)] coupe $[AB]$ en son milieu R ;

dans le triangle ACH, (d) [droite passant par le milieu I de $[AH]$ et parallèle à (CH)] coupe $[AC]$ en son milieu S.

Exercice 17



M milieu de $[AN]$,
O milieu de $[AP]$
$(NR)//(MQ)$.

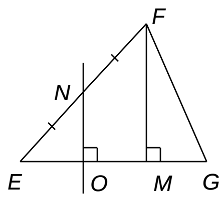
1. Dans le triangle ANP, M et O sont les milieux respectifs des côtés $[AN]$ et $[AP]$, donc : $(MO)//(NP)$.

2.a. Dans le triangle ANR, M est le milieu de $[AN]$ et $(MQ)//(NR)$, donc Q est le milieu de $[AR]$.

Dans le triangle APR, O et Q sont les milieux respectifs des côtés $[AP]$ et $[AR]$, donc $(OQ)//(PR)$.

Exercice 18

1.

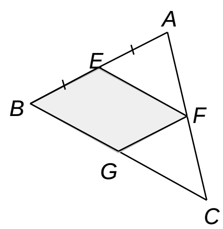


2. M est le pied de la hauteur issue de F, donc : $(FM)\perp(EG)$.

O est le pied de la perpendiculaire issue de N sur (EG), donc : $(NO)\perp(EG)$.

dans le triangle EFM la droite (NO), qui passe par le milieu N du côté $[EF]$ et est parallèle au support du côté $[FM]$, coupe le troisième côté $[EM]$ en son milieu O.

Exercice 19



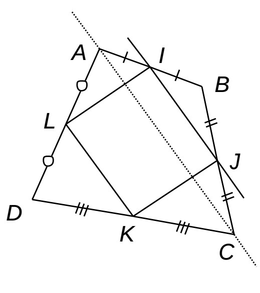
E milieu de $[AB]$
$(EF)//(BC)$
$(FG)//(AB)$

1. $EFGH$ est un parallélogramme ; en effet ses côtés opposés sont parallèles.

2. Dans le triangle ABC :
- la droite (EF), qui passe par le milieu E du côté $[AB]$ et est parallèle au support du côté $[BC]$, coupe le troisième côté $[AC]$ en son milieu F ;
- la droite (FG), qui passe par le milieu F du côté $[AC]$ et est parallèle au support du côté $[AB]$, coupe le troisième côté $[BC]$ en son milieu G.

3. La droite (EG), qui passe par les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$ du triangle ABC, est parallèle au support (AC) du troisième côté de ce triangle.

Exercice 20



1. Dans le triangle ABC, la droite (IJ), qui passe par les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$, est parallèle à la droite (AC) support du troisième côté.

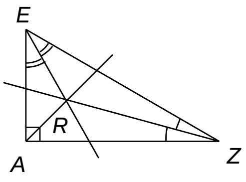
2. Dans le triangle ADC, la droite (LK), qui passe par les milieux des côtés $[AD]$ et $[DC]$, est aussi parallèle à la droite (AC) support du troisième côté.
donc : $(IJ)//(KL)$.

3. On démontre de la même façon, dans les triangles BCD et BAD, que : $(JK)//(IL)$;
C'est-à-dire que le quadrilatère $IJKL$, qui a ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme.

(propriété de Varignon)

Bissectrices d'un triangle

Exercice 21



mes $\widehat{AZE}$ = 30°.

1. Mes $\widehat{AEZ}$ = 180 - 90 - 30 = 60°.

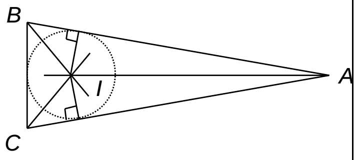
2. Mes $\widehat{RZE} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AZE}$ = 15°.

3. Mes $\widehat{REZ} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AEZ}$ = 30° ;

mes $\widehat{ZRE}$ = 180 - 15 - 30 = 135°.

Exercice 22

1.



I est le centre du cercle inscrit dans *ABC*

mes $\widehat{ABI}$ = 40°, mes $\widehat{BAI}$ = 10°.

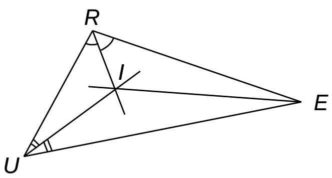
2. (*BI*) et (*AI*) sont bissectrices de $\widehat{ABC}$ et de $\widehat{BAC}$;

donc : mes $\widehat{ABC}$ = 80°,
mes $\widehat{BAC}$ = 20°.

3. On en déduit que :

mes $\widehat{ACB}$ = 180 - 80 - 20 = 80° ; donc le triangle *ABC* est isocèle en *A*.

Exercice 23



mes $\widehat{URI}$ = mes $\widehat{IRE}$ = 50°

mes $\widehat{RUI}$ = mes $\widehat{IUE}$ = 25°

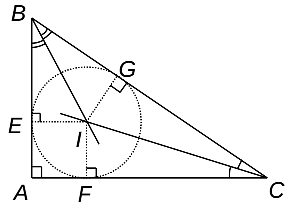
a. (*RI*) et (*UI*) sont, par construction, les bissectrices de $\widehat{URE}$ et $\widehat{RUE}$;
donc (*EI*) est la bissectrice de $\widehat{REU}$.

b. mes $\widehat{REU}$ = 180 - 100 - 50
= 30°.

donc : mes $\widehat{IER}$ = 15°.

Exercice 24

a.



ABC est rectangle en *A*

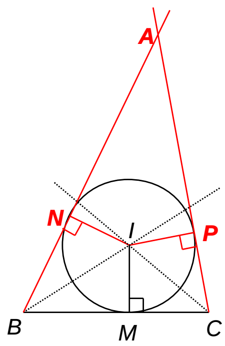
b. *I*, point d'intersection des bissectrices, est le centre du cercle inscrit dans *ABC*.

c. Si *E*, *F* et *G* sont les points de contact respectifs du cercle avec les côtés [*AB*], [*AC*] et [*BC*], alors :

- mes $\widehat{AEI}$ = mes $\widehat{AFI}$ = 90°,
- *IE* = *IF* (rayons du cercle).

d. Donc *AEIF*, quadrilatère dont trois angles sont droits et deux côtés consécutifs ont même longueur, est un carré.

Exercice 25



(données initiales)
IM = 2,5 cm
BM = 4 cm
MC = 3 cm

I est le centre du cercle inscrit dans le triangle *ABC*.

1.a. (*BI*) est la bissectrice de $\widehat{CBA}$.

b. La bissectrice d'un angle étant un axe de symétrie de cet angle, le symétrique de *M* par rapport à (*BI*) appartient à la droite (*BA*).

c. Le symétrique de *M* par rapport à (*CI*) appartient à la droite (*CA*).

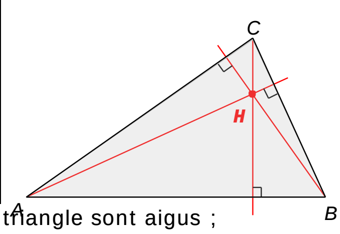
2. Pour refaire la figure complète :
- construire le point *N* symétrique de *M* par rapport à (*BI*),
- construire le point *P* symétrique de *M* par rapport à (*CI*),
- *A* est le point d'intersection des droites (*BN*) et (*CP*).

Hauteurs d'un triangle

Exercice 26

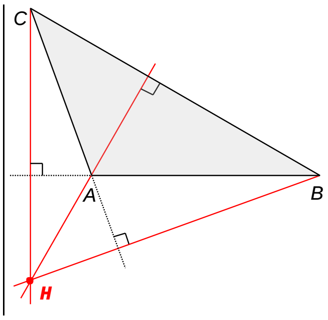
Construction de l'orthocentre *H* d'un triangle *ABC* dans deux cas.

1^er^ cas : *ABC* est un triangle tel que : $AB=6{,}5$ cm, $BC=6$ cm, mes $\widehat{ABC}=35°$.
(construction avec règle graduée et rapporteur)



Observation : les angles de ce triangle sont aigus ; l'orthocentre est situé à « l'intérieur » du triangle.

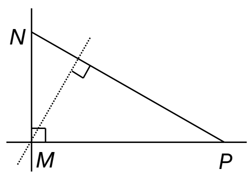
2^e^ cas : *ABC* est un triangle tel que : $AB=5$ cm, mes $\widehat{ABC}=30°$. mes $\widehat{ACB}=40°$
(construction avec règle graduée et rapporteur, après avoir remarqué que : mes $\widehat{BAC}=180-30-40=110°$)



Observation : un angle de ce triangle est obtus ; l'orthocentre est situé à « l'extérieur » du triangle.

Exercice 27

Orthocentre d'un triangle rectangle.

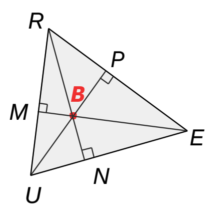


1. Dans le triangle *MNP*, rectangle en *M*, la hauteur issue de *P* est la droite (*PM*).

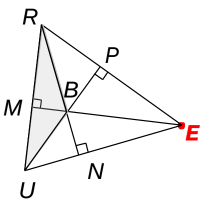
2. L'orthocentre de ce triangle est le point *M* ; en effet la droite (*NM*), hauteur issue de *N*, coupe la hauteur issue de *P* en *M*.

Exercice 28

Ci-contre, *B* est l'orthocentre du triangle *RUE*.

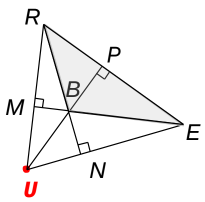


a.



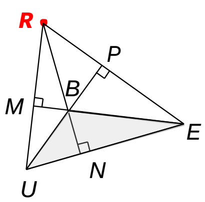
E est l'orthocentre du triangle *RUB*.

b.



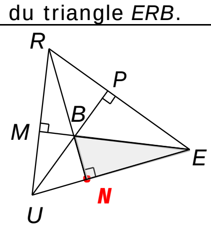
U est l'orthocentre du triangle *ERB*.

c.



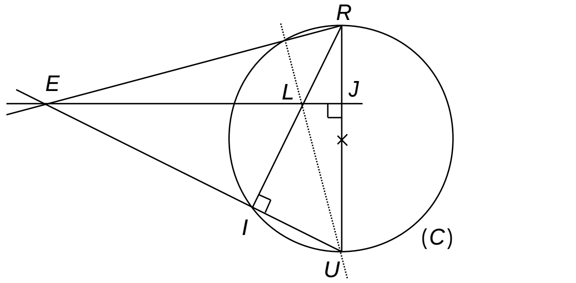
R est l'orthocentre du triangle *BUE*.

d.



N est l'orthocentre du triangle *BNE*.

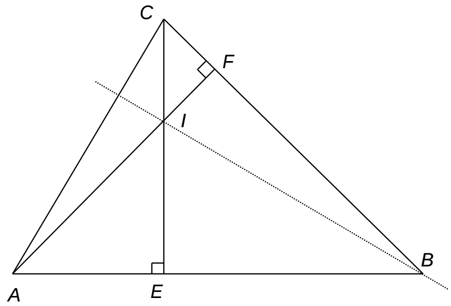
Exercice 29



I étant un point du cercle (*C*) de diamètre [*RU*], le triangle *IRU* est rectangle en *I*.
On en déduit que :
•les droites (*RI*) et (*EJ*) sont les hauteurs du triangle *REU*, issues respectivement des sommets *R* et *E* ;
• *L* est alors l'orthocentre de ce triangle et (*UL*) en est la hauteur issue de *U*, c'est-à-dire (*UL*)⊥(*RE*).

Exercice 30

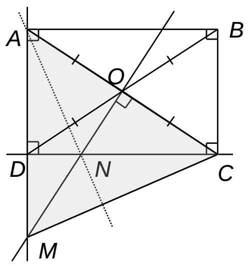
Ci-contre :
$AF=6{,}3$ cm ;
$CF=1{,}6$ cm ;
$AC=6{,}5$ cm ;
$AE=3{,}3$ cm ;
$EC=5{,}6$ cm.



a. $AC^2=6{,}5^2=42{,}25$ et $AE^2+EC^2=3{,}3^2+5{,}6^2=42{,}25$;
donc, d'après la propriété de Pythagore, le triangle *ACE* est rectangle en *E* ;
$AC^2=6{,}5^2=42{,}25$ et $AF^2+FC^2=6{,}3^2+1{,}6^2=42{,}25$;
donc, d'après la propriété de Pythagore, le triangle *ACF* est rectangle en *F*.

b. On en déduit que :
•les droites (*CE*) et (*AF*) sont les hauteurs du triangle *ABC*, issues respectivement des sommets *C* et *A* ;
• *I* est alors l'orthocentre de ce triangle et (*BI*) en est la hauteur issue de *B*, c'est-à-dire (*BI*)⊥(*AC*).

Exercice 31



1.a. *ABCD* est un rectangle de centre *O*.
b. La perpendiculaire à (*AC*) passant par *O* coupe (*CD*) en *N* et (*AD*) en *M*.

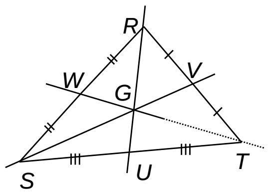
2.a. (*OM*), qui est perpendiculaire à [*AC*] en son milieu, est la médiatrice de ce segment.

b. *M*, qui appartient à la médiatrice de [*AC*], est équidistant de *A* et *C* ; c'est-à-dire que le triangle *AMC* est isocèle en *M*.

3. Dans le triangle *AMC* :
• les droites (*MO*) et (*CD*) sont les hauteurs issues respectivement des sommets *M* et *C* ;
• le point *N*, intersection de ces droites, est l'orthocentre ;
• la droite (*AN*) est la hauteur issue du sommet *A* ;
donc : (*AN*)⊥(*MC*).

Médianes d'un triangle

Exercice 32



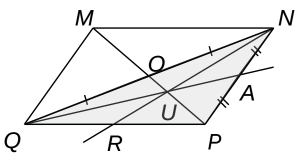
U, *V* et *W* sont les milieux des côtés de *RST*.

1. Le point d'intersection *G* des deux médianes du triangle *RST*, issues respectivement des sommets *R* et *S*, est le centre de gravité de ce triangle.

2. La droite (*WG*) passe par le milieu de [*RS*] et le centre de gravité de *RST* ; c'est la troisième médiane de ce triangle, qui passe par le sommet *T*, opposé à [*RS*].

Exercice 33

1.



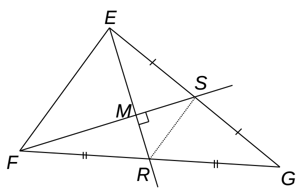
MNPQ est un parallélogramme de centre *O*.

2. *O* milieu de la diagonale [*NQ*] et *A* milieu de [*NP*], donc :

- (*PO*) et (*QA*) sont les médianes issues des sommets *P* et *Q* du triangle *NPQ* ;
- *U* est le centre de gravité de ce triangle.

(*NU*) est alors la 3e médiane, issue du sommet *N* ; elle coupe le côté [*QP*] en son milieu *R*.

Exercice 34



R est milieu de [*FG*]
S est milieu de [*EG*]
$(ER)\perp(FS)$

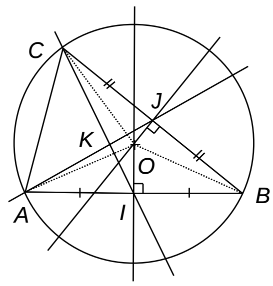
Par construction *M*, point d'intersection des médianes issues des sommets *E* et *F* du triangle *EFG*, est le centre de gravité de ce triangle.
Si $ER=3{,}6$ cm et $FS=4{,}8$ cm, alors :

- $EM=\dfrac{2}{3}ER=\underline{2{,}4\text{ cm}}$;
- $FM=\dfrac{2}{3}FS=\underline{3{,}2\text{ cm}}$.
- $MS=3{,}6-2{,}4=1{,}2$ cm et $MR=4{,}8-3{,}2=1{,}6$ cm.

Le triangle *MRS* est rectangle en *M* ; d'après la propriété de Pythagore : $RS=\sqrt{MS^2+MR^2}=\sqrt{1{,}2^2+1{,}6^2}=2$ cm.
De plus, dans le triangle *EFG*, *R* et *S* sont les milieux respectifs de [*FG*] et [*EG*] ; donc : $RS=\dfrac{1}{2}EF$ et $EF=\underline{4\text{ cm}}$.

Exercice 35

1.

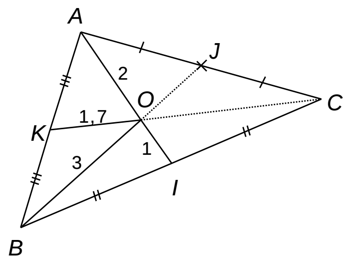


2.a. *A*, *B* et *C* sont sur un cercle de centre *O*, donc :

- $OA=OB=OC$;
- la droite, passant par *O* et perpendiculaire à (*AB*), est la médiatrice de [*AB*] ;
elle coupe ce segment en son milieu *I* ;
- la droite, passant par *O* et perpendiculaire à (*BC*), est la médiatrice de [*BC*] ;
elle coupe ce segment en son milieu *J* ;

b. (*AJ*) et (*CI*) sont les médianes issues des sommets *A* et *C* du triangle *ABC* ;
K, point d'intersection de (*AJ*) et (*CI*), est le centre de gravité de ce triangle ;
(*BK*) est alors la 3e médiane, issue du sommet *B* ; elle coupe le côté [*AC*] en son milieu.

Exercice 36



1. *O* est le centre de gravité du triangle *ABC*. En effet :

- *I* est le milieu de [*BC*], donc (*AI*) est la médiane issue de *A* de ce triangle ;
- sur [*AI*], *O* est situé au deux tiers à partir du sommet *A*.

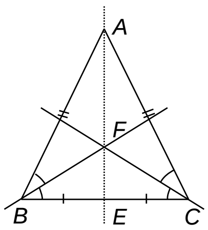
2. *K* est le milieu de [*AB*] ; donc :
(*CK*), la médiane issue de *C* de *ABC*, passe par *O* ;
$CO=2OK=\underline{3{,}4\text{ cm}}$ et $CK=CO+OK=\underline{5{,}1\text{ cm}}$.

J est le milieu de [*AC*] ; donc :
(*BJ*), la médiane issue de *B* de *ABC*, passe par *O* ;
$BJ=\dfrac{3}{2}BO=\dfrac{3}{2}\times 3=\underline{4{,}5\text{ cm}}$.

Triangle isocèle ; équilatéral

Exercice 37

1.



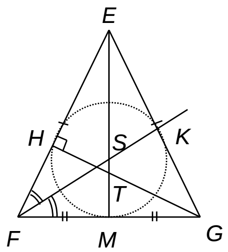
ABC isocèle en A,
E milieu de $[BC]$,
F point d'intersection des bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$

2. Dans le triangle ABC, isocèle en A, la médiane (AE) est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

(AE) passe donc par F, le point d'intersection des deux autres bissectrices de ce triangle ;

donc les points A, F et E sont alignés.

Exercice 38

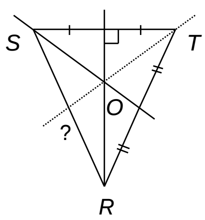


M est le milieu de $[FG]$; dans le triangle EFG, isocèle en E, (EM) est à la fois hauteur issue de E et bissectrice de l'angle $\widehat{FEG}$.

1. L'orthocentre de ce triangle est le point T, intersection des deux hauteurs (EM) et (GH).

2. Le centre du cercle inscrit dans ce triangle est le point S, intersection des deux bissectrices (EM) et (FK).

Exercice 39



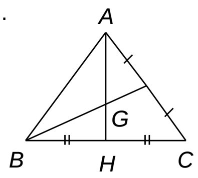
1. Dans le triangle RST, isocèle en R, la hauteur issue de R est aussi la médiane issue de R.

2. O, point d'intersection des médianes issues de R et de S, est le centre de gravité de ce triangle.

(TO) est alors la troisième médiane de RST ; donc (TO) coupe le côté $[RS]$ en son milieu.

Exercice 40

1.



ABC isocèle en A

$BC = 6$ cm, $AB = 5$ cm

H milieu de $[BC]$

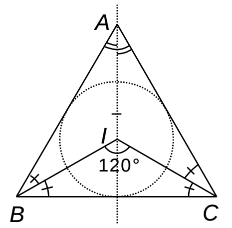
G centre de gravité

2.a. Dans le triangle ABC, isocèle en A, la médiane (AH) est aussi hauteur ; donc ACH est un triangle rectangle en H et, d'après la propriété de Pythagore, on a :
$AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$; AH = <u>4 cm</u>.

b. Si G est le centre de gravité de ABC, alors :

$G \in [AH]$ et $GH = \dfrac{1}{3} AH \approx$ <u>1,3 cm</u>.

Exercice 41



1. I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, isocèle en A.

(AI), bissectrice de $\widehat{BAC}$, est aussi la médiatrice de $[BC]$; donc $IB = IC$ et le triangle BIC est isocèle en I.

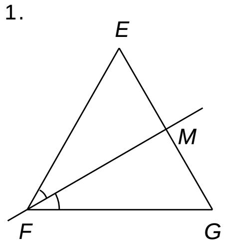
2. mes $\widehat{IBC}$ = mes $\widehat{ICB} = \dfrac{180 - 120}{2} = 30°$;

(BI) et (CI) sont les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$;

donc : mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{ACB} = 60°$,
ABC est en fait un triangle équilatéral.

Exercice 42

1.



$EF = FG = GE = 7$ cm.

2. Dans le triangle équilatéral EFG, la bissectrice (FM) de l'angle $\widehat{EFG}$ est aussi la médiatrice du segment $[EG]$.

Donc : a. M est le milieu de $[EG]$;
b. $(FM) \perp (EG)$.

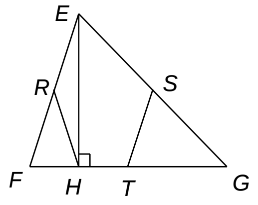
3.a. $FM = \sqrt{7^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{36{,}75}$;
$FM \approx$ <u>6,1 cm</u>.

b. Aire de EFG : $\dfrac{6{,}1 \times 7}{2} \approx$ <u>21 cm²</u>.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 43 **Retrouver les bonnes propriétés**

Dans la figure ci-contre :
- les points *R*, *S* et *T* sont les milieux des côtés du triangle *EFG* ;
- *H* est le pied de la hauteur issue de *E*.



1.a. $ST = \frac{EF}{2}$ car « *si, dans un triangle, un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté* ».

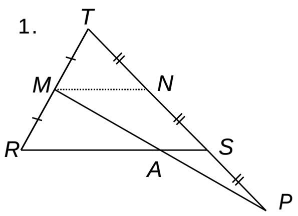
b. *HR*=*FR*=*RE* car « *si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit* ».

c. (*RS*)//(*FG*) car « *si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté* ».

2. *HTSR* est un trapèze isocèle car :
   - (*HT*)//(*RS*),
   - (*HR*) et (*TS*) non parallèles, mais *HR*=*TS*.

Exercice 44 **Bien repérer : données et conclusion**

1.



Ci-contre :
- un triangle *RST* ;
- *M* et *N* sont les milieux respectifs de [*RT*] et [*ST*] ;
- *P* est le symétrique de *N* par rapport à *S* ;
- *A* est le point d'intersection des droites (*RS*) et (*PM*).

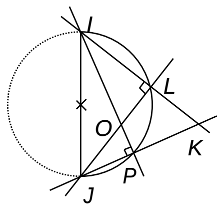
2. Dans son raisonnement, Roger a commis une erreur : mettre « *A* milieu de [*PM*] » en données et « (*SA*)//(*MN*) » en conclusion.

3.a. Dans le triangle *RST*, *M* milieu de [*RT*] et *N* milieu de [*ST*] ; donc : (*MN*)//(*RS*) ; c'est-à-dire : (*SA*)//(*MN*).

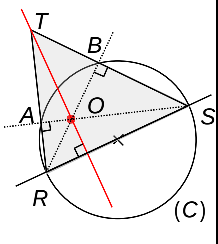
b. Dans le triangle *PMN*, la droite (*SA*), qui passe par le milieu *S* de [*PN*] et est parallèle à (*MN*), passe par le milieu *A* de [*PM*].

Exercice 45 **Retrouver la figure**

1. Ci-contre la figure, correspondant au déductogramme :



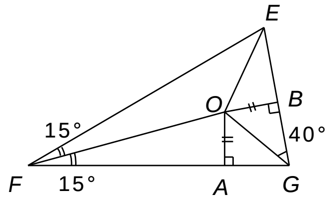
2.



a. *T* est un point extérieur au cercle (*C*) de diamètre [*RS*].

b. Construction, à la règle seule, de la perpendiculaire à (*RS*) passant par *T* :
- tracer les droites (*TR*) et (*TS*), qui coupent (*C*) respectivement en *A* et *B* ;
- tracer les droites (*RB*) et (*SA*), qui se coupent en l'orthocentre *O* de *RST* ;
- la droite (*TO*), hauteur issue de *T*, est alors perpendiculaire à (*RS*).

Exercice 46 **Démonstration à compléter**



1. Justification que (*EO*) est la troisième bissectrice du triangle *EFG* :

a. *D'après les codages : (OA) est perpendiculaire à (FG), (OB) est perpendiculaire à* <u>*(EG)*</u> *et OA=*<u>*OB*</u>*.*
J'en déduis que le point O est à égale <u>*distance*</u> *des droites* <u>*(FG)*</u> *et (EG).*

Par conséquent (GO) est la <u>*bissectrice*</u> *de* <u>*l'angle* $\widehat{FGE}$</u>*.*

b. Toujours d'après les codages : (*FO*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GFE}$; on en déduit que *O*, point d'intersection de deux bissectrices de *EFG*, appartient à la troisième bissectrice de ce triangle, qui est donc la droite (*EO*).

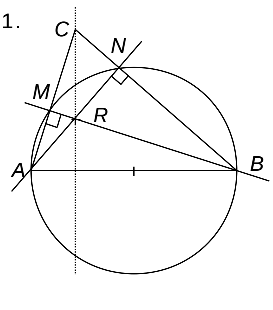
2. Mes $\widehat{FEO} = \frac{1}{2}(180 - 30 - 80) = \underline{35°}$.

Exercice 47 **Associer les bons mots**

hauteurs	centre de gravité
médianes	centre du cercle circonscrit
bissectrices	centre du cercle inscrit
médiatrices	orthocentre

Exercice 48 **Une démonstration méli-mélo**

1.



2. *Preuve que (CR)⊥(AB)* :

[*AB*] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle *ABM* et au triangle *ABN*.

Ainsi le triangle *ABM* est rectangle en *M* et le triangle *ABN* est rectangle en *N*.

(*BM*) est donc perpendiculaire à (*AC*) et (*BM*) est la hauteur de *ABC* issue de *B*.

(*AN*) est donc perpendiculaire à (*BC*) et (*AN*) est la hauteur de *ABC* issue de *A*.

R, l'intersection des hauteurs (*BM*) et (*AN*), est l'orthocentre de *ABC*.

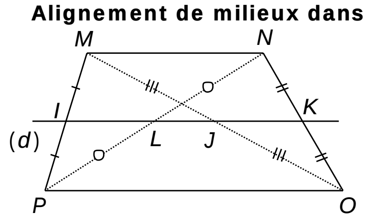
(*CR*) passe par le sommet *C* de *ABC* et par *R* son orthocentre.

(*CR*) est donc la hauteur de *ABC* issue de *C* et, par définition, (*CR*) est perpendiculaire à (*AB*).

Exercices d'approfondissement

Exercice 49

Alignement de milieux dans un trapèze



1. $(d)=(IJ)$.

a. Dans le triangle *MOP*, *I* est le milieu de [*MP*] et *J* est le milieu de [*MO*] ; or, si dans un triangle une droite passe par les milieux de deux côtés, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté ; donc (*d*) est parallèle à (*OP*).

b. Dans le trapèze *MNOP*, de bases [*MN*] et [*OP*], (*MN*) est parallèle à (*OP*) ; on en conclut que (*d*) est parallèle à (*MN*).

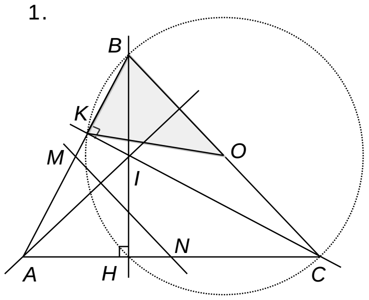
2.a. Dans le triangle *MNO*, *J* est le milieu de [*MO*], la droite (*d*) passe par *J* et est parallèle à (*MN*) ; or, si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle au support d'un deuxième côté, alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu ; donc (*d*) passe par *K* le milieu de [*NO*].

b. Dans le triangle *MNP*, *I* est le milieu de [*MP*], la droite (*d*) passe par *I* et est parallèle à (*MN*) ; or, si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle au support d'un deuxième côté, alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu ; donc (*d*) passe par *L* le milieu de [*NP*].

c. Finalement les points *I*, *J*, *K* et *L* sont alignés sur (*d*).

Exercice 50 **Cercle caché**

1.



Dans la figure ci-contre :

a. $AB=4{,}6$ cm ;
$BC=5{,}6$ cm ;
$AC=6$ cm ;

b. les hauteurs (*BH*) et (*CK*) se coupent en *I* ;

c. *M* est le milieu de [*AB*], *N* est le milieu de [*AC*].

2.a. La droite (*MN*), qui passe par les milieux des côtés [*AB*] et [*AC*], est parallèle au support (*BC*) du troisième côté.

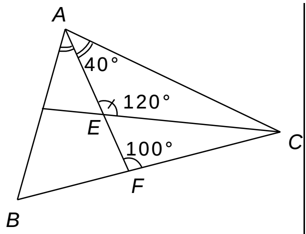
b. *I*, point d'intersection des hauteurs (*BH*) et (*CK*), est l'orthocentre de *ABC* ; la droite (*AI*), qui est alors la troisième hauteur de ce triangle, est perpendiculaire à (*BC*). On en déduit que : $(AI)\perp(MN)$.

3.a. *O* est le milieu de [*BC*].

b. [*BC*] est l'hypoténuse du triangle *BCK* rectangle en *K* ; on en déduit que :
- *O* est le centre du cercle circonscrit à ce triangle ;
- $OB=OK$ et le triangle *KOB* est isocèle en *O*.

c. Le cercle de diamètre [*BC*] coupe (*AB*) en *K* et (*AC*) en *H*. En effet les triangles *BCK* et *BCH* étant rectangles en *K* et *H*, le cercle de diamètre [*BC*] est circonscrit à chacun de ces triangles.

Exercice 51 **Bissectrice cachée**



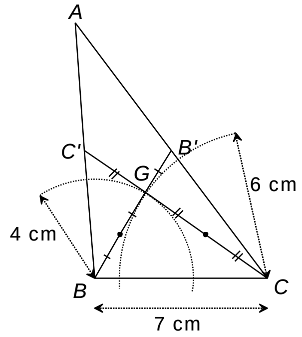
D'après les codages de la figure :
- (*AE*) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
- mes $\widehat{ACE}=180-40-120=20°$;
- mes $\widehat{FEC}=180-120=60°$; d'où :

mes $\widehat{ECF}=180-100-60=20°$.

On en déduit que : (*CE*) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.
E étant point d'intersection de deux bissectrices de *ABC*, (*BE*) est la troisième bissectrice de ce triangle et

mes $\widehat{EBA}=\dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{ABF}=\dfrac{1}{2}(180-80-40)=30°$.

Exercice 52 **Problème de construction**



B' étant le milieu de [*AC*] et *C*' celui de [*AB*], si *ABC* est un triangle tel que : $BC=7$ cm,
$CC'=9$ cm,
$BB'=6$ cm,
alors le centre de gravité *G* de ce triangle est tel que :

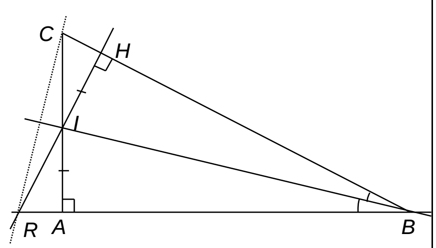
$CG=\dfrac{2}{3}\times 9=6$ cm,

$BG=\dfrac{2}{3}\times 6=4$ cm.

Pour construire un tel triangle *ABC* :
- construire tout d'abord un triangle *BCG* tel que $BC=7$ cm, $BG=4$ cm et $CG=6$ cm ;
- construire le milieu de [*BG*] et son symétrique *B*' par rapport à *G*, puis le milieu de [*CG*] et son symétrique *C*' par rapport à *G* ;
- *A* est le point d'intersection des droites (*BC*') et (*CB*')

(<u>vérification</u> : *B*' et *C*' doivent être les milieux de [*CA*] et [*BA*]).

Exercice 53 **Comparer des distances**



1. Ci-contre :

a. *ABC* rectangle en *A*,
$AB=7$ cm,
$AC=3{,}6$ cm ;

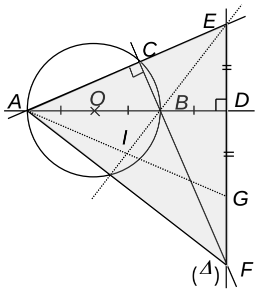
b. (*BI*) bissectrice de $\widehat{ABC}$;

c. (*IH*) hauteur issue de *I* dans *IBC*.

2. [*IC*] étant l'hypoténuse de triangle *HCI*, rectangle en *H*, ce côté est le plus grand des trois côtés de ce triangle ; en particulier : $IH<IC$.
De plus, *I* étant un point de la bissectrice, on a : $IA=IH$; on en déduit que *I* est plus près de *A* que de *C*.

3. La droite (*IH*) coupe la droite (*AB*) en *R*.
Les droites (*BC*) et (*BR*) sont symétriques par rapport à (*BI*) ; les droites (*IH*) et (*IA*), passant par un point de (*BI*) et perpendiculaires respectivement à (*BC*) et (*BR*), sont aussi symétriques par rapport à (*BI*).
On en déduit que *C*, point d'intersection de (*IA*) et (*BC*), et *R*, point d'intersection de (*IH*) et (*BR*), sont symétriques par rapport à (*BI*) ; c'est-à-dire $(CR)\perp(IB)$.

Exercice 54 **Construire et bien observer**



1. Dans la figure ci-contre :

a. C appartient au cercle de diamètre $[AB]$, de centre O ;

b. D symétrique de O, par rapport à B ;

c. $(\Delta)\perp(AB)$ et $D\in(\Delta)$;

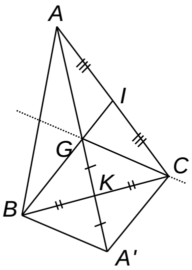
d. E et F sont les points d'intersection respectifs de (AC) et (CB) avec (Δ) ;

2.a. Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour diamètre $[AB]$; donc ce triangle est rectangle en C et (FC) est la hauteur issue de F dans le triangle AEF.

b. Comme (AD) est la hauteur issue de A dans AEF, le point B est l'orthocentre de ce triangle et (EB) en est la hauteur issue de E ; donc : $(EB)\perp(AF)$.

3. G est le symétrique de E par rapport à D, donc D est le milieu de $[EG]$; B, situé aux deux tiers à partir de A sur la médiane $[AD]$ de AEG, est le centre de gravité ce triangle. On en déduit que la droite (EB) est la médiane issue de E dans AEG ; elle passe par le milieu I de $[AG]$.

Exercice 55 **Centre de gravité d'un triangle**



Dans le triangle ABC :
I milieu de [AC]
K milieu de $[BC]$

G point d'intersection de (BI) et (AK)

A' symétrique de G par rapport à K.

1.a. $BGCA'$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.

b. On en déduit que : $(GI)//(A'C)$ et $(CG)//(BA')$.

2.a. Dans le triangle $AA'C$, (GI) passe par le milieu I de $[AC]$ et est parallèle à $(A'C)$; donc G est le milieu de $[AA']$.

b. Dans le triangle $AA'B$, (CG) passe par le milieu G de $[AA']$ et est parallèle à $(A'B)$; donc (CG) coupe le côté $[AB]$ en son milieu.

c. Les droites (BG), (CG) et (AG) sont les médianes du triangle ABC.

d. On peut en conclure que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

3.a. K milieu de $[GA']$, donc : $GA'=2GK$;

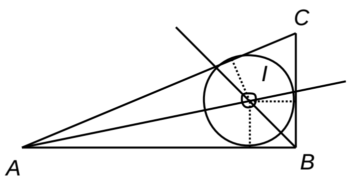
b. G milieu de $[AA']$, donc : $AG=GA'=2GK$;

c. $AK=AG+GK=2GK+GK=3GK$;

d. donc : $GK=\dfrac{1}{3}AK$ et $AG=2GK=\dfrac{2}{3}AK$.

Activités d'intégration

Exercice 56 **Ouverture circulaire**



$AB = 3{,}6$ m ;
$BC = 1{,}5$ m ;
$AC = 3{,}9$ m.

1.a. ABC est un triangle rectangle en B ; en effet (propriété de Pythagore) :
$AC^2 = 3{,}9^2 = 15{,}21$ et $AB^2 + BC^2 = 3{,}6^2 + 1{,}5^2 = 15{,}21$.

b. Aire de ABC : $\dfrac{1{,}5 \times 3{,}6}{2} = \underline{2{,}7 \text{ m}^2}$.

2.a. Le bord de l'ouverture circulaire, la plus grande possible, est le cercle inscrit dans le triangle ABC.

3.a. Si r est le rayon de l'ouverture, alors : aire de $ABI = \dfrac{3{,}6 \times r}{2} = 1{,}8\ r$;

aire de $ACI = \dfrac{3{,}9 \times r}{2} = 1{,}95\ r$;

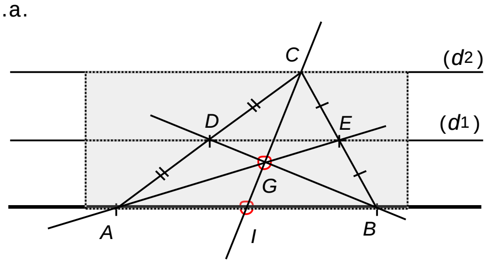
aire de $BCI = \dfrac{1{,}5 \times r}{2} = 0{,}75\ r$.

b. Donc aire de ABC = $(1{,}8 + 1{,}95 + 0{,}75)\ r$ = $\underline{4{,}5\ r}$.

c. On en déduit que : $4{,}5\ r = 2{,}7$; donc : $r = \dfrac{2{,}7}{4{,}5} = \dfrac{3}{5} = \underline{0{,}6 \text{ m}}$.

Exercice 57 **Sali, l'as de la débrouille**

1.a.



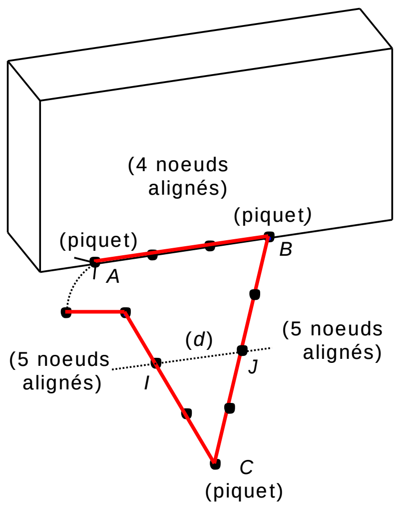
b. Les points D et E sont les milieux respectifs des segments [AC] et [BC].

2. Pour obtenir le milieu de [AB], tracer successivement :

les droites (AE) et (BD), qui se coupent au point G ;
ce sont les médianes issues de A et B dans le triangle ABC et G est le centre de gravité de ABC ;

tracer la droite (CG) ; c'est la médiane issue de C, qui coupe [AB] en son milieu I.

Exercice 58 **La corde à 12 nœuds**



Pour tracer sur le sol une droite parallèle au bord du mur (que représente le parallélépipède) avec une corde à 12 nœuds (les distances entre deux nœuds consécutifs étant toutes égales) :

aligner (à l'aide de trois piquets en A, B et C) 4, 5 et 5 nœuds (12 nœuds en tout) de façon à ce que le premier nœud et le dernier nœud de la corde soient au même piquet (A par exemple).

Dans la situation décrite ci-dessus et d'après la propriété « si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors cette droite est parallèle au support du troisième côté », la droite (d) joignant les milieux I et J, de [AC] et [BC], est parallèle au bord du mur [AB].

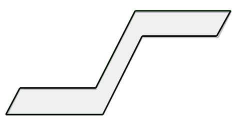
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Symétrie orthogonale, symétrie centrale [1 p …]	14, 15, 16, 17	33, 34	40, 41
	Apprendre à justifier par les propriétés des symétries [1 p …]	**1, 2, 3, 4**		
2	Translation [2 p …]			
	Image d'un point par une translation [3 p …]	18	35, 36	
3	Image d'une figure par une translation [4 p …]	19, 20, 21, 22, 23	37, 38	41, 42, 43, 44, 47, 48
	Apprendre à translater une figure [2 p …]	**5, 6, 7, 8**		
4,5	Projection [5 p …]	24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32	39	45, 49
	Apprendre à partager un segment en parties de même longueur [3 p …]	**9, 10, 11, 12, 13**		
	Application du plan dans lui-même [6 p …]			

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer **Variétés de frises**

1.



Motif de base de la frise A.

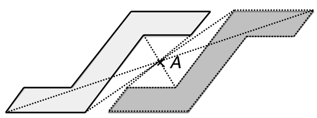
On ne peut pas passer d'un motif de base de la frise A au motif suivant :

a. en appliquant une symétrie orthogonale d'axe vertical ;

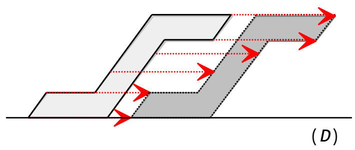
b. en appliquant une symétrie orthogonale d'axe horizontal.

On peut passer d'un motif de base de la frise A au motif suivant :

c. en appliquant une symétrie de centre *A* :



d. en le faisant glisser le long de la droite (*D*) :



2. Pour les frises B et C :

a. seule C admet un (*et même plusieurs*) axe(s) de symétrie vertical ;

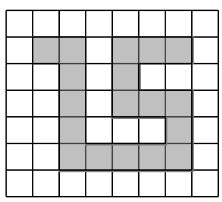
b. B et C admettent chacune un (*et un seul*) axe de symétrie horizontal ;

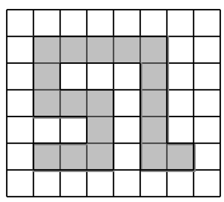
c. seule C admet un (*et même plusieurs*) centre(s) de symétrie ;

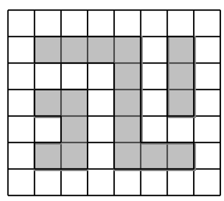
d. B et C ont chacune la possibilité d'être prolongées par glissement le long d'une droite.

3.

Motifs de base possibles de la frise D, à l'aide desquelles on peut prolonger indéfiniment cette frise en le faisant glisser le long d'une droite (horizontale) :



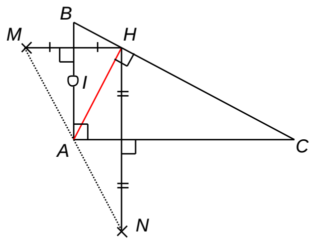




1 **Retour sur les symétries**

Partie A.

1.



Dans le triangle ABC,
rectangle en A,
(AH) est la hauteur issue de A.

2.a. Si le point M est le symétrique du point H par rapport à la droite (AB), alors les angles $\widehat{HAB}$ et $\widehat{BAM}$ ont la même mesure, donc : mes $\widehat{MAH}=2\times$mes $\widehat{BAH}$.

De même : mes $\widehat{HAN}=2\times$mes $\widehat{HAC}$.

On en déduit que mes $\widehat{MAN}$ = mes $\widehat{MAH}$ + mes $\widehat{HAC}$ = 2×(mes $\widehat{BAH}$ + mes $\widehat{HAC}$) = 180°.

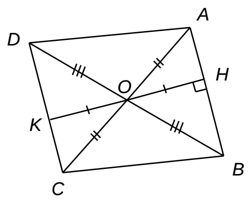
b. L'angle $\widehat{MAN}$ étant plat, les points M, A et N sont alignés ; or $AM=AH$ et $AN=AH$ (*conservation des longueurs dans une symétrie-droite*) ; donc A est le milieu de [MN].

3.a. AMB, symétrique par rapport à (AB) du triangle AHB rectangle en H, est un triangle rectangle en M (*conservation des mesures d'angles dans une symétrie-droite*).

b. On en déduit que les points A, H, B et M appartiennent au cercle, de centre le milieu I de [AB], hypoténuse commune aux triangles AHB et AMB, et de rayon $\frac{AB}{2}$.

Partie B.

1.



a. $AB=5$ cm, $AH=2$ cm, $OH=3$ cm.

b. C, D et K sont les symétriques de A, B et H par rapport à O.

c. les points C, D et K, symétriques respectifs des points alignés A, B et H par rapport à O, sont eux-mêmes alignés.

2. $ABCD$ est un parallélogramme ;
en effet ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O.

3.a. La droite (HK) est perpendiculaire à la droite (DC) ;
en effet : (HK) est sa propre symétrique par rapport à O,
(DC) est la symétrique de (AB) par rapport à O,
(HK)⊥(AB) ;
donc : (HK)⊥(DC) (*conservation des mesures d'angles dans une symétrie par rapport à un point*).

b. Aire de $ABCD$: $AB\times KH=5\times6=\underline{30\text{ cm}^2}$.

c. Aire de AOB : $\frac{OH\times AB}{2}=\frac{3\times5}{2}=\underline{7,5\text{ cm}^2}$;

Aire de $BOC=\frac{1}{2}$[aire($ABCD$)-2×aire(AOB)] = $\underline{7,5\text{ cm}^2}$.

(*On pourra observer que les diagonales du parallélogramme ABCD le partage en 4 triangles, AOB, BOC, COD et DOA, de même aire.*)

2 **Mouvements de translation**

1. En déplaçant le calque de la licorne bleue 1 pour qu'il vienne se superposer sur la licorne jaune 2, les points A, B et C se superposent respectivement aux points D, E et F.

On dit que :

« les points A, B et C ont pour images respectives D, E et F »

ou

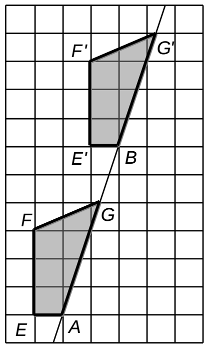
« les points A, B et C se transforment en D, E et F ».

2.b. Le quadrilatère $ADEB$ semble être un parallélogramme.

c. Les quadrilatères $ADFC$ et $BEFC$ semblent aussi être des parallélogrammes.

3 **Propriétés des translations**

1.



Dans la translation qui transforme *A* en *B*, *E*', *F*' et *G*' sont les images de *E*, *F* et *G*.

2. *AEE*'*B* et *GFF*'*G*' sont des parallélogrammes.

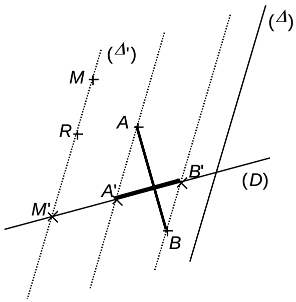
3.a. (*AE*)//(*BE*') ;
en effet ces deux droites sont les supports de côtés opposés [*AE*] et [*BE*'] du parallélogramme *AEE*'*B*.

b. [*FG*] et [*F*'*G*'] ont des supports parallèles et sont de même longueur ;
en effet ces deux segments sont deux côtés opposés du parallélogramme *GFF*'*G*'.

c. Les angles $\widehat{EAG}$ et $\widehat{E'BG'}$ ont la même mesure ;
en effet ces deux angles sont correspondants, formés par la droite (*AB*) sécante aux droites parallèles (*EA*) et (*E*'*B*).

3. Les droites (*EA*) et (*EF*) sont perpendiculaires.
Leurs images (*E*'*B*) et (*E*'*F*') sont aussi perpendiculaires.

4 **Projection**

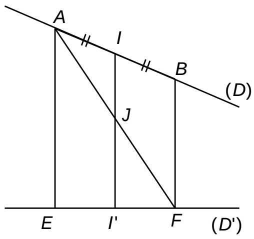


1. Si la droite (*Δ*'), parallèle à (*Δ*) et passant par *M*, coupe la droite (*D*) en *M*', on dit que : *M*' est le projeté de *M* sur la droite (*D*) parallèlement à (*Δ*).

2. Soit *A* et *B* deux points tels que la droite (*AB*) ne soit pas parallèle à (*Δ*) ;
si *A*' et *B*' sont les projetés respectifs de *A* et *B* sur (*D*) parallèlement à (*Δ*), alors le projeté du segment [*AB*], dans cette projection, est le segment [*A*'*B*'].

3. Soit *R* un point de (*Δ*'). Par la projection sur la droite (*D*) parallèlement à (*Δ*) :
a. le projeté de *R* est le point *M*' ;
b. le projeté du segment [*MR*] est le point *M*'.

5 **Projection d'un milieu**



1.a. Par la projection, parallèlement à (*AE*) sur (*D*') :
le projeté de *I* est *I*' et le projeté de *B* est *F*.

b. Le point *I* étant le milieu de [*AB*], on peut conjecturer que le point *I*' est le milieu de [*EF*].

2. *J* est le point d'intersection de [*AF*] et [*II*'].

3.a. Dans le triangle *AFB*, *I* est le milieu de [*AB*] et (*IJ*)//(*BF*) ; donc : *J* est le milieu de [*AF*].

b. Dans le triangle *AFE*, *J* est le milieu de [*AF*] et (*JI*')//(*AE*) ; donc : *I*' est le milieu de [*EF*].

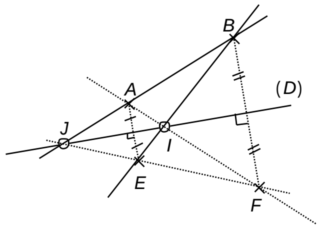
c. Lorsqu'un segment et son milieu sont projetés sur une droite, alors le projeté du milieu est le milieu du projeté du segment.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à justifier par les propriétés des symétries

Exercice 1

1.



E et *F* sont les symétriques respectifs de *A* et *B* par rapport à (*D*).

2. Le symétrique de *I*, point d'intersection de (*BE*) et (*D*) :
- est *I* [puisque *I*∈(*D*)] ;
- appartient à (*FA*) [droite symétrique de (*BE*) par rapport à (*D*)] ;

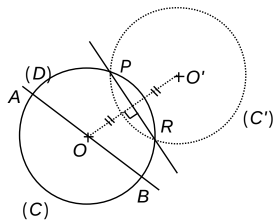
donc *A*, *I* et *F* sont alignés.

3. Le symétrique de *J*, point d'intersection de (*AB*) et (*D*) :
- est *J* [puisque *J*∈(*D*)] ;
- appartient à (*EF*) [droite symétrique de (*AB*) par rapport à (*D*)] ;

donc *E*, *F* et *J* sont alignés.

Exercice 2

1.

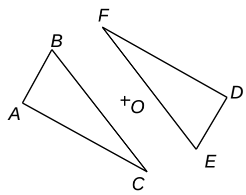


2.a. *O*' est le symétrique de *O* par rapport à (*PR*).

b. (*C*') est le symétrique de (*C*) par rapport à (*PR*). [*O*' est le centre de (*C*')]

c. *P* et *R*, étant leurs propres symétriques par rapport à (*PR*), appartiennent à (*C*').

Exercice 3



ABC et *DEF* sont symétriques par rapport à *O*.

mes $\widehat{ABC}$=67° et mes $\widehat{ACB}$=23°,

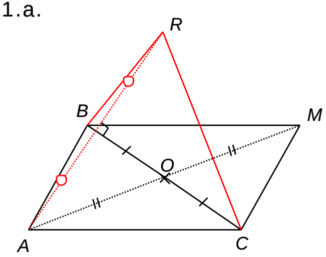
donc mes $\widehat{BAC}$=180-67-23=90°.

1. Le symétrique de $\widehat{BAC}$ est $\widehat{EDF}$.

2. Mes $\widehat{EDF}$=mes $\widehat{BAC}$=90°, donc le triangle *DEF* est rectangle en *D*.

Exercice 4

1.a.



BC=7 cm, *AC*=8 cm, *AB*=4,5 cm.

b. Le point *O*, tel que *B* et *C* sont symétriques par rapport à *O*, est le milieu de [*BC*].

BMC est le symétrique de *ABC* par rapport à *O*.

2. (*CM*) et (*AB*) sont symétriques par rapport à *O*, donc : (*CM*)//(*AB*).

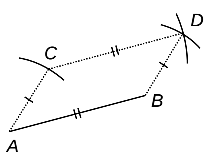
3. *BRC* est le symétrique de *ABC* par rapport à (*BC*).

4. D'après les propriétés de conservation des longueurs et des aires par les symétries orthogonale et centrale, les triangles *BRC* et *BMC* ont le même périmètre (celui de *ABC*) et la même aire (celle de *ABC*).

2 Apprendre à translater une figure

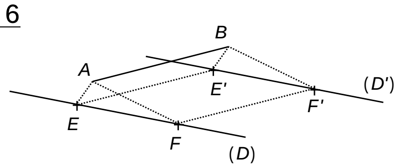
Exercice 5

1.



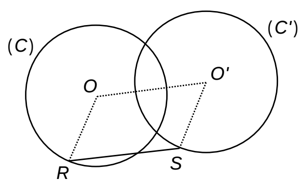
2. L'image du point *C*, par la translation qui transforme *A* en *B*, est le point *D* tel que *ABDC* est un parallélogramme.

Exercice 6



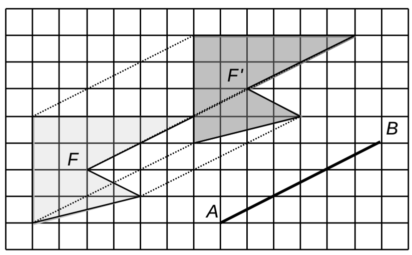
Les points *E*' et *F*', tels que *ABE'E* et *ABF'F* sont des parallélogrammes, sont les images respectives de *E* et *F* par la translation qui transforme *A* en *B* ; l'image de (*D*)=(*EF*) par cette translation est la droite (*E'F'*).

Exercice 7



Le point *O*', tel que *RSO'O* est un parallélogramme, est l'image de *O* par la translation qui transforme *R* en *S* ; l'image de (*C*) par cette translation est le cercle (*C*') de centre *O*', passant par *S*.

Exercice 8



Pour chaque point de la figure (*F*), se déplacer de 6 carreaux vers la droite puis de 3 carreaux vers le haut pour obtenir son image dans la translation qui transforme *A* en *B*.

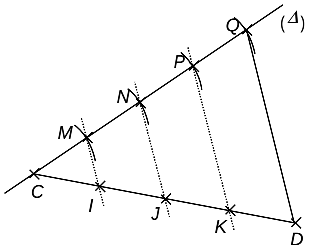
3 Apprendre à partager un segment en parties de même longueur

Exercice 9

Pour partager le segment |*CD*] en 4 parties de même longueur :

● tracer une droite (Δ) sécante en *C* à (*CD*) ;

● à l'aide du compas, placer sur (Δ) 4 points *M*, *N*, *P* et *Q* tels que : $CM=MN=NP=PQ$;

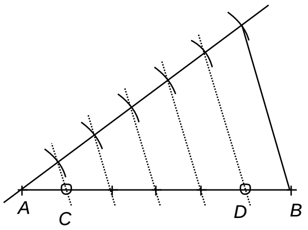


● projeter les points *M*, *N* et *P* sur (*CD*), parallèlement à (*DQ*) ;

● on obtient les points *I*, *J* et *K* tels que : $CI=IJ=JF=KD$.

Exercice 10

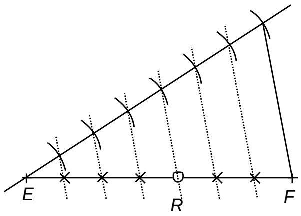
0



Après avoir partagé le segment [*AB*] en 6 parties de même longueur (*voir exercice 9*), il est immédiat de placer les points *C* et *D* du segment [*AB*] tels que :

$AC = \dfrac{1}{6}AB$ et $AD = \dfrac{5}{6}AB$.

Exercice 11

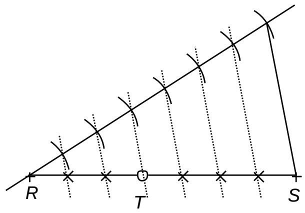


Après avoir partagé le segment [*EF*] en 7 parties de même longueur (*voir exercice 9*), il est immédiat de placer le point *R* du segment [*AB*] tels que :

$ER = \dfrac{4}{7}EF$.

On a alors : $FR= \dfrac{3}{7}EF$.

Exercice 12



Après avoir partagé le segment [*RS*] en 7 parties de même longueur (*voir exercice 9*), pour le point *T* du segment [*RS*] tel que

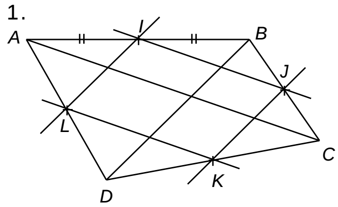
$TR = \dfrac{3}{7}RS$, on a :

● $TS = \dfrac{4}{7}RS$

● $\dfrac{TR}{TS} = \dfrac{\frac{3}{7}RS}{\frac{4}{7}RS} = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 13

1.



2. Si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle au support d'un deuxième côté, alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

Donc :

a. *J*, projeté du milieu *I* de [*AB*] sur [*BC*], parallèlement à (*AC*), est le milieu de [*BC*] ;

b. *K*, projeté du milieu *J* de [*BC*] sur [*CD*], parallèlement à (*BD*), est le milieu de [*CD*] ;

c. *L*, projeté du milieu *K* de [*CD*] sur [*DA*], parallèlement à (*AC*), est le milieu de [*DA*] ;

3. Enfin le projeté du milieu *L* de [*DA*] sur [*AB*], parallèlement à (*BD*), est confondu avec *I* le milieu de [*AB*].

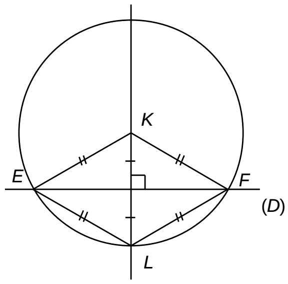
.

Activités d'application

Symétries

Exercice 14

1.
(*D*) est la médiatrice de [*KL*].



2. Le cercle, de centre *K* et de rayon *KL*, coupe (*D*) en *E* et *F*.

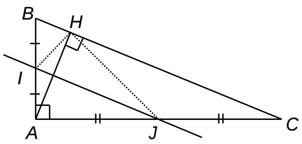
3.a. *KEF* est un triangle isocèle en *K* ; en effet, *KE*=*KF* (rayon du cercle).

b. (*KL*) est la médiatrice de [*EF*] ; en effet, (*KE*) est hauteur issue de *K* dans le triangle *KEF*, isocèle en *K*.

c. *EKL* est un triangle équilatéral ; en effet :
●*KE*=*KL* (rayon du cercle),
●*EK*=*EL* (*E* appartient à la médiatrice de [*KL*].

d. *EKFL* est un losange ; en effet, *KFL* étant aussi un triangle équilatéral, on a *EK*=*KF*=*FL*=*LE*.

Exercice 15



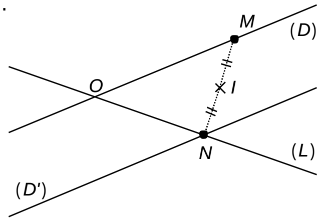
1.a. Le triangle *AHB* étant rectangle en *H*, le milieu *I* de son hypoténuse [*AB*] est centre de son cercle circonscrit ; donc : *IH*=*IA*.

b. De même : *JH*=*JA* ; la droite (*IJ*) passe par deux points équidistants de *A* et *H* et est la médiatrice de [*AH*].
On en déduit que les points *A* et *H* sont symétriques par rapport à (*IJ*).

2. Le symétrique, par rapport à (*IJ*), de l'angle droit $\widehat{IAJ}$ est $\widehat{IHJ}$, qui est aussi un angle droit ; donc : (*IH*)⊥(*JH*).

Exercice 16

1.



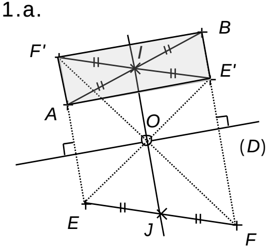
Les droites (*D*) et (*L*) sont sécantes en *O*. I∉(*D*) et I∉(*L*).

2.a. La droite (*D*') est symétrique de (*D*) par rapport à *I*.

b. Si *N* est le point d'intersection de (*D*') et (*L*), alors le symétrique de *N* par rapport à *I* est un point *M* de (*D*) tel que :
● *M*∈(*D*) et *N*∈(*L*),
● *I* est milieu de [*MN*].

Exercice 17

1.a.



I est le milieu de [*AB*].

b. Si *E*, *J* et *F* sont les symétriques respectifs de *A*, *I* et *B* par rapport (*D*), alors (*conservation des longueurs dans une symétrie orthogonale*) :
● *J* est le milieu de [*EF*] ;
● *AI*=*IB*=*EJ*=*JB*.

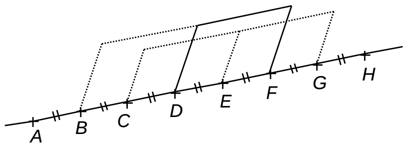
2.a. Soit *O* le point d'intersection de (*IJ*) et de (*D*) ; (*D*) étant la médiatrice de [*IJ*], *O* est le milieu de [*IJ*].

b. *J* est le milieu de [*EF*] ; si *E*' et *F*' sont les symétriques respectifs de *E* et *F* par rapport à *O*, *I* étant déjà le symétrique de *J* par rapport à *O*, on en déduit que *I* est le milieu de [*E*'*F*'].

3. De plus (*conservation des longueurs dans une symétrie centrale*) : *EJ*=*JF*=*E*'*I*=*IF*' ;
comme : *AI*=*IB*=*EJ*=*JB*, on obtient :
● *AI*=*IB*=*E*'*I*=*IF*' ;
● *AE*'*BF*' est un rectangle (*diagonales de même longueur, qui se coupent en leur milieu*).

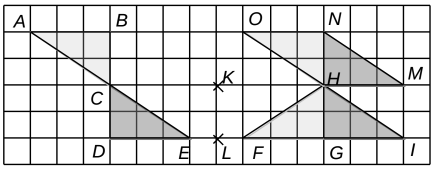
Translation

Exercice 18



Si *D* est l’image de *F* par une translation, alors les images de *E*, *D* et *G*, par cette translation, sont : *C*, *B* et *E*.

Exercice 19



1.a. La transformation par laquelle on passe de *CDE* à *ONH* est la symétrie par rapport au point *K* ;

b. la transformation par laquelle on passe de *FGH* à *CDE* est la symétrie par rapport à la droite (*KL*) ;

c. la transformation par laquelle on passe de *CDE* à *HNM* est la translation qui transforme *D* en *H* ;

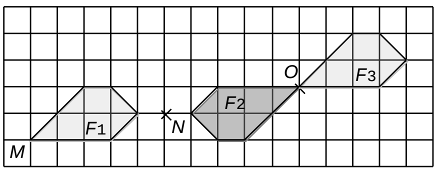
d. la transformation par laquelle on passe de *ONH* à *ABC* est la translation qui transforme *O* en *A*.

2. L e triangle *GHI* est l’image de :

- *ABC* par la symétrie par rapport au point *K* ;
- *CDE* par la translation qui transforme *C* en *H* ;
- *FGH* par la symétrie par rapport à la droite (*GH*) ;
- *HON* par la symétrie par rapport au point *H* ;
- *HMN* par la translation qui transforme *N* en *H*.

Exercice 20

1.



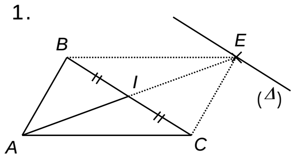
2. F_2 est l’image de F_1 par la symétrie de centre *N*.
Par cette symétrie, l’image du point *M* est le point *O*.

3. F_3 est l’image de F_2 par la symétrie de centre *O*.

4. On passe de F_1 à F_3 par la translation qui transforme *M* en *O*.

Exercice 21

1.



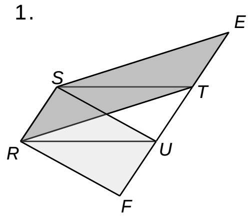
I est le milieu du côté [*BC*] du triangle *ABC*.

2. Les images de *C* (par la translation qui transforme *A* en *B*), de *B* (par la translation qui transforme *A* en *C*) et de *I* (par la translation qui transforme *A* en *I*) sont confondues au point *E* tel que *ABEC* soit un parallélogramme.

3. L’image de la droite (*BC*), par chacune des translations précédentes, est identique : c’est la droite (Δ), parallèle en *E* à (*BC*).

Exercice 22

1.



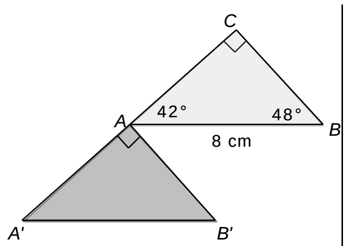
RSTU est un parallélogramme.

- *E* est l’image de *S* par la translation qui transforme *R* en *T* ; donc *RTES* est un parallélogramme ;
- *F* est l’image de *R* par la translation qui transforme *S* en *U* ; donc *SUFR* est un parallélogramme.

2.a. On a : (*UT*)//(*RS*), (*TE*)//(*RS*) et (*FU*)//(*RS*) ; donc les points *F*, *U*, *T* et *E* sont alignés.

On a : *FU*=*RS* et *ET*=*SR* ; donc : *FU*=*ET*.

Exercice 23



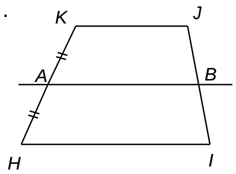
Le triangle *ABC* est rectangle en en *C* ; en effet : 180-42-48=90°.

Si *A’B’A* est l’image de ce triangle par la translation qui transforme *C* en *A*, *A’B’A* est un triangle rectangle en *A* (*conservation des mesures d’angles dans une translation*).

Projection

Exercice 24

1.

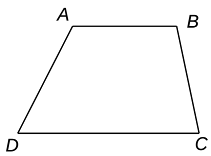


HIJK est un trapèze de bases [*HI*] et [*JK*].
A est le milieu de [*HK*].

2.a. Dans la projection sur (*IJ*) parallèlement à (*HI*) :
- *A* a pour image *B*,
- *H* a pour image *I*,
- *K* a pour image *J*.

b. *B* est le milieu de [*IJ*] ;
En effet, dans une projection, le projeté du milieu d'un segment est le milieu du segment projeté.

Exercice 25



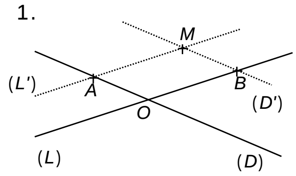
ABCD est un trapèze de bases [*AB*] et [*CD*].

1. Par la projection sur (*AD*) parallèlement à (*AB*), les projetés de *A*, *B*, *C* et *D* sont respectivement *A*, *A*, *D* et *D*.

2. Par la projection sur (*BC*) parallèlement à (*CD*), les projetés de *A*, *B*, *C* et *D* sont respectivement *B*, *B*, *C* et *C*.

Exercice 26

1.



Les droites (*D*) et (*L*) sont sécantes en *O*.

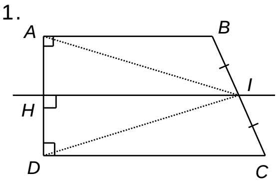
2. Tout point qui se projette en *A* sur (*D*), parallèlement à (*L*), appartient à la droite (*L*') telle que : *A*∈(*L*') et (*L*')//(*L*).

Tout point qui se projette en *B* sur (*L*), parallèlement à (*D*), appartient à la droite (*D*') telle que : *B*∈(*D*') et (*D*')//(*D*).

M est le point d'intersection de (*D*') et (*L*').

Exercice 27

1.



ABCD est un trapèze rectangle en *A* et *D*.
I est le milieu de [*BC*].

2.a. Dans le triangle *AID*, *H* est le pied de la hauteur issue de *I*.

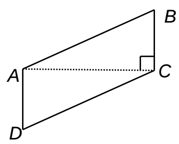
b. Comme (*AB*)//(*DC*)//(*HI*), *A*, *D* et *H* sont les projetés respectifs de *B*, *C* et *I* sur (*AD*) parallèlement à (*AB*).
Comme *I* est le milieu de [*BC*], *H* est le milieu de [*AD*] ; donc (*IH*) est aussi une médiane de *AID*.

c. Le triangle *AID* est isocèle en *I*, puisque sa hauteur issue de *I* est aussi médiane.

Projection orthogonale

Exercice 28

1.



ABCD est un parallélogramme ; (*AC*)⊥(*BC*).

2. Par la projection orthogonale sur la droite (*AC*) :

l'image de [*AB*] est [*AC*] ;

l'image de [*BC*] est *C* ;

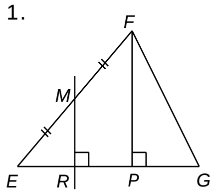
l'image de [*CD*] est [*CA*] ;

l'image de [*DA*] est *A* ;

l'image de [*BD*] est [*AC*].

Exercice 29

1.

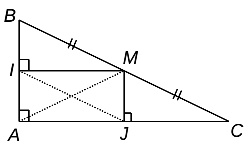


a. *M* est le milieu de [*EF*].
P est le pied de la hauteur de *EFG*, issue de *F*.

b. *R* est le projeté orthogonal de *M* sur (*EG*).

2. Le projeté du milieu d'un segment est le milieu du segment projeté ; donc : *R* est le milieu de [*EP*].

Exercice 30



I et *J* sont les projetés orthogonaux de *M* (milieu de [*BC*]) sur [*AB*] et [*AC*].

1.a. (*MI*) est la médiatrice de [*AB*]. En effet : (*MI*)⊥(*AB*) ; I (projeté du milieu de [*BC*]), est le milieu de [AB] (projeté de [BC]).

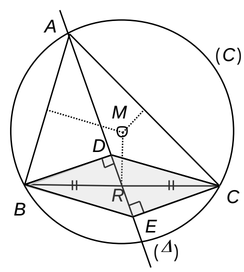
b. De même, (*MJ*) est la médiatrice de [*AC*].

2.a. Avec 3 angles droits, *AIMJ* est un rectangle.

b. La longueur de ses diagonales est égale à la moitié de celle du segment [*BC*].

Exercice 31

1.



(*C*) est circonscrit au triangle *ABC*.

2. Pour que les projetés d'un point *M* sur les côtés du triangle *ABC* soient les milieux de ses côtés, il faut que *M* soit le centre de (*C*).

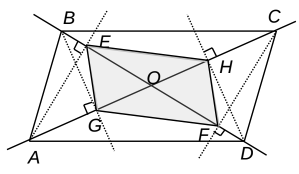
3.a. La médiane (*Δ*), issue de *A*, coupe [*BC*] en son milieu *R*.

b. *D* et *E* sont les projetés orthogonaux de *B* et *C* sur (*Δ*).

c. Le quadrilatère *BDCE* est un parallélogramme. En effet, le milieu *R* de [*BC*], étant son propre projeté, est aussi milieu de [*DE*], le projeté de [*BC*] ; c'est-à-dire que les diagonales de *BDCE* se coupent en leur milieu.

Exercice 32

1.



ABCD est un parallélogramme de centre *O*.

O est le milieu des diagonales [*AC*] et [*BD*].

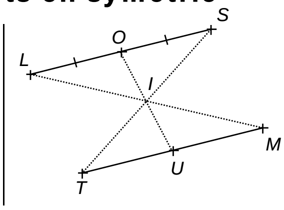
2. Si *E* et *F* sont les projetés orthogonaux de *A* et *C* sur (*BD*), alors *O,* qui appartient à (*BD*) et se projette en lui-même, est milieu de [*EF*].

Si *G* et *H* sont les projetés orthogonaux de *B* et *D* sur (*AC*), alors *O,* qui appartient à (*AC*) et se projette en lui-même, est milieu de [*GH*].

Le quadrilatère *EGFH*, dont les diagonales [*EF*] et [*GH*] se coupent en leur milieu, est un parallélogramme.

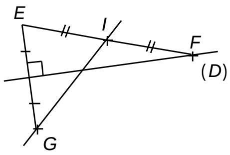
Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 33 Les bons mots en symétrie



Les points S, O et L sont alignés.
La symétrie centrale conserve l'alignement, donc les points T, U et M sont alignés.
De plus, le point O est le milieu du segment [LS].
La symétrie centrale conserve les milieux des segments.
On en déduit alors que le point U est le milieu du segment [TM].

Exercice 34 Programme de construction



Trace une droite (*D*) ; place deux points *F* et *I* tels que $F \in (D)$ et $I \notin (D)$.

Construis le point *E* symétrique de *F* par rapport à *I*, puis le point *G* symétrique de *E* par rapport à (*D*).

Trace les segments [*EF*] et [*EG*] ; trace la droite (*IG*).

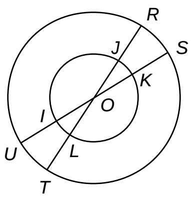
Exercice 35 Phrases à trous

a. *Le quadrilatère RSTU est un rectangle.*

b. *Le quadrilatère JKLI est un rectangle.*

c. *Par la translation qui transforme* :

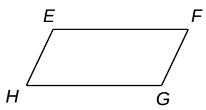
- *K en J, le point L a pour image I* ;
- *K en R, le point T a pour image I* ;
- *T en O, le point O a pour image R* ;
- *S en O le point U est l'image de O.*



Exercice 36 Tableau à compléter

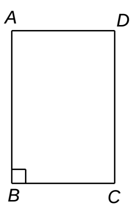
EFGH est un parallélogramme.

	Translation qui transforme		
	E en *F*	*F* en *G*	*H* en *E*
Point	*H*	*E*	*G*
Image	*G*	*H*	*F*



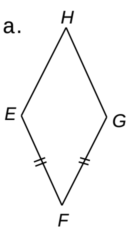
Exercice 37 Rédiger une démonstration

1.a.



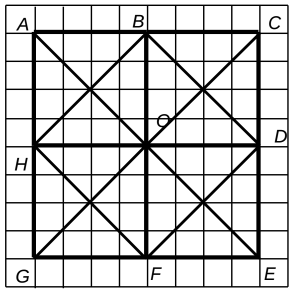
b. *D'une part, D est l'image de C par la translation qui transforme B en A ; par conséquent ABCD est un parallélogramme.*
D'autre part, on sait que (AB) et (BC) sont perpendiculaires, d'où l'angle $\widehat{ABC}$ *est droit.*
Or, un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle.
Donc ABCD est un rectangle.

2.a.



b. D'une part, *H* est l'image de *G* par la translation qui transforme *F* en *E* ; donc *EFGH* est un parallélogramme.
D'autre part, on sait que *EF*=*FG*.
Or, un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange. Donc *EFGH* est un losange.

Exercice 38 Avoir l'œil



1.

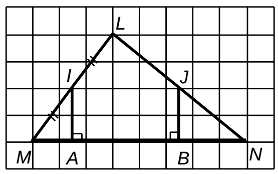
a. *Par la translation qui transforme H en F, le triangle ABH a pour image le triangle ODF.*

b. *Par la translation qui transforme O en G, le triangle BOD a pour image le triangle HGF.*

2. L'image de *BOH* par la translation qui transforme :

- *O* en *E* est le triangle *DEF* ;
- *O* en *D* est le triangle *CDO* ;
- *O* en *F* est le triangle *OFG*.

Exercice 39 Vrai ou faux ?



1. « *I* est le projeté orthogonal de *A* sur (*LM*) » est une phrase fausse ;
il faut dire :
« *A* est le projeté orthogonal de *I* sur (*MN*) »

2. « *J* est le projeté orthogonal de *I* sur (*BJ*) » est une phrase vraie ; en effet, en tenant compte des nœuds du quadrillage, *I* et *J* sont les milieux respectifs des côtés [*LM*] et [*LN*] du triangle *LMN* et la droite (*IJ*) est parallèle au support du 3e côté ; finalement le quadrilatère *ABJI* est un rectangle et $(IJ) \perp (BJ)$.

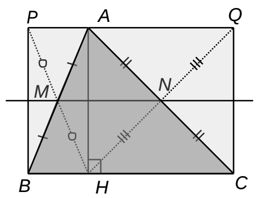
3. « La longueur *AB* est la moitié de *MN* » est une phrase vraie ; en effet, *I* et *J* étant les milieux respectifs des côtés [*LM*] et [*LN*] du triangle *LMN*, on a : $IJ = \frac{1}{2} MN$;

or, dans le rectangle *ABJI*, *IJ*=*AB* ; donc : $AB = \frac{1}{2} MN$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 40 **Symétrie et droites des milieux**

1.



H est le pied de la hauteur issue de *A*, dans *ABC*.

M est le milieu de [*AB*], *N* est le milieu de [*AC*].

P est symétrique de *H* par rapport à *M*, *Q* est symétrique de *H* par rapport à *N*.

2. Par construction, les diagonales du quadrilatère *BPAH* se coupent en leur milieu ; de plus, ce quadrilatère a un angle droit (en *H*) ; donc : *BPAH* est un rectangle.

De même, le quadrilatère *CQAH* est un rectangle.

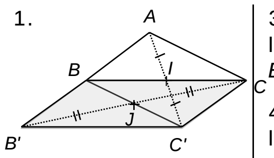
On en déduit que :
- les points *P*,*A* et *Q* sont alignés ;
- *BCQP* est un quadrilatère, dont les quatre angles sont droits ;
- *BCQP* est un rectangle.

3. Dans le rectangle *BPAH*, $MA = MH$ (*demi-diagonale*) ; dans le rectangle *CQAH*, $NA = NH$ (*demi-diagonale*) ; donc la droite (*MN*), qui passe par deux points équidistants de *A* et *H*, est la médiatrice de [*AH*].

4. (*MN*) est aussi (*dans les rectangles BPAH et CQAH*) médiatrice de [*BP*] et de [*CQ*] ; de plus, cette médiatrice commune aux deux côtés [*BP*] et de [*CQ*], opposés dans le rectangle *BCQP*, est axe de symétrie de ce rectangle.

Exercice 41 **Translation et symétrie centrale**

1.



ABC est tel que : $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 6$ cm.

2. *BB'C'* est l'image de *ABC* par la translation qui transforme A en *B*.

3. La translation conserve les longueurs, donc : $BB' = 3$ cm, $BC' = 4$ cm, $B'C' = 6$ cm.

4.a. *C'* est l'image de *C* par la translation qui transforme *A* en *B*, donc : *ABC'C* est un parallélogramme ;

b. Les segments [*BB'*] et [*CC'*] ont :
- même longueur que [*AB*],
- des supports parallèles à celui de [*AB*] ;

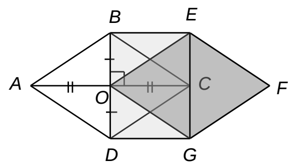
donc le quadrilatère non croisé *BB'C'C* est un parallélogramme.

5. Le triangle *CBC'* est l'image du triangle *ABC* par la symétrie par rapport au milieu *I* de [*BC*].

Le triangle *CBC'* est l'image du triangle *BC'B'* par la symétrie par rapport au milieu *J* de [*BC'*].

Exercice 42 **Du losange au rectangle**

1.



ABCD est un losange de centre *O*.

$AC = 6$ cm et $BD = 4$ cm.

2. Aire de *ABCD :*

$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = \underline{12\ \text{cm}^2}$.

3. *E*, *F* et *G* sont les images respectives de *B*, *C* et *D* par la translation qui transforme *A* en *O*.

4. Une figure et son image par une translation sont superposables ; donc :

a. *OEFG* est un losange ;

b. l'aire de *OEFG* est 12 cm².

5. *E* et *G* sont les images respectives de *B* et *D* par la translation qui transforme *A* en *O*; donc :
- $BE = DG = AO = OC$;
- $(BE) // (DG) // (AO) // (OC)$.

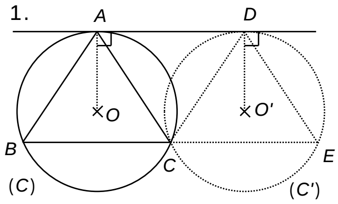
Les segments [*BE*] et [*DG*] ayant même longueur et des supports parallèles, le quadrilatère non croisé *BEGD* est un parallélogramme.

De plus $(OC) \perp (BD)$ (*diagonales d'un losange*) ; donc *BEGD* est un rectangle.

L'aire de ce rectangle est : $4 \times 3 = 12$ cm² ; le rectangle *BEGD* a même aire que le losange *ABCD*.

Exercice 43 **Tangente commune**

1.



Le cercle ($\mathcal{C}$) a pour centre O, pour rayon 3 cm.

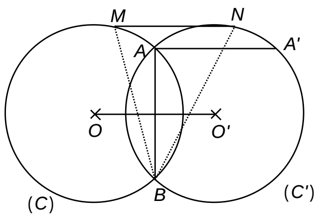
ABC est inscrit dans ($\mathcal{C}$) et isocèle en *A* ; $AB = 5$ cm.

2.a. *D* et *E* sont les images respectives de *A* et *C* par la translation qui transforme *B* en *C*.

b. Le cercle ($\mathcal{C}'$), circonscrit à *CDE*, est l'image de ($\mathcal{C}$) par la translation (*qui transforme B en C*).
Il passe par *D* et a pour centre le point *O'*, image de *O* par la translation.

3. Dans le parallélogramme *BCDA*, $(AD) // (BC)$;
dans le triangle isocèle en *A*, $(AO) \perp (BC)$;
donc : $(AO) \perp (AD)$, on en déduit que (*AD*), perpendiculaire en un point de ($\mathcal{C}$) à l'un de ses rayons, est tangente à ce cercle.
Dans la translation qui transforme *B* en *C*, l'image de *A* est *D*, celle de ($\mathcal{C}$) est ($\mathcal{C}'$) et celle de (*AD*) est elle-même ; comme toute translation conserve les mesures d'angles, la droite (*AD*), tangente en *A* à ($\mathcal{C}$), est transformée en la droite (*AD*), tangente en *D* à ($\mathcal{C}'$).

Exercice 44 **Recherche de l'orthocentre**



(C) et (C') ont même rayon.

Dans la translation qui transforme O en O',

A' est l'image de A

N est l'image de M.

1. Les droites (AB) et (OO') sont perpendiculaires ; en effet, A et B étant équidistants de O et O', (AB) est la médiatrice de [OO'].

2.a. $(AB)\perp(OO')$ et $(AA')//(OO')$, donc $(AB)\perp(AA')$.

b. (C'), cercle circonscrit au triangle ABA' rectangle en A, a l'hypoténuse [BA'] de ce triangle comme diamètre.

3.a. BNA', triangle dont le cercle circonscrit a pour diamètre le côté [BB'], est un triangle rectangle en N (point opposé à [BB']).

b. A' et N étant les images respectives de A et M par la translation qui transforme O en O', $OO'A'A$ et $OO'NM$ sont des parallélogrammes ;
[AA'] et [MN] ayant même longueur que [OO'], (AA') et (MN) étant parallèles à (OO'), on peut dire que le quadrilatère non croisé $AMNA'$, avec deux côté opposés, [AA'] et [MN], de même longueur et de supports parallèles est un parallélogramme.

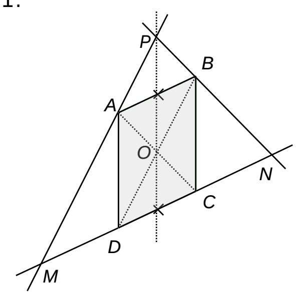
c. D'après 3.a. $(BN)\perp(NA')$; d'après 3.b. $(MA)//((NA')$; donc : $(MA)\perp(BN)$.

4. $(AB)\perp(OO')$ et $(MN)//(OO')$; donc : $(AB)\perp(MN)$.

5. Finalement, dans le triangle BMN, (MA) est la hauteur issue de M et (BA) est la hauteur issue de B ;
Donc A est l'orthocentre du triangle BMN.

Exercice 45 **Projection et médiane**

1.



$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

M est le projeté de A sur (DC) parallèlement à (BD).

N est le projeté de B sur (DC) parallèlement à (AC).

2. $ABCD$, $ABDM$ et $ABNC$ sont (*par construction*) des parallélogrammes ; donc : $AB=DC$, $AB=MD$ et $AB=CN$; donc : $MD=DC=CN$.

3.a. Soit P est le point d'intersection de (AM) et (BN).

b. $(AP)//(OB)$ et $(BP)//(OA)$; donc le quadrilatère $APBO$ est un parallélogramme.

c. La droite (PO), support de d'une diagonale de $APBO$, coupe l'autre diagonale [AB] en son milieu.
De plus, $(PO)//(AD)$ (*droite des milieux dans ABD*) ; donc (PO) coupe aussi [CD] en son milieu (*droite des milieux dans ACD*).

Activités d'intégration

Exercice 46 Dénombrer des translations

1. a. la translation qui transforme ① en ② n'est pas la même que celle qui transforme ④ en ③ ; en effet ces deux translations correspondent à deux glissements de sens contraires (le premier vers la droite, le second vers la gauche).
b. la translation qui transforme ⑥ en ④ est la même que celle qui transforme ④ en ① ; en effet ces deux translations correspondent au même glissement (vers la gauche).

2. On transforme ① en ②, ③ en ④ ou ④ en ⑤ avec une 1e translation (*glissement "ascendant vers la droite"*).

On transforme ② en ①, ④ en ③ ou ⑤ en ④ avec une 2e translation (*glissement "descendant vers la gauche"*).

On transforme ① en ③, ② en ④ ou ⑤ en ⑥ avec une 3e translation (*glissement "vertical vers le bas"*).

On transforme ③ en ①, ④ en ② ou ⑥ en ⑤ avec une 4e translation (*glissement "vertical vers le haut"*).

On transforme ① en ④, ② en ⑤ ou ④ en ⑥ avec une 5e translation (*glissement "descendant vers la droite"*).

On transforme ④ en ①, ⑤ en ② ou ⑥ en ④ avec une 6e translation (*glissement "ascendant vers la gauche"*).

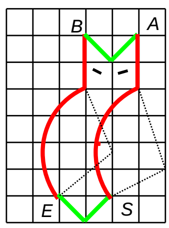
On transforme ① en ⑤ ou ③ en ⑥ avec une 7e translation (*glissement "horizontal vers la droite"*).

On transforme ⑤ en ① ou ⑥ en ③ avec une 8e translation (*glissement "horizontal vers la gauche"*).

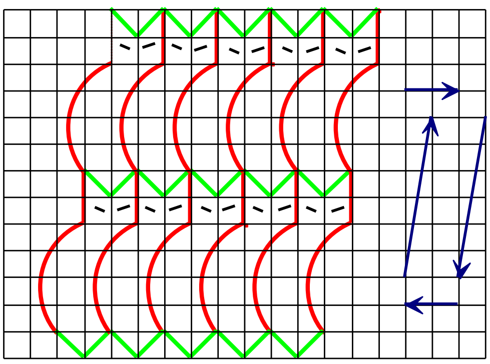
On transforme ① en ⑥ avec une 9e translation (*glissement "descendant vers la droite"*).

On transforme ⑥ en ① avec une 10e translation (*glissement "ascendant vers la gauche"*).

Exercice 47 Fabriquer un pavage



Motif de base du pavage (*réalisé selon les consignes*).

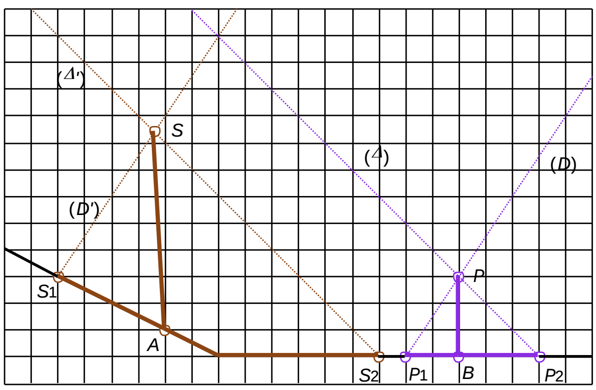


4. Ci-contre le pavage obtenu (à partir du motif de base) à l'aide de l'un des 4 glissements représentés par une flèche (*appelée vecteur dans le chapitre suivant*) :

- 2 carreaux vers la droite (*translation qui transforme B en A*) ;
- 2 carreaux vers la gauche (*translation qui transforme A en B*) ;
- 1 carreau vers la droite, puis 6 carreaux vers le haut (*translation qui transforme E en B*) ;
- 1 carreau vers la gauche, puis 6 carreaux vers le bas (*translation qui transforme B en E*).

Exercice 48 Raisonner à l'aide des ombres

1.



2.a. Le rayon du soleil passant par P à 9 h est la droite $(D) = (PP_1)$.
b. L'image de S à 9 h est le point S_1.
On en déduit que le point S est situé sur la droite (D'), passant par S_1 et parallèle à (D).

3.a. Le rayon du soleil passant par P à 17 h est la droite $(\Delta) = (PP_2)$.
Le point S est donc aussi situé sur la droite (Δ'), passant par S_2 et parallèle à (Δ).
b. La position exacte du point S est l'intersection des droites (D') et (Δ').
L'arbre n'a pas poussé parfaitement verticalement.

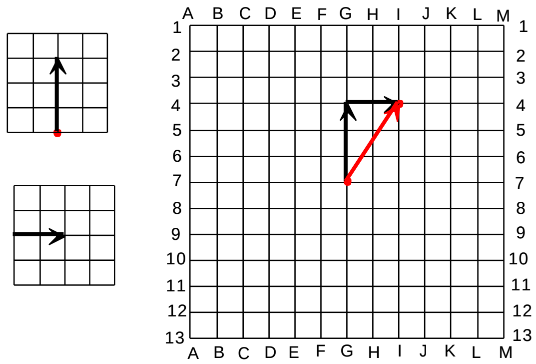
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Translation et vecteur [1a p 60]	18	33, 37	
2	Caractérisation d'un vecteur [1b p 60]	11, 12	34, 35	
3	Egalité vectorielle et parallélogramme [2 p 60]	13, 14, 15	37	
4	Somme de deux vecteurs [3 p 61]	20, 21, 22, 23, 25, 26, 27	36, 38	45, 49, 50
	Apprendre à construire la somme de deux vecteurs [1 p 62]	**1, 2, 3, 4**		
5	Vecteurs opposés [4 p 61]	18, 19	39	
	Milieu d'un segment et vecteurs [5 p 60]	16, 17, 19	37, 39	
	Apprendre à démontrer en utilisant des vecteurs [2 p 63]	**5, 6, 7, 8, 9, 10**, 28, 29, 30, 31, 32		40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

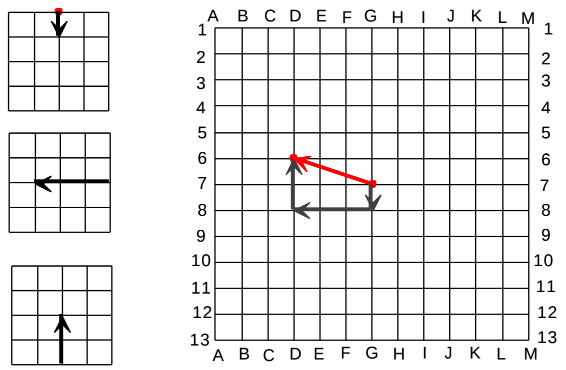
Pour démarrer **Le chasseur de fantômes !**

1.1



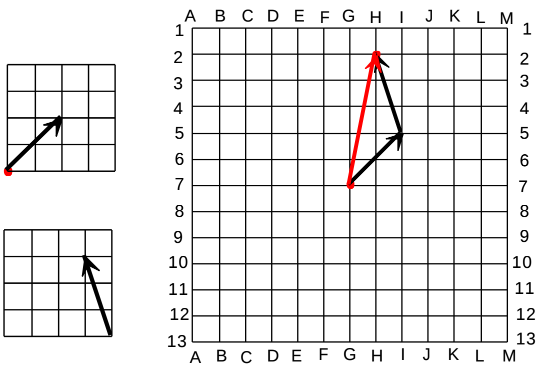
Après les deux déplacements successifs indiqués à gauche, le fantôme disparu en (G ; 7) réapparaîtra en (I ; 4).

1.2



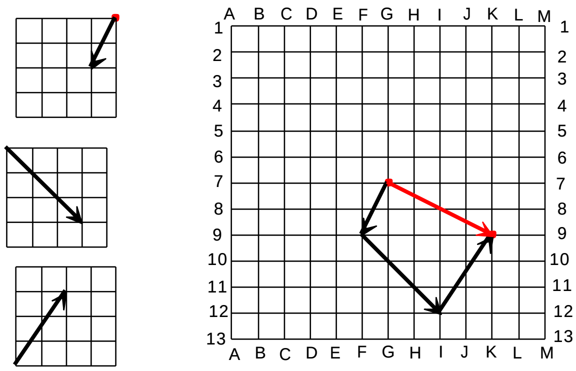
Après les trois déplacements successifs indiqués à gauche, le fantôme disparu en (G ; 7) réapparaîtra en (D ; 6).

2.1

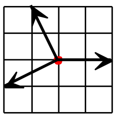


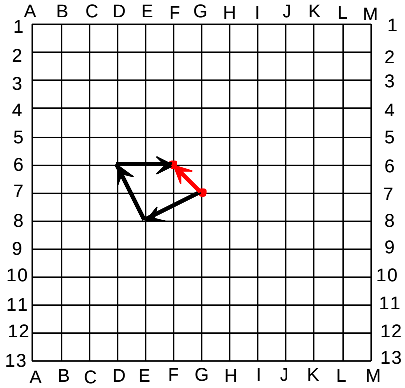
Après les deux déplacements successifs indiqués à gauche, le fantôme disparu en (G ; 7) réapparaîtra en (H ; 2).

2.2



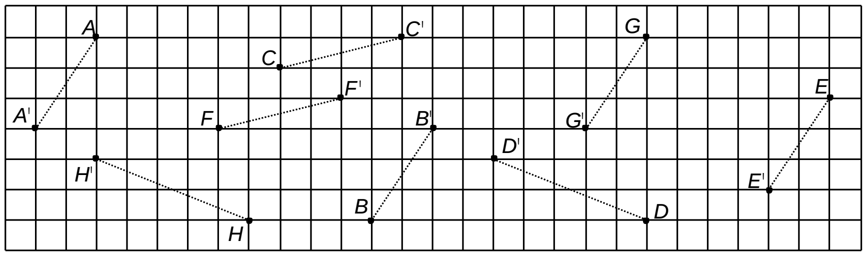
Après les trois déplacements successifs indiqués à gauche, le fantôme disparu en (G ; 7) réapparaîtra en (K ; 9).

3. 



Après les déplacements successifs indiqués à gauche, le fantôme disparu en (G ; 7) réapparaîtra en (F ; 6).

1 De la translation au vecteur



1.a. Couples de points qui caractérisent une même translation : (A, A'), (E, E') et (G, G') ; (B, B') ; (C, C') et (F, F') ; (D, D') et (H, H').

b. Nombre de translations utilisées : 4.

2. La famille composée de (A, A'), (E, E') et (G, G') est notée : $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{EE'}$ ou $\overrightarrow{GG'}$;

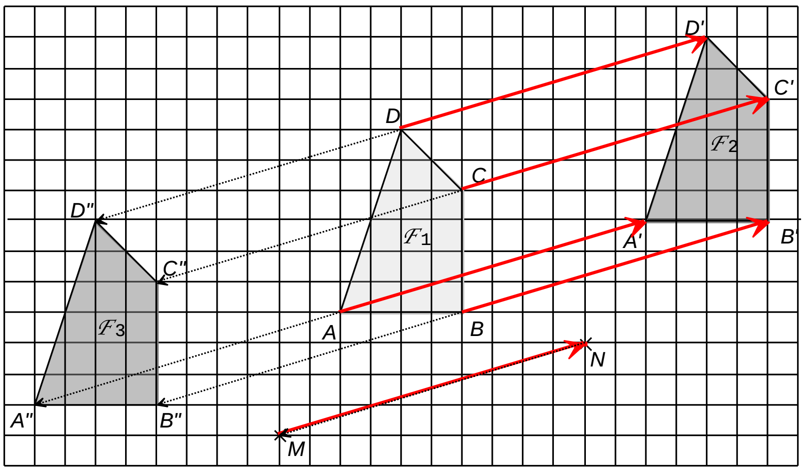
la famille composée de (B, B') est notée : $\overrightarrow{BB'}$;

la famille composée de (C, C') et (F, F') est notée : $\overrightarrow{CC'}$ ou $\overrightarrow{FF'}$;

la famille composée de (D, D') et (H, H') est notée : $\overrightarrow{DD'}$ ou $\overrightarrow{HH'}$.

2 Caractérisation d'un vecteur

1.



2.a. $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la translation $t_{\overrightarrow{MN}}$, de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

b. A', B', C' et D' sont les images respectives de A, B, C et D par cette translation.

c. Les segments [MN], [AA'], [BB'], [CC'] et [DD'] ont la même longueur.

d. Les droites supports de ces segments ont la même direction.

3.a. $\mathcal{F}_3$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la translation $t_{\overrightarrow{NM}}$, de vecteur $\overrightarrow{NM}$.

A", B", C" et D" sont les images respectives de A, B, C et D par cette translation.

b. Ce qu'il y a de semblable dans les translations de vecteur $\overrightarrow{MN}$ et de vecteur $\overrightarrow{NM}$, c'est :

- les longueurs des segments [MN], [AA'], [BB'], [CC'] et [DD'], d'une part, et celles des segments [NM], [AA"], [BB"], [CC"] et [DD"], d'autre part ;
- les directions des droites (MN), (AA'), (BB'), (CC') et (DD'), d'une part, et celles des droites (NM), (AA"), (BB"), (CC") et (DD"), d'autre part ;

ce qu'il y a de différent dans les translations de vecteur $\overrightarrow{MN}$ et de vecteur $\overrightarrow{NM}$, c'est :

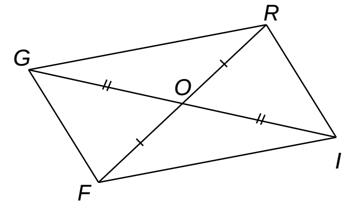
- les sens pour aller d'un point vers son image.

4. *Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est caractérisé par : une direction, celle de la droite <u>(MN)</u> ; une longueur, celle du segment <u>[MN]</u> et un sens, celui qui va de <u>M vers N</u>.*

Le vecteur $\overrightarrow{NM}$ est caractérisé par : une <u>direction</u>, celle de la droite <u>(NM)</u> ; une <u>longueur</u>, celle du segment <u>[NM]</u> et un <u>sens</u>, celui qui va de <u>N vers M</u>.

3 **Vecteur et parallélogramme**

1. *GRIF* est un parallélogramme ; en effet ses diagonales [*GI*] et [*FR*] ont le même milieu *O*.



2. On en déduit que :

a. l'image de *R* par $t_{\overrightarrow{GF}}$ est *I* ; b. l'image de *G* par $t_{\overrightarrow{FI}}$ est *R* ;

c. l'image de *F* par $t_{\overrightarrow{IR}}$ est *G* ; d. l'image de *I* par $t_{\overrightarrow{RG}}$ est *F*.

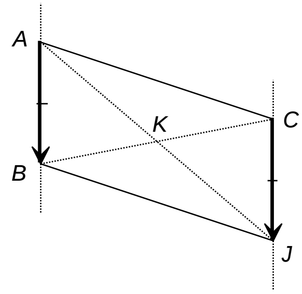
3. On en déduit encore que :

a. $\overrightarrow{RI} = \overrightarrow{GF}$; b. $\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{FI}$; c. $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{IR}$; d. $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{RG}$.

4.a. *A*, *B*, *C* et *J* sont quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CJ}$,

b. Le quadrilatère non croisé *ABJC*, qui a deux côtés [*AB*] et [*CJ*] de même longueur et de supports parallèles, est un parallélogramme

5. Dans le parallélogramme *ABJC*, les diagonales [*AJ*] et [*BC*] ont le même milieu *K*.



4 **Somme de deux vecteurs**

Partie A : Composée de deux translations et relation de Chasles

1. **Conjecture**

$\mathcal{F}_1$ est l'image de $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

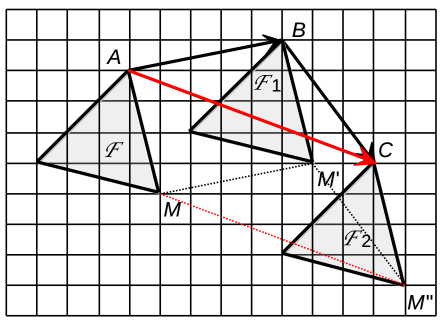
$\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$\mathcal{F}_2$ semble être l'image de $\mathcal{F}$ par la <u>translation</u> de vecteur $\underline{\overrightarrow{AC}}$.

2. **Démonstration**

a. Soit *M*' l'image de *M* par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$,

soit *M*" l'image de *M*' par la translation $t_{\overrightarrow{BC}}$.



b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ donc *ABM'M* est un parallélogramme ; en notant *AMM'B* ce parallélogramme, on obtient $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM'}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'M''}$ donc *BCM"M'* est un parallélogramme ; en notant *BM'M"C* ce parallélogramme, on obtient $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{CM''}$.

c. On en déduit que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM''}$ donc *AMM"C* est un parallélogramme ;

en notant *ACM"M* ce parallélogramme, on obtient $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MM''}$; c'est-à-dire : *M*" est l'image de *M* par $t_{\overrightarrow{AC}}$.

La conjecture est vraie.

3. **Définition**

La translation, qui transforme A en C, transforme aussi M en <u>M"</u>. Le vecteur de cette <u>translation</u> s'appelle la somme des <u>vecteurs</u> $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On note $\underline{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$. Cette égalité s'appelle la relation de Chasles.

Partie B : Vecteurs de même origine et règle du parallélisme

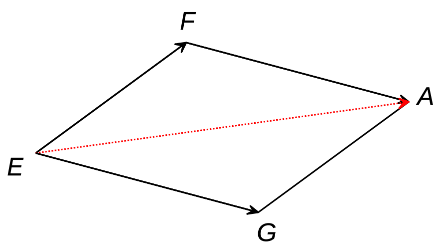
a. *E*, *F* et *G* sont trois points non alignés ; *EFAG* est un parallélogramme.

b. D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EA}$;

dans le parallélogramme *FAGE*, on a : $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EG}$.

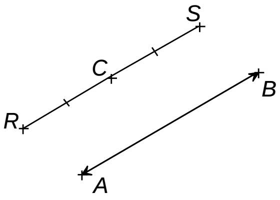
c. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ont la même origine *E*.

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} = \underline{\overrightarrow{EA}}$.



5 **Vecteurs opposés, vecteur nul, milieu d'un segment**

1.



2.a. Si B est l'image de A par $t_{\overrightarrow{RS}}$, alors $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AB}$;donc : $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{BA}$ et A est l'image de B par $t_{\overrightarrow{SR}}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{SR}$ ont même direction, même longueur et sont de sens contraires.

c. La longueur du vecteur $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR}$ est nulle ;

en effet, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{RR}$.

d. Deux vecteurs, qui ont la même direction, la même longueur mais des sens contraires, sont dits opposés ;

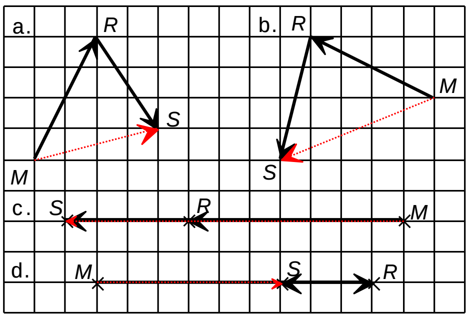
un vecteur, dont l'origine et l'extrémité sont confondues, est appelé vecteur nul.

3. Le point C du segment [RS], tel que $\overrightarrow{CR} + \overrightarrow{CS}$ soit un vecteur nul, est le milieu de ce segment.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à construire la somme de deux vecteurs

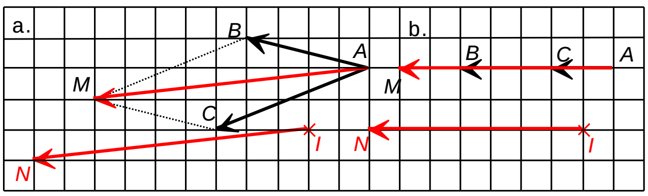
Exercice 1



$\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS}$.

Dans chaque cas, pour construire le vecteur d'origine *M* représentant $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS}$, on utilise la règle du « bout-à-bout ».

Exercice 2

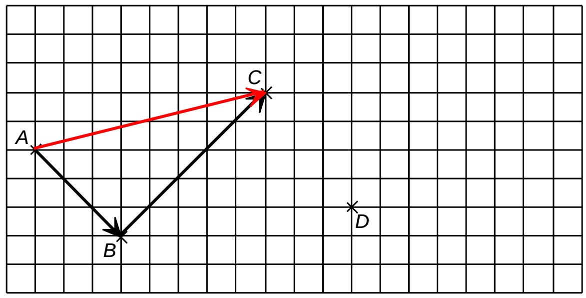


Dans les deux cas, *M* et *N* sont les points tels que :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

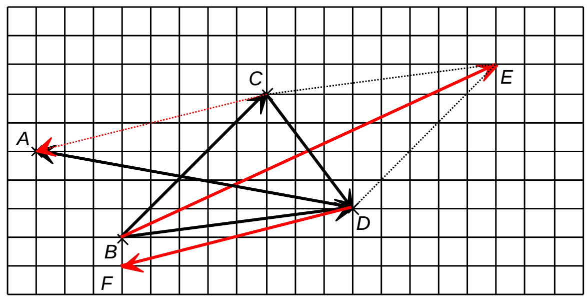
Exercice 3

2.a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



b. Méthode de construction la mieux adaptée : la règle du « bout-à-bout ».

3.

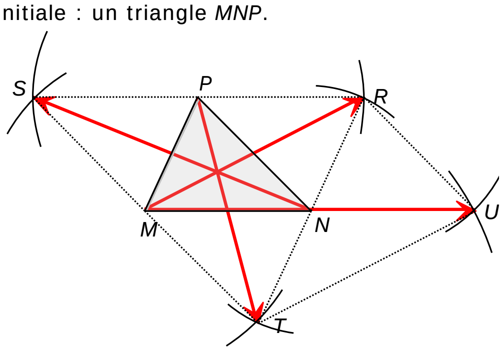


a. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE}$; méthode de construction la mieux adaptée : la règle du parallélogramme ;

b. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DF}$; méthode de construction la mieux adaptée : la règle du « bout-à-bout ».

Exercice 4

Donnée initiale : un triangle *MNP*.



Construction, en utilisant un compas et la règle du parallélogramme, des points *R*, *S*, *T* et *U* tels que :

a. $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}$;

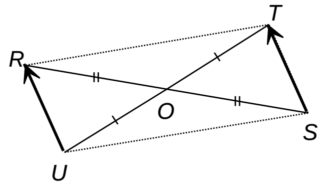
b. $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$;

c. $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$;

d. $\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MT}$.

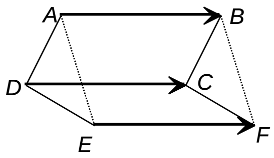
2 Apprendre à démontrer en utilisant des vecteurs

Exercice 5



Si O est le milieu de [RS] et [TU], alors $URTS$ est un parallélogramme ;
donc : $\overrightarrow{UR} = \overrightarrow{ST}$.

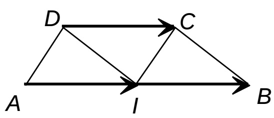
Exercice 6



1. $ABCD$ est un parallélogramme,
donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
$DCFE$ est un parallélogramme,
donc : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$.

2. On en déduit que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$;
donc $ABFE$ est un parallélogramme.

Exercice 7

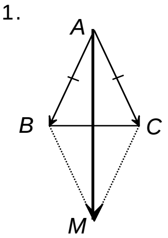


1. $AICD$ est un parallélogramme,
donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DC}$;
$DIBC$ est un parallélogramme,
donc : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$;
On en déduit que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

2. Finalement I est le milieu de [AB].

Exercice 8

1.

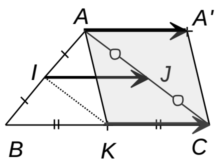


1. ABC est un triangle isocèle en A.

2. M est le point tel que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

3. Par construction $ABMC$ est un parallélogramme, dont deux côtés consécutifs ont la même longueur ; donc ce quadrilatère est un losange.

Exercice 9



1. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC], donc : (IJ)//(BC) et (IK)//(AC).

Avec ses côtés opposés parallèles, le quadrilatère $IJCK$ est un parallélogramme.

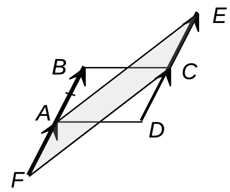
2.a. D'après ce qui précède : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KC}$;

or par construction : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IJ}$;

donc : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{KC}$.

b. On en déduit que $AA'CK$ est un parallélogramme.

Exercice 10



1. $ABCD$ est un parallélogramme,
donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. E est le symétrique de D par rapport à C ;
F est le symétrique de B par rapport à A.

3. C est le milieu de [DE], donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$;

A est le milieu de [FB], donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB}$.

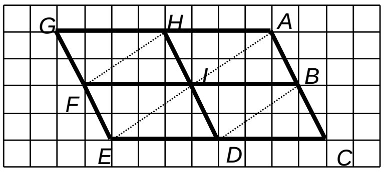
4. On en déduit que : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA}$;

donc le quadrilatère $CEAF$ est un parallélogramme.

Activités d'application

Vecteurs égaux, vecteurs opposés

Exercice 11



a. $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$;

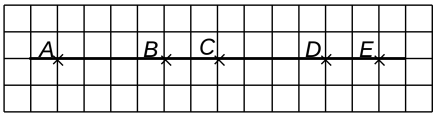
b. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG}$;

c. $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EG}$;

d. $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$;

e. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DB}$.

Exercice 12

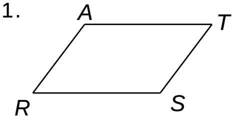


1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$.

Exercice 13

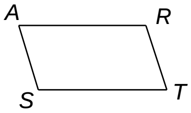
1.



Egalités qui signifient que *RATS* est un parallélogramme :

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TA}$; $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RA}$; $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AT}$.

2.



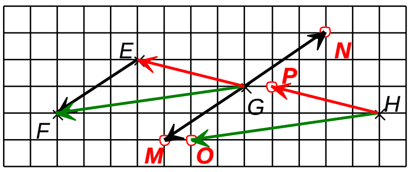
Egalités qui signifient que *ARTS* est un parallélogramme :

$\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{TS}$; $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{AS}$.

Exercice 14

1.

Les points *E*, *F*, *G* et *H* sont donnés.

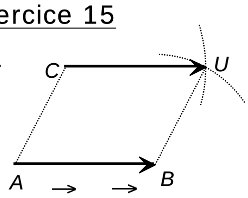


2.a. *M* est tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{EF}$; *N* est tel que $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{FE}$.

b. *O* est tel que $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{GF}$; *P* est tel que $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{GE}$.

Exercice 15

1.a.

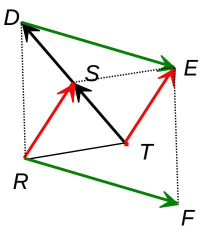


$\overrightarrow{CU} = \overrightarrow{AB}$.

b. *U* est le point d'intersection du cercle de centre *B*, de rayon *AC*, et du cercle de centre *C*, de rayon *AB*.

b. Le point *U* est le quatrième sommet du parallélogramme *ABUC*.

2.a.



b. *D*, *E* et *F* sont tels que :

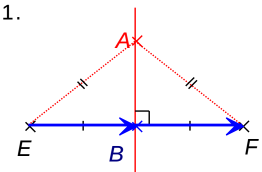
$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{TS}$ (*S* milieu de [*TD*]) ;

$\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{RS}$ (parallélogramme *SRTE*) ;

$\overrightarrow{RF} = \overrightarrow{DE}$ (parallélogramme *RFED*).

Exercice 16

1.



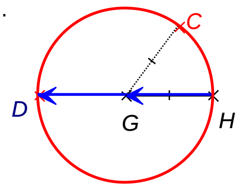
EF=4 cm.

2. Les points *A* tels que *EA*=*AF* sont les points de la médiatrice du segment [*EF*].

3. Le point *B* tel que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$ est le milieu du segment [*EF*].

Exercice 17

1.



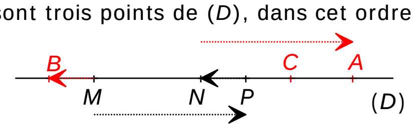
GH=3 cm.

2. Les points *C* tels que *GC*=*GH* sont les points du cercle de centre *G* et de rayon *GH*.

3. Le point *D* tel que $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{HG}$ est le symétrique de *H* par rapport à *G* (*G* milieu de [*HD*]).

Exercice 18

1. *M*, *N* et *P* sont trois points de (*D*), dans cet ordre :



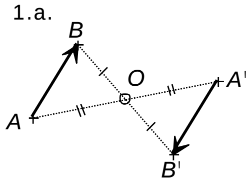
2.a. *A*∈(*D*) et est tel que : $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$;

b. *B*∈(*D*) et est tel que : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{PN}$;

c. *C*∈(*D*) et est tel que : $\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$.

Exercice 19

1.a.



b. *A'* et *B'* sont les symétriques respectifs de *A* et *B* par rapport à *O*.

c. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$

(les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont opposés).

2.a. $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{B'O}$.

b. Opposés de $\overrightarrow{AO}$: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'O}$.

3. Les égalités qui traduisent que *O* est le milieu d'un segment sont :

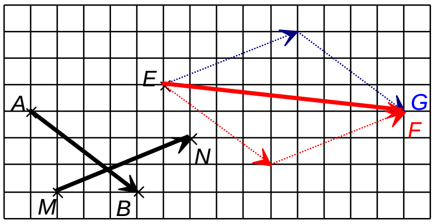
$\overrightarrow{B'O} = \overrightarrow{OB}$ (*O* est alors le milieu de [*BB*']) ;

$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{A'O}$ (*O* est alors le milieu de [*AA*'])

Somme de deux vecteurs

Exercice 20

1.



2. En utilisant la règle du « bout-à-bout » :

a. en rouge, construction de F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN}$;

b. en bleu, construction de G tel que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AB}$.

c. On remarque que F et G sont confondus.

d. On en déduit que, dans une somme de deux vecteurs, on peut changer l'ordre de ces vecteurs (*commutativité*).

3. Quatre points R, S, T et U sont donnés.

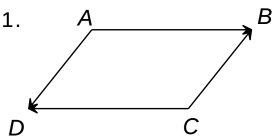
$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}$; $\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TU} = \overrightarrow{SU}$;

$\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TR}$; $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{UR} = \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{UT}$;

$\overrightarrow{SU} + \overrightarrow{US} = \overrightarrow{SS} = \vec{0}$; $\overrightarrow{RU} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{SU}$.

Exercice 21

1.



ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

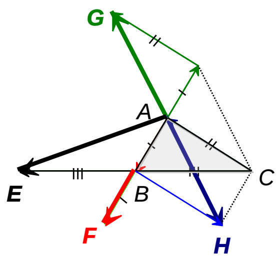
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$;

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$;

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 22

1.



Un triangle *ABC* est donné.

2. E, F, G et H sont tels que :

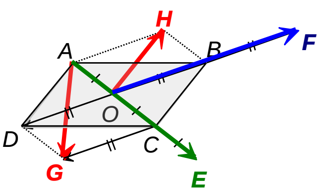
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$;

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Exercice 23



ABCD est un parallélogramme de centre *O*.

E, F, G et H sont tels que :

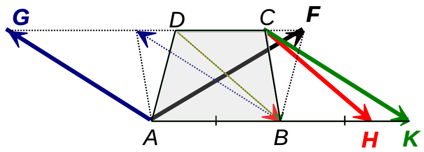
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DO}$;

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OD}$;

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Exercice 24



ABCD est un trapèze de bases [*AB*] et [*CD*].

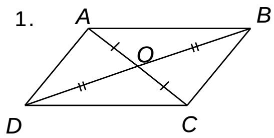
F, G, H et K sont tels que :

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$;

Exercice 25

1.



ABCD est un parallélogramme de centre *O*.

ABCD est un parallélogramme

donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

ainsi $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$.

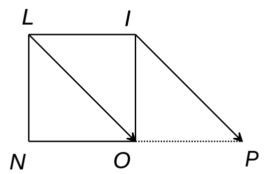
2.a. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$;

b. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$;

c. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA}$.

Exercice 26

1.a.



LION est un carré de côté 3 cm.

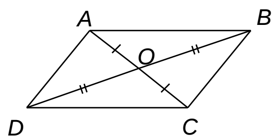
b. Si P est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{LO}$, alors :

$\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{LO}$.

2.a. $\overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{LI}$; b. $\overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LI} = \overrightarrow{NI}$;

c. $\overrightarrow{NL} + \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LO} = \overrightarrow{NO}$; d. $\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{NP}$.

Exercice 27



ABCD est un parallélogramme de centre *O*.

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$;

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$;

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$;

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$;

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$;

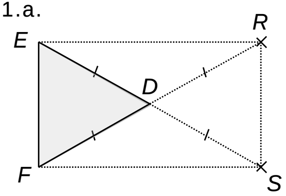
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$;

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Petits problèmes

Exercice 28

1.a.



DEF est isocèle en *D*.

b. *S* et *R* sont les symétriques respectifs de *E* et *F* par rapport à *D*.

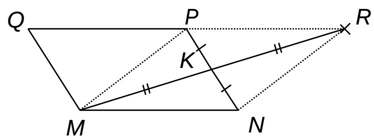
c. *RSFE* est un rectangle ; en effet, les diagonales de ce quadrilatère :
- se coupent en leur milieu (parallélogramme)
- ont la même longueur.

2.a. $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DS}$; $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{FS}$.

b. $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{FS} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ER} = \overrightarrow{FR}$.

Exercice 29

1.

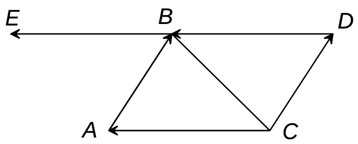


2. *MNPQ* est un parallélogramme donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

K est le milieu de [*NP*] (par construction) et de [*MR*] (puisque *R* est le symétrique de *M* par rapport à *K*) ;
donc le quadrilatère *MNRP*, dont les diagonales se coupent en leur milieu, est un parallélogramme et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PR}$.

3. Finalement $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PR}$; donc *P* est le milieu de [*QR*].

Exercice 30



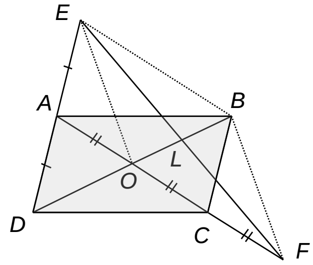
1. Si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, alors *ABDC* est un parallélogramme et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$.

2. *E* est tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$.

3. On a : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BE}$; donc *B* est le milieu de [*ED*].

Exercice 31

ABCD est un parallélogramme ;
A est le milieu de [*DE*] ;
F∈(*AC*) et *AO*=*OC*=*CF*.



1.a. *ABCD* est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$;
comme *A* est le milieu de [*DE*], on a : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$;
donc : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE}$.

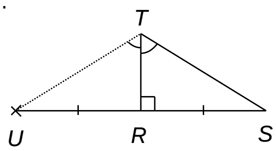
b. On en déduit que *AEBC* est un parallélogramme et $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}$.

2. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont deux vecteurs qui ont mêmes direction, sens et longueur (2×*OC*) ; donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OF}$.

3. On en déduit que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OF}$; donc le quadrilatère *EBFO* est un parallélogramme, dont les diagonales [*EF*] et [*OB*] ont même milieu *L*.

Exercice 32

1.



2. On a :
(*RT*)⊥(*RS*) ;
$\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{SR}$, donc *R* est le milieu de [*SU*].

On en déduit que :
- (*TR*) est la médiatrice de [*US*] ;
- *UTS* est un triangle isocèle en *T*, dont la droite (*TR*) est à la fois hauteur, médiane et bissectrice issues de son sommet principal *T*.

Finalement : mes $\widehat{STR}$ = mes $\widehat{RTU}$.

Exercice 33 Vecteur : plusieurs significations

Significations du mot « vecteur » en médecine :

1. *Certains moustiques sont vecteurs du paludisme* signifie que ces moustiques transmettent le paludisme.

2. *L'eau est le principal vecteur du choléra* signifie que c'est surtout par l'eau que se transmet le choléra.

Exercice 34 Notations et vocabulaire

1. EF désigne une longueur ;
$\overrightarrow{EF}$ désigne un vecteur ;
$[EF]$ désigne un segment ;
(EF) désigne une droite.

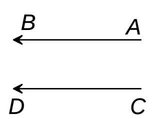
3. $\underline{\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}}$, donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Le point J est sur la médiatrice de $[HG]$, donc : $\underline{JH=JG}$.

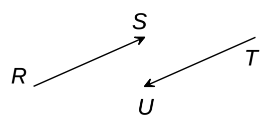
On sait que $\underline{(EF)//(HG)}$, $\underline{EF=HG}=3$ cm, $[EF)$ et $[HG)$ sont de même sens, donc $EFGH$ est un parallélogramme.

O est le milieu de $\underline{[HF]}$, donc $\underline{\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OF}}$.

Exercice 35 Attention aux notations



$\underline{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}$



$\underline{\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{TU}}$

Exercice 36 Retrouver les bonnes relations

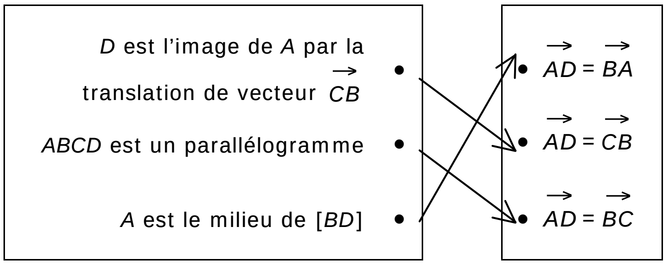
$AB^2+BC^2=AC^2$ signifie que ABC est un triangle rectangle ; c'est la propriété de Pythagore.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ signifie que A, B et C sont trois points quelconques du plan ; c'est la relation de Chasles.

$AB+BC=AC$ signifie que A, B et C sont obligatoirement trois points alignés dans cet ordre ; c'est l'inégalité triangulaire.

$AB+BC>AC$ signifie que ABC est obligatoirement un triangle non aplati ; c'est l'inégalité triangulaire

Exercice 37 Traduction vectorielle



Exercice 38 Appliquer la relation de Michel Chasles

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$; oui

$\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{MR} = \underline{\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RE}} = \underline{\overrightarrow{ME}}$;

$\underline{\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UE} = \overrightarrow{ME}}$;

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \underline{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 39 Contre-exemple

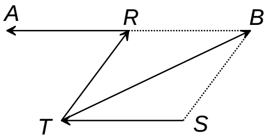
1. Lorsque $(RS)//(UT)$ et $RS=UT$, on ne peut pas conclure que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$; en effet $[RS)$ et $[UT)$ peuvent ne pas être de même sens (et alors ces vecteurs sont opposés).

2. Un point M peut être à égale distance des points A et B sans que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$; c'est le cas pour tout point M de la médiatrice de $[AB]$, distinct de son milieu.

Exercices d'approfondissement

Exercice 40 **Positions de points**

1.a.



Les points R, S et T sont non alignés.

b. A est l'image de R par $t_{\overrightarrow{ST}}$.

c. Par construction : $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{AR}$.

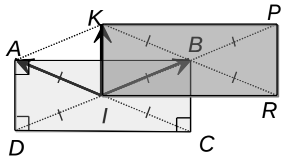
2.a. $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TB}$.

b. *STRB* est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{RB}$.

3.a. D'après ce qui précède : $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RB}$.

b. On en déduit que R est le milieu du segment [AB].

Exercice 41 **Quadrilatères particuliers**



ABCD est un rectangle de centre I.

1. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$, donc *AKBI* est un parallélogramme ;

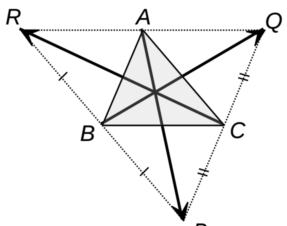
[IA] et [IB] ont même longueur (demi-diagonale d'un rectangle), donc *AKBI* est un losange.

2.a. P et R sont les symétriques respectifs de I et K par rapport à B, donc B est le milieu de [IP] et de [KR].

b. *IKPR*, quadrilatère dont les diagonales ont même milieu B et même longueur, est un rectangle de centre B.

Exercice 42 **Droites concourantes**

1.



Le triangle *ABC* est donné.

P, Q et R sont tels que :

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

2.a. Par construction, les quadrilatères *ABPC* et *ACBR* sont des parallélogrammes.

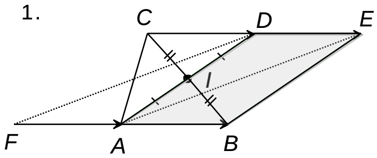
b. On a : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AC}$; donc : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{RB}$; c'est-à-dire : B est le milieu de [RP].

c. De façon analogue, on démontre que C est le milieu de [PQ] et A est le milieu de [QR].

d. On en déduit que les droites (AP), (BQ) et (CR), médianes du triangle *RPQ*, sont concourantes.

Exercice 43 **Parallélogrammes enchevêtrés**

1.



a. Le triangle *ABC* est tel que : $AB = 4$ cm, $BC = 4{,}6$ cm, $AC = 3{,}5$ cm.

b. I est le milieu de [BC].

2.a. D est le symétrique de A par rapport à I, donc I est le milieu de [AD].

b. *ABDC*, dont les diagonales [BC] et [AD] ont même milieu, est un parallélogramme et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

3.a. E est l'image de D par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

b. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ et *ABED* est un parallélogramme.

4.a. F est tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}$.

b. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on a $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CD}$ et *AFCD* est un parallélogramme.

5. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}$, on a : $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DE}$; donc *AFDE* est un parallélogramme, dont le centre est le milieu de [AD], c'est-à-dire I.

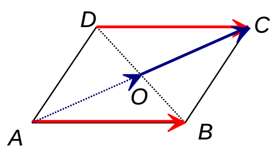
6. *ABDC* est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$;

AFDE est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AE}$;

AFCD est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DA}$;

I milieu de [AD] donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$.

Exercice 44 **Remplacer des vecteurs**



ABCD est un parallélogramme de centre O ; donc :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
- O milieu de [AC] et $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB}$;

donc : $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ est opposé à $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$.

Exercice 45 **Somme de plusieurs vecteurs**

1.a. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

b. On constate que les résultats sont identiques (et on peut écrire ces calculs sans parenthèses).

2.a. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$;

b. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}$;

c. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ED}$;

d. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{ED}$.

3. $\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{SA}$ est une égalité fausse ;

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PA}$ est une égalité vraie

(en effet : $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SA}$) ;

$\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{EU}$ est une égalité vraie

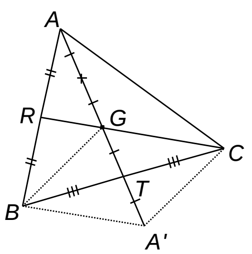
(en effet : $\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MU}$) ;

$\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{LM}$ est une égalité fausse

(en effet : $\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EL}=\overrightarrow{UL}$).

Exercice 46 **Avec des médianes**

1.



a. G, point d'intersection des médianes issues des sommets A et C de ABC, est le centre de gravité de ce triangle.

b. le point A' est tel que : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}$.

c. Par construction, $GBA'C$ est un parallélogramme ; donc T, milieu de sa diagonale $[BC]$, est aussi milieu de sa seconde diagonale $[GA']$.

2.a. G, centre de gravité de ABC, est situé aux deux tiers de la médiane $[AT]$ à partir de A ;

donc : $AG=\dfrac{2}{3}AT$ et $GT=\dfrac{1}{3}AT$ et $GA'=2GT=AG$.

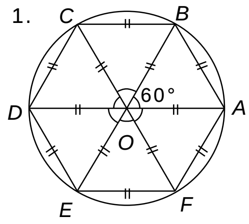
Comme $G\in[AA']$, G est le milieu de ce segment ;

c'est-à-dire : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$.

b. On en déduit que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$.

Exercice 47 **Avec un hexagone régulier**

1.



$ABCDEF$ est un hexagone régulier, inscrit dans un cercle de centre O :

- $OA=OB=OC=OD=OE=OF$;
- mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{BOC}$ = … = mes $\widehat{FAO}$ $=\dfrac{360}{6}=60°$.

Donc les six triangles AOB, BOC, COD, DOE, EOF et FOA sont équilatéraux.

a. Le quadrilatère $ABCO$, dont les quatre côtés sont de même longueur, est un losange.

b. On en déduit que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$.

2.a. De même : $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OE}$;

b. Les points B, O et E sont alignés dans cet ordre ;

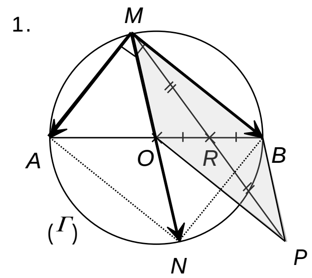
comme $OB=OE$, O est le milieu de $[BE]$ et $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

3. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}$

$=\vec{0}$.

Exercice 48 **Avec un cercle**

1.



(Γ) est un cercle (centre : O, rayon : 4 cm)

$[AB]$ est un diamètre de (Γ)

$M\in(\Gamma)$ et $AM=5$ cm

2. $M\in(\Gamma)$, cercle de diamètre $[AB]$, donc MAB est un triangle rectangle en M.

3.a. R est le milieu de $[OB]$; P est le symétrique de M par rapport à R.

b. Les diagonales $[MP]$ et $[OB]$ de $MBPO$ ont le même milieu R, donc ce quadrilatère est un parallélogramme.

c. On en déduit que : $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{BP}$.

4.a. N est le point tel que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

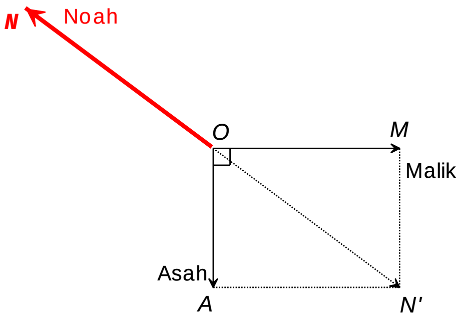
b. Par construction $AMBN$ est un parallélogramme ; ayant un angle droit en M, ce parallélogramme est un rectangle.

c. O, milieu de la diagonale $[AB]$ du rectangle $AMBN$, est aussi milieu de la diagonale $[MN]$; donc : $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$.

Activités d'intégration

Exercice 49 **Tir à la corde**

1.a.



Soit N' le point tel que $\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}$.

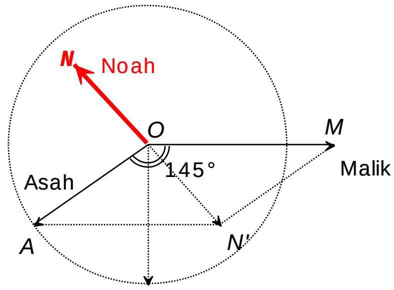
Le vecteur $\overrightarrow{ON}$ représentant la force avec laquelle Noah tire sur sa corde (sachant que l'anneau O est immobile)

est tel que : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$,

c'est-à-dire : $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{ON'}$.

b. C'est Noah, dont le vecteur représentant sa force a la plus grande longueur, qui tire le plus fort.

2.



Dire que Malik et Asah tirent avec la même force que pour le tir précédent signifie que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$, représentant ces forces, ont la même longueur que précédemment ;
par contre l'angle entre les cordes passe de 90° à 145°.

Le vecteur $\overrightarrow{ON}$ représentant la force avec laquelle Noah tire sur sa corde (sachant que l'anneau O reste immobile) est toujours tel

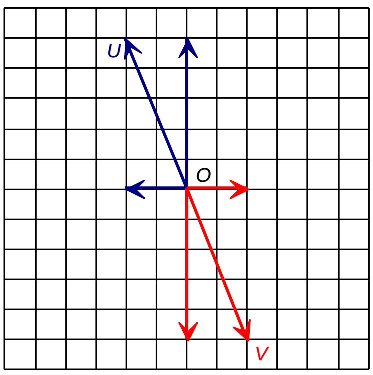
que : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$,

c'est-à-dire : $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{ON'}$, avec $\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}$.

C'est maintenant Malik, dont le vecteur représentant sa force a la plus grande longueur (comme le montre la position de M, A et N par rapport au cercle de centre O passant par A), qui tire le plus fort.

Exercice 50 **Le bateau de Paul**

1.

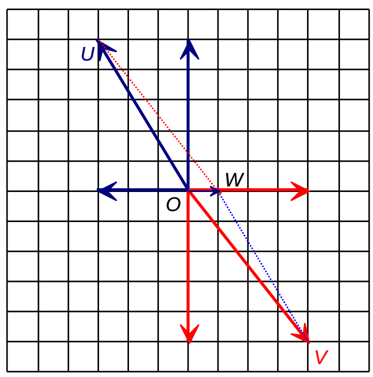


Ci-dessus : $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH}$ *et* $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$;

$\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = \vec{0}$;

donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$ et le bateau de Paul est immobile.

2.



Ci-dessus : $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GH}$ *et* $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$;

$\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OW} \neq \vec{0}$;

donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} \neq \vec{0}$ et le bateau de Paul n'est plus immobile.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Repère sur une droite [1.a p 71]	21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33	49, 50	55, 61
	Distance entre deux points [2.b p 71]	34, 35, 36, 37, 38	51	56
	Apprendre à repérer des points sur une droite [1 p 72]	**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13**		
2	Repère dans le plan [2 p 71]	39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48	52, 53, 54	57, 58, 59, 60, 62
	Apprendre à lire des coordonnées et à placer des points [2 p 73]	**14, 15, 16, 17, 18, 19, 20**		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer **Le fleuve Sanaga**

Comparaison du débit du fleuve Sanaga en janvier et six mois plus tard.

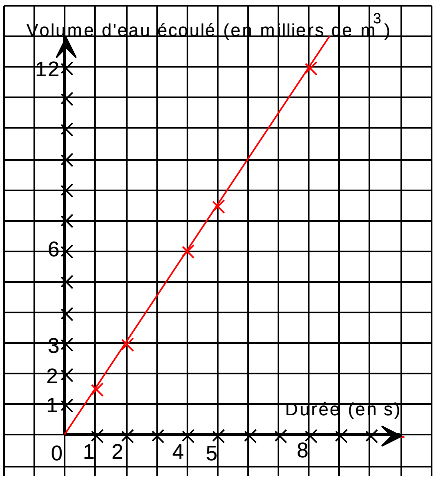
1. En janvier, 3 000 m^3 d'eau se sont écoulés en 2 s.

a. Débit moyen du fleuve : 1 500 m^3/s.

b. Si le volume d'eau écoulé est proportionnel à la durée de l'écoulement :

Durée (en s)	1	2	4	5	8
Volume d'eau écoulé (en milliers de m^3)	1,5	3	6	7.5	12

c. Représentation graphique :



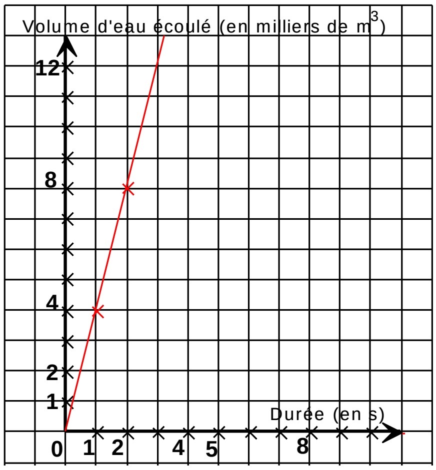
La représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère. Cela était prévisible puisqu'il s'agit d'une situation de proportionnalité.

2. Six mois plus tard, le débit moyen du fleuve est de 4 000 m^3/s.

a. Le volume d'eau écoulé restant proportionnel à la durée de l'écoulement :

Durée (en s)	1	2	4	5	8
Volume d'eau écoulé (en milliers de m^3)	4	8	16	20	32

b. Représentation graphique :



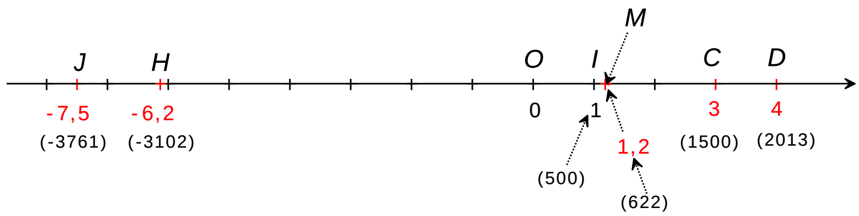
La représentation graphique reste une droite qui passe par l'origine du repère, puisqu'il s'agit toujours d'une situation de proportionnalité.

c. A six mois d'intervalle, volume d'eau supplémentaire qui s'est écoulé : au bout de 2 s : 8 000-3 000=5 000 m^3 ;
au bout de 8 s : 32 000-12 000=20 000 m^3.

1 Repérage sur une droite

1. Abscisse d'un point

a. Graduation d'une droite :



b. Dire que la graduation $OI = 1$ cm représente 500 ans signifie que le point *I* (situé à 1 cm à droite de *O*) représente l'an 500.

L'an 1500 est alors représenté par le point *C* situé à $\frac{1500}{500} = 3$ cm de *O*, du même côté (nombre *positif*) que *I*.

On dit que 3 est l'abscisse de *C*.

c. L'an 2013 est représenté par le point *D* d'abscisse $\frac{2013}{500} \approx \underline{4}$;

L'an 622 est représenté par le point *M* d'abscisse $\frac{622}{500} \approx \underline{1{,}2}$;

L'an -3102 est représenté par le point *H* d'abscisse $-\frac{3102}{500} \approx \underline{-6{,}2}$;

L'an -3761 est représenté par le point *J* d'abscisse $-\frac{3761}{500} \approx \underline{-7{,}5}$.

2. Distance entre deux points

a. $MC \approx 3 - 1{,}2 \approx$ <u>1,8 cm</u>. Ce qui se traduit par : $1{,}8 \times 500 \approx$ <u>900 années</u> [vérification : 1500-622=878].

$JD \approx 4 + 7{,}5 \approx$ <u>11,5 cm</u>. Ce qui se traduit par : $11{,}5 \times 500 \approx$ <u>5750 années</u> [vérification : 2013-(-3761)=5774].

b. x_A et x_B étant les abscisses respectives des points *A* et *B*, si $x_A > x_B$ alors « *la distance AB est égale à* $\underline{x_A - x_B}$ ».

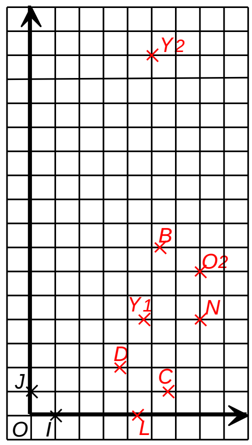
2 Repérage dans le plan

Tableau indiquant les températures relevées dans certaines capitales africaines (un certain jour de l'année) et leur altitude par rapport au niveau de la mer :

	Bamako (B)	Cotonou (C)	Dakar (D)	Libreville (L)	Niamey (N)	Ouagadougou (O_2)	Yamoussoukro (Y_1)	Yaoundé (Y_2)
Température (en °C)	26	29	19	27	35	35	24	25
Altitude (en m)	350	50	100	0	200	300	200	750

1. Dans le repère (*O*, *I*, *J*) ci-contre où :
   1 cm sur l'axe des abscisses représente 5°C ,
   1 cm sur l'axe des ordonnées représente 50 m d'altitude,

- les coordonnées du point *N* (Niamey) sont (7 ; 4) ;
- les coordonnées du point *B* (Bamako) sont (5,2 ; 7) ;
- les coordonnées du point *C* (Cotonou) sont (5,8 ; 1) ;
- les coordonnées du point *D* (Dakar) sont (3,8 ; 2) ;
- les coordonnées du point *L* (Libreville) sont (5,4 ; 0) ;
- les coordonnées du point O_2 (Ouagadougou) sont (7 ; 6) ;
- les coordonnées du point Y_1 (Yamoussoukro) sont (4,8 ; 4) ;
- les coordonnées du point Y_2 (Yaoundé) sont (5 ; 15).



2. On ajoute les données de deux autres capitales :

Pretoria (*P*) : 24°C ; 1 500 m et Addis-Abeba (*A*) : 15°C ; 2 500 m.

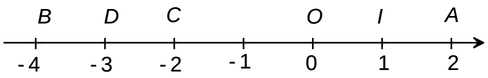
a. En gardant le même repère, le point *P* et, surtout, le point *A* seront impossibles à placer sur un cahier, à cause des ordonnées trop grandes : $\frac{1\,500}{50} = \underline{30}$ et $\frac{2\,500}{50} = \underline{50}$.

b. Par contre, en prenant (sur l'axe des ordonnées) 1 cm pour 200 m d'altitude, les dix capitales pourront être placées ; en effet les ordonnées des points *P* et *A* seront alors respectivement : $\frac{1\,500}{200} = \underline{7{,}5}$ et $\frac{2\,500}{200} = \underline{12{,}5}$.

Méthodes et savoir-faire

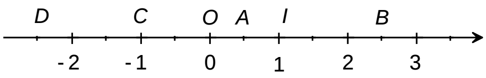
1 Apprendre à repérer des points sur une droite

Exercice 1



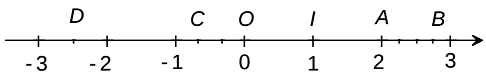
Dans le repère (O, I), on lit : $A(2)$, $B(-4)$, $C(-2)$, $D(-3)$.

Exercice 2



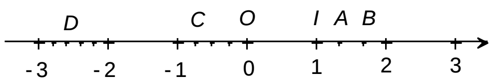
Dans le repère (O, I), on lit : $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{2}\right)$, $C(-1)$, $D\left(-\frac{5}{2}\right)$.

Exercice 3



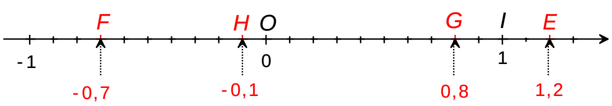
Dans le repère (O, I), on lit : $A(2)$, $B\left(\frac{11}{4}\right)$, $C\left(-\frac{2}{3}\right)$, $D\left(-\frac{5}{2}\right)$.

Exercice 4

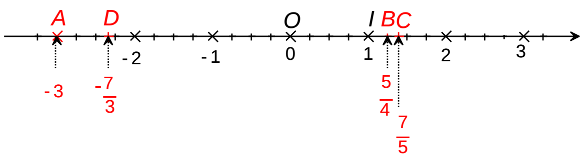


Dans le repère (O, I), on lit : $A\left(\frac{4}{3}\right)$, $B\left(\frac{5}{3}\right)$, $C\left(-\frac{3}{4}\right)$, $D\left(-\frac{13}{5}\right)$.

Exercice 5

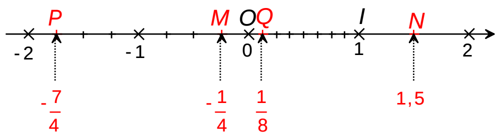


Exercice 6



Observations : $-\frac{7}{3}=-2-\frac{1}{3}$; $\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$; $\frac{7}{5}=1+\frac{2}{5}$.

Exercice 7



Exercice 8

Pour $M(5)$ et $N(2{,}7)$, on a : $5>2{,}7$;

donc : $MN=5-2{,}7=\underline{2{,}3}$.

Exercice 9

Pour $M\left(\frac{7}{5}\right)$ et $N\left(\frac{1}{4}\right)$, on a : $\frac{7}{5}>\frac{1}{4}$;

donc : $MN=\frac{7}{5}-\frac{1}{4}=\underline{\frac{23}{20}}$.

Exercice 10

Pour $M\left(\frac{1}{4}\right)$ et $N\left(-\frac{1}{2}\right)$, on a : $\frac{1}{4}>-\frac{1}{2}$;

donc : $MN=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{\frac{3}{4}}$.

Exercice 11

Pour $M(7)$ et $N(-3{,}1)$, on a : $7>-3{,}1$;

donc : $MN=7-(-3{,}1)=\underline{10{,}1}$.

Exercice 12

Pour $M\left(-\frac{2}{3}\right)$ et $N\left(\frac{3}{4}\right)$, on a : $\frac{3}{4}>-\frac{2}{3}$;

donc : $MN=\frac{3}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\underline{\frac{17}{12}}$.

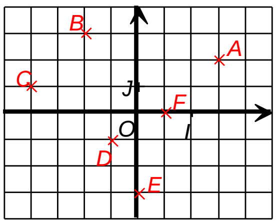
Exercice 13

Pour $M\left(-\frac{7}{3}\right)$ et $N\left(-\frac{4}{5}\right)$, on a : $-\frac{4}{5}>-\frac{7}{3}$;

donc : $MN=-\frac{4}{5}-\left(-\frac{7}{3}\right)=\underline{\frac{23}{15}}$.

2 Apprendre à lire des coordonnées et à placer des points

Exercice 14



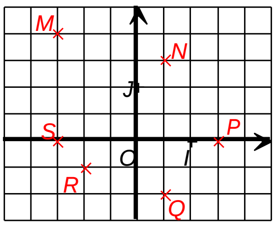
Dans le repère (O, I, J), on lit :

$A\left(\frac{3}{2} ; 2\right)$; $B\left(-1 ; 3\right)$;

$C\left(-2 ; 1\right)$; $D\left(-\frac{1}{2} ; -1\right)$;

$E\left(0 ; -3\right)$; $F\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

Exercice 15



Dans le repère (O, I, J), on lit :

$M\left(-\frac{3}{2} ; 2\right)$; $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$;

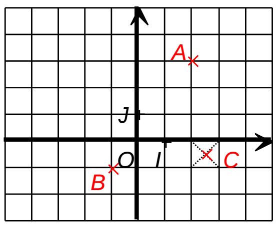
$P\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$; $Q\left(\frac{1}{2} ; -1\right)$;

$R\left(-1 ; -\frac{1}{2}\right)$; $S\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$.

Exercice 16

1. (O, I, J) est orthonormé, puisque $(OI)\perp(OJ)$ et $OI = OJ$.

2. On a placé les points :
   $A\left(2 ; 3\right)$;
   $B\left(-1 ; -1\right)$;
   $C\left(2{,}5 ; -0{,}5\right)$.



Exercice 17

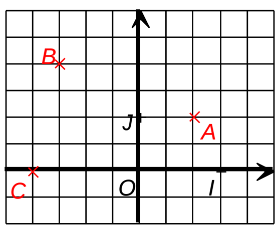
1. (O, I, J) est orthogonal, sans être orthonormé, puisque $(OI)\perp(OJ)$ et $OI \neq OJ$.

2. On a placé les points :

   $A\left(\frac{2}{3} ; 1\right)$;

   $B\left(-1 ; 2\right)$;

   $C\left(-\frac{4}{3} ; 0\right)$.

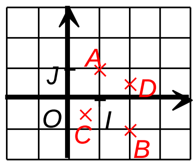


Exercice 18

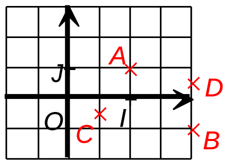
On a placé, dans chacun des repères (O, I, J), les points :

$A\left(1 ; 1\right)$; $B\left(2 ; -1\right)$; $C\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$; $D\left(2 ; 0{,}5\right)$.

a.



b.



Exercice 19

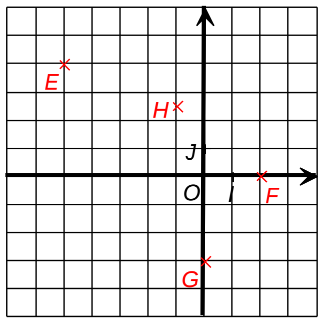
Dans le repère (O, I, J), on a placé les points :

$E\left(-5 ; 4\right)$;

$F\left(2 ; 0\right)$;

$G\left(0 ; -3\right)$;

$H\left(-1 ; 2{,}5\right)$.



Exercice 20

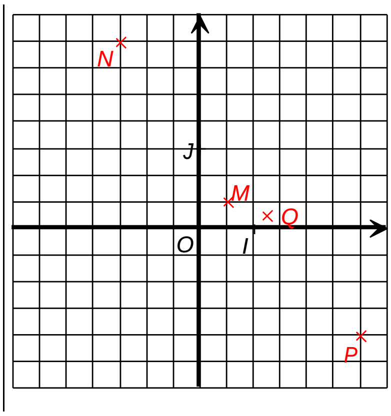
Dans le repère (O, I, J), on a placé les points :

$M\left(0{,}5 ; \frac{1}{3}\right)$;

$N\left(-\frac{3}{2} ; \frac{7}{3}\right)$;

$P\left(3 ; -\frac{4}{3}\right)$;

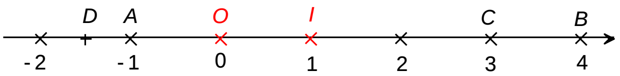
$Q\left(\frac{5}{4} ; \frac{1}{6}\right)$.



Activités d'application

Repérage d'une droite

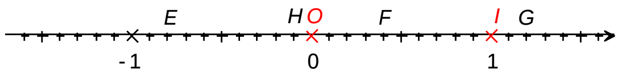
Exercice 21



Dans le repère (O, I), on lit :

$A(-1)$, $B(4)$, $C(3)$, $D\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 22



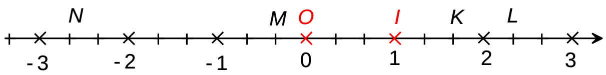
Dans le repère (O, I), on lit :

$E\left(-\frac{8}{10}\right)$, $F\left(\frac{4}{10}\right)$, $G\left(\frac{12}{10}\right)$, $H\left(-\frac{1}{10}\right)$.

Simplifications pour certaines abscisses :

$E\left(-\frac{4}{5}\right)$, $F\left(\frac{2}{5}\right)$, $G\left(\frac{6}{5}\right)$.

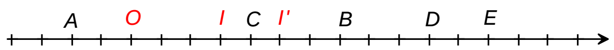
Exercice 23



Dans le repère (O, I), on lit :

$K\left(\frac{5}{3}\right)$, $L\left(\frac{7}{3}\right)$, $M\left(-\frac{1}{3}\right)$, $N\left(-\frac{8}{3}\right)$.

Exercice 24



a. Dans le repère (O, I), on lit :

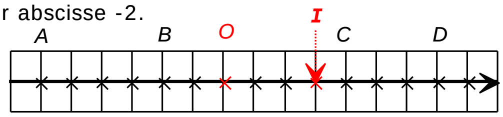
$A\left(-\frac{2}{3}\right)$, $B\left(\frac{7}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3}\right)$, $D\left(\frac{10}{3}\right)$, $E(4)$.

b. Dans le repère (O, I'), on lit :

$A\left(-\frac{2}{5}\right)$, $B\left(\frac{7}{5}\right)$, $C\left(\frac{4}{5}\right)$, $D(2)$, $E\left(\frac{12}{5}\right)$.

Exercice 25

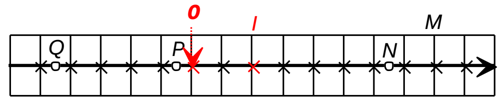
1. Position du point I tel que, dans le repère (O, I), le point A a pour abscisse -2.



2. Dans ce repère, on lit : $B\left(-\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3}\right)$ et $D\left(\frac{7}{3}\right)$.

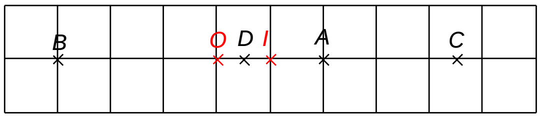
Exercice 26

1. Position du point O tel que, dans le repère (O, I), le point M a pour abscisse 4.



2. Dans ce repère, on lit : $N\left(\frac{13}{4}\right)$, $P\left(-\frac{1}{4}\right)$ et $Q\left(-\frac{9}{4}\right)$.

Exercice 27



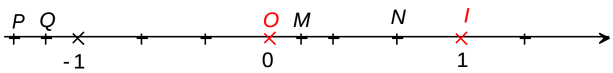
Dans le repère (O, I), on a placé les points :

$A(2)$; $B(-3)$; $C(4{,}5)$; $D(0{,}5)$.

Exercice 28

L'utilisation du papier millimétré permet de placer avec précision des points dont l'abscisse est donnée au dixième près.

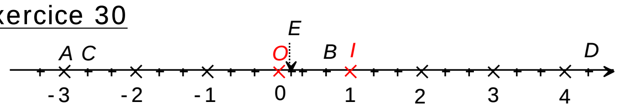
Exercice 29



Dans le repère (O, I), on a placé les points :

$M\left(\frac{1}{6}\right)$; $N\left(\frac{2}{3}\right)$; $P\left(-\frac{4}{3}\right)$; $Q\left(-\frac{7}{6}\right)$.

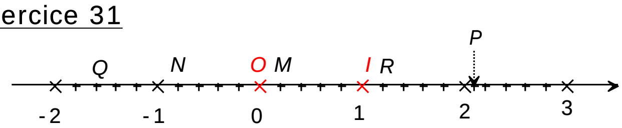
Exercice 30



Dans le repère (O, I), on a placé les points :

$A(-3)$; $B\left(\frac{2}{3}\right)$; $C\left(-\frac{8}{3}\right)$; $D\left(\frac{13}{3}\right)$; $E\left(\frac{1}{6}\right)$.

Exercice 31



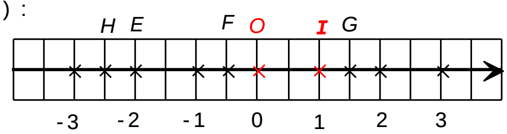
Dans le repère (O, I), on a placé les points :

$M(0{,}2)$; $N(-0{,}8)$; $P(2{,}1)$; $Q(-1{,}6)$; $R\left(\frac{6}{5}\right)$.

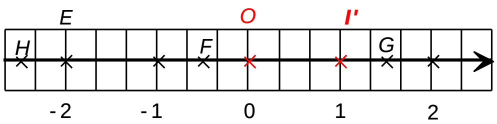
Exercice 32

On a placé les points $E(-2)$; $F(-0{,}5)$; $G\left(\frac{3}{2}\right)$; $H\left(-\frac{5}{2}\right)$

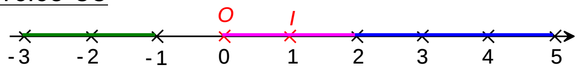
a. dans (O, I) :



b. dans (O, I') :



Exercice 33

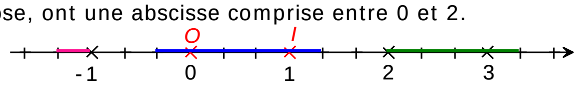
1. 

Les points situés dans le domaine :

a. bleu, ont une abscisse comprise entre 2 et 5 ;

b. vert, ont une abscisse comprise entre -3 et -1 ;

c. rose, ont une abscisse comprise entre 0 et 2.

2. 

Les points situés dans le domaine :

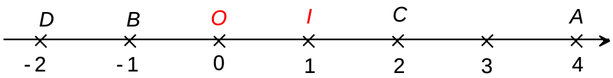
a. bleu, ont une abscisse comprise entre $-\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{3}$;

b. vert, ont une abscisse comprise entre 2 et $\frac{10}{3}$;

c. rose, ont une abscisse comprise entre $-\frac{4}{3}$ et -1.

Distance entre deux points

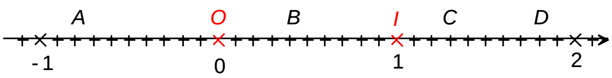
Exercice 34



1. $x_A=4$; $x_B=-1$; $x_C=2$; $x_D=-2$.

2. $AB=4-(-1)=\underline{5}$; $AC=4-2=\underline{2}$; $CD=2-(-2)=\underline{4}$.

Exercice 35

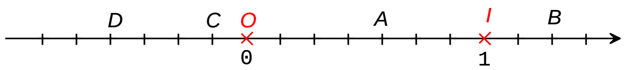


1. $x_A=-\frac{8}{10}$; $x_B=\frac{4}{10}$; $x_C=\frac{13}{10}$; $x_D=\frac{18}{10}$.

2. $AB=\frac{4}{10}-\left(-\frac{8}{10}\right)=\frac{12}{10}=\underline{\frac{6}{5}}$; $AC=\frac{13}{10}-\left(-\frac{8}{10}\right)=\underline{\frac{21}{10}}$;

$CD=\frac{18}{10}-\frac{13}{10}=\frac{5}{10}=\underline{\frac{1}{2}}$.

Exercice 36

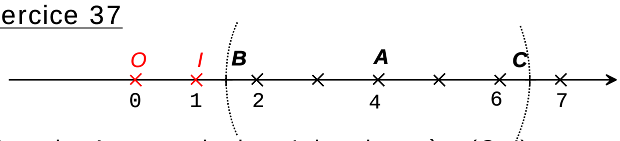


1. $x_A=\frac{4}{7}$; $x_B=\frac{9}{7}$; $x_C=-\frac{1}{7}$; $x_D=-\frac{4}{7}$.

2. $AB=\frac{9}{7}-\frac{4}{7}=\underline{\frac{5}{7}}$; $AC=\frac{4}{7}-\left(-\frac{1}{7}\right)=\underline{\frac{5}{7}}$;

$CD=-\frac{1}{7}-\left(-\frac{4}{7}\right)=\underline{\frac{3}{7}}$.

Exercice 37



1. Le point A a pour abscisse 4 dans le repère (O, I).

2. B et C sont les deux points de la droite (OI), situés à 2,5 cm de A. Ils ont pour abscisses respectives <u>1,5</u> et <u>6,5</u>.

Exercice 38

1. L'écart de température entre deux moments de la journée est donné par :
température la plus haute – température la plus basse.

2. Ecarts de température observés :

a. entre l'aube et la matinée : M-A=21-7=14° ;

b. entre l'après midi et la nuit : B-N=32-(-8)=40° ;

c. entre la nuit et la matinée : M-N=21-(-8)=29°.

Repérage dans le plan

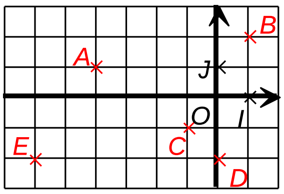
Exercice 39

Les repères ① et ⑤ sont orthogonaux ;
les repères ③ et ④ sont orthonormés ;
les repères ② et ⑥ sont ni l'un, ni l'autre.

Exercice 40

Coordonnées des points *A*, *B*, *C*, *D* et *E* dans chacun des repères (*O*, *I*, *J*) :

a.



A(-4 ; 1) ;

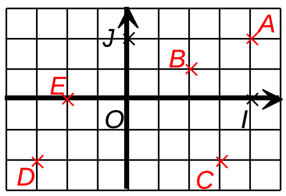
B(1 ; 2) ;

C(-1 ; -1) ;

D(0 ; -2) ;

E(-6 ; -2).

b.



A(1 ; 1) ;

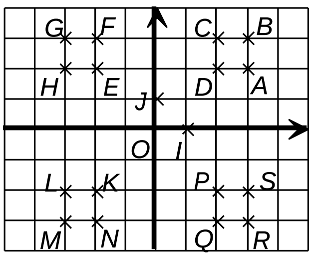
$B\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$;

$C\left(\frac{3}{4}\ ;\ -1\right)$;

$D\left(-\frac{3}{4}\ ;\ -1\right)$;

$E\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

Exercice 41



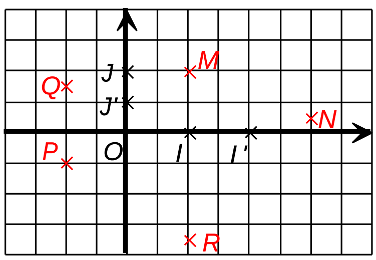
Dans le repère (*O*, *I*, *J*),

a. points qui ont pour abscisse 2 : *C*, *D*, *P* et *Q* ;

b. points qui ont pour ordonnée -3 : *M*, *N*, *Q* et *R* ;

c. points qui ont une abscisse égale à leur ordonnée : *O*, *B*, *D*, *K* et *M*.

Exercice 42



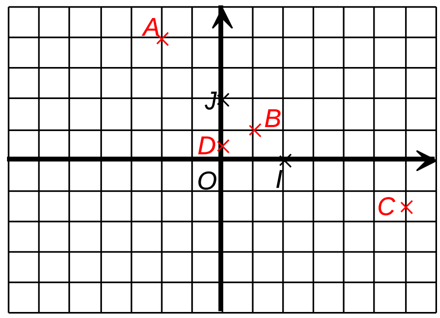
a. Dans le repère (*O*, *I*, *J*) on a : $M(1\ ;1)$, $N\left(3\ ;\ \frac{1}{4}\right)$,

$P\left(-1\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(-1\ ;\ \frac{3}{4}\right)$ et $R\left(1\ ;\ -\frac{7}{4}\right)$.

b. Dans le repère (*O*, *I'*, *J'*) on a : $M\left(\frac{1}{2}\ ;\ 2\right)$, $N\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$,

$P\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -1\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$ et $R\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{7}{2}\right)$.

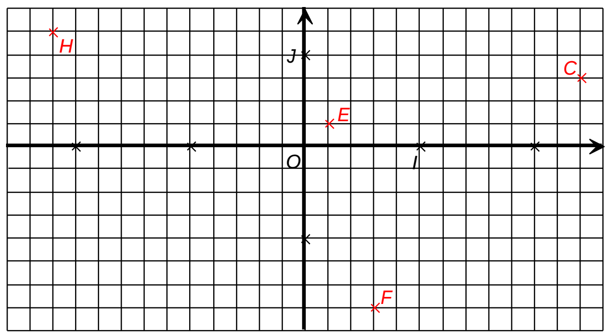
Exercice 43



On a placé les points :

$A\,(-1\ ;\ 2)$; $B\,(0{,}5\ ;\ 0{,}5)$; $C\left(3\ ;\ -\frac{3}{4}\right)$; $D\left(0\ ;\ \frac{1}{4}\right)$.

Exercice 44



On a placé les points :

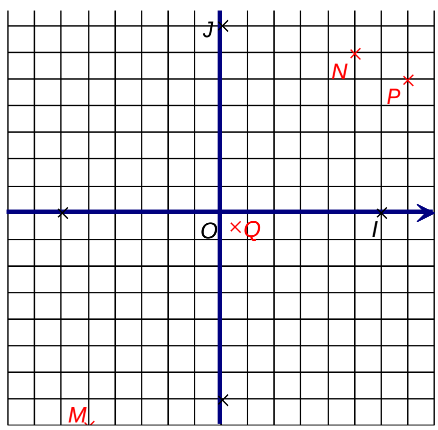
$E\,(0{,}2\ ;\ 0{,}25)$; $F\left(\frac{3}{5}\ ;\ -\frac{7}{4}\right)$; $C\left(2{,}4\ ;\ \frac{3}{4}\right)$; $H\left(-\frac{11}{5}\ ;\ 1{,}25\right)$.

Exercice 45

a. « *Les points dont l'abscisse est égale à 0 sont tous situés <u>sur l'axe des ordonnées</u>.* »

b. « *Les points dont l'ordonnée est égale à 0 sont tous situés <u>sur l'axe des abscisses</u>.* »

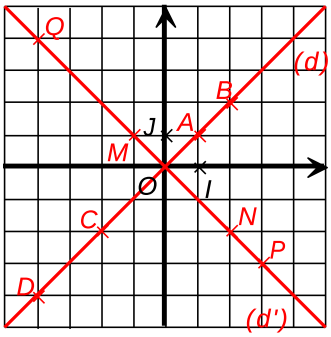
Exercice 46



On a placé les points :

$M\left(-\frac{5}{6}\ ;\ -\frac{8}{7}\right)$; $N\left(\frac{5}{6}\ ;\ \frac{6}{7}\right)$; $P\left(\frac{7}{6}\ ;\ \frac{5}{7}\right)$; $Q\left(\frac{1}{12}\ ;\ -\frac{1}{14}\right)$.

Exercice 47



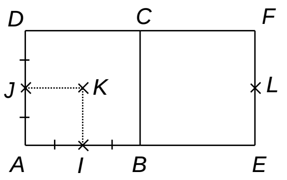
1.a. $A(1 ; 1)$, $B(2 ; 2)$, $C(-2 ; -2)$ et $D(-4 ; -4)$.

b. Conjecture : les coordonnées (abscisse et ordonnée) des points situés sur (d) sont égales.

2.a. $M(-1 ; 1)$, $N(2 ; -2)$, $P(3 ; -3)$ et $Q(-4 ; 4)$.

b. Conjecture : les coordonnées (abscisse et ordonnée) des points situés sur (d') sont opposées.

Exercice 48



Dans la figure ci-contre :
ABCD est un carré,
AEFD est un rectangle.

1. Coordonnées de chaque point dans le repère (A, B, D) :

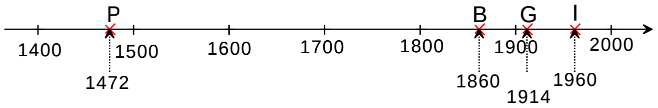
$A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $C(1 ; 1)$,
$D(0 ; 1)$, $E(2 ; 0)$, $F(0 ; 2)$.

2. Dans ce repère on a placé les points :

$I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, $L\left(2 ; \frac{1}{2}\right)$.

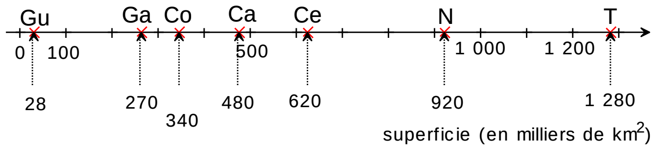
Exercice 49 Choisir un repère qui convient

1. **Situation 1** : Histoire du Cameroun



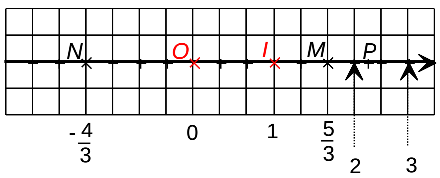
1475 : P : les portugais arrivent au Cameroun ;
1860 : B : les britanniques et les allemands arrivent au Cameroun ;
1914 : G : le Cameroun entre dans la première guerre mondiale ;
1960 : I : le Cameroun prend son indépendance.

2. **Situation 2** : Superficie des pays voisins



Ca : Cameroun : 480 000 km² ;
Co : Congo : 340 000 km² ;
Ga : Gabon : 270 000 km² ;
Gu : Guinée Equatoriale : 28 000 km² ;
N : Nigeria : 920 000 km² ;
Ce : République Centrafricaine : 620 000 km² ;
T : Tchad : 1 280 000 km² ;

Exercice 50 Retrouver l'unité et l'origine

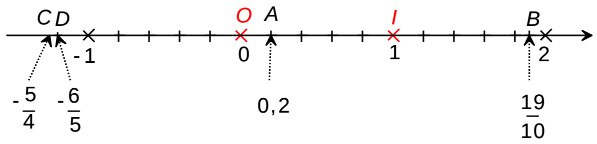


1. $MN = \frac{5}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = 3$; cette distance est représentée par 9 « côtés d'un carreau » ; l'unité du repère est donc égale à 3 « côtés d'un carreau ».

2. $O \in [NM]$; de plus $OM = \frac{5}{3}$ et $ON = \frac{4}{3}$, donc OM et ON sont représentées respectivement par 5 et 4 « côtés d'un carreau » ; la position de O est alors immédiate (ainsi que celle de I, puisque $OI = 1$ est représentée par 3 « côtés d'un carreau »).

3. Encadrement de l'abscisse de P : $2 < x_P < 3$.

Exercice 51 Rédiger un calcul de distance



1.a. (O, I), repère de la droite graduée, est tel que : $OI = 5$cm.

b. Pour placer les points $A(0{,}2)$, $B\left(\frac{19}{10}\right)$, $C\left(-\frac{5}{4}\right)$, $D\left(-\frac{6}{5}\right)$, calculer OA, OB, OC, OD et utiliser la règle graduée :

$OA = 5 \times 0{,}2 = 1$ cm, $OB = 5 \times \frac{19}{10} = 9{,}5$ cm,

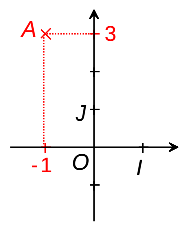
$OC = 5 \times \frac{5}{4} = 6{,}25$ cm, $OD = 5 \times \frac{6}{5} = 6$ cm.

2.a. $AB = \frac{19}{10} - 0{,}2 = \underline{1{,}7}$ et $CD = -\frac{6}{5} - \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{20} = \underline{0{,}05}$.

b. C'est la réponse d'Acha, qui a donc raison.
Mais ces distances sont représentées par :
$5 \times 1{,}7 = \underline{8{,}5\text{ cm}}$ et $5 \times 0{,}05 = \underline{0{,}25\text{ cm}}$.
Donc Eric a aussi raison.

Exercice 52 Maîtriser le vocabulaire

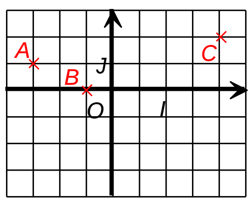
- *Le point O et appelé* *<u>origine du repère (O, I, J)</u>*.
- *Le repère (O, I, J) est <u>orthogonal</u> car (OI)⊥(OJ).*
- *La droite (OI) est appelée <u>axe des abscisses</u> et la droite (OJ) <u>axe des ordonnées</u>.*
- *-1 est <u>l'abscisse</u> de A, 3 est <u>son ordonnée</u>, le couple (-1 ; 3) constitue <u>les coordonnées</u> de A.*



Exercice 53 Une astuce pour retenir

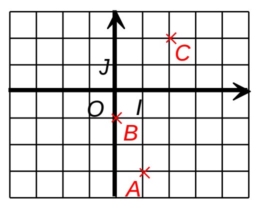
Les points $A(1 ; -3)$, $B(0 ; -1)$ et $C(2 ; 2)$ sont à représenter dans un repère orthonormé (O, I, J).

1.



Ci-dessus la réponse de Bineta avec 3 erreurs.

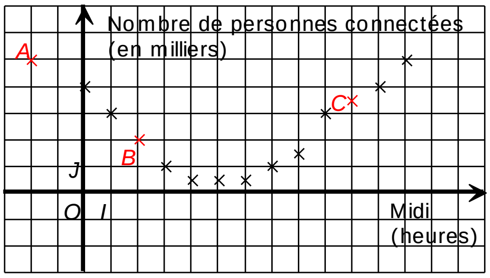
2.



Ci-dessus une solution correcte

Voici les 3 erreurs de Bineta :
- le repère (O, I, J) n'est pas orthonormé ;
- elle a placé $A\left(-\frac{3}{2} ; 1\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$.

Exercice 54 **Interpréter des données**



1.a. Une unité en abscisse représente une heure, en ordonnée mille personnes connectées à Internet.

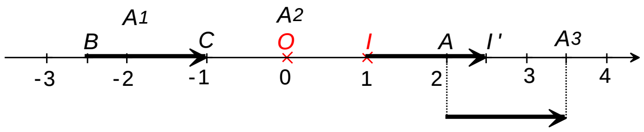
b. L'interprétation donnée au point *B* est que 2 000 personnes sont connectées à Internet à 2 heures, au point *C* est que 3 500 personnes sont connectées à Internet à 9 heures.

L'interprétation du point *A*(-2 ; 5) est que 5 000 personnes sont connectées à Internet à 22 heures.

Exercices d'approfondissement

Exercice 55 **Symétries et translation**

1. Sur la droite, munie d'un repère (*O*, *I*) tel que *OI*=2 cm, on a placé les points *A*(2), *B*(-2,5) et *C*(-1).



2. **Symétries**

a. A_1(-2) est l'image de *A* par la symétrie de centre *O* ;
A_2=*O* est l'image de *A* par la symétrie de centre *I*.

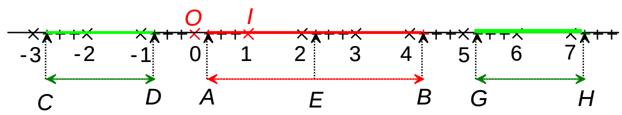
b. AA_1=2-(-2)=4 (en unités de longueur) =8 cm ;
AA_2=2-0=2 (en unités de longueur) =4 cm.

3. **Translation**

a. *I*'(2,5) et A_3(3,5) sont les images respectives de *I* et *A* par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

b. *II'*=2,5-1=1,5 (en unités de longueur) =3 cm ;
AA_3=3,5-2=1,5 (en unités de longueur) =3 cm.
On observe que : *BC*=*II'*=AA_3.

Exercice 56 **Ensemble de points**



1. Sur la droite, munie d'un repère (*O*, *I*) tel que *OI*=1 cm, on a placé le point $E\left(\frac{9}{4}\right)$.

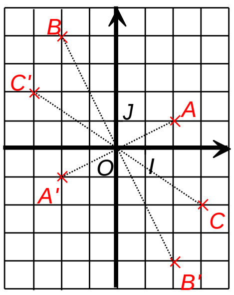
2.a. Les points situés à moins de 2 cm de *E* appartiennent au segment [*AB*] (en rouge) tel que $A\left(\frac{1}{4}\right)$ et $B\left(\frac{17}{4}\right)$.

b. Les points situés entre 3 cm et 5 cm de *E* appartiennent au segment [*CD*] ou [*GH*] (en vert) tels que :

$$C\left(-\frac{11}{4}\right),\ D\left(-\frac{3}{4}\right),\ G\left(\frac{21}{4}\right) \text{ et } H\left(\frac{29}{4}\right).$$

Exercice 57 Symétrie centrale et repère du plan

1.a. Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-contre, on a placé : $A(2 ; 1)$, $B(-2 ; 4)$ et $C(3 ; -2)$.



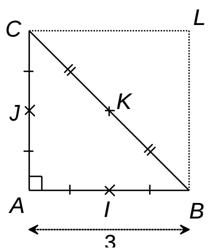
b. Si A', B' et C' sont les images de A, B et C par la symétrie de centre O, alors on a :
$A'(-2 ; -1)$, $B'(2 ; -4)$ et $C'(-3 ; 2)$.

2. On considère un point M de coordonnées (a ; b) dans (O, I, J).

Le point M', image du point M par la symétrie de centre O a pour coordonnées ($-a$; $-b$).

Exercice 58 Différents repères

1.a.



Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

I milieu de [AB],
J milieu de [AC],
J milieu de [BC].

b. $AIKJ$ est un carré.
En effet :

- dans le triangle ABC,

$IK = \dfrac{AC}{2} = AJ = 1{,}5$ cm,

$JK = \dfrac{AB}{2} = AI = 1{,}5$ cm,

donc $AIKJ$ est un losange ;

- de plus ce losange a un angle droit en A.

2.a. $(AI)\perp(AJ)$ et $AI = AJ$ donc le repère (A, I, J) est orthonormé.

Coordonnées de chacun des points de la figure dans ce repère (A, I, J) : $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $C(0 ; 1)$,

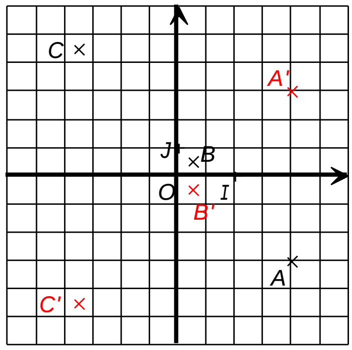
$$I\left(\frac{1}{2} ; 0\right),\ J\left(0 ; \frac{1}{2}\right),\ K\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right).$$

c. Si L est le point de coordonnées (2 ; 2), alors $ABLC$ est aussi un carré.
En effet, c'est un losange ($AB = BL = LC = CA = 3$ cm), qui a un angle droit (en A)

3. Coordonnées de chacun des points de la figure dans ce repère (I, B, K) : $I(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $K(0 ; 1)$,
$A(-1 ; 0)$, $C(-1 ; 2)$, $J(-1 ; 1)$, $L(1 ; 2)$.

Exercice 59 Symétries orthogonales et repères

1.



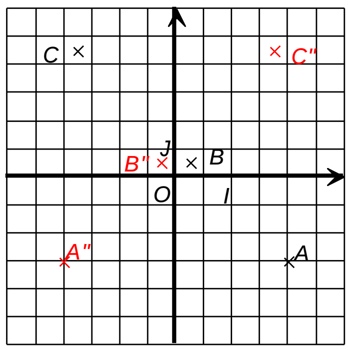
a. Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessus, on a placé : $A(2 ; -3)$, $B\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{7}{4} ; \frac{9}{2}\right)$.

b. Si A', B' et C' sont les images de A, B et C par la symétrie orthogonale d'axe (OI), alors on a :

$$A'(2 ; 3),\ B'\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{2}\right) \text{ et } C'\left(-\frac{7}{4} ; -\frac{9}{2}\right).$$

2. On considère un point M de coordonnées (a ; b) dans (O, I, J). *Le point M', image du point M par la symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour coordonnées* (a ; $-b$).

3.



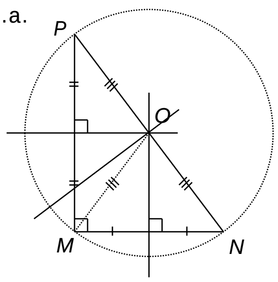
Si A'', B'' et C'' sont les images de A, B et C par la symétrie orthogonale d'axe (OJ), alors on a :

$$A''(-2 ; -3),\ B''\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right) \text{ et } C''\left(\frac{7}{4} ; \frac{9}{2}\right).$$

On considère un point M de coordonnées (a ; b) dans (O, I, J). *Le point M', image du point M par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour coordonnées* ($-a$; b).

Exercice 60 Centre du cercle circonscrit

1.a.



MNP est un triangle rectangle en P tel que : $MN = 6$ cm et $MP = 8$ cm.

b. Les médiatrices de ce triangle concourent au point O, centre de son cercle circonscrit et milieu de son hypoténuse [NP].

c. D'après la propriété de Pythagore :

$NP = \sqrt{MN^2 + MP^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm.

$OM = 5$ cm

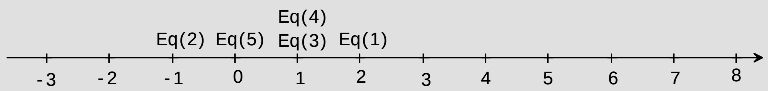
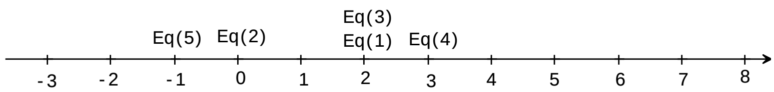
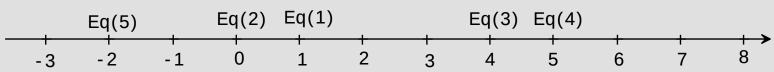
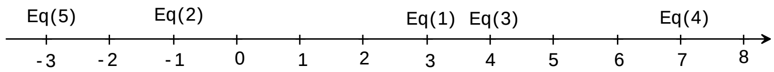
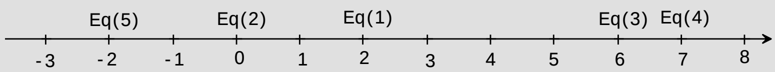
2. Dans le repère (M, N, P), on a :

$M(0 ; 0)$, $N(1 ; 0)$, $P(0 ; 1)$; $O\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Activités d'intégration

Exercice 61 **Le tournoi de football**

1. Tableau donnant, selon les résultats de chaque série de matchs, l'évolution du classement des équipes :

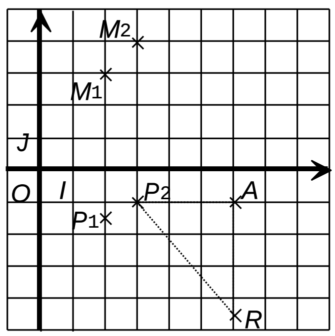
Résultats	Classement à l'issue des matchs	
Premiers matchs Eq. 1 – Eq. 2 : 2-1 Eq. 3 – Eq. 4 : 1-1 Eq. 5 : exempte		(1)
Deuxièmes matchs Eq. 2 – Eq. 3 : 0-0 Eq. 4 – Eq. 5 : 2-0 Eq. 1 : exempte		(2)
Troisièmes matchs Eq. 1 – Eq. 4 : 1-3 Eq. 3 – Eq. 5 : 3-2 Eq. 2 : exempte		(3)
Quatrièmes matchs Eq. 1 – Eq. 5 : 2-1 Eq. 2 – Eq. 4 : 0-3 Eq. 3 : exempte		(4)
Cinquièmes matchs Eq. 1 – Eq. 3 : 0-4 Eq. 2 – Eq. 5 : 2-2 Eq. 4 : exempte		(5)

d. La ligne (5) donne le classement de ce tournoi, remporté par l'équipe 4.

2.a. La ligne (4) montre que l'équipe 4 a gagné le plus de points (7), durant les quatre premiers matchs.

b. C'est l'équipe 5 qui a perdu le plus de points (1) durant les trois derniers matchs : évolution des points de chaque équipe entre les lignes (2) et (5).

Exercice 62 **Proies et prédateurs**



1.a. Dans le repère orthogonal (O, I, J), l'unité représente 10 m en abscisses et 5 m en ordonnées.

b. Dans ce repère, on a placé : • les mouettes $M_1(2\ ;\ 3)$ et $M_2(3\ ;\ 4)$,

• les poissons $P_1\left(2\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right)$ et $P_2(3\ ;\ -1)$.

c. La distance qui sépare la mouette M_1 du poisson P_1 *est :*

$M_1P_1 = 3 - \left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$ unités, c'est-à-dire $\dfrac{9}{2} \times 5 = \underline{22{,}5\text{ m}}$.

La distance qui sépare la mouette M_2 du poisson P_2 *est :*
$M_2P_2 = 4-(-1) = 5$ unités, c'est-à-dire $5\times5 = \underline{25\text{ m}}$.

En plongeant en même temps et à la même vitesse vers leur proie, c'est la mouette P_1 qui attrapera son poisson avant l'autre.

2.a. $R\left(6\ ;\ -\dfrac{9}{2}\right)$ désignant un requin, le point $A(6\ ;\ -1)$ est un point de sorte que ARP_2 soit rectangle en A et de façon que AP_2 et AR soient faciles à calculer ; en effet :

$AP_2 = 6-3 = 3$ unités, c'est à-dire $3\times10 = 30$ m et $AR = -1 - \left(-\dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$ unités, c'est-à-dire $\dfrac{7}{2} \times 5 = 17{,}5$ m.

b. D'après la propriété de Pythagore, on a : $RP_2 = \sqrt{30^2 + 17{,}5^2} \approx 34{,}7$ m.

c. A la vitesse de 20 m/s, pour attraper le poisson la mouette mettra : $\dfrac{25}{20} = 1{,}25$ s ;

à la vitesse de 5 m/s, pour attraper le poisson le requin mettra : $\dfrac{34{,}7}{5} \approx 7$ s ;

c'est donc la mouette qui attrapera le poisson P_2 en premier.

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Plan mathématique [1 p 82]			
2	Positions relatives de deux droites de l'espace [2 p 82]	6, 7, 8	16, 17	22, 23
3	Droites parallèles et droites perpendiculaires : propriétés [3 p 82 et 83]	5, 7, 8	16, 17	23
4	Positions relatives d'une droite et d'un plan [4 p 83]	5, 8	19	23, 24, 30
	Positions relatives de deux plans [5 p 83]	5		22
5 et 6	Sphère et boule [6 p 83]	9, 10, 11, 12, 13, 14, 15		25, 26, 27, 28, 31
	Apprendre à dessiner en perspective cavalière [p 84]	**1, 2, 3, 4**	18, 19, 20, 21	29

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer **Le bon cocktail**

1.a. En posant une règle de collégien sur une surface estimée plane, il n'y a pas d'endroit où l'on voit le jour entre l'arête de la règle et cette surface.

b. En déplaçant la règle sur cette surface et en renouvelant la même observation, la surface contrôlée ne sera vraiment plane que si l'on ne voit *jamais* le jour entre l'arête de la règle et cette surface ; voir le jour *une seule fois* suffit pour affirmer la non planéité.

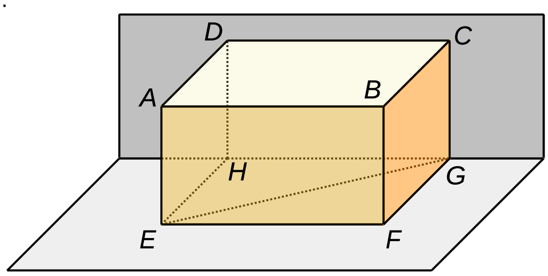
1.a. Un niveau de maçon est réalisé dans une plaque de carton rigide.

b. Le fil, au bout duquel est accroché un objet, est la partie indiquant qu'une droite est verticale ; fixé avec du ruban adhésif, le fil chevauche alors le repère du milieu (en rouge)

c. En posant les pieds de cet instrument sur une table, on reconnaît que le dessus de cette table est horizontal lorsque le fil chevauche à nouveau le repère du milieu.

1 **Reconnaître un plan mathématique et le désigner**

1.



a. Le point *E* appartient à 3 faces du parallélépipède rectangle.
Il appartient à plusieurs plans mathématiques.

b. Les points *E* et *F* appartiennent ensemble à 2 faces.
Ils appartiennent ensemble à plusieurs plans mathématiques.

c. Les points *A*, *E* et *F* appartiennent ensemble à 1 face.
Ils appartiennent ensemble à un seul plan mathématique.

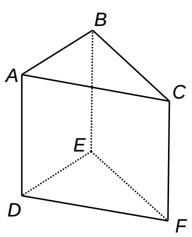
d. Les points *A*, *E* et *G* appartiennent ensemble à un même plan mathématique. *C* est un autre point qui appartient à ce plan.

e. Les points *A*, *E*, *F* et *C* n'appartiennent pas à un même plan mathématique. En effet le point *C*, qui appartient au plan contenant *A*, *E* et *G*, n'appartient pas au plan contenant *A*, *E* et *F*.

2. Pour désigner un plan mathématique :
- 3 points non alignés sont nécessaires, car moins de 3 points appartiennent ensemble à plusieurs plans (voir 1.a. et 1.b.) ;
- 3 points non alignés sont suffisants, car ils appartiennent ensemble à un seul plan (voir 1.c. et 1.d.).

Le plan (*EFG*) est aussi noté : (*EFH*), (*EGH*), (*FGH*).

2 **Positions relatives de deux droites dans l'espace**



1. Dans le prisme droit représenté ci-contre :

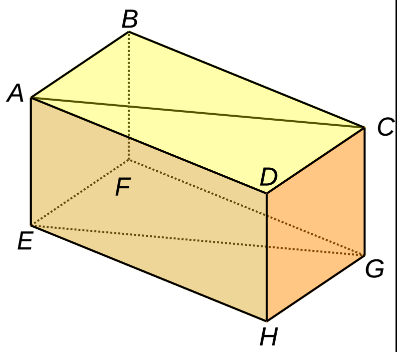
a. il est impossible de trouver deux arêtes sécantes et non coplanaires ;

b. il est impossible de trouver deux arêtes dont les droites supports sont parallèles et non coplanaires ;

c il est possible de trouver deux arêtes non coplanaires ;
par exemple [*AB*] et [*CF*] ; leurs droites supports, (*AB*) et (*CF*), sont ni parallèles, ni sécantes.

2. Dans l'espace, deux droites n'ayant aucun point commun ne sont pas toujours parallèles.

3 Parallèles et perpendiculaires dans l'espace



1.a. Dans le prisme droit *ACDEGH*, à bases triangulaires *ACD* et *EGH*, les faces latérales *AEHD*, *CGHD* et *AEGC* sont rectangulaires et les droites supports des arêtes latérales sont parallèles entre elles deux à deux ;
donc : (*AE*)//(*DH*), (*CG*)//(*DH*) et (*AE*)//(*CG*).

b. *Propriété* (utilisée dans le plan dès la classe de sixième) :
Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors ces deux droites sont parallèles.

2. Dans le parallélépipède rectangle *ABCDEFGH* :

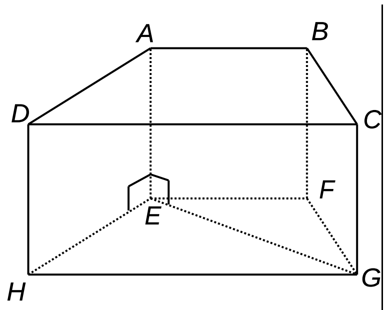
a. la face *ABCD* est un rectangle donc : (*BC*)⊥(*AB*) et (*AD*)⊥(*AB*) ;

b. les faces *ABFE* et *BCGF* sont des rectangles donc : (*EF*)⊥(*BF*) et (*GF*)⊥(*BF*).

c. On ne peut rien dire de deux droites perpendiculaires à une même troisième (*) ;
ainsi : en a, (*BC*)⊥(*AB*) et (*AD*)⊥(*AB*) avec (*BC*)//(*AD*) ;
en b, (*EF*)⊥(*BF*) et (*GF*)⊥(*BF*) avec (*EF*)⊥(*GF*).

(*) Différence totale avec ce qui se passe dans le plan, où deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

4 Positions relatives de droites et plans



ABCDEFGH est un prisme droit, dont les bases *ABCD* et *EFGH* sont des trapèzes.

1. Les droites (*GA*), (*GB*), (*GC*) et (*GD*) ont le seul point *G* en commun avec le plan (*HEF*).

2.a. La face latérale *ADHE* est un rectangle donc (*AD*)//(*EH*) ; si la droite (*AD*) était sécante à la face *EFGH* du prisme, alors ce serait en un point commun aux droites (*AD*) et (*EH*) et ces droites ne seraient plus parallèles.
Cela est donc impossible et la droite (*AD*) n'est pas sécante à la face *EFGH*.

b. On peut dire que la droite (*AD*) et le plan (*EFG*) sont parallèles.

3.a. Les faces latérales *ADHE* et *ABFE* sont des rectangles donc (*AE*)⊥(*EH*) et (*AE*)⊥(*EF*).

b. Les droites sécantes (*EH*) et (*EF*) sont contenues dans le plan (*EFH*).

c. *La droite (AE) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (EFH) ; la droite (AE) est donc perpendiculaire au plan (EFH).*
La droite (GE) est contenue dans le plan (EFH). Or, ce plan est perpendiculaire à la droite (AE), donc la droite (GE) est perpendiculaire à la droite (AE).

4.a. Le plan (*DAE*), qui contient la droite (*AE*) perpendiculaire au plan (*EHG*), est perpendiculaire à ce plan.

b. Les plans (*ABF*), (*BCG*) et (*CDH*) sont perpendiculaires au plan (*EHG*).

c. Les plans (*ABC*) et (*EFG*) sont parallèles, ainsi que les plans (*ABF*) et (*DCG*).

5 Sphère et boule

1.a. Le point *A* décrit le cercle de centre *O* et de rayon *OA* ;
le point *B* décrit le cercle de centre *R* et de rayon [*RB*] ;
le point *C* décrit le cercle de centre *T* et de rayon [*TC*], où *T* est le pied de la perpendiculaire à la droite (*NS*) passant par *C* ;
le point *D* décrit le cercle de centre *U* et de rayon [*UD*], où *U* est le pied de la perpendiculaire à la droite (*NS*) passant par *D*.

b. *A* est le point qui décrit la plus longue trajectoire.

2. Les points *A*, *B*, *D*, *N*, *R*, *O* et *S* appartiennent à la boule ;
les points *A*, *D*, *N* et *S* appartiennent à la sphère ;
le point *C* n'appartient ni à l'une, ni à l'autre.

3. [*ON*], [*OS*], [*OA*] et [*OD*] sont quatre rayons de la boule et de la sphère ;
[*NS*] est l'un de leurs diamètres.

6 Redécouvrir des formules

1.a. Hauteur du cylindre : $\underline{2r}$.

b. Aire latérale du cylindre : $2r \times 2 \times \pi \times r = \underline{4 \times \pi \times r^2}$.

2. L'aire d'une sphère de rayon r est donc : $\underline{4 \times \pi \times r^2}$.

3. Volume du cylindre : $2r \times \pi \times r^2 = \underline{2 \times \pi \times r^3}$.

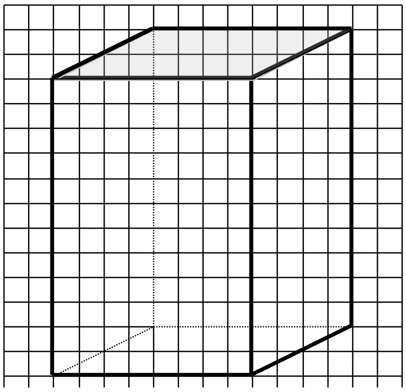
Le volume de la boule de rayon r est donc : $\frac{2}{3} \times 2 \times \pi \times r^3 = \underline{\frac{4}{3} \times \pi \times r^3}$.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à dessiner en perspective cavalière

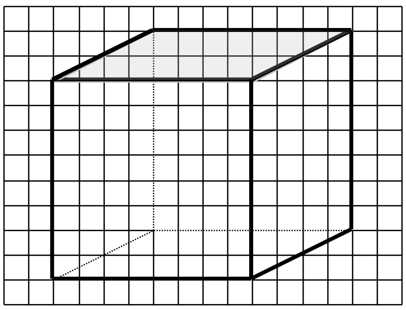
Exercice 1

Ci-contre la représentation en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle de hauteur 6 cm, dont la face horizontale de dessus est grisée.

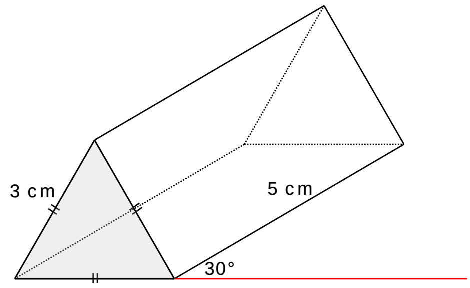


Exercice 2

Ci-contre la représentation en perspective cavalière d'un cube, dont la face horizontale de dessus est grisée.

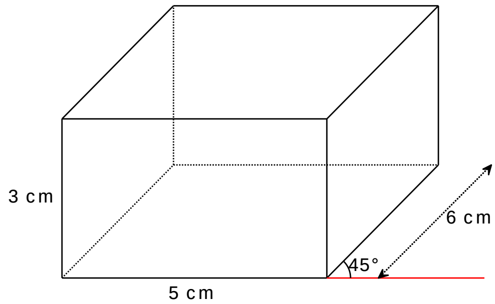


Exercice 3



Représentation en perspective cavalière d'un prisme droit à bases triangulaires.

Exercice 4



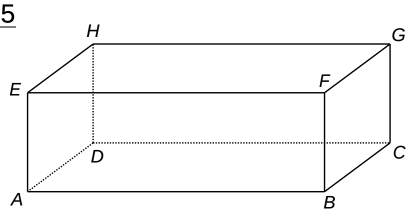
Représentation en perspective cavalière d'un pavé droit de dimensions 5 cm, 6 cm et 3 cm.

La face verticale frontale avant, de dimensions 5 cm et 3 cm, est représentée en vraie grandeur ; pour les arêtes fuyantes, le coefficient de réduction est de 0,5 (*l'arête de 6 cm est représentée par une arête de 3 cm*) et l'angle avec l'horizontale est de 45°.

Activités d'application

Droites et plans dans l'espace

Exercice 5



1. Arêtes dont les droites supports sont

a. perpendiculaires à (*BF*) : [*EF*], [*AB*], [*GF*] et [*CB*] ;

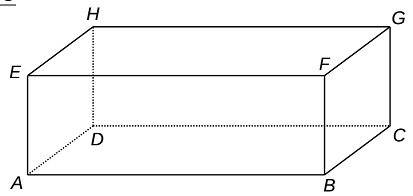
b. parallèles à (*AD*) : [*AD*], [*BC*], [*FG*] et [*EH*] ;

c. perpendiculaires à (*DCG*) : [*AD*], [*BC*], [*FG*] et [*EH*].

2.a. Faces parallèles deux à deux :
ABCD et *EFGH*, *ABFE* et *DCGH*, *ADHE* et *BCGF*.

b. Faces perpendiculaires à la face *AEHD* :
ABFE, *EFGH*, *HGCD* et *DCBA*.

Exercice 6



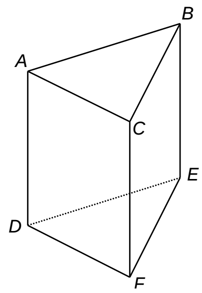
1. Droite coplanaire à la droite (*GH*) :
(*GC*) ou (*HD*) [droites sécantes avec (*GH*)] ;
(*BA*), (*CD*) ou (*FE*) [droites parallèles à (*GH*)].

2. Droite coplanaire à la droite (*AE*) sans être support d'une arête : (*EB*), (*AF*), (*ED*) ou (*AH*).

3. La droite (*FG*) n'est pas coplanaire à (*CD*).

4. Droites contenues dans le plan (*ABC*) :
(*AB*), (*BC*), (*CD*), (*DA*), (*AC*) et (*BD*).

Exercice 7



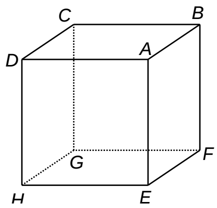
1.a. Couples de droites parallèles :
(*AB*)//(*DE*), (*BC*)//(*EF*), (*CA*)//(*FD*), (*AD*)//(*CF*), (*CF*)//(*BE*), (*BE*)//(*AD*).

b. Droites perpendiculaires à (*CF*) :
(*CA*), (*CB*), (*FD*) et (*FE*).

2. Droites sécantes à la droite (*BC*) sans lui être perpendiculaire :
(*AB*), (*AC*), (*CE*) et (*BF*).

3. Arêtes dont les droites supports ne sont ni sécantes, ni parallèles à(*AB*) : [*CF*], [*DF*] et [*FE*].

Exercice 8



Chaque face d'un cube est un carré.

1.a. On a :
(*AE*)//(*BF*) et (*BF*)//(*CG*) ;
donc les droites (*AE*) et (*CG*) sont parallèles.

b. On en déduit que ces droites sont coplanaires.

c. (*ACE*) est le plan qui les contient.

2.a. Le quadrilatère non croisé *AEGC*, qui a deux côtés [*AE*] et [*CG*] parallèles et de même longueur, est un parallélogramme.

b. La droite (*AE*), qui est perpendiculaire aux droites (*AB*) et (*AD*) sécantes dans le plan (*ABC*), est perpendiculaire à ce plan ; on en déduit que (*AE*) est perpendiculaire à (*AC*), droite du plan (*ABC*).

c. *AEGC*, parallélogramme dont un angle est droit, est un rectangle.

Sphères et boules

Exercice 9

Aire d'une sphère de rayon 10 cm :

$$4 \times \pi \times 10^2 = \underline{400\times\pi} \approx \underline{1\ 257\ \text{cm}^2}\ ;$$

aire d'une sphère de diamètre 14 cm :

$$4 \times \pi \times 7^2 = \underline{196\times\pi} \approx \underline{616\ \text{cm}^2}.$$

Exercice 10

Volume d'une sphère de rayon 8 cm :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 8^3 = \underline{\frac{2\ 048}{3} \times \pi} \approx \underline{2\ 145\ \text{cm}^3}\ ;$$

volume d'une sphère de diamètre 8 cm :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = \underline{\frac{256}{3} \times \pi} \approx \underline{268\ \text{cm}^3}.$$

Exercice 11

Volume occupé par une orange de 12 cm de diamètre :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288 \times \pi \approx 905\ \text{cm}^3\ ;$$

volume occupé par six fruits de la passion de 6 cm de diamètre chacun : $6 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 \approx 216 \times \pi \approx 679\ \text{cm}^3$;

c'est donc l'orange qui occupe le plus grand volume.

Exercice 12

Le cube du rayon d'une boule de volume 36π cm^3 est :

$36 \times \frac{3}{4} = 27$; donc son rayon est de $\underline{3\ \text{cm}}$.

Exercice 13

Le diamètre d'une bille est : $\frac{80}{50} = 1{,}6$ cm $= 16$ mm.

1. Aire d'une bille :

$$4 \times \pi \times 16^2 = 1\ 024\times\pi \approx \underline{3\ 217\ \text{mm}^2}.$$

2. Volume d'une bille :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 16^3 = \frac{16\ 384}{3} \times \pi \approx \underline{17\ 157\ \text{mm}^3}$$

Exercice 14

Volume du bol : $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 7{,}8^3 = \frac{949{,}104}{3} \times \pi \approx 994\ \text{cm}^3$.

Donc ce bol peut contenir, à peu près, un litre de liquide.

Exercice 15

Volume de la boule en fer : $\frac{4}{3} \times \pi \times 5{,}7^3 \approx 776\ \text{cm}^3$;

masse de la boule en fer : $7{,}8 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 5{,}7^3 \approx 6\ 051$ g.

Volume de la boule en plomb : $\frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \approx 524\ \text{cm}^3$;

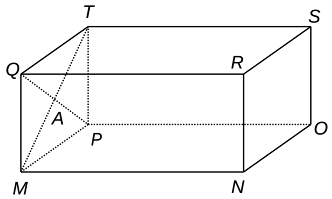
masse de la boule en plomb : $11{,}3 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \approx 5\ 917$ g.

C'est la boule en fer qui est la plus lourde.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 16 Les bons mots

MNOPQRST est un parallélépipède rectangle.



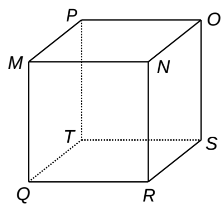
1. *Les droites (QP) et (TM) sont sécantes en A ; elles sont donc coplanaires.*

2. *Les droites (RS) et (QM) ne sont pas contenues dans un même plan. On dit qu'elles sont non coplanaires. Elles sont ni sécantes, ni parallèles.*

3. *Les droites (QM) et (SO) sont parallèles car elles sont toutes deux parallèles à (RN). Les droites (QM) et (SO) sont donc contenues dans le plan (SOM). On dit qu'elles sont coplanaires.*

Exercice 17 Plusieurs réponses justes

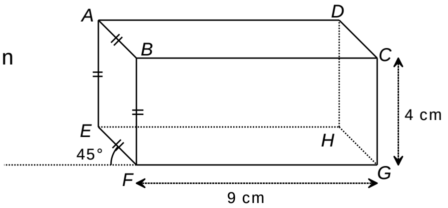
MNOPQRST est un cube.



(*MN*) et (*MP*) sont sécantes perpendiculaires coplanaires	(*OS*) et (*MQ*) sont parallèles coplanaires	(*MT*) et (*PQ*) sont sécantes perpendiculaires coplanaires
(*MT*) et (*NS*) sont parallèles coplanaires	(*TS*) et (*RN*) sont non coplanaires	(*QR*) et (*RO*) sont sécantes perpendiculaires coplanaires

Exercice 18 En perspective sans quadrillage

1. *ABCDEFGH* est un pavé droit ;
la face *ABFE* est un carré.



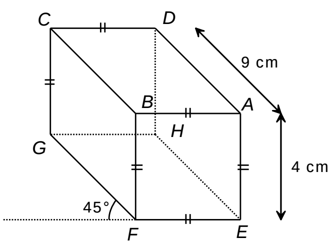
a. Arêtes fuyantes : [*AB*], [*DC*], [*EF*] et [*HG*].

b. Angles de mesure 45° : $\widehat{FGH}$, $\widehat{FEH}$ et $\widehat{BCD}$.

c. Le coefficient de réduction (0,5) doit être appliqué aux arêtes fuyantes : [*AB*], [*DC*], [*EF*] et [*HG*].

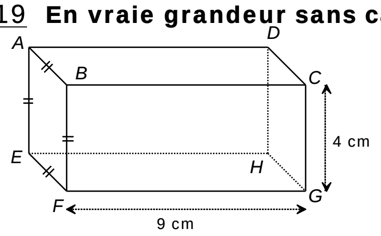
d. Arêtes construites en vraies grandeurs :
[*AD*], [*BC*], [*EH*], [*FG*], [*AE*], [*BF*], [*CG*] et [*DH*].

2. Ci-contre le même pavé droit, dont les faces carrées sont représentées en vraies grandeurs.



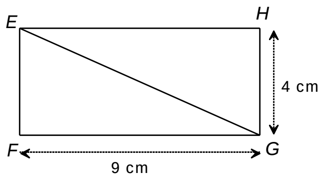
Exercice 19 En vraie grandeur sans calculer

1.



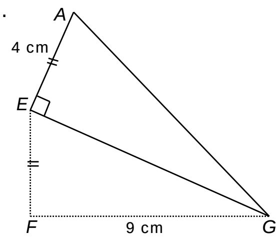
La droite (*AE*), perpendiculaire aux droites (*EH*) et (*EF*), est perpendiculaire au plan (*EFH*) et à toutes les droites de ce plan passant par *E* ; en particulier (*AE*)⊥(*EG*).

2.a.



La face *EFGH* est un rectangle de dimensions 9 cm et 4 cm.

b.

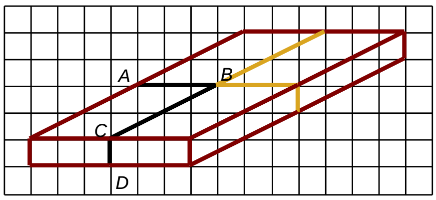


Le triangle *AEG*, rectangle en *E*, est tel que *AE*=4 cm et $EG^2=4^2+9^2$.

Exercice 20 D'une perspective à l'autre

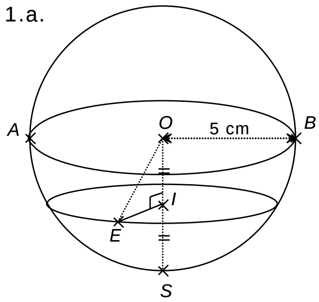
1. Le pavé droit ci-contre n'est pas représenté en perspective cavalière car :
- aucune face n'est repré-sentée en vraie grandeur ;
- le parallélisme des arêtes n'est pas conservé ;
- les arêtes cachées ne sont pas représentées en pointillés.

2. Ci-dessous une représentation du paquet cadeau en perspective cavalière, la face contenant [*CD*] étant vue de face.



Exercice 21 Sphère en perspective

1.a.



I est le milieu du rayon [*OS*] de la sphère de diamètre [*AB*].

b. La section de la sphère par le plan perpendiculaire à (*OI*) passant par le milieu *I* du segment [*OS*] est un cercle de centre *I*.

c. *E* est un point de ce cercle.

2. *AB*=10 cm.

a. *OE*=5 cm.

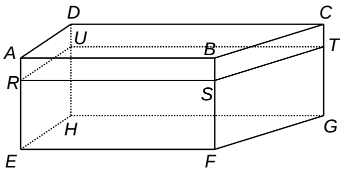
b. *OIE* est un triangle rectangle en *I*.

c. $IE=\sqrt{50^2-25^2}\approx 43$ mm.

Exercices d'approfondissement

Exercice 22 **Voir dans l'espace**

ABCDEFGH est un prisme droit, de bases les trapèzes *ABCD* et *EFGH*.



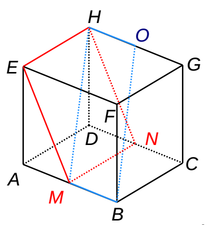
1. Le plan (*RST*) est perpendiculaire en *R* à la droite (*AE*).
Dans le prisme droit *ABCDEFGH*, les plans (*ABC*) et (*FGH*) sont aussi perpendiculaires à la droite (*AE*).
Donc le plan (*RST*) est parallèle aux plans (*ABC*) et (*FGH*).

2. Triangles rectangles en *R* :
- *ARS*, *ARU* et *ART* ;
- *ERS*, *ERU* et *ERT*.

[Les droites (*AR*) et (*ER*), perpendiculaires à (*RST*), sont perpendiculaires à toutes les droites de ces plans passant par *R*.]

3. Les droites (*DC*) et (*RS*) sont coplanaires ; en effet :
- (*DC*)//(*AB*) {[*AB*] et [*CD*] bases du trapèze *ABCD*} ;
- (*RS*)//(*AB*) {(dans le plan (*ABE*), ces deux droites sont perpendiculaires à la droite (*AR*)} ;
- (*DC*) et (*RS*), parallèles à la même droite, sont parallèles entre elles, c'est-à-dire coplanaires.

Exercice 23 **Droites parallèles et plans**

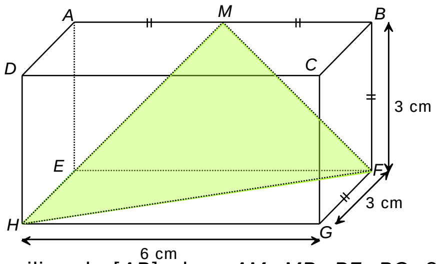


ABCDEFGH est un cube

1. *O* et *M* étant les milieux de deux segments [*HG*] et [*AB*], parallèles et de même longueur, les segments [*HO*] et [*MB*] sont aussi parallèles et de même longueur ; donc le quadrilatère non croisé *HOBM* est un parallélogramme.

2. *EHNM* est un rectangle de diagonale [*HM*] ; mais la droite (*OB*) est parallèle (d'après la question 1.) à (*HM*), droite du plan (*EHN*) ; donc (*OB*) est parallèle à (*EHN*).

Exercice 24 **En relation avec Pythagore**



1. *M* est le milieu de [*AB*], donc $AM = MB = BF = BC = 3$ cm.
Donc les triangles *DAM*, *MBF* et *CBF*, rectangles et isocèles respectivement en *A*, *B* et *B*, ont leurs côtés de l'angle droit de même longueur ; leurs hypoténuses respectives ont aussi même longueur, c'est-à-dire : $DM = MF = CF$.

2.a. La droite (*DH*) est perpendiculaire en *D* aux droites (*DA*) et (*DC*), sécantes dans le plan (*ADC*) ; donc (*DH*) est perpendiculaire à (*ADC*).

b. On déduit que (*DH*) est perpendiculaire à toute droite du plan (*ADC*), en particulier la droite (*DM*) ;
donc *DHM* est un triangle rectangle en *D*.

3. D'après la propriété de Pythagore ou sa réciproque :
a. $DM^2 = DA^2 + AM^2 = 3^2 + 3^2 = 18$; $MF^2 = MB^2 + BF^2 = 3^2 + 3^2 = 18$;
$MH^2 = DM^2 + DH^2 = 18 + 3^2 = 27$; $HF^2 = HG^2 + GF^2 = 6^2 + 3^2 = 45$.
Donc : $MH^2 + MF^2 = HF^2$ ($27 + 18 = 45$) et *HMF* est un triangle rectangle en *M*.

b. $DM^2 = MC^2 = 18$; $DC^2 = 36$; donc *DMC* est un triangle rectangle et isocèle en *M*.

Exercice 25 **Boule creuse**

Le volume d'une boule de diamètre 75 mm est égal à :

$\frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}75^3 = 70{,}3 \times \pi \approx 221$ cm³ ;

la masse d'une telle boule pleine en fer est donc égale à :

$7{,}8 \times 221 \approx 1\,723$ g ;

donc la boule, qui pèse 800 g, est creuse.

Exercice 26 **Sphère de gaz**

1. Volume intérieur de la sphère de stockage :

$\frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = 1333{,}3 \times \pi \approx \underline{4\,189 \text{ m}^3}$.

2. Remplie au quatre cinquièmes, la masse de gaz liquéfié contenu dans la sphère est :

$4\,189 \times \frac{4}{5} \times 450 \approx \underline{1\,508\,040 \text{ kg}}$.

Exercice 27 **Un curieux résultat**

1.a. Le volume d'une boule de rayon *r* est :

$$V_1 = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3.$$

b. Le volume d'un cube de côté 2 *r* est :

$$V_2 = (2\,r)^3 = 8 \times r^3.$$

c. Donc : $$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4 \times \pi \times r^3}{3 \times 8 \times r^3} = \underline{\frac{\pi}{6}}.$$

2.a. L'aire de la surface d'une boule de rayon *r* est :

$$A_1 = 4 \times \pi \times r^2.$$

b. L'aire d'un cube de côté 2 *r* est ;

$$A_2 = 6 \times (2\,r)^2 = 24 \times r^2.$$

c. Donc : $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4 \times \pi \times r^2}{24 \times r^2} = \underline{\frac{\pi}{6}}.$$

3. On constate que : $$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi}{6}.$$

Propriété : le rapport entre le volume d'une boule avec celui d'un cube dans lequel elle est inscrite et le rapport entre les aires de ces mêmes solides sont égaux à $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 28 **Raisonner sur une coupole**

1. Volume de la coupole :

$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 12^3 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 9^3 = 666 \times \pi \approx \underline{2\,092 \text{ cm}^3}$.

2. Aire de la partie à peindre en vert :

$\frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 12^2 = 288 \times \pi$ cm² ;

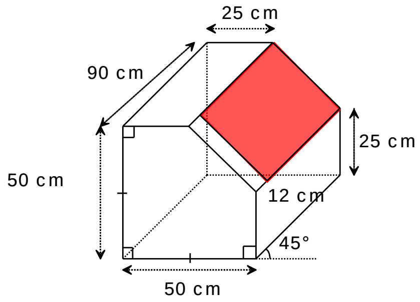
Aire de la partie à peindre en rose ou orange :

$\frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 9^2 + \pi \times \left(12^2 - 9^2\right) = 225 \times \pi$ cm² ;

donc il faut plus de peinture verte que de peintures rose et orange réunies.

Activités d'intégration

Exercice 29 **Le meuble d'angle**



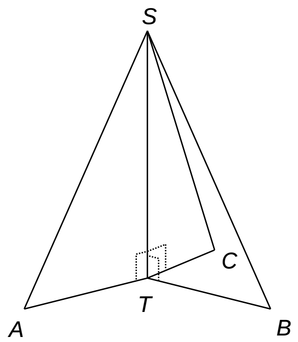
1. Ci-contre une représentation du meuble, à l'échelle 1 cm pour 10 cm et en perspective cavalière :

- dessus du meuble en face verticale frontale avant
  (50 cm et 25 cm sont représentés par 5 cm et 2,5 cm) ;
- pour les arêtes fuyantes, angle avec l'horizontale de 45° et coefficient de réduction coefficient de 0,5
  (90 cm et 12 cm sont représentés par 4,5 cm et 0,6 cm).

2. Dimensions de la porte en grandeurs réelles :

- hauteur : 90-12=78 cm ;
- largeur : $\sqrt{25^2+25^2} = \sqrt{1\,250} \approx$ 35 cm.

Exercice 30 **Le poteau à surprises**



Dans la figure ci-contre, [*ST*] schématise le poteau vertical, [*SA*], [*SB*] et [*ST*] les trois câbles.

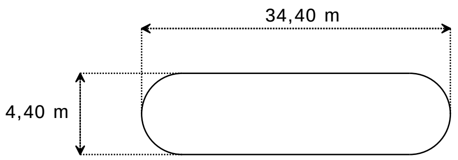
On sait que : $ST=9,60$ m, $SA=16$ m, $SB=12$ m et $SC=14,60$ m.
De plus : $BT=7,2$ m et $CT=11$ m.

1. $ST^2+BT^2=9,6^2+7,2^2=144$ et $SB^2=12^2=144$;
donc, d'après la propriété de Pythagore, le triangle *STB* est rectangle en *T*.
$ST^2+CT^2=9,6^2+11^2=213,16$ et $SC^2=14,6^2=213,16$;
donc, d'après la propriété de Pythagore, le triangle *STC* est rectangle en *T*.

On en déduit que le poteau, perpendiculaire à deux droites sécantes du sol, est perpendiculaire à ce sol.

2. Pour que le câble [*SA*] soit bien tendu, il faut que le triangle *STA* soit aussi rectangle en *T* ; c'est-à-dire, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore,
$AT=\sqrt{SA^2-ST^2} = \sqrt{16^2-9,6^2} = \sqrt{163,84} =$ 12,8 m.

Exercice 31 **Stockage de gaz liquéfié**



Ci-contre le schéma d'un réservoir constitué d'un cylindre et de deux demi-sphères.

1. Rayon des demi-sphères : $\frac{4,4}{2}=2,2$ m.

Le volume de ce réservoir est la somme des volumes :
- d'une sphère de rayon 2,2 m,
- d'un cylindre de hauteur 34,4-4,4=30 m, de base un disque de rayon 2,2 m ;

c'est-à-dire : $\frac{4}{3}\times\pi\times2,2^3+\pi\times2,2^2\times30=\pi\times2,2^2\times\left(\frac{4}{3}\times2,2+30\right)$

$$=\pi\times2,2^2\times\left(\frac{8,8+90}{3}\right)=\pi\times2,2^2\times\left(\frac{98,8}{3}\right)\approx 500,761\ m^3.$$

2. Rempli au trois quarts, ce réservoir contient : $500\,761\times\frac{3}{4}\approx$ 375 571 litres de GNL.

3. Aire de la surface extérieure d'un réservoir : $4\times\pi\times2,2^2+2\times\pi\times2,2\times30=2\times\pi\times2,2\times(2\times2,2+30)\approx475,51$ m².

Pour traiter cette surface, il faut donc : $\frac{475,51}{6}\approx$ 80 L de produit.