CARGO

Collection de Mathématiques

3e

Guide pédagogique

ISBN : 978-2-7531-0468-6

© Hachette Livre International 2014

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122–4 et L. 122–5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

1 *Les propriétés de Thalès*

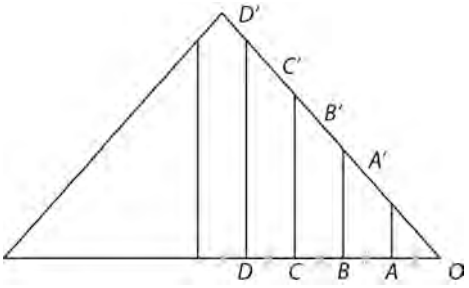
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	La propriété directe de Thalès dans le cas particulier des triangles [1a p 8]	25, 27, 28, 29, 30, 31, 36, 39	46	49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59
2	La propriété réciproque de Thalès dans le cas particulier des triangles [1b p 9]	33, 34, 35, 36, 37, 38, 39	47, 48	
	Partager un segment selon un rapport donné [2 p 9]	40, 41, 42, 43, 44, 45		
3	Les propriétés (directe et réciproque) de Thalès dans le cas général [3 p 10]	24, 26, 32, 38	46	49
	Apprendre à appliquer la propriété directe de Thalès [1 p 11]	1. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8		
	Apprendre à appliquer la propriété réciproque de Thalès [2 p 12]	9, 10, 11, 12, 13, 14		
	Apprendre à partager un segment selon un rapport donné [3 p 13]	15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23		50

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

La cathédrale de Yaoundé

1.a.



b. Dans le triangle OBB', puisque A est le milieu de $[OB]$ et que $(AA')//(BB')$, on en déduit que A' est le milieu de $[OB']$ et que $AA' = \frac{1}{2}BB'$. Donc $BB' = 11{,}2$ m.

2.a. On procède comme à la question 1.b dans le triangle ODD' :

$BB' = \frac{1}{2}DD'$, donc $DD' = 22{,}4$ m.

b. On utilise les résultats des questions 1.b et 2.a, le coefficient de proportionnalité est 2.

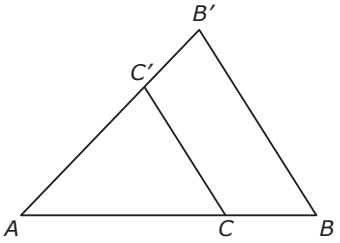
c. D'après le tableau de proportionnalité :
$DD' = 2\times BB'$ et $BB' = 2\times AA'$, donc $DD' = 4\times AA'$.

3. On note h la hauteur : $h = DD' + \frac{BB' - AA'}{2} = 22{,}4 + \frac{5{,}6}{2} = 25{,}2$ m.

Activités de découverte

1 La propriété de Thalès dans les triangles

1.a.



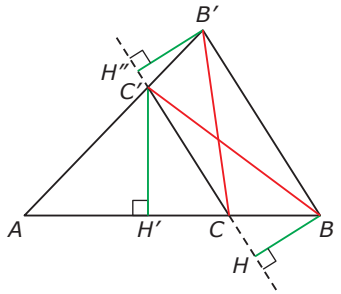
b. (Avec le schéma ci-contre.)

AB	AC	AB'	AC'	BB'	CC'	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC'}{AB'}$	$\frac{CC'}{BB'}$
3,9	2,7	3,4	2,3	2,9	2	0,7	0,7	0,7

c. On remarque que les longueurs et les rapports de longueurs sont différents, mais que les trois rapports sont toujours égaux.

© Hachette Livre International

2.a.



Aire(BCC') = $\frac{CC' \times BH}{2}$ et aire($B'CC'$) = $\frac{CC' \times BH'}{2}$.

Or $BHH'B'$ est un rectangle, donc $BH = BH'$.
On en déduit que ces aires sont égales.

b. Aire(ABC') = aire(ACC') + aire(BCC')
et aire($AB'C$) = aire(ACC') + aire($B'CC'$),
donc, d'après le 2.a, aire(ABC') = aire($AB'C$).

c. Aire(ACC') = $\frac{C'H'' \times AC}{2}$ et aire(ABC') = $\frac{C'H'' \times AB}{2}$; ainsi : $\frac{\text{aire}\left(ACC'\right)}{\text{aire}\left(ABC\right)} = \frac{\frac{C'H'' \times AC}{2}}{\frac{C'H'' \times AB}{2}} = \frac{AC}{AB}$.

On démontre de même que : $\frac{\text{aire}\ (ACC')}{\text{aire}\ (AB'C)} = \frac{AC'}{AB'}$. D'après le b, aire($ABC'$) = aire($AB'C$) ; donc : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$.

3. Dans chacune de ces situations, les raisonnements sont analogues.

2 La propriété réciproque de Thalès dans les triangles

1.a.

	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC'}{AB'}$	ces rapports sont égaux : oui / non	(BB') semble parallèle à (CC') : oui / non
Schéma n° 1	0,6	0,6	oui	non
Schéma n° 2	0,6	0,6	oui	oui
Schéma n° 3	1,4	1,4	oui	oui
Schéma n° 4	0,5	0,5	oui	non
Schéma n° 5	0,5	0,5	oui	oui
Schéma n° 6	1,4	1,4	oui	non

b. L'égalité entre les rapports ne suffit pas.
Il faut en plus que les points A, B et C, d'une part, A', B' et C', d'autre part, soient alignés dans le même ordre.

2. Propriété

ABB' est un triangle. C est un point de (AB) et C' un point de (AB') tels que la position de C par rapport à A et B soit la même que la position de C' par rapport à A et B'. Si $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$, *alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.*

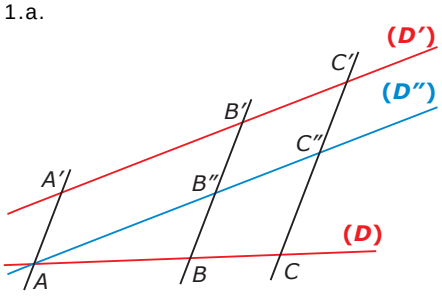
3. ABB' est un triangle. C est un point de (AB) et C' un point de (AB') tels que la position de C par rapport à A et B est la même de C' par rapport à A et B'.

De plus, $\frac{AC}{AB} = \frac{5,1 + 3,4}{5,1} = \frac{8,5}{5,1} = \frac{5}{3}$ et $\frac{AC'}{AB'} = \frac{4,5 + 3}{4,5} = \frac{7,5}{4,5} = \frac{5}{3}$; donc : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$.

Ainsi, d'après la propriété réciproque de Thalès, les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

3 La propriété de Thalès : le cas général

1.a.



b. Avec ce schéma.

$\frac{AC}{AB} \approx 1,5$ et $\frac{A'C'}{AC} \approx 1,5$; $\frac{BC}{BA} \approx 0,5$ et $\frac{B'C'}{B'A'} \approx 0,5$;

$\frac{CA}{CB} \approx 3,1$ et $\frac{C'A'}{C'B'} \approx 3,1$.

On observe que ces rapports semblent deux à deux égaux.

2.a. Voir la figure ci-contre.

b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABB'' et ACC''.

c. Ces quadrilatères sont des parallélogrammes car leurs côtés opposés sont parallèles.

d. Puisqu'il s'agit de parallélogrammes : $AB'' = A'B'$ et $AC'' = A'C'$.

Or : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC''}{AB''}$; donc : $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$.

© Hachette Livre International

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à appliquer la propriété directe de Thalès

Exercice 1

On utilise la propriété générale de Thalès pour déduire que $\frac{MK}{KI} = \frac{NL}{LJ}$, donc $NL = LJ \times \frac{MK}{KI} = 1{,}3 \times \frac{1{,}2}{1} = 1{,}56$ cm.

Exercice 2

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire : $\frac{FD}{FE} = \frac{FH}{FG}$, donc $FD = FE \times \frac{FH}{FG} = 2 \times \frac{4}{3} \approx 2{,}7$ cm.

Exercice 3

On utilise la propriété générale de Thalès pour déduire que : $\frac{PQ}{QR} = \frac{ON}{MN}$, donc $PQ = Q'R \times \frac{ON}{MN} = 1{,}4 \times \frac{1{,}1}{1{,}6} \approx 1$ cm.

Exercice 4

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire que : $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB}$, donc $OA = OB \times \frac{OA'}{OB'} = 0{,}9 \times \frac{0{,}3}{1{,}3} \approx 0{,}2$ cm.

Exercice 5

On utilise la propriété générale de Thalès pour déduire que : $\frac{FD}{FE} = \frac{CA}{CB}$, donc $FD = FE \times \frac{CA}{CB} = 0{,}5 \times \frac{1{,}9}{0{,}4} \approx 2{,}4$ cm.

Exercice 6

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire que : $\frac{MN}{MP} = \frac{NS}{PT}$, donc $NS = PT \times \frac{MN}{MP} = 30 \times \frac{12}{32} \approx 11{,}3$ cm.

Exercice 7

Dans les deux cas, on utilise la propriété de Thalès dans des triangles pour déduire que :

Figure 1 : $\frac{IE}{IG} = \frac{IF}{IH}$,

donc $IE = IG \times \frac{IF}{IH} = 1 \times \frac{3}{1{,}2} = 2{,}5$ dm.

De plus $EG = IE + IG = 3{,}5$ dm.

Figure 2 : $\frac{IE}{IG} = \frac{IF}{IH}$,

donc $IE = IG \times \frac{IF}{IH} = 4{,}5 \times \frac{10}{6} = 7{,}5$ m.

De plus $EG = IE - IG = 3$ m.

Exercice 8

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire que : $\frac{SW}{SU} = \frac{SV}{ST} = \frac{VW}{TU}$.

De plus, $ST = 2 \times TV$ donc $SV = 3 \times TV$,

d'où $\frac{SV}{ST} = \frac{3 \times TV}{2 \times TV} = \frac{3}{2}$.

Donc, $SW = SU \times \frac{SV}{ST} = 5 \times \frac{3}{2} \approx 7{,}5$ cm

d'où $UW = 2{,}5$ cm.

De plus, $VW = TU \times \frac{SV}{ST} = 1{,}4 \times \frac{3}{2} = 2{,}1$ cm

2 Apprendre à appliquer la propriété réciproque de Thalès

Exercice 9

D est un point de (AB) et E est un point de (AC) tels que la position de D par rapport à A et B est la même que la position de E par rapport à A et C.

De plus, $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ et $\frac{AB}{AD} = \frac{3{,}6}{6} = 0{,}6$;

donc : $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$.

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas des triangles, on en déduit que $(BC)//(DE)$.

Exercice 10

Les points I, K, M sont alignés ; de même que les points J, L, N ; $(IJ)//(KL)$ et la position de M par rapport à I et K est la même que la position de N par rapport à J et L ;

de plus : $\frac{IM}{IK} = \frac{3}{1} = 3$ et $\frac{JN}{JL} = \frac{3{,}6}{1{,}2} = 3$;

donc : $\frac{IM}{IK} = \frac{JN}{JL}$.

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas général, on en déduit que $(KL)//(MN)$.

Exercice 11

E est un point de (FG) et I un point de (HG) tels que la position de E par rapport à F et G est la même que la position de I par rapport à H et G.

De plus, $\frac{GE}{GF} = \frac{0{,}5}{0{,}1} = 5$ et $\frac{GI}{GH} = \frac{0{,}6}{0{,}12} = 5$;

donc : $\frac{GE}{GF} = \frac{GI}{GH}$.

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas des triangles, on déduit que $(FH)//(EI)$.

Exercice 12

Les points P, Q, R sont alignés ; de même que les points P', Q', R' ; $(PP')//(QQ')$ et la position de P par rapport à Q et R est la même que la position de P' par rapport à Q' et R' ;

de plus : $\frac{PR}{PQ} = \frac{16}{4} = 4$ et $\frac{P'R'}{P'R'} = \frac{14}{3{,}5} = 4$;

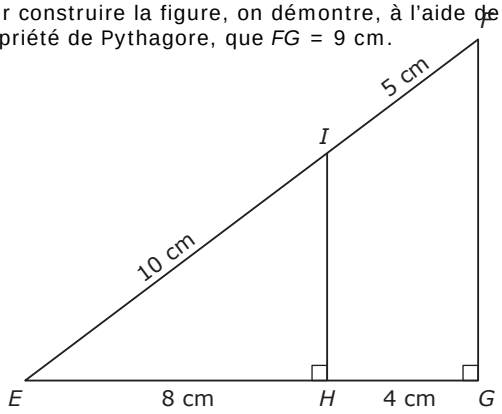
donc : $\frac{PR}{PQ} = \frac{P'R'}{P'Q'}$.

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas général, on en déduit que $(QQ')//(RR')$.

© Hachette Livre International

Exercice 13

1. (Échelle ½)
Pour construire la figure, on démontre, à l'aide de la propriété de Pythagore, que $FG = 9$ cm.



2. H est un point de (EG) et I un point de (EF) tels que la position de H par rapport à E et G est la même que la position de I par rapport à E et F.

De plus, $\frac{EG}{EH} = \frac{12}{8} = 1{,}5$ et $\frac{EF}{EI} = \frac{15}{10} = 1{,}5$

donc : $\frac{EG}{EH} = \frac{EF}{EI}$.

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas des triangles, on en déduit que $(IH)//(FG)$.

Exercice 14

1. On utilise une première fois la propriété de Thalès avec les triangles ABC et $AB'C'$ pour déduire que $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$;
puis une seconde fois avec les triangles ACD et $AC'D'$ pour déduire que : $\frac{AC}{AC'} = \frac{AD}{AD'} = \frac{CD}{CD'}$;

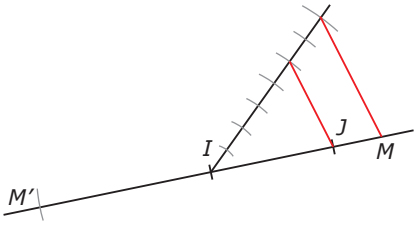
on déduit alors que : $\frac{AB}{AB'} = \frac{AD}{AD'}$.

2. On utilise la propriété réciproque de Thalès dans les triangles ABD et $AB'D'$ et notamment l'égalité des rapports obtenus au 1. pour conclure que $(BD)//(B'D')$.

3 Apprendre à partager un segment

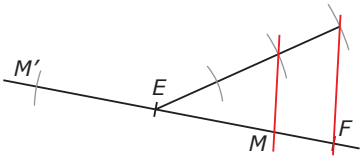
Exercice 15

$\frac{IM}{IJ} = \frac{7}{5}$



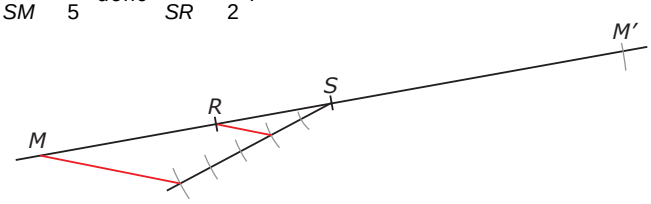
Exercice 16

$\frac{EM}{EF} = \frac{2}{3}$



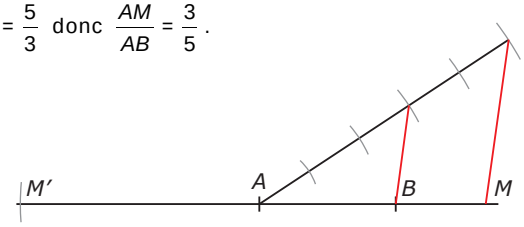
Exercice 17

$\frac{SR}{SM} = \frac{2}{5}$ donc $\frac{SM}{SR} = \frac{5}{2}$.



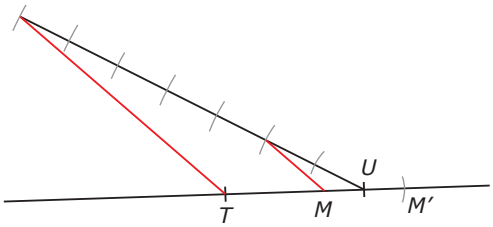
Exercice 18

$\frac{MA}{BA} = \frac{5}{3}$ donc $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$.



Exercice 19

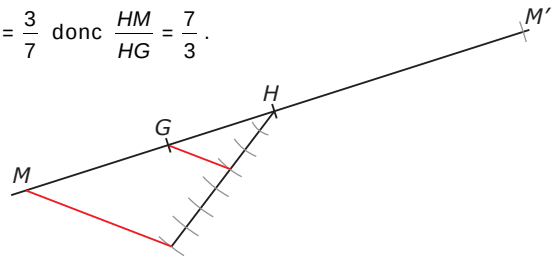
$\frac{UM}{UT} = \frac{2}{7}$



© Hachette Livre International

Exercice 20

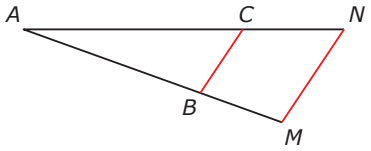
$\frac{HG}{MH} = \frac{3}{7}$ donc $\frac{HM}{HG} = \frac{7}{3}$.



Exercice 21

a. $\frac{AN}{8} = \frac{7}{5}$ est équivalent à $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB}$ ou $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$;

N est donc le point d'intersection de la droite (*AC*) et de la parallèle à (*BC*) passant par *M*.



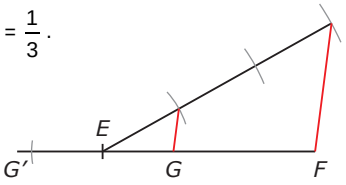
b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire que : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$;

donc : $AN = AC \times \frac{AM}{AB} = 7 \times \frac{8}{5} = \frac{56}{5} = 11{,}2$ cm ;

d'où : $CN = AN - AC = 4{,}2$ cm.

Exercice 22

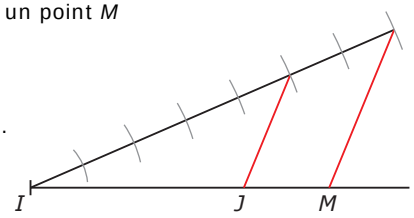
a. $EG = \frac{1}{3}EF$ donc $\frac{EG}{EF} = \frac{1}{3}$.



b. On utilise le schéma précédent : puisque $EG = \frac{1}{3}EF$, si on note *G'* le symétrique de *G* par rapport à *E*, alors $EG' = \frac{1}{3}EF$ et $FG' = \frac{4}{3}EF$. On peut alors tracer le cercle de centre *F* et de rayon $FG' = \frac{4}{3}FE$.

Exercice 23

On cherche à placer un point *M* tel que $IM = \frac{7}{5}IJ$, c'est-à-dire $\frac{IM}{IJ} = \frac{7}{5}$.



On trace alors le cercle de centre *I* et de rayon *IM*.

© Hachette Livre International

Activités d'application

Calculs de longueurs

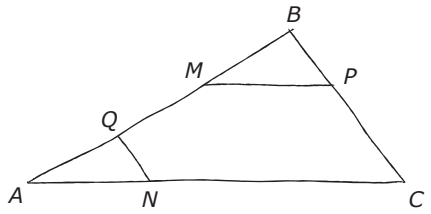
Exercice 24

a. $\frac{EF}{EG} = \frac{HI}{HJ}$; $\frac{FG}{EF} = \frac{IJ}{HI}$; $\frac{FG}{EG} = \frac{IJ}{HJ}$.

b. $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$; $\frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$; $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$.

Exercice 25

a.



b. On utilise deux fois la propriété de Thalès :

• dans les triangles AQN et ABC : $\frac{AN}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{NQ}{BC}$;

• dans les triangles BMP et BAC : $\frac{BP}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{PM}{CA}$.

Exercice 26

On utilise la propriété générale de Thalès, puisque les droites rouges sont parallèles, pour en déduire :

• d'une part que : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$,

donc : $AB = AC \times \frac{A'B'}{A'C'} = 6 \times \frac{4,5}{5} = 5,4$ cm ;

• d'autre part que : $\frac{C'D'}{C'A'} = \frac{CD}{CA}$,

donc : $CD' = C'A' \times \frac{CD}{CA} = 5 \times \frac{4}{6} = \frac{10}{3}$ cm.

Exercice 27

a. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles IGH et IEF pour déduire que : $\frac{IF}{IH} = \frac{IE}{IG} = \frac{FE}{HG}$

d'où : $IF = IH \times \frac{FE}{HG} = 5 \times \frac{4,5}{3} = 7,5$ cm.

b. • Dans le triangle IGH rectangle en G,
d'après la propriété de Pythagore : $IH^2 = IG^2 + GH^2$,
d'où : $IG = 4$ cm.

• On reprend les égalités de rapports de longueurs du a :

$\frac{IE}{IG} = \frac{FE}{HG}$ donc : $IE = IG \times \frac{FE}{HG} = 4 \times \frac{4,5}{3} = 6$ cm.

Exercice 28

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAB et OCD pour déduire que : $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$.

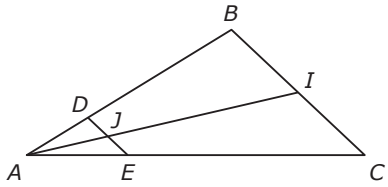
• $CD = AB \times \frac{OC}{OA} = AB \times \frac{AC - OA}{OA} = 8 \times \frac{35 - 10}{10} = 20$ cm.

• $OB = OD \times \frac{OA}{OC} = 30 \times \frac{10}{25} = 12$ cm.

Donc $BD = 42$ cm.

Exercice 29

a.



b. On utilise deux fois la propriété de Thalès :

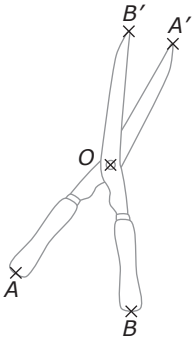
• une première fois dans les triangles ADJ et ABI, pour déduire que : $\frac{AJ}{AI} = \frac{AD}{AB} = \frac{DJ}{BI}$, donc $DJ = BI \times \frac{AJ}{AI}$;

• une seconde fois dans les triangles AEJ et ACI, pour déduire que : $\frac{AJ}{AI} = \frac{AE}{AC} = \frac{JE}{IC}$, donc $JE = IC \times \frac{AJ}{AI}$

or $IC = BI$, donc : $JE = BI \times \frac{AJ}{AI} = DJ$.

Ainsi, J est le milieu de $[DE]$.

Exercice 30



On schématise les cisailles afin de nommer les points.

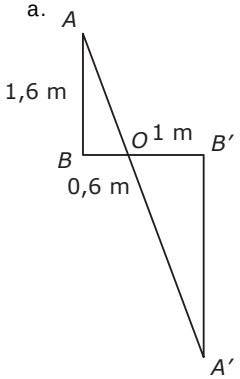
On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAB et $OA'B'$ pour déduire que : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$,

donc : $A'B' = AB \times \frac{OB'}{OB}$

$= 25 \times \frac{48}{32} = 37,5$ cm.

Exercice 31

a.



b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAB et $OA'B'$ pour déduire que : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$,

d'où : $A'B' = AB \times \frac{OB'}{OB}$

$A'B' = 1,6 \times \frac{1}{0,6} \approx 2,7$ m.

c. On procède de même, avec $OB = 0,4$ m :

$A'B' = 1,6 \times \frac{1}{0,4} = 4$ m.

© Hachette Livre International

Exercice 32

● Les points A, A' et A'' sont alignés, de même que les points B, B' et B'' ;
● $(AA')//(BB')$ et la position de A' par rapport à A et A'' est la même que la position de B' par rapport à B et B'' ;
● enfin $\frac{A'A}{A'A''} = \frac{3,6}{1} = 3,6$ et $\frac{B'B}{B'B''} = \frac{2,7}{0,75} = 3,6$.

Donc $\frac{A'A}{A'A''} = \frac{B'B}{B'B''}$ et, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(A'B')//(A''B'')$.

Exercice 33

● Les points N, P et Q sont alignés, de même que les points M, P et R ;
● la position de P par rapport à N et Q est la même que la position de P par rapport à M et R ;
● enfin $\frac{PQ}{PN} = \frac{8}{1,6} = 5$ et $\frac{PR}{PM} = \frac{7,5}{1,5} = 5$.

Donc $\frac{PQ}{PN} = \frac{PR}{PM}$ et, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(MN)//(QR)$.

Exercice 34

● Les points E, F et G sont alignés, de même que les points E, I et H ;
● la position de F par rapport à E et G est la même que la position de I par rapport à E et H ;
● enfin $\frac{EH}{EG} = \frac{3}{5} = 0,6$ et $\frac{EI}{EH} = \frac{3,6}{6} = 0,6$.

Donc $\frac{EF}{EG} = \frac{EI}{EH}$ et, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(GH)//(FI)$.

Exercice 35

a. $V \in [RU]$ et $V \in [ST]$.

$\frac{UV}{RV} = \frac{4,5}{1,8} = 2,5$ et $\frac{TV}{SV} = \frac{7,9}{3,6} \approx 2,2$; donc $\frac{UV}{RV} \neq \frac{TV}{SV}$.

On en déduit, d'après la contraposée de la propriété de Thalès, que les droites (RS) et (TU) ne sont pas parallèles.

b. $R \in [UV]$ et $S \in [TV]$.

$\frac{UV}{RV} = \frac{4,8}{3,6} = \frac{4}{3}$ et $\frac{TV}{SV} = \frac{7,5}{5,6} \approx 1,34$; donc $\frac{UV}{RV} \neq \frac{TV}{SV}$.

On en déduit, d'après la contraposée de la propriété de Thalès, que les droites (RS) et (TU) ne sont pas parallèles.

Exercice 36

a. $A' \in [OB']$ et $A \in [OB]$.

$\frac{OB'}{OA'} = \frac{57,8}{52} = 1,1$ et $\frac{OB}{OA} = \frac{49,5}{44} = 1,125$;

donc $\frac{OB'}{OA'} \neq \frac{OB}{OA}$.

On en déduit, d'après la contraposée de la propriété de Thalès, que les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles.

b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAA'' et OBB'. On suppose que la couture est droite, c'est-à-dire $(AA'')//(BB')$.

Dans ce cas : $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA''} = \frac{BB'}{AA''}$;

d'où : $AA'' = BB' \times \frac{OA}{OB} = 54 \times \frac{44}{49,5} = 48$ cm.

Exercice 37

a. Puisque aire$(ABCD)$ = aire$(AGFE)$,

on obtient : $AB \times AD = AE \times AG$; d'où : $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}$.

b. $E \in [AB]$ et $D \in [AG]$.

On travaille dans les triangles AED et AGB, où $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}$;

d'après la propriété réciproque de Thalès, $(DE)//(BG)$.

Exercice 38

a. ● Les points E, F et G sont alignés, de même que les points H, I et J ;
● $(D)//(D')$ et la position de K par rapport à I et J est la même que la position de E par rapport à F et G ;
● enfin $\frac{EF}{FG} = \frac{1,02}{3,4} = 0,3$ et $\frac{HI}{IJ} = \frac{1,2}{4} = 0,3$.

Donc $\frac{EF}{FG} = \frac{HI}{IJ}$ et, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(D)//(D'')$.

b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles IKH et IJG pour déduire que : $\frac{IH}{IJ} = \frac{IK}{IG} = \frac{HK}{JG}$;

donc : $HK = JG \times \frac{IH}{IJ} = 2 \times \frac{1,2}{4} = 0,6$ dm.

Exercice 39

a. $M \in [IJ]$ et $N \in [IK]$.

$\frac{IM}{IJ} = \frac{2,4}{4} = 0,6$ et $\frac{IN}{IK} = \frac{3}{5} = 0,6$ donc $\frac{IM}{IJ} = \frac{IN}{IK}$;
on en déduit, d'après la propriété réciproque de Thalès, que $(JK)//(MN)$.

b. • On nomme H le pied de la hauteur issue de I dans le triangle IJK et L le pied de la hauteur issue de I dans le triangle IMN.
On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ILM et IJH pour déduire que : $\frac{IJ}{IM} = \frac{IH}{IL} = \frac{JH}{ML}$;

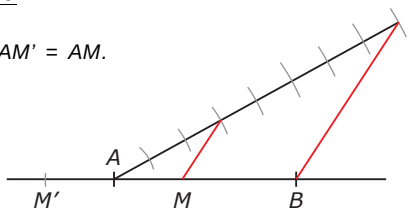
donc : $IL = IH \times \frac{IM}{IJ} = 3,8 \times \frac{2,4}{4} = 2,28$ cm.

© Hachette Livre International

Partage d'un segment

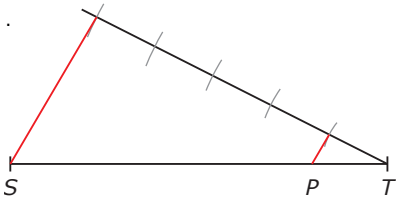
Exercice 40

$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8}$ et $AM' = AM$.

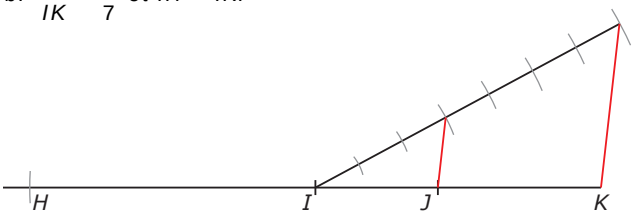


Exercice 41

a. $P \in [ST]$ et $\frac{TP}{ST} = \frac{1}{5}$.



b. $\frac{IJ}{IK} = \frac{3}{7}$ et $IH = IK$.

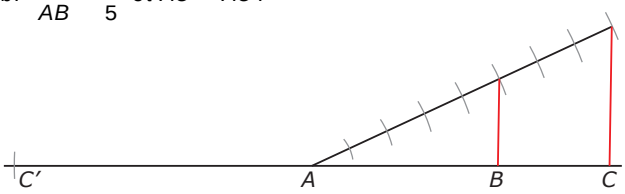


Exercice 42

a. Puisque $\frac{AC}{AB} = \frac{8}{5} > 1$, c'est que $AC > AB$.

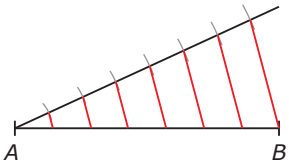
L'élève a donc raison.

b. $\frac{AC}{AB} = \frac{8}{5}$ et $AC = AC'$.

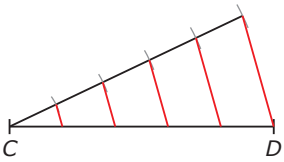


Exercice 43

a.

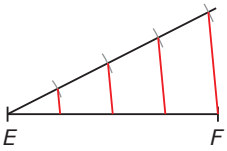


b.



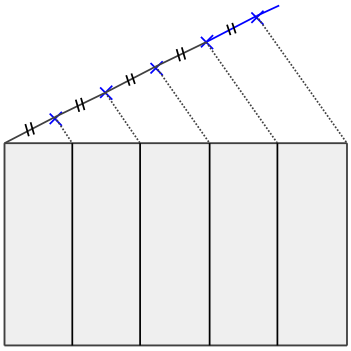
Exercice 44

Méthode 1 :
Par la propriété de Thalès



Méthode 2 :
En constituant le milieu I de $[EF]$ (*à l'aide de la médiatrice de [EF]*), puis celui de $[EI]$ et enfin celui de $[IF]$.

Exercice 45



Le champ est ainsi découpé en 5 parts égales.

© Hachette Livre International

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 46 Choisir les bonnes longueurs

1.a. Les longueurs *BC* et *B'C'* n'apparaissent pas dans les rapports de longueurs obtenus grâce à la propriété de Thalès.

b.

AB	*AB'*	*BB'*
AC	*AC'*	*CC'*

2.a. Les longueurs « entre les droites » ne sont pas utilisées lors de la propriété de Thalès.

b.

BC	*B'C'*
AC	*A'C'*

Exercice 47 Bien connaître les propriétés

1.a. $\frac{EM}{EF} = \frac{3}{5} = 0,6$ et $\frac{EN}{EG} = \frac{2,1}{3,5} = 0,6$

donc $\frac{EM}{EF} = \frac{EN}{EG}$.

b. Non, car il faut vérifier au préalable toutes les hypothèses de la propriété réciproque de Thalès, en particulier que la position de *M* par rapport à *E* et *F* est la même que la position de *N* par rapport à *E* et *G*.

c.

Figure où les droites (*MN*) et (*FG*) ne sont pas parallèles :

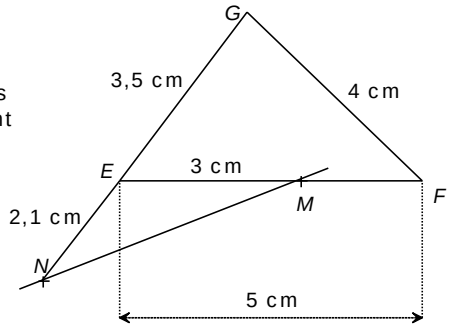
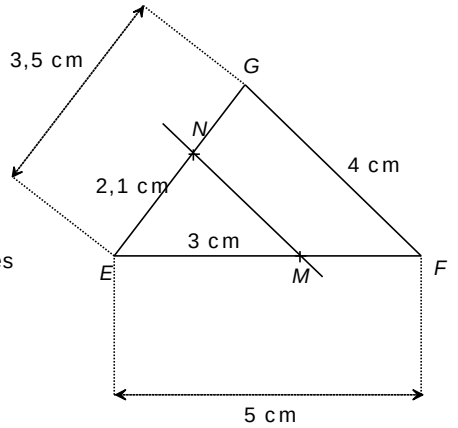


Figure où les droites (*MN*) et (*FG*) sont parallèles :



Exercice 48 Propriété réciproque et contraposée

1. ☐ Je m'assure que les points sont alignés dans le bon ordre ;

☐ Je calcule le rapport $\frac{IL}{IM}$; puis le rapport $\frac{IK}{IJ}$, puis je les compare.

☐ Si ces rapports sont égaux, alors j'utilise la propriété *réciproque* de Thalès pour déduire que (*MJ*)//(*LK*).

☐' Si ces rapports ne sont pas égaux, alors j'utilise la *contraposée de* la propriété de Thalès pour déduire que les droites (*MJ*) et (*LK*) ne sont pas parallèles.

2. Situation 1

☐ Les points *J*, *I* et *K* sont alignés, de même que les points *M*, *I* et *L* ; la position de *I* par rapport à *J* et *K* est la même que la position de *I* par rapport à *M* et *L*.

☐ $\frac{IL}{IM} = \frac{4}{0,8} = 5$ et $\frac{IK}{IJ} = \frac{5,5}{1,1} = 5$ donc $\frac{IL}{IM} = \frac{IK}{IJ}$.

☐ D'après la propriété réciproque de Thalès, on en déduit que (*MJ*)//(*KL*).

Situation 2

☐ Les points *I*, *J* et *K* sont alignés, de même que les points *I*, *M* et *L* ; la position de *M* par rapport à *I* et *L* est la même que la position de *J* par rapport à *I* et *K*.

☐ $\frac{IL}{IM} = \frac{4,2}{3} = 1,4$ et $\frac{IK}{IJ} = \frac{3,3}{2,4} = 1,375$ donc $\frac{IL}{IM} \neq \frac{IK}{IJ}$.

☐' D'après la contraposée de la propriété de Thalès, on en déduit que les droites (*MJ*) et (*KL*) ne sont pas parallèles.

© Hachette Livre International

Exercice 49 Rebonds d'un ballon

1. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAB et $OA'B'$ pour déduire que :

$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$ donc $\frac{OA' + 200}{OA'} = \frac{160}{120}$;

d'où : $120 \times (OA' + 200) = 160 \times OA'$,

c'est-à-dire : $120 \times OA' + 24\,000 = 160 \times OA'$,

donc : $OA' = \frac{24\,000}{40} = 600$ cm.

La distance au sol est donc $OA = 800$ cm.

2. On utilise deux fois la propriété de Thalès :

• dans les triangles $OA'B'$ et $OA''B''$:

$\frac{OA''}{OA'} = \frac{OB''}{OB'} = \frac{A''B''}{A'B'}$;

donc : $A''B'' = A'B' \times \frac{OA''}{OA'} = 120 \times \frac{500}{600} = 100$ cm.

• dans les triangles $OA'B'$ ET $OA'''B'''$:

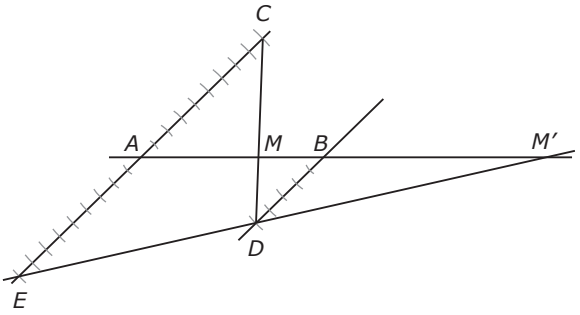
$\frac{OA'''}{OA'} = \frac{OB'''}{OB'} = \frac{A'''B'''}{A'B'}$;

donc : $A'''B''' = A'B' \times \frac{OA'''}{OA'} = 120 \times \frac{425}{600} = 85$ cm.

Ainsi, la hauteur cumulée des quatre premiers rebonds est : $160+120+100+85 = 465$ cm.

3. Non, puisque le quatrième rebond ne permet même pas de passer cet obstacle.

Exercice 50 Recherche de points

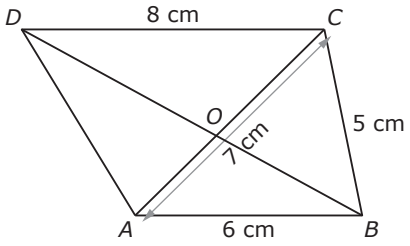


Dans la figure ci-dessus, où $A \in (CE)$ et $(CE)//(BD)$:

$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD} = \frac{9}{5}$ et $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AE}{BD} = \frac{9}{5}$.

Exercice 51 Une construction

1.a. et b.



2.a. Les triangles OAB et OCD sont en configuration de Thalès, donc : $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{BA}$ d'où $\frac{OC}{OA} = \frac{DC}{BA} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

b. $OC = AC - OA$, donc $\frac{AC - OA}{OA} = \frac{4}{3}$;

c'est-à-dire : $3\times(AC-OA) = 4\times OA$

$3\times(7-OA) = 4\times OA$

$21 - 3OA = 4OA$

$21 = 7OA$,

d'où : $OA = 3$ cm.

Exercice 52 Deux configurations

1. Les triangles IAJ et ICD sont en configuration de Thalès,

donc : $\frac{IA}{IC} = \frac{IJ}{ID} = \frac{AJ}{CD}$ d'où $\frac{9}{12} = \frac{AJ}{16}$.

Ainsi : $AJ = 16 \times \frac{9}{12} = 12$ cm.

2. Les triangles KJB et KCV sont en configuration de Thalès, donc : $\frac{KJ}{KD} = \frac{KB}{KC} = \frac{JB}{DC}$ d'où $\frac{KJ}{KD} = \frac{JB}{DC}$.

Or, d'une part $JB = AB - AJ = 16 - 12 = 4$ cm,

d'autre part $KD = KJ + JD = KJ + 21$.

Ainsi : $\frac{KJ}{KJ + 21} = \frac{4}{16}$;

c'est-à-dire : $16\times KJ = 4\times(KJ+21)$

$16\times KJ = 4\times KJ+84$

$12\times KJ = 84$,

d'où : $KJ = \frac{84}{12} = 7$ cm.

© Hachette Livre International

Exercice 53 Construire une charpente

1. Les points A, B et C sont alignés, de même que les points A, F et E ; la position de B par rapport à A et C est la même que la position de F par rapport à A et E ;

enfin $\frac{AC}{AB} = \frac{9}{5} = 1{,}8$ et $\frac{AE}{AF} = \frac{6{,}3}{3{,}5} = 1{,}8$ donc $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AF}$.

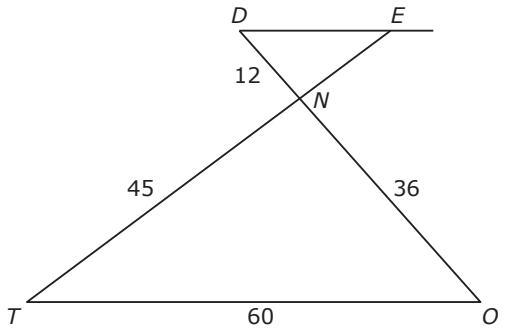
On en déduit, d'après la propriété réciproque de Thalès, que $(CE)//(BF)$.

2. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABF et ACE pour déduire que :

$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{CE}{BF}$ donc $CE = BF \times \frac{AC}{AB} = 2{,}5 \times 1{,}8 = 4{,}5$ m.

Exercice 54 Au millimètre près

1.



2. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles NDE et NTO pour déduire que : $\frac{ND}{NO} = \frac{NE}{NT} = \frac{DE}{OT}$;

donc $NE = NT \times \frac{ND}{NO} = 45 \times \frac{1}{3} = 15$ mm,

et $DE = OT \times \frac{ND}{NO} = 60 \times \frac{1}{3} = 20$ mm.

Exercice 55 Aire du trapèze

1. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles AOE et AML pour déduire que : $\frac{AO}{AM} = \frac{AE}{AL} = \frac{OE}{ML}$;

donc $AO = AM \times \frac{AE}{AL} = 3{,}9 \times \frac{1{,}5}{4{,}5} = 1{,}3$ cm.

2. On calcule les aires des deux triangles rectangles :

aire$(AEO) = \frac{1{,}5 \times 1{,}3}{2} = 0{,}975$ cm²,

aire$(AML) = \frac{4{,}5 \times 3{,}9}{2} = 8{,}775$ cm² ;

d'où : aire$(OELM) = 8{,}775 - 0{,}975 = 7{,}8$ cm².

Exercice 56 Deux situations différentes

Situation 1
On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABC et ADE pour déduire que :

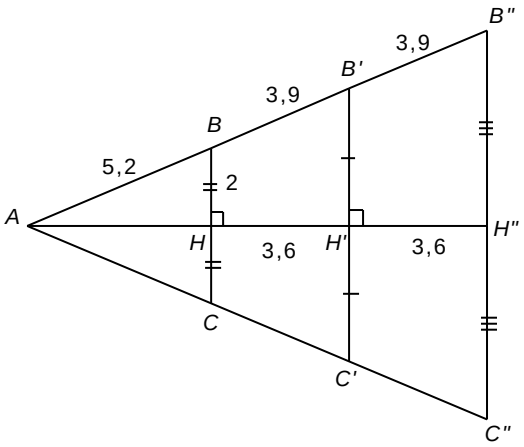
$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{ED}$ donc $AD = AB \times \frac{AE}{AC} = 8 \times \frac{AE}{AC} = 32$ cm.

Situation 2
On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABC et ADE pour déduire que :

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ donc $ED = BC \times \frac{5}{6} = 10$ cm.

© Hachette Livre International

Exercice 57 Pointe de flèche



1. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABC et $AB'C'$ pour déduire que : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$;

donc $B'C' = BC \times \frac{AB'}{AB} = 2 \times 2 \times \frac{9,1}{5,2} = 7$ cm.

2. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABH et $AB'H'$ pour déduire que : $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{B'H'}{BH}$;

donc $\frac{AH'}{AH} = \frac{AH+3,6}{AH} = \frac{3,5}{2}$

$2 \times (AH + 3,6) = 3,5 \times AH$

$1,5 \times AH = 7,2$

$AH = 4,8$ cm.

Finalement la pointe de flèche mesure :

$4,8+3,6+3,6 = 12$ cm.

3.a. Les points A, B et B'' sont alignés, de même que les points A, H et H'' ; la position de B par rapport à A et B'' est la même que la position de H par rapport à A et H'' ;

de plus $\frac{AB}{AB''} = \frac{5,2}{13} = 0,4$ et $\frac{AH}{AH''} = \frac{4,8}{12} = 0,4$;

donc $\frac{AB}{AB''} = \frac{AH}{AH''}$.

On en déduit, d'après la propriété réciproque de Thalès, que les droites (BH) et $(B''H'')$ sont parallèles ;
c'est-à-dire $(BC)//(B''C'')$.

b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles $AB''C''$ et ABC pour déduire que : $\frac{B''C''}{BC} = \frac{AB''}{AB}$;

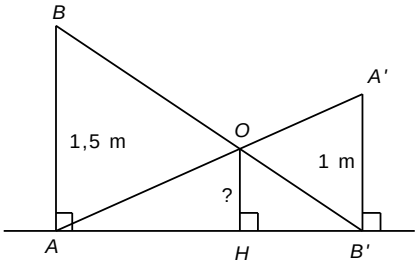
donc $B''C'' = BC \times \frac{AB''}{AB} = 4 \times \frac{13}{5,2} = 10$ cm.

AH'' étant la hauteur issue de A dans le triangle $AB''C''$,

on a : aire$(AB''C'') = \frac{AH'' \times B''C''}{2} = \frac{12 \times 10}{2} = 60$ cm².

Exercice 58 L'enclos du zébu

On nomme les points du schéma :



On utilise deux fois la propriété de Thalès :

• dans les triangles OAB et $OA'B'$ pour déduire que :

$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$ donc $OA = 1,5 \times OA'$ et $OB = 1,5 \times OB'$;

• dans les triangles AOH et $AA'B'$ pour déduire que :

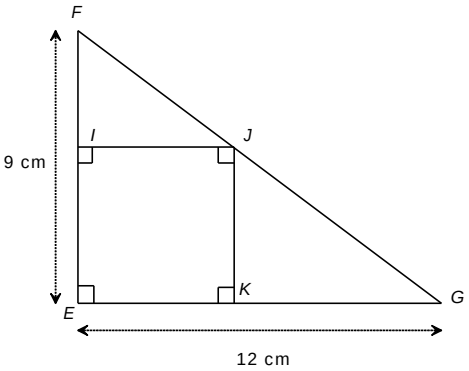
$\frac{AO}{AA'} = \frac{AH}{AB'} = \frac{OH}{A'B'}$ donc $OH = A'B' \times \frac{AO}{AA'} = A'B' \times \frac{AO}{AO+OA'}$

$= 1 \times \frac{1,5 \times OA'}{1,5 \times OA' + OA'}$

$= \frac{1,5}{2,5} = 0,60$ m.

Finalement le zébu ne pourra pas enjamber la barrière.

Exercice 59 Pièce d'artisanat



1.a. On utilise la propriété de Pythagore dans le triangle EFG rectangle en E : $FG^2 = FE^2 + EG^2$ d'où $FG = 15$ cm.
b. $(IJ)//(EK)$ car elles sont perpendiculaires à une même droite : (EF) ;
$(EI)//(JK)$ car elles sont perpendiculaires à une même droite : (EG) ;
donc $EIJK$ est un parallélogramme.
De plus, $(EI) \perp (EK)$; donc $EIJK$ est un rectangle.

2.a. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles FIJ et FEG pour déduire que :

$\frac{FI}{FE} = \frac{FJ}{FG} = \frac{IJ}{EG}$ c'est-à-dire $\frac{FI}{9} = \frac{FJ}{15} = \frac{IJ}{12}$.

b. Pour que $EIJK$ soit un carré, il faut que $IJ = EI = FE - FI$ c'est-à-dire $IJ = 9 - FI$.

Or, d'après le 2.a, $IJ = 12 \times \frac{FI}{9}$;

ainsi : $9 - FI = 12 \times \frac{FI}{9}$ ou $9 = 12 \times \frac{FI}{9} + FI$;

donc : $9 = 12 \times \frac{FI}{9} + 9 \times \frac{FI}{9} = 21 \times \frac{FI}{9}$,

c'est-à-dire : $FI = \frac{81}{21} \approx 3,9$ cm.

© Hachette Livre International

2 *Trigonométrie dans le triangle rectangle*

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2, 3	Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu [1 p 22]		46, 47, 48	
4	Relations trigonométriques [2 p 22]	42, 43, 44, 45	48	
	Les angles remarquables [3 p 23]	45	50	54
	Utilisation de la calculatrice [4 p 23)]	34	47	
	Apprendre à calculer un cosinus, un sinus, une tangente [1 p 24]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11		
	Apprendre à calculer une longueur [2 p 25]	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 36, 39, 40, 41	49	51,-52, 53, 55, 56,-57, 59, 60, 61
	Apprendre à déterminer la mesure d'un angle [3 p 26]	24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41	46, 47	52, 53, 55, 58, 60, 61

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Image télévisée

1. a. Puisque le rapport : $\frac{\text{longueur de l'image}}{\text{largeur de l'image}} = \frac{L}{\ell} = \frac{4}{3}$,

on en déduit que :

• Pour Yves : $L = \frac{4}{3} \times \ell = \frac{4}{3} \times 42 = 56$ cm.

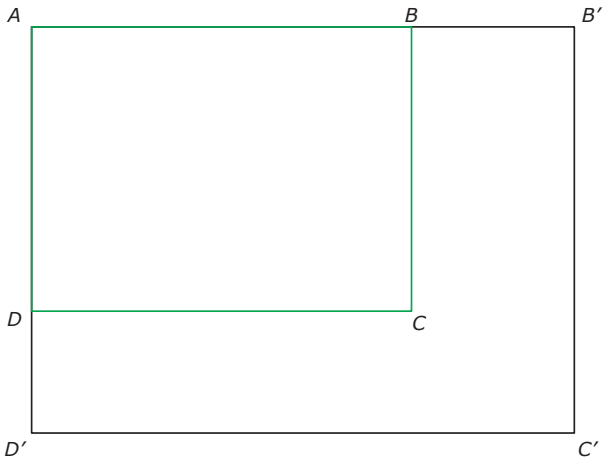
Pour le calcul de la diagonale, on utilise la propriété de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en A :

$BD^2 = BA^2 + AD^2$, on en déduit que $BD = \sqrt{42^2 + 56^2} = 70$ cm.

• Pour Claire : $\ell = \frac{L}{\frac{4}{3}} = L \times \frac{3}{4} = 80 \times \frac{3}{4} = 60$ cm.

On procède de même pour la diagonale et on trouve $B'D' = 100$ cm.

b.



2. On utilise le fait que $L = \frac{4}{3} \times \ell$ et la propriété de Pythagore : $d^2 = L^2 + \ell^2$, où d est la longueur de la diagonale.

On obtient $120^2 = \left(\frac{4}{3} \times \ell\right)^2 + \ell^2$, ce qui donne $\ell = 72$ cm. Enfin $L = \frac{4}{3} \times \ell = 96$ cm.

3. $\frac{AD}{BD} = \frac{42}{70} = 0,6$ et $\frac{AD'}{B'D'} = \frac{60}{100} = 0,6$. Ces rapports sont égaux.

$\frac{AB}{BD} = \frac{56}{76} = 0,8$ et $\frac{AB'}{B'D'} = \frac{80}{100} = 0,8$. Ces rapports sont égaux.

Ces rapports ne semblent pas dépendre des dimensions des téléviseurs.
Ce qui est confirmé par les rapports du 3ème téléviseur (question 2) :
d'une part entre largeur et diagonale ($\frac{72}{120} = 0,6$), d'autre part entre longueur et diagonale ($\frac{96}{120} = 0,8$).

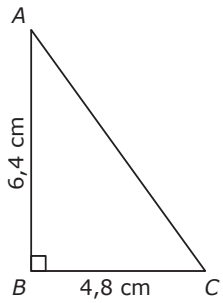
© Hachette Livre International

Activités de découverte

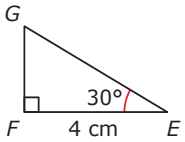
1 Constructions de triangles rectangles et calculs de longueurs

1.

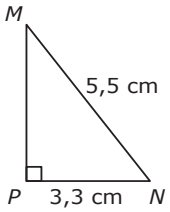
Triangle 1



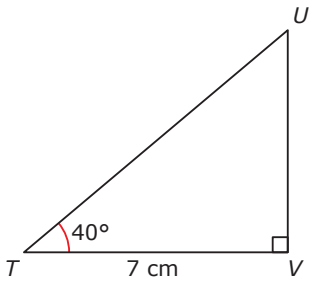
Triangle 2



Triangle 3



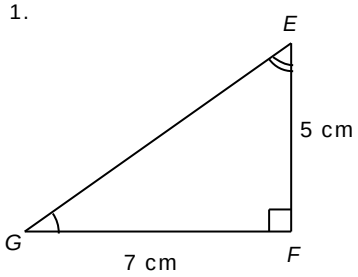
Triangle 4



2.a. Dans les deux cas, en utilisant la propriété de Pythagore on obtient : $AC = 8$ cm et $MP = 4{,}4$ cm.
b. Non, pas avec les connaissances actuelles.

2 Compréhension du vocabulaire

1.



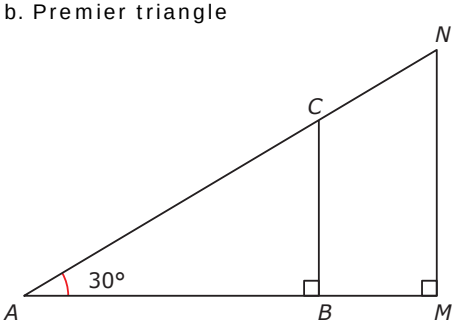
2. a. L'hypoténuse est EG ;
b. EF est le côté adjacent à $\hat{E}$;
c. le côté opposé à $\hat{E}$ est GF ;
d. le côté adjacent à $\hat{G}$ est GF.

3.

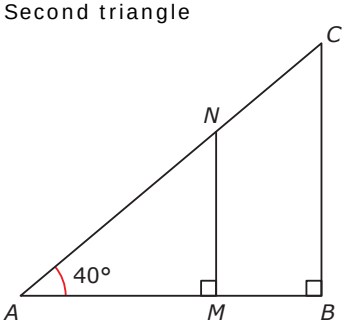
	Hypoténuse	Côté adjacent à l'angle marqué	Côté opposé à l'angle marqué
Situation ☐	BC	AC	AB
Situation ☐	DF	EF	ED
Situation ☐	GI	HI	HG
Situation ☐	LJ	KJ	KL

3 Mesure d'un angle et rapports de longueurs

b. Premier triangle



Second triangle



c. Premier triangle

$\frac{AB}{AC}$	$\frac{AM}{AN}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{MN}{AN}$	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{MN}{AM}$
0,9	0,9	0,5	0,5	0,6	0,6

Second triangle

$\frac{AB}{AC}$	$\frac{AM}{AN}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{MN}{AN}$	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{MN}{AM}$
0,8	0,8	0,6	0,6	0,8	0,8

Ces rapports semblent deux à deux égaux.

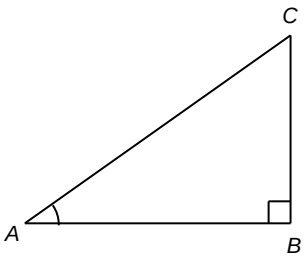
2.a. Dans les deux cas, les triangles sont en configuration de Thalès $[(BC)//(MN)]$;
on en déduit l'égalité des rapports : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

b. De $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, on déduit : $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$; de $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, on déduit : $\frac{BC}{AC} = \frac{MN}{AN}$; de $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, on déduit : $\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AM}$.

c. Faux (le rapport $\frac{AM}{AN}$ ne dépend pas de l'emplacement du point M).
Vrai (le rapport $\frac{AM}{AN}$ dépend de l'angle $\hat{A}$).

© Hachette Livre International

4 Des formules de trigonométrie



1.a. $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$; $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$.

b. $0 < AB < AC$ donc $\frac{0}{AC} < \frac{AB}{AC} < \frac{AC}{AC}$, c'est-à-dire $0 < \cos \hat{A} < 1$.

c. $0 < BC < AC$ donc, $\frac{0}{AC} < \frac{BC}{AC} < \frac{AC}{AC}$ c'est-à-dire $0 < \sin \hat{A} < 1$.

2.a. $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$.

b. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$.

3.a. $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$.

b. $\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$.

c. Les réponses a. et b. donnent $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

4.a. $\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC}$, $\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC}$.

b. On observe que $\cos \hat{C} = \sin \hat{A}$ et $\sin \hat{C} = \cos \hat{A}$.

c. Les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires car $\text{mes}\,\hat{A} + \text{mes}\,\hat{C} + 90° = 180°$, donc $\text{mes}\,\hat{A} + \text{mes}\,\hat{C} = 90°$.

Lorsque deux angles sont complémentaires, le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre.

© Hachette Livre International

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à calculer un cosinus, un sinus, une tangente

Exercice 1

$\cos\hat{C} = \frac{BC}{AC}$; $\sin\hat{C} = \frac{AB}{AC}$; $\tan\hat{C} = \frac{AB}{BC}$.

Exercice 2

$\cos\hat{D} = \frac{DF}{DE}$; $\sin\hat{D} = \frac{EF}{DE}$; $\tan\hat{D} = \frac{EF}{DP}$.

Exercice 3

$\cos\hat{H} = \frac{HI}{GH}$; $\sin\hat{H} = \frac{GI}{GH}$; $\tan\hat{H} = \frac{GI}{HI}$.

Exercice 4

$\cos\hat{K} = \frac{LK}{JK}$; $\sin\hat{K} = \frac{LJ}{JK}$; $\tan\hat{K} = \frac{LJ}{LK}$ $\tan\hat{H} = \frac{GI}{HI}$.

Exercice 5

$\cos B\hat{A}C = \frac{AB}{AC}$, $\sin B\hat{A}C = \frac{BC}{AC}$, $\tan B\hat{A}C = \frac{BC}{AB}$.

Exercice 6

$\cos E\hat{H}F = \frac{EH}{FH}$, $\sin E\hat{H}F = \frac{EF}{FH}$, $\tan E\hat{H}F = \frac{EF}{EH}$.

Exercice 7

$\cos\hat{M} = \frac{15}{25} = 0{,}6$; $\sin\hat{M} = \frac{20}{25} = 0{,}8$; $\tan\hat{M} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

Exercice 8

1. $EG^2 = EF^2 + FG^2$ ce qui donne $FG = 2\sqrt{7}$, donc $FG \approx 5{,}29$.

2. $\cos\hat{E} = \frac{EF}{EG} = \frac{6}{8} = 0{,}75$; $\sin\hat{E} = \frac{FG}{EG} \approx \frac{5{,}29}{8} \approx 0{,}7$;
$\tan\hat{E} = \frac{FG}{EF} \approx \frac{5{,}29}{6} \approx 0{,}9$.

Exercice 9

1. On le vérifie à l'aide de la propriété réciproque de Pythagore.

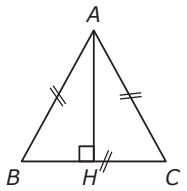
2.a. $\cos\hat{S} = \frac{ST}{SU} = \frac{12}{13} \approx 0{,}9$;

b. $\tan\hat{S} = \frac{TU}{ST} = \frac{5}{12} \approx 0{,}4$;

c. $\tan\hat{U} = \frac{ST}{TU} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

Exercice 10

1.



2. Dans un triangle équilatéral, la hauteur est aussi la médiane, donc H est le milieu de $[BC]$. Ainsi, dans le triangle ABH rectangle en H :
$\cos\hat{B} = \frac{BH}{BA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3. a. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, $AB^2 = AH^2 + HB^2$ d'où $AH = 2\sqrt{3}$.

b. $\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\hat{B} = \frac{AH}{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
(*on retrouve ici cos60°, sin60° et tan60°*)

Exercice 11

1. $[AB]$ est un diamètre de $(\mathcal{C})$, donc le triangle ABC est rectangle en C. On utilise la propriété de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + CB^2$ d'où $AC = 10$ cm.

2. $\cos B\hat{A}C = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{12} \approx 0{,}8$; $\sin B\hat{A}C = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{11}}{12} \approx 0{,}6$.

2 Apprendre à calculer une longueur

Exercice 12

$\cos\hat{A} = \frac{AB}{AC}$, donc $AB = 5 \times \cos 27° \approx 4{,}46$ cm.

Exercice 13

$\tan\hat{K} = \frac{IJ}{KJ}$, donc $KJ = \frac{10}{\tan 60°} \approx 5{,}77$ cm.

Exercice 14

$\sin\hat{E} = \frac{FG}{EG}$, donc $EG = \frac{4}{\sin 30°} = 8$ cm.

Exercice 15

$\sin\hat{N} = \frac{MP}{NP}$, donc $NP = \frac{3}{\sin 45°} \approx 4{,}24$ cm.

Exercice 16

$\cos\hat{T} = \frac{TS}{RT}$, donc $RT = \frac{10}{\cos 25°} \approx 11{,}03$ cm.

Exercice 17

$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$, donc $AC = 12 \times \sin 60° \approx 10{,}39$ cm.

Exercice 18

$\sin\hat{N} = \frac{LM}{MN}$, donc $MN = \frac{2{,}5}{\sin 62°} \approx 2{,}83$ cm.

Exercice 19

$\tan\hat{D} = \frac{FE}{DE}$, donc $FE = 30 \times \tan 70° \approx 82{,}42$ cm.

© Hachette Livre International

Exercice 20

$\sin \hat{K} = \frac{IJ}{KJ}$, donc $KJ = \frac{4}{\sin 26°} \approx 9{,}1$ cm.

$\tan \hat{K} = \frac{IJ}{IK}$, donc $IK = \frac{4}{\tan 26°} \approx 8{,}2$ cm.

Exercice 21

$\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC}$, donc $BC = 10 \times \cos 70° \approx 3{,}4$ cm.

$\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC}$, donc $AB = 10 \times \sin 70° \approx 9{,}4$ cm.

Ainsi, $\mathcal{P} = AB+BC+AC \approx 9{,}4+3{,}4+10 \approx 22{,}8$ cm.

Finalement, $22 \leq \mathcal{P} \leq 23$.

Exercice 22

• $\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB}$, donc $AC = 10 \times \cos 30° \approx 8{,}7$ dm ;

$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}$, donc $BC = 10 \times \sin 30° = 5$ dm.

Ainsi $\mathcal{A}(ABC) = \frac{AC \times BC}{2} \approx \frac{8{,}7 \times 5}{2} \approx 21{,}75$ dm².

• $\cos \hat{E} = \frac{DE}{FE}$, donc $DE = 8 \times \cos 39° \approx 6{,}2$ dm ;

$\sin \hat{E} = \frac{FD}{FE}$, donc $FD = 8 \times \sin 39° \approx 5$ dm.

Ainsi $\mathcal{A}(DEF) = \frac{FD \times DE}{2} \approx \frac{6{,}2 \times 5}{2} \approx 15{,}5$ dm².

• C'est donc le triangle ABC qui a la plus grande aire.

Exercice 23

1. • Puisque le triangle ABC est isocèle en A, la médiane (AI) est aussi la médiatrice de $[BC]$. Donc $(BI) \perp (AI)$.
• Dans le triangle ABI rectangle en I :

$\tan B\hat{A}I = \frac{BI}{AI}$, donc $AI = \frac{3}{\tan 20°} \approx 8{,}2$ cm ;

$\sin B\hat{A}I = \frac{BI}{AB}$, donc $AB = \frac{3}{\sin 20°} \approx 8{,}8$ cm.

2. • L'aire du triangle ABC est donc :

$\mathcal{A} = \frac{BC \times AI}{2} \approx \frac{6 \times 8{,}2}{2} \approx 24{,}6$ cm².

• Le périmètre du triangle ABC est donc :

$\mathcal{P} = AB+BC+CA \approx 8{,}2+8{,}8+6 \approx 23$ cm.

3 Apprendre à déterminer la mesure d'un angle

Exercice 24

$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{1{,}3}{2{,}6} = 0{,}5$; donc mes $\hat{A} = 60°$.

Exercice 25

$\tan \hat{J} = \frac{IK}{IJ} = 1$; donc mes $\hat{J} = 45°$.

Exercice 26

$\sin \hat{P} = \frac{MN}{PM} = \frac{1{,}05}{10} = 0{,}105$; donc mes $\hat{P} \approx 6°$.

Exercice 27

$\tan \hat{F} = \frac{EG}{FG} = \frac{7}{10} = 0{,}7$; donc mes $\hat{F} \approx 35°$.

Exercice 28

$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; donc mes $\hat{A} = 30°$.

Exercice 29

$\cos \hat{K} = \frac{IK}{JK} = \frac{2{,}12}{4} = 0{,}53$; donc mes $\hat{K} \approx 58°$.

Exercice 30

$\tan \hat{G} = \frac{EF}{EG} = \frac{3{,}5}{4} = 0{,}875$; donc mes $\hat{G} \approx 41°$.

Exercice 31

$\tan \hat{N} = \frac{PM}{MN} = \frac{3{,}06}{6} = 0{,}51$; donc mes $\hat{N} \approx 27°$.

Exercice 32

a. • Dans le triangle GHF rectangle en G :

$\tan G\hat{H}F = \frac{GF}{HG} = \frac{5}{5} = 1$; donc mes $G\hat{H}F = 45°$.

• Dans le triangle EFG rectangle en F :

$\tan E\hat{F}G = \frac{EF}{GF} = \frac{8}{5} = 1{,}6$; donc mes $E\hat{G}F \approx 58°$.

b. • Le triangle GHF est isocèle en G,
donc mes $G\hat{F}H$ = mes $G\hat{H}F = 45°$.
• Dans le triangle EFG :
mes $G\hat{E}F$ + mes $E\hat{F}G$ + mes $E\hat{G}F = 180°$;
on en déduit que mes $G\hat{E}F \approx 32°$.

Exercice 33

a. $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$, c'est-à-dire $\cos\alpha = \frac{6{,}1}{10} = 0{,}61$;
d'où : $52° < \text{mes } \alpha < 53°$.

b. $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}$, c'est-à-dire $\sin\alpha = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4$;
d'où : $23° < \text{mes } \alpha < 24°$.

© Hachette Livre International

Activités d'application

Recherche d'une longueur, d'un angle

Exercice 34

1. $\cos 35° \approx 0{,}819$; $\sin 70° \approx 0{,}940$; $\tan 27° \approx 0{,}510$; $\cos 18° \approx 0{,}951$; $\tan 61° \approx 1{,}804$; $\sin 28° \approx 0{,}470$.

2. mes $\hat{A} \approx 61°$; mes $\hat{B} \approx 56°$; mes $\hat{C} \approx 76°$.

Exercice 35

1. $78° <$ mes $\hat{I} < 79°$.

2. $53° <$ mes $\hat{J} < 54°$

3. $21° <$ mes $\hat{K} < 22°$.

Exercice 36

1. Le triangle OSL est rectangle en S,

donc : $\cos \hat{O} = \dfrac{OS}{OL}$, donc $OS = 10\times\cos 40° \approx 7{,}7$ m.

2. $\sin \hat{O} = \dfrac{SL}{OL}$, donc $SL = 10\times\sin 40° \approx 6{,}4$ m.

Or $6{,}4 - 2\times 2{,}5 = 1{,}4$. Donc Linda mesure 1 m 40 environ.

Exercice 37

1. On utilise la propriété réciproque de Pythagore dans le triangle FGH : $FH^2 = 9{,}5^2 = 90{,}25$;
$HG^2+GF^2 = 5{,}7^2+7{,}6^2 = 90{,}25$.
Ainsi, $FH^2 = HG^2+GF^2$;
on en déduit que ce triangle est rectangle en G.

2. On utilise la propriété de Pythagore dans le triangle FGH rectangle en E et on obtient $EH = \sqrt{24{,}64} \approx 5$ cm.

3. • Dans le triangle EFH rectangle en H :

$\cos E\hat{F}H = \dfrac{8{,}1}{9{,}5} \approx 0{,}85$; donc mes $E\hat{F}H \approx 32°$.

On en déduit que mes $E\hat{H}F \approx 58°$.

• Dans le triangle FGH rectangle en G :

$\cos H\hat{F}G = \dfrac{7{,}6}{9{,}5} \approx 0{,}8$; donc mes $H\hat{F}G \approx 37°$.

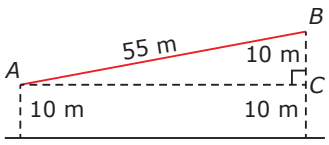
On en déduit que mes $G\hat{H}F \approx 53°$.

Exercice 38

On schématise la situation : dans le triangle ABC, rectangle en C,

$\sin B\hat{A}C = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{10}{55} \approx 0{,}18$;

donc mes $B\hat{A}C \approx 10°$.



Exercice 39

1. Dans le rectangle FBH, rectangle en H,

$\sin B\hat{F}H = \dfrac{BH}{BF} = \dfrac{3{,}4-2{,}2}{5{,}3-0{,}3} = \dfrac{1{,}2}{5} \approx 0{,}24$;

donc mes $B\hat{F}H \approx 14°$.

2. Dans le rectangle FBH rectangle en H, $\cos B\hat{F}H = \dfrac{FH}{FB}$,

donc $FH = FB\times\cos B\hat{F}H = 5\times\cos 14° \approx 4{,}85$.
Ainsi $\ell = 2\times FH \approx 2\times 4{,}85 \approx 9{,}7$ m.

Exercice 40

• Dans le triangle KLM, rectangle en M :
$ML = KL\times\cos\hat{L} = 5\times\cos 60° = 2{,}5$ dm ;
mes $M\hat{K}L = 90-60 = 30°$;
$KM = KL\times\sin\hat{L} = 5\sin 60° \approx 4{,}3$ dm.

• Dans le triangle JKM, isocèle rectangle en K :
mes $K\hat{J}M =$ mes $K\hat{M}J = 45°$; $JK = KM \approx 4{,}3$ dm ;
d'après la propriété de Pythagore :
$JM^2 = JK^2+KM^2$ d'où $JM \approx 6{,}1$ dm.

• Dans le triangle IJM, rectangle en M, d'après la propriété de Pythagore, $IJ^2 = JM^2-IM^2$ d'où $IJ \approx 3{,}7$ dm ;

$\cos I\hat{M}J = \dfrac{IM}{JM} \approx \dfrac{4{,}8}{6{,}1} \approx 0{,}79$, d'où mes $I\hat{M}J \approx 38°$;

mes $I\hat{J}M \approx 90-38 \approx 52°$.

Exercice 41

1. Dans le triangle MNQ, rectangle en N, d'après la propriété de Pythagore : $MQ^2 = MN^2+NQ^2$.
On obtient : $MN = \sqrt{2{,}75}$ cm.

2. Dans le triangle MNQ, rectangle en N :

$\sin N\hat{M}Q = \dfrac{QN}{QM} = \dfrac{2{,}5}{3} \approx 0{,}83$, donc : $N\hat{M}Q \approx 56°$;

de plus : $\cos N\hat{M}Q = \dfrac{MN}{QM}$;

donc : $MN = 3\times\cos 56° \approx 1{,}68$ cm.

3. Dans le triangle PQN, rectangle en N :

$\tan N\hat{P}Q = \dfrac{NQ}{NP}$; donc : $NP = \dfrac{2{,}5}{\tan 42°} \approx 2{,}78$ cm.
Finalement : $MP = MN+NP \approx 1{,}68+2{,}78 \approx 4{,}46$ cm.

© Hachette Livre International

Exercice 42

1. • $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$; $\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$;

$\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$;

donc $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, car $\cos\alpha > 0$.

• $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

2. • $\cos^2\alpha+\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$; $\cos^2\alpha = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$;

donc $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, car $\cos\alpha > 0$.

• $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. • $\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1$; $\cos^2\alpha = 1-\frac{1}{81} = \frac{80}{81}$;

donc $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$, car $\cos\alpha > 0$.

• $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4\sqrt{5}}{9}} = \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}$.

Exercice 43

1. • $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$; $\left(\frac{1}{5}\right)^2+\sin^2\alpha = 1$;

$\sin^2\alpha = 1-\frac{1}{25} = \frac{24}{25}$;

donc $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, car $\sin\alpha > 0$.

• $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$.

2. • $\left(\frac{2}{7}\right)^2+\sin^2\alpha = 1$; $\sin^2\alpha = 1-\frac{4}{49} = \frac{45}{49}$;

donc $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, car $\sin\alpha > 0$.

• $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

3. • $\left(\frac{5}{11}\right)^2+\sin^2\alpha = 1$; $\sin^2\alpha = 1-\frac{25}{121} = \frac{96}{121}$;

donc $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{6}}{11}$, car $\sin\alpha > 0$.

• $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Exercice 44

1. Les angles α et β sont des angles complémentaires car $\text{mes}\alpha+\text{mes}\beta = 90°$.

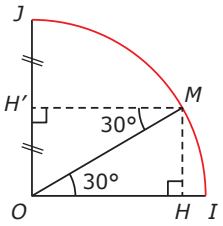
2. $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$ et $\sin\beta = \frac{AC}{AB}$.
Ainsi, lorsque $\text{mes}\alpha+\text{mes}\beta = 90°$, $\cos\alpha = \sin\beta$.

3. $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$ et $\cos\beta = \frac{BC}{AB}$,

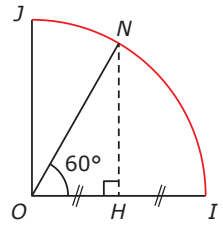
donc $\tan\alpha\times\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\times\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 1$.

Exercice 45

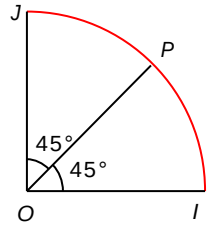
• Dans le triangle OMH, rectangle en H,
$\sin I\hat{O}M = \frac{HM}{OM}$, or $OM = 1$
et $\sin I\hat{O}M = \sin 30° = \frac{1}{2}$,
donc $HM = OH' = \frac{1}{2}$.



• Dans le triangle ONH, rectangle en H,
$\cos I\hat{O}M = \frac{OH}{ON}$, or $ON = 1$
et $\cos I\hat{O}N = \cos 60° = \frac{1}{2}$,
donc $OH = \frac{1}{2}$.



• Dans le triangle OPH, rectangle en H, (OP) est la bissectrice de l'angle $I\hat{O}J$ puisque mes $I\hat{O}J = 90°$ et mes $I\hat{O}P = 45°$.



© Hachette Livre International

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 46 Vérifier les hypothèses

1.Les formules de trigonométrie ne sont valables que dans les triangles rectangles, ce qui n'est pas le cas pour le triangle *EFG*. En effet l'hypoténuse de ce triangle ne peut être que son plus grand côté ;
or $EG^2 = 5^2 = 25$; $EF^2+FG^2 = 4{,}2^2+3^2 = 26{,}64$;
donc $EG^2 \neq EF^2+FG^2$ et, d'après la contraposée de la propriété de Pythagore, le triangle *EFG* n'est pas rectangle en *F*.

2. On vérifie aisément (propriété réciproque de Pythagore) que le triangle *EGH* est maintenant rectangle en *F*.

a. $\cos\hat{E} = \dfrac{EF}{EG} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

b. On en déduit que mes$\hat{E} \approx 37°$.

Exercice 47 Bien lire la table de trigonométrie

1. La réponse est cos55° = 0,574.
L'élève 2 a du lire la colonne des sinus pour 55°.

2. La réponse est 32° < mes$\hat{A}$ < 33°.
L'élève 1 n'a pas observé correctement la table et les deux valeurs situées autour de 0,848.
cos31° = 0,857 ; cos32° = 0,848 ; cos33° = 0,839.

Exercice 48 Utiliser les formules de trigonométrie

1. Dans le triangle *ABC*, rectangle en *B*, $\cos\hat{A} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{3}$.

2. • $\cos^2\hat{A} + \sin^2\hat{A} = 1$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \sin^2\hat{A} = 1$$

$$\sin^2\hat{A} = \frac{8}{9}$$

$$\sin\hat{A} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

• $\tan\hat{A} = \dfrac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$.

• $\sin\hat{C} = \cos\hat{A}$, car les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires ; donc $\sin\hat{C} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 49 Utiliser le bon outil

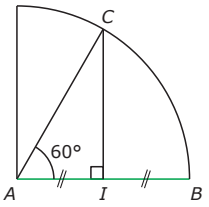
Situation ☐ : On utilise la propriété de Pythagore dans le triangle *IJK* rectangle en *I* :
$JK^2 = JI^2+IK^2$ ce qui donne *IJ* = 4,5 cm.

Situation ☐ : On utilise la trigonométrie dans le triangle *IJK* rectangle en *I* : $\cos I\hat{J}K = \dfrac{IJ}{JK}$,
d'où $IJ = JK\times\cos I\hat{J}K = 10\times\cos 60° = 5$ cm.

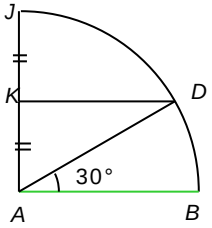
Situation ☐ : On utilise la propriété de Thalès.
Les triangles *IJK* et *KML* sont en configuration de Thalès,
donc : $\dfrac{KI}{KL} = \dfrac{KJ}{KM} = \dfrac{IJ}{LM}$;
de $\dfrac{KI}{KL} = \dfrac{IJ}{LM}$, on déduit que : $\dfrac{6}{8} = \dfrac{IJ}{4}$ d'où *IJ* = 3 cm.

Exercice 50 Rédiger un programme de construction

1. • Étape ☐ : *Je trace un quart de cercle de centre A et rayon [AB]* ;
• Étape ☐ : *Je marque le milieu I du segment [AB]* ;
• Étape ☐ : *La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe le quart de cercle au point C* ;
• Étape ☐ : *Je trace* [*AC*].



2. • Étape ☐ : *Je trace un quart de cercle de centre A et de rayon AB* ;
• Étape ☐ : *Je trace la perpendiculaire à* (*AB*) *passant par A* ;
• Étape ☐ : *Je place le point J d'intersection du quart de cercle et de la droite précédente* ;
• Étape ☐ : *Je marque le milieu K du segment* [*AJ*] ;
• Étape ☐ : *La perpendiculaire à* [*AJ*] *passant par K coupe le quart de cercle de point D* ;
• Étape ☐ : *Je trace* [*AD*].



© Hachette Livre International

Exercice 51 Des formules générales

1. Dans le triangle OBH rectangle en H, d'après la propriété de Pythagore : $OB^2 = HB^2 + HO^2$,
donc : $HO^2 = r^2 - h^2$.
Or le triangle OAB est isocèle en O, donc la hauteur (OH) est aussi une médiane.
Ainsi, $AB = 2 \times HB = 2\sqrt{r^2 - h^2}$.

2. ABC est un triangle équilatéral, donc :
• ses angles ont pour mesure 60° ; comme (OC) est la bissectrice de $\widehat{BCA}$, mes $\widehat{BCO} = 30°$;
• la hauteur (AH) est aussi une médiane, donc H est le milieu de $[BC]$.
Dans le triangle OHC, rectangle en H, $\cos \widehat{HCO} = \frac{HC}{OC}$;

d'où : $HC = OC \times \cos \widehat{HCO}$,

c'est-à-dire : $\frac{a}{2} = r \times \cos 30°$,

$$a = 2 \times r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

3. Avec les remarques de la question 2. puisque ABC est équilatéral, dans le triangle AHB, rectangle en H,

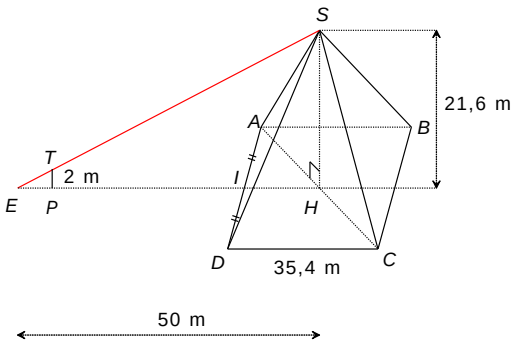
$AB^2 = AH^2 + HB^2$, c'est-à-dire : $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$;

d'où : $a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2$, c'est-à-dire : $h^2 = \frac{3a^2}{4}$ et $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4. Dans le triangle AOB isocèle rectangle en O :
d'une part, mes $\widehat{ABO} = 45°$;
d'autre part, $\cos \widehat{ABO} = \frac{OB}{AB}$; d'où $AB = \frac{OB}{\cos \widehat{ABO}}$;

ainsi, $c = \frac{r}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$; d'où $c = r \times \frac{2}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$.

Exercice 52 La pyramide du Louvre



1. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{35{,}4^2 + 35{,}4^2} \approx 50$ m.

2. Dans le triangle SAH, rectangle en H :

a. $\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{21{,}6}{25} = 0{,}864$;

d'où : mes $\widehat{SAH} = 41°$.

b. $\cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{AS}$, donc : $AS = \frac{AH}{\cos \widehat{SAH}} = \frac{25}{\cos 41°}$

$AS \approx 33$ m.

3. Les triangles ETP et ESH sont en configuration de Thalès $[(TP)//(SH)]$, donc : $\frac{EP}{EH} = \frac{PT}{HS}$;

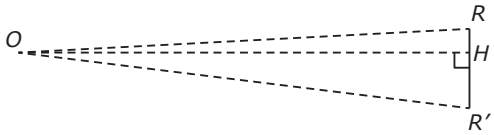
d'où : $EP = EH \times \frac{PT}{HS} = 50 \times \frac{2}{21{,}6} \approx 4{,}6$ m ;

on en déduit que : $PI = EH - EP - IH \approx 50 - 4{,}6 - \frac{35{,}4}{2}$

$PI \approx 28$ m.

Exercice 53 Pêche au requin

On nomme les points de la figure afin de résoudre l'exercice.



1. Dans les triangles OHR et OHR' rectangle en H,

$\tan \widehat{ROH} = \frac{HR}{OH}$; donc $HR = OH \times \tan \widehat{ROH}$

$HR = 10 \times \tan 3° \approx 0{,}524$ m.

$\tan \widehat{R'OH} = \frac{HR'}{OH}$; donc $HR' = OH \times \tan \widehat{R'OH}$

$HR' = 10 \times \tan 7° \approx 1{,}228$ m.

Ainsi $RR' = HR + HR' \approx 1{,}75$ m.

2. Ali s'éloigne de 10 m de plus : $OK = 20$ m.

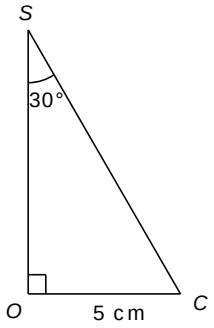
$\tan \widehat{ROK} = \frac{KR}{OK} = \frac{0{,}524}{20} = 0{,}0262$, donc $\widehat{ROK} \approx 1{,}5°$;

$\tan \widehat{R'OK} = \frac{KR'}{OK} = \frac{1{,}228}{20} = 0{,}0614$, donc $\widehat{R'OK} \approx 3{,}51°$;

les angles ne sont pas diminués de moitié.

© Hachette Livre International

Exercice 54 Avec les angles remarquables



1. Dans le triangle SOC, rectangle en O, $\sin O\hat{S}C = \dfrac{OC}{SC}$;

donc $SC = \dfrac{OC}{\sin O\hat{S}C} = \dfrac{OC}{\sin 30°} = \dfrac{5}{0{,}5} = 10$ cm.

2. Dans le triangle SOC, rectangle en O, $\cos O\hat{S}C = \dfrac{OS}{SC}$;

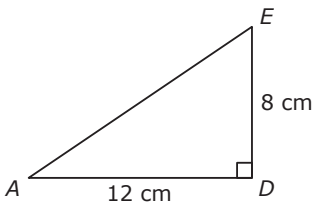
donc $OS = SC \times \cos O\hat{S}C = 10 \cos 30° = 10 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm.

(*On peut vérifier/trouver ce 2ième résultat à l'aide de la propriété de Pythagore.*)

Exercice 55 Mesure d'un angle au degré près

1.

2. Dans le triangle ADE rectangle en D, d'après la propriété de Pythagore :

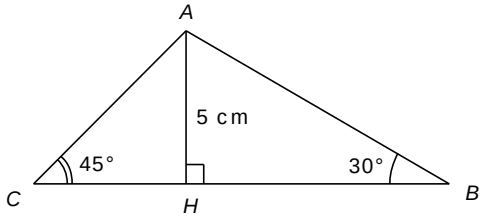


$EA^2 = ED^2 + DA^2 = 8^2 + 12^2 = 208$; d'où $EA = 4\sqrt{13}$.

3. a. $\tan A\hat{E}D = \dfrac{AD}{ED} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5$.

b. $56° < \text{mes}\, A\hat{E}D < 57°$.

Exercice 56 Aire d'un triangle



1. Dans le triangle AHC, rectangle en H, $\tan A\hat{C}H = \dfrac{AH}{HC}$;

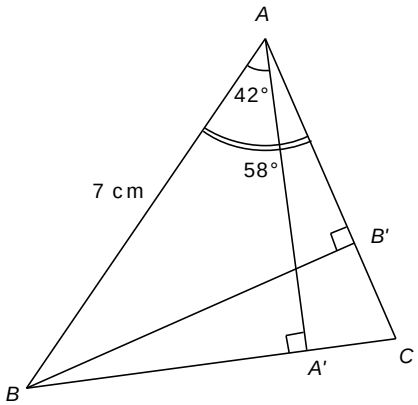
donc : $HC = \dfrac{AH}{\tan A\hat{C}H} = \dfrac{5}{\tan 45°} = 5$ cm.

Dans le triangle AHB, rectangle en H, $\tan A\hat{B}H = \dfrac{AH}{HB}$;

donc : $HC = \dfrac{AH}{\tan A\hat{B}H} = \dfrac{5}{\tan 30°} = \dfrac{5}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 5\sqrt{3}$ cm.

2. $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{5 \times (5 + 5\sqrt{3})}{2} = \dfrac{25(1 + \sqrt{3})}{2}$ cm².

Exercice 57 Points situés sur un même cercle



1. • Dans le triangle ABB', rectangle en B',

$\cos A\hat{B}B' = \dfrac{AB'}{AB}$; donc : $AB' = AB \times \cos A\hat{B}B'$

$AB' = 7 \times \cos 58° \approx 3{,}7$ cm.

• Dans le triangle ABA', rectangle en A',

$\sin B\hat{A}A' = \dfrac{BA'}{AB}$; donc : $BA' = AB \times \sin B\hat{A}A'$

$BA' = 7 \times \sin 42° \approx 4$, cm.

2. Le triangle ABB' est rectangle en B', donc les points A, B et B' sont situés sur le cercle de diamètre $[AB]$.
Le triangle ABA' est rectangle en A', donc les points A, B et A' sont situés sur le cercle de diamètre $[AB]$.
Ainsi, les points A, B, A' et B' sont situés sur le même cercle, de diamètre $AB = 7$ cm.

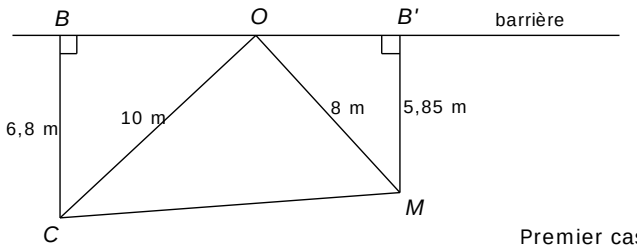
© Hachette Livre International

Activités d'intégration

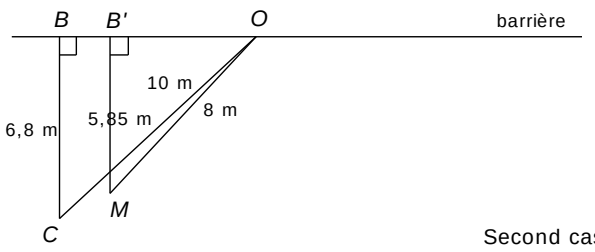
Exercice 58 Le berger et ses chèvres

1. Les animaux décrivent chacun un demi-cercle.

2.a.



Premier cas



Second cas

b. • Dans le triangle OBC rectangle en B, $\sin B\hat{O}C = \frac{BC}{OC} = \frac{6,8}{10} = 0,68$ donc $B\hat{O}C \approx 43°$.

• Dans le triangle $OB'M$ rectangle en B', $\sin B'\hat{O}C = \frac{B'C}{OC} = \frac{5,85}{8} = 0,73$ donc $B'\hat{O}C \approx 47°$.

c. Dans le premier cas, on peut supposer que le triangle OCM est rectangle.
En effet : $\text{mes}\,C\hat{O}M \approx 180-(43+47) = 90°$.

Alors $CM^2 = CO^2+OM^2 = 10^2+8^2 = 164$; donc : $CM = 2\sqrt{41} \approx 12,8$ m.

Exercice 59 L'okoumé et la rivière

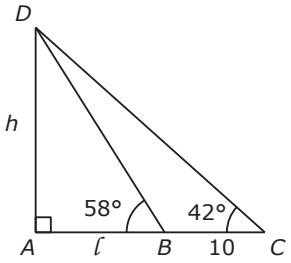
1. On note h la hauteur de l'okoumé et ℓ la largeur de la rivière.
Dans les triangles ABD et ACD, rectangles en A :

• $\tan A\hat{B}D = \frac{AD}{AB} = \frac{h}{\ell}$, donc $h = \ell\times\tan 58° \approx 1,6\times\ell$;

• $\tan A\hat{C}D = \frac{AD}{AC} = \frac{h}{\ell+10}$, donc $h = (\ell+10)\times\tan 42° \approx 0,9\times(\ell+10)$.

Donc : $1,6\times\ell = 0,9\times(\ell+10)$; d'où : $1,6\ell = 0,9\ell+9$;

ainsi : $0,7\ell = 9$ et $\ell = \frac{9}{0,7} \approx 12,9$ m.



2. $h = 1,6\times\ell \approx 1,6\times12,9 \approx 20,6$ m.

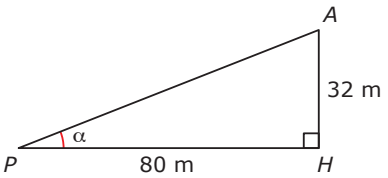
Exercice 60 L'aigle et la proie

a. $\tan\hat{P} = \frac{AH}{PH}$, d'où $\tan\alpha = \frac{32}{80} = 0,4$ et $\text{mes}\,\alpha \approx 22°$.

b. On peut déterminer cette distance :

● à l'aide de la propriété de Pythagore : $AP = \sqrt{80^2+32^2} \approx 86$ m ;

● à l'aide de la trigonométrie : $\sin\hat{P} = \frac{AH}{AP}$; donc : $AP \approx \frac{32}{\sin 22°} \approx 86$ m.



Exercice 61 La préparation du pêcheur

1. a. Dans le triangle APS, rectangle en S, $\tan A\hat{P}S = \frac{AS}{PS}$;

donc : $PS = \frac{AS}{\tan A\hat{P}S} \approx 37$ cm.

b. $B\hat{A}P = A\hat{P}S = 65°$.

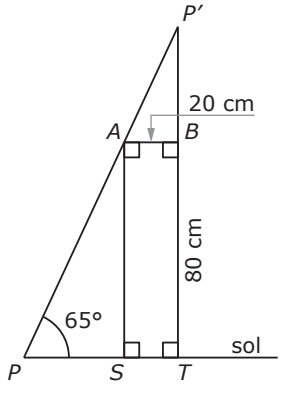
Dans le triangle ABP', rectangle en B, $\tan B\hat{A}P' = \frac{BP'}{AB}$;

donc : $BP' = AB \times \tan B\hat{A}P' = 20\times\tan 65° \approx 43$ cm ;
ainsi : $P'T = P'B+BT \approx 43+80 \approx 123$ cm.

2. On a désormais $P'B = 16$ cm.

Dans le triangle ABP', rectangle en B, $\tan B\hat{A}P' = \frac{P'B}{AB} = \frac{16}{20} = 0,8$;

ainsi : $B\hat{A}P' \approx 39°$.



© Hachette Livre International

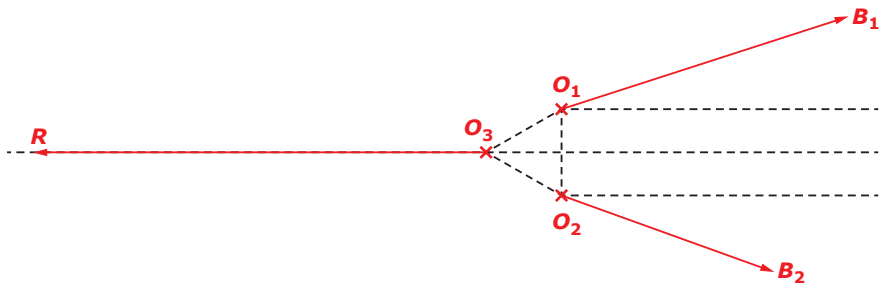
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2	Multiplication d'un vecteur par un nombre réel, vecteurs colinéaires [1 p 34]	26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37,	49, 51	54
	Apprendre à utiliser la colinéarité [1 p 37]	1, 2, 3, 4, 5, 6		
3	Coordonnées d'un vecteur [2 p 35]	38, 39, 40, 41, 42, 47	52	55, 56, 58, 60, 61, 63
	Apprendre à déterminer les coordonnées [2 p 38]	7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17		
4	Calculs dans un repère orthonormé [3 p 36]	43, 44, 45, 46, 48	50, 52,	57, 59, 60, 62, 64
	Apprendre à étudier le parallélisme, l'orthogonalité [3 p 39]	18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,	53	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

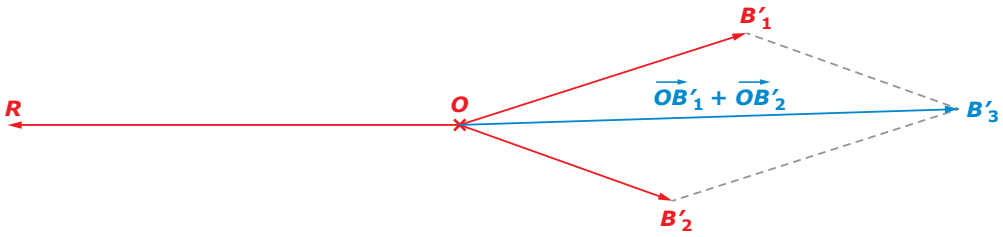
Pour démarrer

Le labour d'un champ

1.a.



b.



2.a. Voir schéma.

b. Oui : les bœufs ont suffisamment de force pour faire avancer la charrue, car la longueur du vecteur $\overrightarrow{OB'_1} + \overrightarrow{OB'_2}$ est supérieure à la longueur du vecteur $\overrightarrow{OR'}$.

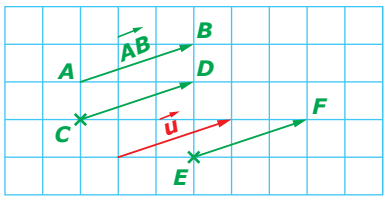
c. Oui : le fermier doit exercer une force latérale pour s'assurer que le sillon reste droit, car les points R', O et B'_3 ne sont pas alignés.

© Hachette Livre International

Activités de découverte

1 Une nouvelle notation

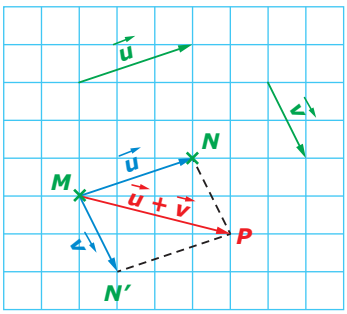
1.a.



b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ car ces vecteurs ont :
- même *direction* [la droite (*AB*)] ;
- même *sens* (de *A* vers *B*) ;
- même *longueur* (la longueur *AB*).

c. Voir schéma.

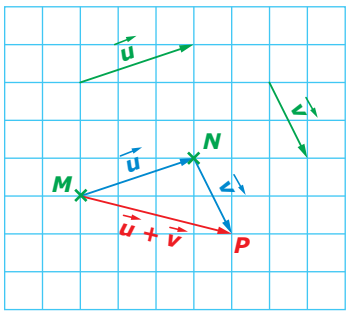
2.a.



Règle du parallélogramme :

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MP}$.

b.

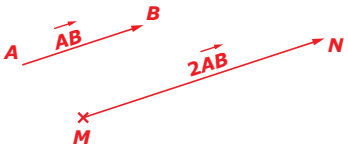


Relation de Chasles :

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

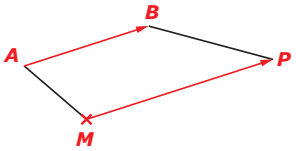
2 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1.a.



b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ ont :
- même direction [la droite (*AB*)] ;
- même sens (de *A* vers *B*) ;
- la longueur du vecteur $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB}$ est le double de la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

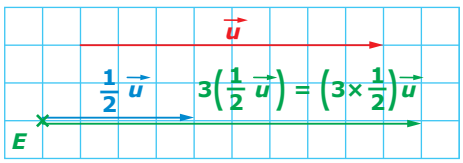
c.



d. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $1{,}5\overrightarrow{AB}$ ont :
- même direction [la droite (*AB*)] ;
- même sens (de *A* vers *B*) ;
- la longueur du vecteur $\overrightarrow{MP} = 1{,}5\overrightarrow{AB}$ est 1,5 fois plus grande que celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

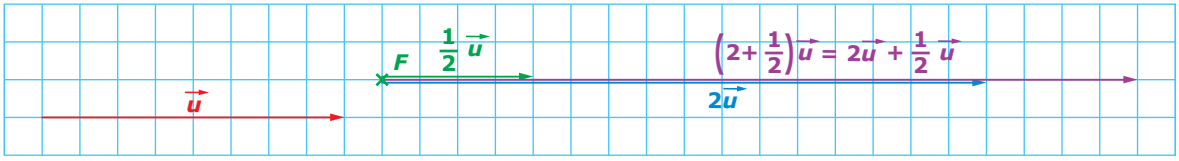
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $-1{,}5\overrightarrow{AB}$ ont :
- même direction [la droite (*AB*)] ;
- deux sens opposés ;
- la longueur du vecteur $\overrightarrow{PM} = -1{,}5\overrightarrow{AB}$ est 1,5 fois plus grande que celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2.a. et b.



On constate que : $3\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right) = \left(3 \times \frac{1}{2}\vec{u}\right)$.

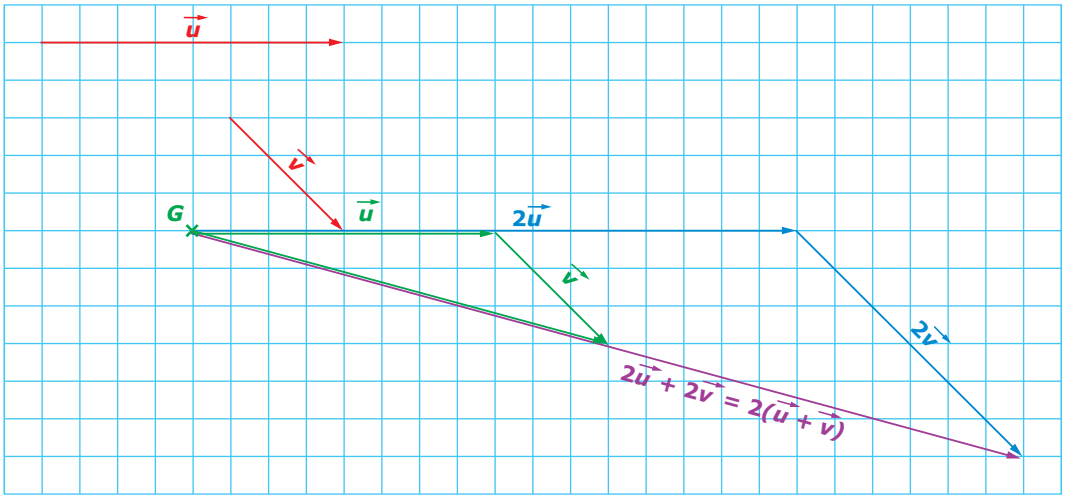
3.a. et b.



On constate que : $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\vec{u}$.

© Hachette Livre International

4.a. et b.



On constate que :
$2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$.

3 Coordonnées dans un repère

1.a. Voir schéma.

b. $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $M(3\ ;\ 1)$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{ON} = \vec{v}$ et $N(1\ ;\ -2)$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

2.a. Voir schéma.

b. • $\overrightarrow{OP} = \vec{u} + \vec{v}$ et $P(4\ ;\ -1)$ donc $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

On peut remarquer que : $x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} = 3+1 = 4$,

et $y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} = 1+(-2) = -1$;

donc : $x_{\vec{u}+\vec{v}} = x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}+\vec{v}} = y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}$.

• $\overrightarrow{OQ} = \vec{u} - \vec{v}$ et $Q(2\ ;\ 3)$ donc $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

On peut remarquer que : $x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}} = 3-1 = 2$,

et $y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}} = 1-(-2) = 3$;

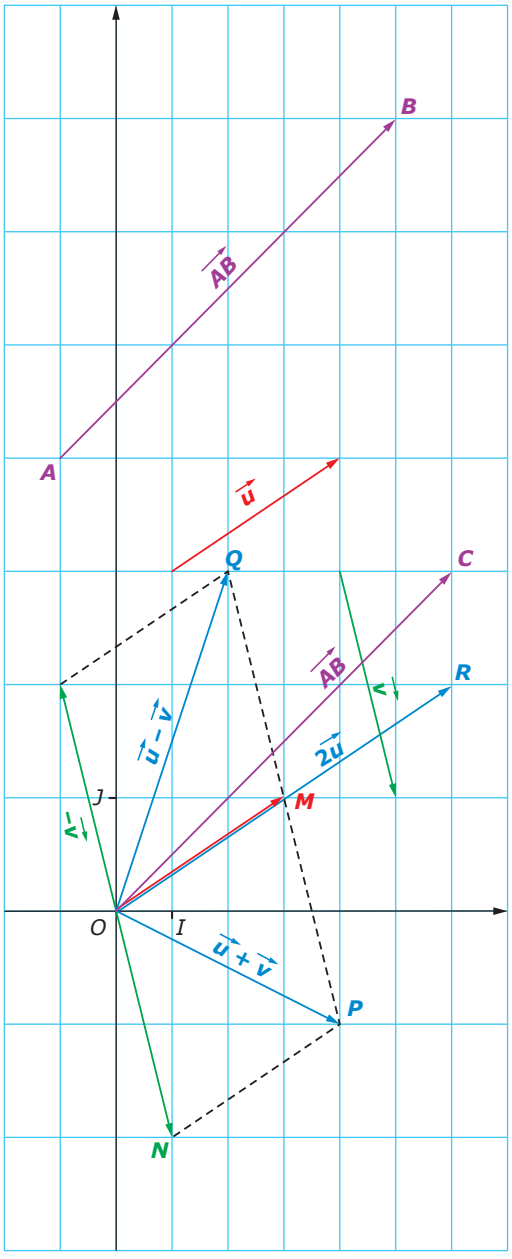
donc : $x_{\vec{u}-\vec{v}} = x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}-\vec{v}} = y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}}$.

• $\overrightarrow{OR} = 2\vec{u}$ et $R(6\ ;\ 2)$ donc $2\vec{u}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

On peut remarquer que : $2 \times x_{\vec{u}} = 2\times 3 = 6$,

et $2 \times y_{\vec{u}} = 2\times 1 = 2$;

donc : $x_{2\vec{u}} = 2 \times x_{\vec{u}}$ et $y_{2\vec{u}} = 2 \times y_{\vec{u}}$.



3.a. Dans cet exemple, on a placé $A(-1\ ;\ 4)$ et $B(5\ ;\ 7)$.

b. Le point C, tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, a pour coordonnées (6 ; 3) ;

donc $\overrightarrow{AB}$ a aussi pour coordonnées (6 ; 3).

On peut remarquer que : $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 5-(-1) = 6$,

et $y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 7-4 = 3$;

donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$.

© Hachette Livre International

4. Vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux

1. On donne $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$.

a. si k est un nombre réel, alors les coordonnées de $k\vec{u}$ sont : $(kx\ ;\ ky)$.

b. Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

- le tableau est un tableau de proportionnalité ;
- $xy'-x'y = 0$.

(*résultats à découvrir sur quelques exemples*)

2.a. Vérification à l'aide des outils de géométrie.

b. $6\times(-2) + 3\times4 = -12 + 12 = 0$.

3.a. Dire que les deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux équivaut à dire que leurs directions sont orthogonales, c'est-à-dire que le triangle OMN est rectangle en O.

b. Pour $\overrightarrow{OM} = \vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}(x'\ ;\ y')$, on a $M(x\ ;\ y)$ et $N(x'\ ;\ y')$; donc $\overrightarrow{MN} = (x'-x\ ;\ y'-y)$.

c. Dans le triangle OMN rectangle en O, d'après la propriété de Pythagore : $MN^2 = MO^2 + ON^2$.

Or $MN = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$, donc $MN^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = x^2-2xx'+2x'^2 + y^2-2yy'+y'^2$;

de plus : $OM^2 = MO^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, donc $MO^2 = x^2+y^2$;

$ON^2 = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, donc $ON^2 = x'^2+y'^2$.

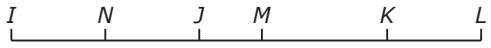
Finalement : $x^2-2xx'+x'^2 + y^2-2yy'+y'^2 = x^2+y^2 + x'^2+y'^2$, d'où $-2xx'-2yy' = 0$;
c'est-à-dire : $-2(xx'+yy') = 0$ ou $xx'+yy' = 0$.

© Hachette Livre International

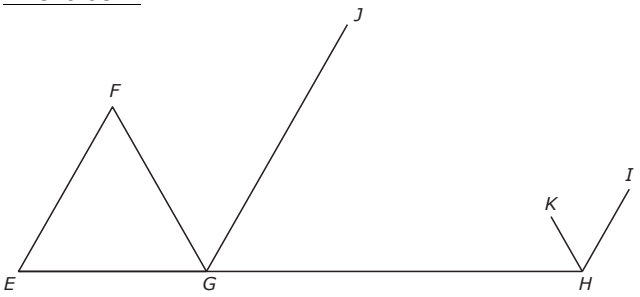
Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à calculer un cosinus, un sinus, une tangente

Exercice 1



Exercice 2



Exercice 3

1. $K = \frac{1}{3}$; 2. $k = -2$; 3. $k = -\frac{3}{2}$

Exercice 4

Relations qui caractérisent le milieu I d'un segment $[AB]$:

2. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; 3. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; 6. $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 5

1. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{CD} = -\frac{12}{10}\overrightarrow{EF} = -\frac{6}{5}\overrightarrow{EF}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{6}{5}\overrightarrow{EF}\right) = -\frac{3}{10}\overrightarrow{EF}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Exercice 6

1. $\overrightarrow{NA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NM}$;

$\overrightarrow{NB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NP}$.

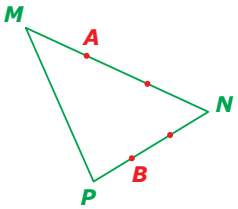
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}$

$= -\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}$

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{NM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NP}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NP}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$.



3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (MP) sont parallèles.

2 Apprendre à déterminer les coordonnées

Exercice 7

$\vec{u}(3 ; 1)$; $\vec{v}(1 ; -1)$; $\vec{w}(3 ; -1)$.

Exercice 8

$\vec{u}(2 ; -1)$; $\vec{v}(-3 ; 0)$; $\vec{w}(7 ; -2)$.

Exercice 9

$\vec{u}(-5 ; 0)$; $\vec{v}(0 ; 1)$; $\vec{w}(1 ; -1)$.

Exercice 10

$\vec{u}(3 ; -1)$; $\vec{v}(-6 ; 4)$; $\vec{w}(4 ; 2)$.

Exercice 11

1.a. $\overrightarrow{AB}(5 ; 0)$; $\overrightarrow{AC}(6 ; -1)$; $\overrightarrow{AD}(4 ; -4)$.

b. $\overrightarrow{EC}(4 ; 2)$; $\overrightarrow{CE}(-4 ; -2)$.

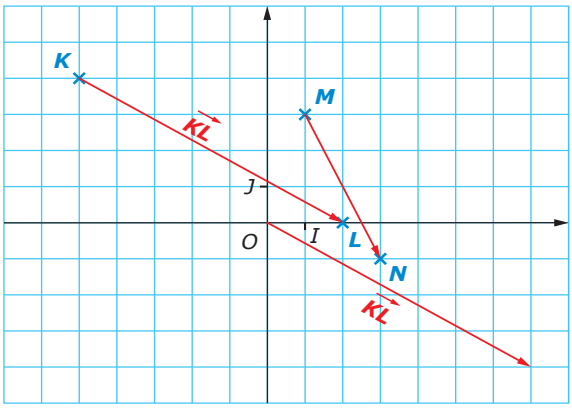
2.a. $\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right)(8 ; -4)$; $\left(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC}\right)(-1 ; 0)$.

b. $-\overrightarrow{AB}(-5 ; 0)$; $5\overrightarrow{BC}(5 ; -5)$.

Exercice 12

1. $\overrightarrow{KL}(7 ; -4)$; $\overrightarrow{MN}(2 ; -4)$.

2.a. et b.



Exercice 13

$M(4 ; -2)$

Exercice 14

$M(9 ; 3)$

Exercice 15

$M(4 ; -1)$

Exercice 16

$M(7 ; 3)$

© Hachette Livre International

Exercice 17

1.a. $E(1\ ;\ 3)$

b. $\overrightarrow{FE} = \vec{u}$ équivaut à $\begin{cases} x_E - x_F = x_{\vec{u}} \\ y_E - y_F = y_{\vec{u}} \end{cases}$;

c'est-à-dire $\begin{cases} x_E - (-1) = 2 \\ y_E - 2 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_E = 1 \\ y_E = 3 \end{cases}$.

2.a. $G(3\ ;\ 4)$.

b. $\overrightarrow{FG} = 2\vec{u}$ équivaut à $\begin{cases} x_G - x_F = 2\, x_{\vec{u}} \\ y_G - y_F = 2\, y_{\vec{u}} \end{cases}$;

c'est-à-dire $\begin{cases} x_G - (-1) = 2 \times 2 \\ y_G - 2 = 2 \times 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_G = 3 \\ y_G = 4 \end{cases}$.

3 Apprendre à étudier le parallélisme, l'orthogonalité

Exercice 18

1. Ni l'un, ni l'autre

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 19

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 20

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 21

1. Le triangle ABC semble être isocèle rectangle en A.

2. • $AB^2 = \left(\frac{7}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + 1 = \frac{53}{4}$.

$AC^2 = (-1 - 0)^2 + \left(-1 - \frac{5}{2}\right)^2 = 1 + \frac{49}{4} = \frac{53}{4}$.

Donc $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle en A.

• $\overrightarrow{AB}\left(\frac{7}{2}\ ;\ -1\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(-1\ ;\ -\frac{7}{2}\right)$.

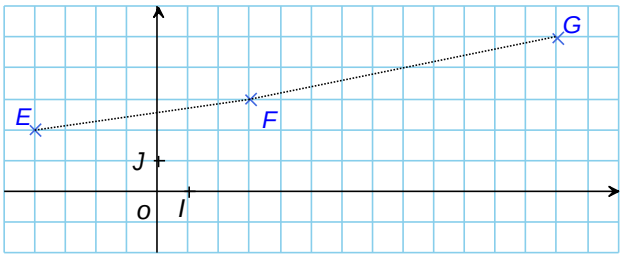
Donc $x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = \frac{7}{2} \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Ainsi, le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

Exercice 22

1.



On peut conjecturer que les points E, F et G sont alignés.

2. $\overrightarrow{EF}\ (7\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{FG}\ (10\ ;\ 2)$.

Or $x_{\overrightarrow{EF}} \times y_{\overrightarrow{FG}} - x_{\overrightarrow{FG}} \times y_{\overrightarrow{EF}} = 7 \times 2 - 1 \times 10 = 4 \neq 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas colinéaires, les points E, F et G ne sont pas alignés.

Exercice 23

1. le quadrilatère $MNPQ$ semble être un trapèze.

2. $\overrightarrow{QM}\ (8\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{PN}\ (4\ ;\ -1)$.

Or $x_{\overrightarrow{QM}} \times y_{\overrightarrow{PN}} - x_{\overrightarrow{PN}} \times y_{\overrightarrow{QM}} = 8 \times (-1) - (-2) \times 4 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{QM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires.

Les droites (QM) et (PN) sont parallèles et $MNPQ$ est un trapèze.

Exercice 24

1. $m = -\frac{12}{5}$.

2. $m = -15$.

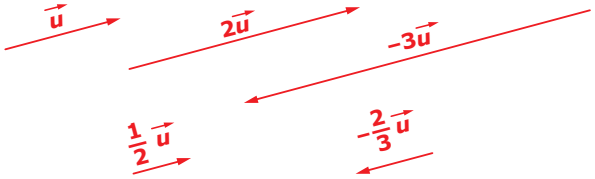
Exercice 25

$m = 15$.

© Hachette Livre International

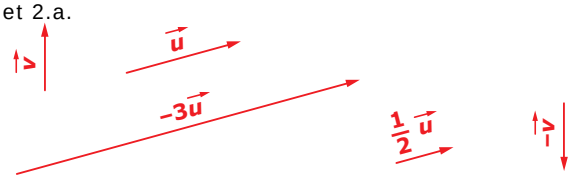
Constructions de vecteurs

Exercice 26

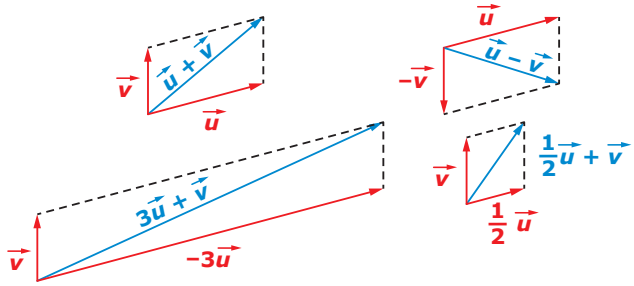


Exercice 27

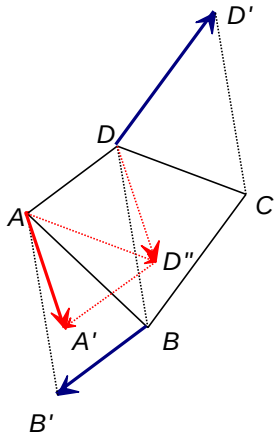
1. et 2.a.



2.b.



Exercice 28

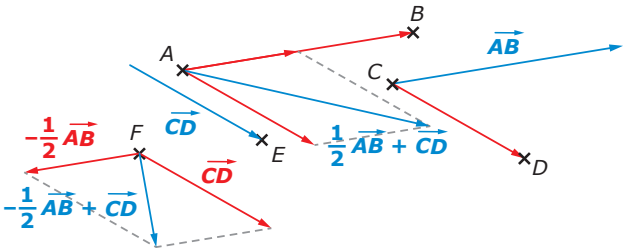


1.a. $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BC}$.

b. $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DA}$.

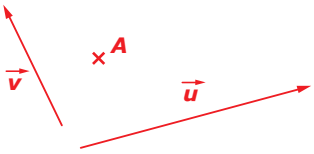
2. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD''} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

Exercice 29

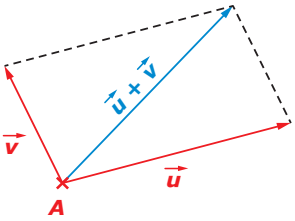


Exercice 30

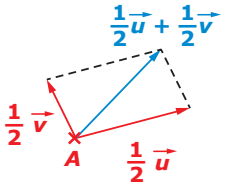
1.



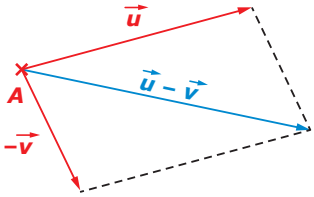
2.a.



b.

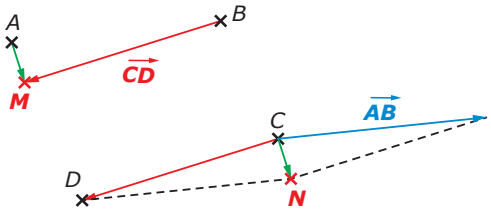


c.



Exercice 31

1.



2.a. $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont égaux, donc $AMNC$ est un parallélogramme.

© Hachette Livre International

Exercice 32

1. $k = \frac{2}{7}$ 2. $k = \frac{2}{5}$ 3. $k = \frac{2}{5}$ 4. $k = \frac{1}{3}$

Exercice 33

1.a. $5\left(\vec{AC} + \vec{AB}\right) = 3\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{AB}$ est équivalent à :

$5\vec{AC} + 5\vec{AB} = 3\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{AB}$

$5\vec{AC} = -5\vec{AB} + 3\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{AB} = -\frac{12}{5}\vec{AB}$

$\vec{AC} = -\frac{12}{25}\vec{AB}$.

b. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

2.a. $-3\left(\vec{EG} + 2\vec{HF}\right) = 5\left(2\vec{EG} - \frac{3}{2}\vec{HF}\right)$ est équivalent à :

$-3\vec{EG} - 6\vec{HF} = 10\vec{EG} - \frac{15}{2}\vec{HF}$

$-3\vec{EG} - 10\vec{EG} = 6\vec{HF} - \frac{15}{2}\vec{HF}$

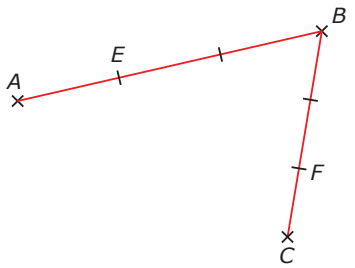
$-13\vec{EG} = -\frac{3}{2}\vec{HF}$

$\vec{EG} = \frac{3}{26}\vec{HF}$.

b. Les vecteurs $\vec{EG}$ et $\vec{HF}$ sont colinéaires, donc les droites (EG) et (HF) sont parallèles.

Exercice 34

1.

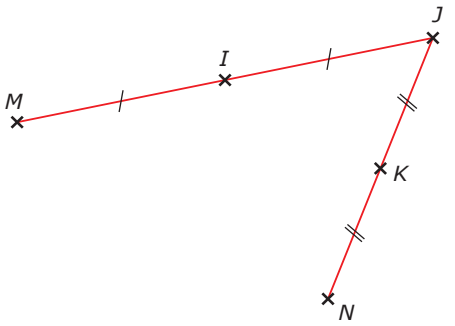


2. $\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}\left(\vec{AB} + \vec{BC}\right) = \frac{2}{3}\vec{AC}$.

Les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc les droites (EF) et (AC) sont parallèles.

Exercice 35

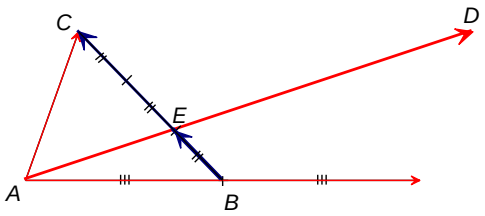
1.



2. $\vec{MN} = \vec{MJ} + \vec{JN} = 2\vec{IJ} + 2\vec{JK} = 2\left(\vec{IJ} + \vec{JK}\right) = 2\vec{IK}$.

Les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{IK}$ sont colinéaires, donc les droites (MN) et (IK) sont parallèles.

Exercice 36



$\vec{BC} = 3\vec{BE}$ est équivalent à $\vec{BA} + \vec{AC} = 3\left(\vec{BA} + \vec{AE}\right)$

$\vec{BA} + \vec{AC} - 3\vec{BA} = 3\vec{AE}$

$-2\vec{BA} + \vec{AC} = 3\vec{AE}$

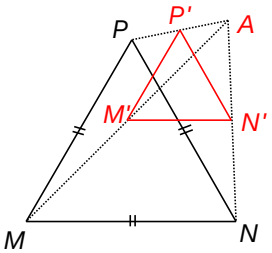
$2\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AE}$

$\vec{AD} = 3\vec{AE}$.

Les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires, donc les points A, D et E sont alignés.

Exercice 37

1.



2.a. $\vec{M'N'} = \vec{M'A} + \vec{AN'}$

$\vec{M'N'} = \frac{1}{2}\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{AN}$

$\vec{M'N'} = \frac{1}{2}\left(\vec{MA} + \vec{AN}\right) = \frac{1}{2}\vec{MN}$.

b. Le triangle $M'N'P'$ est équilatéral.
En effet, comme à la question 1, on démontre que :
$\vec{N'P'} = \frac{1}{2}\vec{NP}$ et $\vec{P'M'} = \frac{1}{2}\vec{PM}$.
On en déduit que $M'N'=N'P'=P'M'$, c'est-à-dire que le triangle $M'N'P'$ est équilatéral.

© Hachette Livre International

Calculs dans un repère

Exercice 38

1. $\vec{u}\ (3\ ;\ 1)$; $\vec{v}\ (3\ ;\ -2)$; $\vec{w}\ (6\ ;\ -2)$.

2. $\vec{u}+\vec{v}\ (6\ ;\ -1)$; $\vec{V}+\vec{w}\ (9\ ;\ -4)$;
$2\vec{u}\ (6\ ;\ 2)$; $5\vec{v}-3\vec{w}\ (-3\ ;\ -4)$.

Exercice 39

1. $\overrightarrow{AB}\ (2\ ;\ -2)$; $\overrightarrow{AC}\ (-4\ ;\ -7)$; $\overrightarrow{BC}\ (-6\ ;\ -5)$.

Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}(-2\ ;\ -9)$ et $3\overrightarrow{BC}\ (-18\ ;\ -15)$.

2.a. $E(-3\ ;\ -1)$; b. $F(1\ ;\ -5)$; c. $G(-15\ ;\ -11)$.

Exercice 40

1. $\overrightarrow{F_1}\ (-1\ ;\ 1)$; $\overrightarrow{F_2}\ (1\ ;\ 2)$; $\overrightarrow{F_1}\ (0\ ;\ -3)$.

2. $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}(0\ ;\ 0)$.

Donc ce système est en équilibre.

Exercice 41

1. • $AB=\sqrt{[\,8-(-4)\,]^2+[\,5-(-1)\,]^2}$

$AB=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$.

• $AC=\sqrt{[\,10-(-4)\,]^2+[\,1-(-1)\,]^2}$

$AC=\sqrt{14^2+2^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$.

• $BC=\sqrt{[\,10-8\,]^2+[\,1-5\,]^2}$

$BC=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

2. Dans le triangle ABC, $AB^2+BC^2=180+20=200$

$AC^2=200$.

Donc $AC^2=AB^2+BC^2$; ainsi, d'après la propriété réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice 42

1. • $EF=\sqrt{[\,2-(-8)\,]^2+[\,5-3\,]^2}$

$EF=\sqrt{10^2+2^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.

• $EG=\sqrt{[\,3-(-8)\,]^2+[\,-1-3\,]^2}$

$EG=\sqrt{11^2+(-4)^2}=\sqrt{137}$.

• $FG=\sqrt{[\,3-2\,]^2+[\,-1-5\,]^2}$

$FG=\sqrt{1^2+(-6)^2}=\sqrt{37}$.

2. Dans le triangle EFG, $EF^2+FG^2=104+37=141$

$EG^2=137$.

Donc $EG^2\neq EF^2+FG^2$; ainsi, d'après la contraposée de la propriété de Pythagore, le triangle EFG n'est pas rectangle en F.

Exercice 43

• $EF=\sqrt{(7-3)^2+(5-5)^2}=4$.

• $EA=\sqrt{(0-3)^2+\left(\frac{5}{2}-5\right)^2}=\sqrt{(-3)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}$

$EA=\sqrt{\frac{61}{4}}\neq 4$;

donc le point A n'appartient pas au cercle $(\mathcal{C})$.

• $EB=\sqrt{\left(\frac{13}{2}-3\right)^2+(3-5)^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+(-2)^2}$

$EB=\sqrt{\frac{65}{4}}\neq 4$;

donc le point B n'appartient pas au cercle $(\mathcal{C})$.

• $EC=\sqrt{(1-3)^2+\left(\frac{17}{2}-5\right)^2}=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}$

$EC=\sqrt{\frac{65}{4}}\neq 4$;

donc le point C n'appartient pas au cercle $(\mathcal{C})$.

Colinéarité et orthogonalité dans un repère

Exercice 44

1. Ni l'un, ni l'autre.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4. Ni l'un, ni l'autre.

Exercice 45

1. $\overrightarrow{AB}\ (16\ ;\ -5)$ et $\overrightarrow{CE}\ (13\ ;\ -4)$.

Or $x_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{CE}}-x_{\overrightarrow{CE}}\times y_{\overrightarrow{AB}}=16\times(-4)-(-5)\times 13=1\neq 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires et les droites (AB) et (CE) ne sont pas parallèles.

2. $\overrightarrow{AB}\ (16\ ;\ -5)$ et $\overrightarrow{CD}\ (2\ ;\ 6)$.

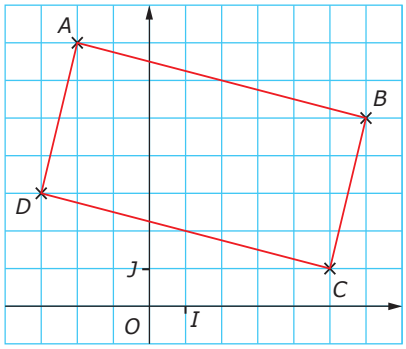
Or $x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{CD}}+y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{CD}}=16\times 2+(-5)\times 6=2\neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux et les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

© Hachette Livre International

Exercice 46

1.a.



b. On conjecture que le quadrilatère *ABCD* est un rectangle.

2.a. Première méthode

• Comme $\overrightarrow{AB}(8\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{DC}(8\ ;\ -2)$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; donc $AB = CD$.

Comme $\overrightarrow{BC}(-1\ ;\ -4)$ et $\overrightarrow{AD}(-1\ ;\ -4)$, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; donc $BC = AD$.

Ainsi le quadrilatère non croisé *ABCD*, dont les côtés opposés sont de même longueur, est un parallélogramme.

• Il reste à démontrer qu'il possède un angle droit.

Dans le triangle *ABC* : $AB^2 + BC^2 = 68 + 17 = 85$;

de plus $\overrightarrow{AC}(7\ ;\ -6)$; donc : $AC = \sqrt{7^2 + (-6)^2} = \sqrt{85}$.

Ainsi $AC^2 = AB^2 + BC^2$ et, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle *ABC* est rectangle en *B*.

• Le quadrilatère *ABCD* est donc un rectangle.

b. Seconde méthode

• $\overrightarrow{AB}(8\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{DC}(8\ ;\ -2)$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; on en déduit que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme.

• Il reste à démontrer qu'il possède un angle droit.

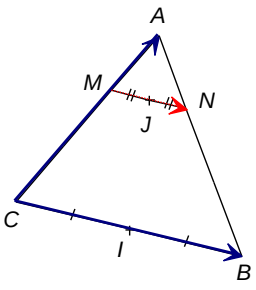
$\overrightarrow{AB}(8\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{BC}(-1\ ;\ -4)$;

or $x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{BC}} = 8 \times (-1) + (-2) \times (-4) = 0$;

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

• Le quadrilatère *ABCD* est donc un rectangle.

Exercice 47



1. Dans le repère $\left(C\ ;\ \overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)$:

a. $A(0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0)$, $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$;

b. Si $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, on a : $(MN)//(CB)$ et $MN = \frac{1}{3}CB$; donc, pour les triangles *AMN* et *ACB*, on peut appliquer la propriété de Thalès : $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{CB} = \frac{1}{3}$;

on obtient alors les coordonnées de *M* et *N* :

• $\frac{CM}{CA} = \frac{2}{3}$ ou $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, donc $M\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\right)$;

• $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$ ou $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CA}$, donc $N\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$;

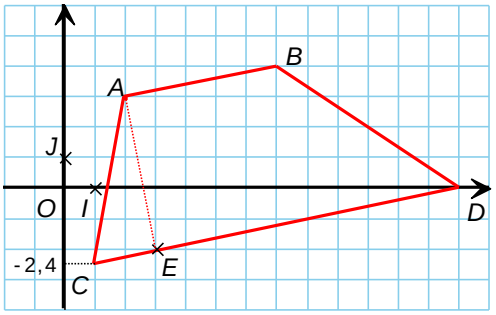
finalement on en déduit les coordonnées de *J*, le milieu de [*MN*] : $J\left(\frac{1}{6}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

2. $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2}\ ;\ -1\right)$ et $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{6}\ ;\ -\frac{1}{3}\right)$.

Or $x_{\overrightarrow{AI}} \times y_{\overrightarrow{AJ}} - x_{\overrightarrow{AJ}} \times y_{\overrightarrow{AI}} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - (-1) \times \frac{1}{6} = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires et les points *A*, *I* et *J* sont alignés.

Exercice 48



1. $\overrightarrow{AB}(5\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{CD}(12\ ;\ 2{,}4)$.

Or $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{CD}} - x_{\overrightarrow{CD}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = 5 \times 2{,}4 - 12 \times 1 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles.

On en déduit que le quadrilatère *ABDC* est un trapèze.

2. $\overrightarrow{AE}(1\ ;\ -5)$ et $\overrightarrow{CD}(12\ ;\ 2{,}4)$.

Or $x_{\overrightarrow{AE}} \times x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AE}} \times y_{\overrightarrow{CD}} = 1 \times 12 + (-5) \times 2{,}4 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et [*AE*] est la hauteur issue de *A* dans le trapèze *ABCD*.

3. $\overrightarrow{AB}(5\ ;\ 1)$ donc $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ cm.

$\overrightarrow{CD}(12\ ;\ 2{,}4)$ donc $CD = \sqrt{12^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{149{,}76} \approx 12{,}2$ cm.

$\overrightarrow{AE}(1\ ;\ -5)$ donc $AE = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ cm.

Ainsi $\mathcal{A}(ABDC) = \frac{AE \times (AB + CD)}{2}$

$\approx \frac{5{,}1 \times (5{,}1 + 12{,}2)}{2} \approx 44$ cm².

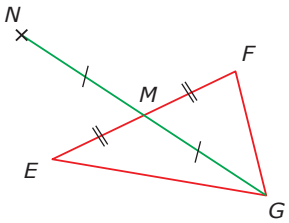
© Hachette Livre International

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 49 Des codes aux égalités vectorielles

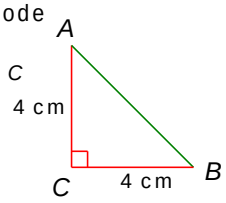
1. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} = \vec{0}$;
$\overrightarrow{LJ} = -2\overrightarrow{LK}$; $\overrightarrow{DC} + \left(-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

2.

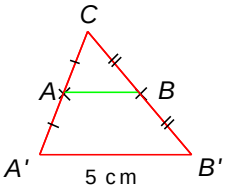


Exercice 50 Choisir la bonne méthode

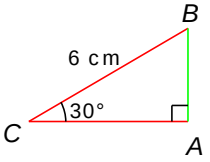
1. ☐ Dans le triangle ABC rectangle en C et d'après la *propriété de Pythagore*, on a : $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 4^2 + 4^2 = 32$; d'où $AB = 4\sqrt{2}$ cm.



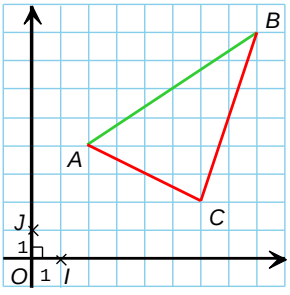
☐ Dans le triangle $A'B'C$, A est le milieu de $[A'C]$ et B est le milieu $[B'C]$; donc, d'après la *propriété de Thalès* :
$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}$ et $\frac{2}{4} = \frac{AB}{5}$;
d'où $AB = 5 \times \frac{2}{4} = 2{,}5$ cm.



☐ Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après la trigonométrie, on a : $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{CB}$, donc $AB = CB \times \sin\widehat{ACB}$; d'où $AB = 6 \times \sin 30° = 3$ cm.



☐ (O, I, J) est un repère orthonormé ; $\overrightarrow{AB}(6 ; 2)$; d'où $AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ cm.



2. Y-a-t-il d'autre méthode, selon les situations ?

☐ Pas d'autre méthode possible car il n'y a qu'un seul triangle et il y a ni mesure d'angle, ni repère orthonormé.

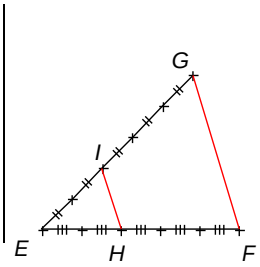
☐ Pas d'autre méthode possible car il 'y a ni triangle rectangle, ni mesure d'angle, ni repère orthonormé.

☐ Pas d'autre méthode possible car il n'y a que la longueur d'un seul côté, qu'un seul triangle et il n'y a pas de repère orthonormé.

☐ On pourrait utiliser la propriété de Pythagore, mais cela allongerait inutilement la démonstration ; pas d'autre méthode possible car il n'y a qu'un triangle et il n'y a pas de mesure d'angle.

Exercice 51 Utiliser la relation de Chasles

$\overrightarrow{EH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EG}$.
D'après la relation de Chasles,
$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$
$\overrightarrow{IH} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EF}\right) = \frac{2}{5}\overrightarrow{GF}$.



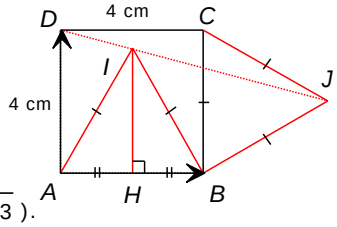
Les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires, donc les droites (IH) et (GF) sont parallèles.

Exercice 52 Introduire un repère pour démontrer

1.a. $\left(A ; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé.

b. Dans ce repère $A(0 ; 0)$, $B(4 ; 0)$, $C(4 ; 4)$ et $D(0 ; 4)$.

c. • Dans le triangle AIH, rectangle en H, d'après la propriété de Pythagore :
$AI^2 = AH^2 + HI^2$
donc : $HI = \sqrt{4^2 - 2^2}$
$HI = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm ;
ainsi, dans ce repère, $I(2 ; 2\sqrt{3})$.



• On démontre que $J(4 + 2\sqrt{3} ; 2)$.

2. $\overrightarrow{DI}\left(2 ; 2\sqrt{3} - 4\right)$ et $\overrightarrow{DJ}\left(4 + 2\sqrt{3} ; -2\right)$.
Or $x_{\overrightarrow{DI}} \times y_{\overrightarrow{DJ}} - x_{\overrightarrow{DJ}} \times y_{\overrightarrow{DI}} = 2 \times (-2) - \left(4 + 2\sqrt{3}\right) \times \left(2\sqrt{3} - 4\right)$
$= -4 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = -4 - 12 + 16 = 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont colinéaires et les points D, I et J sont alignés.

Exercice 53 Un peu de logique

1.

I est le milieu de $[AB]$	$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$IA = \frac{1}{2}AB$	$\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ colinéaires
I, A et B sont alignés	$\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2. $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ dans un repère orthonormé.

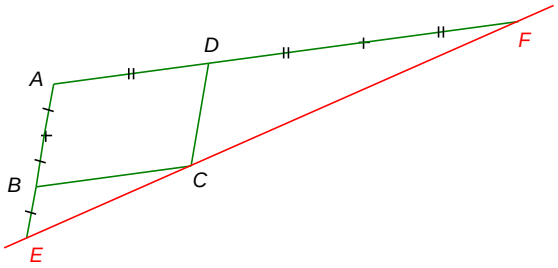
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux	$xy' = x'y$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	$xx' = -yy'$
Il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$	$\vec{u} = 5\vec{v}$
$\vec{u} = \vec{0}$	$\vec{v} = \vec{0}$

© Hachette Livre International

Exercices d'approfondissement

Exercice 54 Alignements de points

1.a.



b. On conjecture que les points E, C et F sont alignés.

2.a. • $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

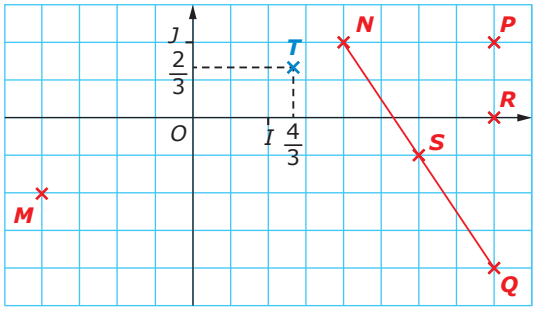
• $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.

b. D'après le 2.a. $\overrightarrow{EF} = -3 \times \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = -3\overrightarrow{CE}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et les points C, E et F sont alignés.

Exercice 55 Intérieur et extérieur d'un cercle

1.a.



b. $x_S = \frac{x_N + x_Q}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ et $y_S = \frac{y_N + y_Q}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$;

d'où $S\left(3 ; -\frac{1}{2}\right)$.

c. Abscisse de T : $5\times(x_N - x_T) + (x_M - x_T) = 0$

$5\times(2 - x_T) + (-2 - x_T) = 0$

$-6x_T = -8$, ainsi $x_T = \frac{4}{3}$;

ordonnée de T : $5\times(y_N - y_T) + (y_M - y_T) = 0$

$5\times(1 - y_T) + (-1 - y_T) = 0$

$-6y_T = -4$, ainsi $y_T = \frac{2}{3}$;

d'où $T\left(\frac{4}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

2. $\overrightarrow{SM}\left(-5 ; -\frac{1}{2}\right)$ donc $SM = \sqrt{(-5)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{101}{4}}$ cm ;

$\overrightarrow{SP}\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$ donc $SP = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}}$ cm ;

$\overrightarrow{SR}\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$ donc $SR = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ cm ;

$\overrightarrow{SQ}\left(1 ; -\frac{3}{2}\right)$ donc $SQ = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}}$ cm.

a. R est situé à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$ car $SR < SQ$.

b. M est situé à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ car $SM > SQ$.

c. P est situé sur le cercle $(\mathcal{C})$ car :

• *méthode 1* : $SP = SQ$.

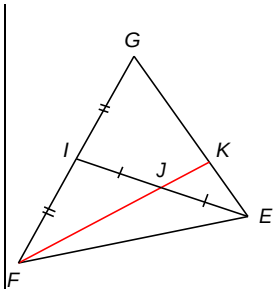
• *méthode 2* : S est le milieu de $[NQ]$ donc $[NQ]$ est un diamètre de $(\mathcal{C})$; comme $(PN)\perp(PR)$, le triangle NPQ (rectangle en P) est inscriptible dans le cercle $(\mathcal{C})$.

Exercice 56 Introduire un repère

1. Dans le repère $\left(F ; \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}\right)$:

$F(0 ; 0)$; $E(1 ; 0)$; $G(0 ; 1)$;

$I\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$; $J\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$.



2.a. • $\overrightarrow{FJ}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{FK}\left(a ; b\right)$.

Les points F, J et K sont alignés, donc $\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont deux vecteurs colinéaires ;

c'est-à-dire : $x_{\overrightarrow{FJ}} \times y_{\overrightarrow{FK}} - x_{\overrightarrow{FK}} \times y_{\overrightarrow{FJ}} = \frac{1}{2} \times b - a \times \frac{1}{4} = 0$

ou : $2b - a = 0$.

• $\overrightarrow{EK}\left(a-1 ; b\right)$ et $\overrightarrow{EG}\left(-1 ; 1\right)$.

Les points E, K et G sont alignés donc $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont deux vecteurs colinéaires ; c'est-à-dire :

$x_{\overrightarrow{EK}} \times y_{\overrightarrow{EG}} - x_{\overrightarrow{EG}} \times y_{\overrightarrow{EK}} = (a-1)\times 1 - (-1)\times b = 0$

ou : $a + b - 1 = 0$.

• De $\begin{cases} 2b - a = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases}$, on déduit que : $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$;

ainsi $K\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

b. $\overrightarrow{EG}\left(-1 ; 1\right)$ et $\overrightarrow{EK}\left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$; donc : $\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EK}$.

Exercice 57 Double condition

• Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $2m\times 6 + (-3)\times(5m+4) = 0$

$12m - 15m - 12 = 0$

$-3m = 12$

$m = -4$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$6\times(-2m) - (5m+4)\times(-3) = 0$

$-12m + 15m + 12 = 0$

$3m = -12$

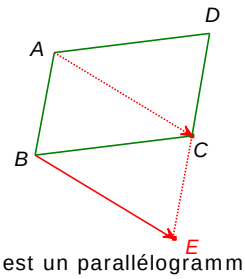
$m = -4$

Ainsi lorsque $m = -4$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux,

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

© Hachette Livre International

Exercice 58 Égalité vectorielle



$ABCD$ est un parallélogramme ;
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$.

Exercice 59 Etude d'un quadrilatère

$A(-1\,;\,3)$, $B(3\,;\,\sqrt{5})$, $C(2\,;\,-3)$ et $D(-2\,;\,-\sqrt{5})$.

1. Le milieu de $[AC]$ est $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$;

Le milieu de $[BD]$ est $J\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

2. $I = J$; on en déduit que le quadrilatère $ABCD$, dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu, est un parallélogramme.

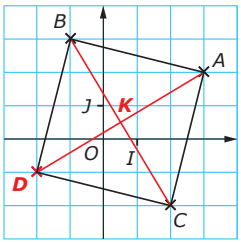
3.a. • $\overrightarrow{AC}(3\,;\,-6)$ donc $AC = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$.
• $\overrightarrow{BD}(-5\,;\,-2\sqrt{5})$ donc $BD = \sqrt{(-5)^2 + (-2\sqrt{5})^2} = \sqrt{45}$.

b. Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont de même longueur, donc $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 60 Avec de la trigonométrie

$A(3\,;\,2)$, $B(-1\,;\,3)$ et $C(2\,;\,-2)$.

1.



2. $\overrightarrow{AB}(-4\,;1)$,
$\overrightarrow{AC}(-1\,;-4)$,
$\overrightarrow{BC}(3\,;-5)$.

3. $AB = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$; $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$;
$BC = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Ainsi, $AB = AC$, donc le triangle ABC est isocèle en A.

De plus, $AB^2 + AC^2 = 17 + 17 = 34$ et $BC^2 = 34$;
donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et, d'après la propriété réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Finalement le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

4. On déduit, de ce qui précède que :

mes $\widehat{ABC} = 45°$ et $\cos \widehat{ABC} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.a. Si K est le milieu de $[BC]$, alors $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$

b. Si D est le symétrique de A par rapport à K, alors K est le milieu de $[AD]$;

donc : $\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x_D = 2x_K - x_A = 1 - 3 = -2 \\ y_D = 2y_K - y_A = 1 - 2 = -1 \end{cases}$;

c'est-à-dire : $D(-2\,;\,-1)$.

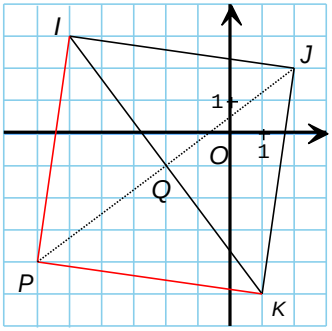
6. Plusieurs méthodes pour étudier la nature de $ABCD$.

• La plus rapide consiste à remarquer que par la symétrie orthogonale d'axe (BC), le triangle ABC a pour image le triangle DBC.
Les propriétés de conservation des angles et des longueurs des symétries orthogonales permettent de conclure que $ABCD$ est un carré.

• On peut également démontrer que les diagonales $[BC]$ et $[AD]$ sont orthogonales et de même longueur…

Exercice 61 Des triangles superposables

1.a. $\overrightarrow{IJ}(7\,;-1)$;
$\overrightarrow{JK}(-1\,;-7)$.



b. $IJ = \sqrt{7^2 + (-1)^2}$,
$IJ = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;
$JK = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$,
$JK = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
Donc : $IJ = JK$.

c. $x_{\overrightarrow{IJ}} \times x_{\overrightarrow{JK}} + y_{\overrightarrow{IJ}} \times y_{\overrightarrow{JK}} = 7 \times (-1) + (-1) \times (-7) = 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont orthogonaux.

d. On déduit, de 1.b. et de 1.c. que le triangle IJK est isocèle et rectangle en J.

2.a. Le milieu de $[IK]$ est $Q(-2\,;\,-1)$.

b. Si P est le symétrique de J par rapport à Q, alors Q est le milieu de $[JP]$;

ainsi $x_Q = \frac{x_J + x_P}{2}$, soit $-2 = \frac{2 + x_P}{2}$; donc : $x_P = -6$;

et $y_Q = \frac{x_J + x_P}{2}$, soit $-1 = \frac{2 + y_P}{2}$; donc : $y_P = -4$;

d'où : $P(-6\,;\,-4)$.

c. • Q est le milieu des diagonales $[IK]$ et $[JP]$, donc le quadrilatère $IJKP$ est un parallélogramme.
• De plus (d'après 1.b.) il possède deux côtés consécutifs de même longueur et (d'après 1.c.) un angle droit.
• Ainsi $IJKP$ est un carré.

3.a. Les triangles IQP et JQK, rectangles isocèles en Q, (et inscrits dans le carré $IJKP$) sont superposables ;
en effet : $QI = QK$, $QP = QJ$ et $IP = JK$.

b. Dans le triangle IJK, rectangle en J,

$\cos J\hat{I}K = \frac{IJ}{IK}$ et $\sin J\hat{I}K = \frac{JK}{IK}$.

Or $IJ = 5\sqrt{2}$ et $JK = 5\sqrt{2}$ (d'après 1.b.) ;

de plus $\overrightarrow{IK}(6\,;-8)$, donc $IK = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$.

Donc : $\cos J\hat{I}K = \sin J\hat{I}K = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

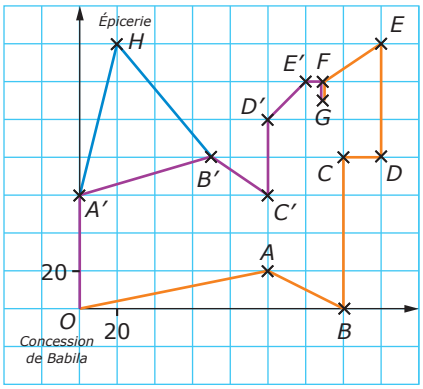
c. On en déduit que mes $J\hat{I}K = 45°$.

© Hachette Livre International

Activités d'intégration

Exercice 62 Le chemin du collège

1.a. On trace un repère orthonormé de centre O (la concession de Babila) et d'unité 1 m.



• Itinéraire 1 : $L_1 = OA'+A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'F+FG$.

Or : $\overrightarrow{A'B'}(70 ; 20)$, donc $A'B' = 10\times\sqrt{53} \approx 72{,}8$ m ;

$\overrightarrow{B'C'}(30 ; -20)$, donc $B'C' = 10\sqrt{13} \approx 36{,}1$ m ;

$\overrightarrow{D'E'}(20 ; 20)$, donc $D'E' = 20\sqrt{2} \approx 28{,}3$ m.

Ainsi, $L_1 \approx 60+72{,}8+36{,}1+40+28{,}3+10+10 \approx 257$ m.

• Itinéraire 2 : $L_2 = OA+AB+BC+CD+DE+EF+FG$.

Or : $\overrightarrow{OA}(100 ; 20)$, donc $OA = 20\times\sqrt{26} \approx 102$ m ;

$\overrightarrow{AB}(40 ; -20)$, donc $AB = 20\times\sqrt{5} \approx 44{,}7$ m ;

$\overrightarrow{EF}(-30 ; -20)$, donc $EF = 10\times\sqrt{13} \approx 36{,}1$ m.

Ainsi, $L_2 \approx 102+44{,}7+80+20+60+36{,}1+10 \approx 353$ m.

L'itinéraire 1 est plus court que l'itinéraire 2.

b. $V = 3$ km/h $= \dfrac{3\,000}{60}$ m/min $= 50$ m/min. De plus $V = \dfrac{d}{t}$ donc $t = \dfrac{d}{V}$.

• Itinéraire 1 : $t_1 = \dfrac{L_1}{v} = \dfrac{257}{50} \approx 5$; Babila met environ 5 min en passant par l'itinéraire 1.

• Itinéraire 2 : $t_2 = \dfrac{L_2}{v} = \dfrac{353}{50} \approx 7$; Babila met environ 7 min en passant par l'itinéraire 2.

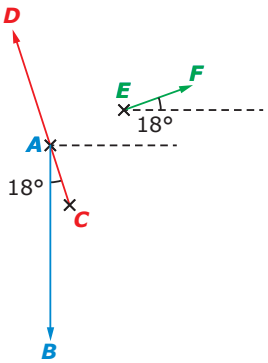
2.a. $\overrightarrow{A'H}(20 ; 80)$, donc $A'H = 20\sqrt{17} \approx 82{,}5$ m ; $\overrightarrow{HB'}(50 ; -60)$, donc $HB' = 10\sqrt{61} \approx 78{,}1$ m.

$A'H+HB'-A'B' \approx 82{,}5+78{,}1-72{,}8 \approx 88$; ce détour est d'environ 88 m.

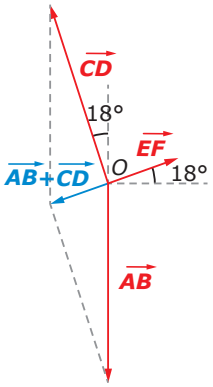
b. $t_3 = \dfrac{88}{50} \approx 1{,}76 \approx 1$ min et 45 s ; Babila perd environ 1 min 45 s en faisant ce détour.

Exercice 63 Une montée difficile

1. On doit utiliser règle graduée et rapporteur … *avec soin, pour que les observations demandées à la question 3 soient pertinentes.*



2. On place les représentants, de même origine O, des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$; on utilise la règle du parallélogramme pour construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.



3. Observations (*sur une figure soignée*) :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires ;

$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right\| < EF$.

On peut alors affirmer que le zébu va réussir à monter la route.

© Hachette Livre International

Exercice 64 La match de foot

a. On utilise le quadrillage pour les axes ; le centre du repère peut être placé n'importe où.
On note A, J_1, J_2, J_3, J_4 et B les points correspondants respectivement au centre du rond central, au joueur 1, au joueur 2, au joueur 3, au joueur 4 et au point d'arrivée du ballon sur la ligne de but.

b. $\overrightarrow{AJ_1}$ (9 ; 18), donc $AJ_1 = \sqrt{9^2 + 18^2} = 9\sqrt{5} \approx 20$; le joueur 1 se trouvait à environ 20 m du centre du rond central.

2.a. $\vec{u}_1$ (12 ; −42), donc $\left\| \vec{u}_1 \right\| = 6\sqrt{53} \approx 44$; la première passe était d'environ 44 m ;

$\vec{u}_2$ (12 ; 0), donc $\left\| \vec{u}_2 \right\| = 12$; la deuxième passe était d'environ 12 m

$\vec{u}_3$ (−6 ; 18), donc $\left\| \vec{u}_3 \right\| = 6\sqrt{10} \approx 19$; la troisième passe était d'environ 19 m

$\vec{u}_4$ (18 ; 6), donc $\left\| \vec{u}_4 \right\| = 6\sqrt{10} \approx 19$; le tir était d'environ 19 m.

b. $x_{\vec{u}_1} \times y_{\vec{u}_2} - x_{\vec{u}_2} \times y_{\vec{u}_1} = 12 \times 18 - (-6) \times (-42) = -36 \neq 0$;

donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ ne sont pas colinéaires et les trajectoires des premier et troisième tirs n'étaient pas parallèles.

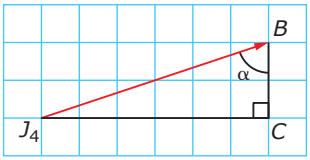
c. $x_{\vec{u}_3} \times x_{\vec{u}_4} + y_{\vec{u}_3} \times y_{\vec{u}_4} = -6 \times 18 + 18 \times 6 = 0$;

donc les vecteurs $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ sont orthogonaux et les trajectoires de la troisième passe et du tir étaient orthogonales.

3. Dans le triangle J_4BC, rectangle en C, $\tan\alpha = \dfrac{J_4C}{BC}$.

Ainsi, $\tan\alpha = \dfrac{18}{6} = 3$; donc $\alpha \approx 72°$.

L'angle entre le tir et la ligne de but est d'environ 72°.



© Hachette Livre International

4 *Equations de droites*

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Équations cartésiennes d'une droite [1a p 48]	21, 22, 23, 24, 25	47, 48, 52	58, 62, 64
2	Vecteurs directeurs d'une droite [1b p 48]	26, 27, 28, 29, 30		
	Droites particulières [1c p 48]			
	Apprendre à tracer une droite [1 p 50]	1, 3, 4, 5, 7, 8		
	Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite [2 p 51]	11, 12, 13, 14		
3,4	Coefficient directeur et ordonnée à l'origine [2 p 49]	26, 31, 32, 33, 34	49, 50, 51	60
	Apprendre à tracer une droite [1 p 50]	2, 6, 9, 10		
	Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite [2 p 51]	15, 16		
5,6	Droites parallèles et perpendiculaires [3 p 49]	35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46	53	54, 55, 56, 57, 59, 61, 63
	Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite [2 p 51]	17, 18, 19, 20		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Les cartons à remplir

1. $100x$ représente la masse en grammes de x tomates et $150y$ la masse en grammes de y pommes de terre.
Donc $100x+150y$ représente la masse des tomates et des pommes de terre dans le carton, soit 3 000 grammes.
D'où l'égalité $100x+15y = 3\,000$.

2.a. Si $x=6$, alors on obtient l'équation $100\times6+150y=3\,000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100\times6+150y &= 3\,000 \\ 600+150y &= 3\,000 \\ 150y &= 2\,400 \\ y &= 16 \end{aligned}$$

Elle peut encore mettre 16 pommes de terre.

b. Si $y=8$, alors on obtient l'équation $100x+150\times8=3\,000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100x+150\times8 &= 3\,000 \\ 100x+1200 &= 3\,000 \\ 100x &= 1\,800 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Elle peut encore mettre 18 tomates.

3. Si il n'y a que des tomates dans le carton, alors $y=0$.
On obtient donc l'équation $100x+150\times0=3\,000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100x+150\times0 &= 3\,000 \\ 100x &= 3\,000 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Elle peut mettre 30 tomates.

Si il n'y a que des pommes de terre dans le carton, alors $x=0$.
On obtient donc l'équation $100\times0+150y=3\,000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100\times0+150y &= 3\,000 \\ 150y &= 3\,000 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Elle peut mettre 20 pommes de terre.

4. Si $y=3$, alors on obtient l'équation $100x+150\times3=3\,000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100x+150\times3 &= 3\,000 \\ 100x+300 &= 3\,000 \\ 100x &= 2\,700 \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Elle peut mettre 27 tomates avec 3 pommes de terre.

© Hachette Livre International

1 Equations cartésiennes d'une droite

Le point A a pour coordonnées $(x\ ;\ y) = (2\ ;\ 3)$.
Comme $2-2\times3+4 = 2-6+4 = 0$, les coordonnées du point A vérifient l'égalité $x-2y+4 = 0$.

2.

Point	Coordonnées $(x\ ;\ y)$	A-t-on $x-2y+4 = 0$?
A	(2 ; 3)	Oui
B	(1 ; 5)	Non
C	(–2 ; 1)	Oui
D	(2 ; 2)	Non
E	(7 ; 3)	Non
F	(8 ; 6)	Oui
G	(4 ; 4)	Oui

3.a. Les points dont les coordonnées vérifient l'égalité $x-2y+4 = 0$ sont alignés sur une même droite.

b. Le point de coordonnées (6 ; 5) semble être aligné avec A, C, G et F.
$6-2\times5+4 = 6-10+4 = 0$; ses coordonnées vérifient donc aussi l'égalité $x-2y+4 = 0$.

Le point de coordonnées (0 ; 2) semble aussi être aligné avec A, C, G et F.
$0-2\times2+4 = 0-4+4 = 0$; ses coordonnées vérifient donc aussi l'égalité $x-2y+4 = 0$.

c. L'ensemble des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'égalité $x-2y+4 = 0$ est une droite.

4. Il suffit de vérifier que les coordonnées de B et G vérifient l'égalité $x+3y = 16$;
• pour le point $B(1\ ;\ 5)$: $x+3y = 1+3\times5 = 1+15 = 16$;
• pour le point $G(4\ ;\ 4)$: $x+3y = 4+3\times4 = 4+12 = 16$.
Donc la droite (BG) a bien pour équation $x+3y = 16$.

2 Vecteur directeur

1.a. Le vecteur $\vec{u_1}$ a pour coordonnées (–2 ; -3).
b. $A(2\ ;\ 1)$ et $B(0\ ;\ -2)$ ou bien $A(4\ ;\ 4)$ et $B(2\ ;\ 1)$.

c. Dans l'équation de (d), le coefficient devant x est l'ordonnée de $\vec{u_1}$ et celui devant y est l'opposé de l'abscisse de $\vec{u_1}$.

2.a. Le vecteur $\vec{u_4}$ est un vecteur directeur de (d'). Ses coordonnées sont (3 ; 2).

Ces nombres se retrouvent dans l'équation de la droite (d') de la même manière que pour $\vec{u_1}$ et (d).

3. Il semble que le vecteur de coordonnées $(-q\ ;\ p)$ soit un vecteur directeur de la droite d'équation $px+qy+r = 0$.

3 Equation du type $y = ax+b$

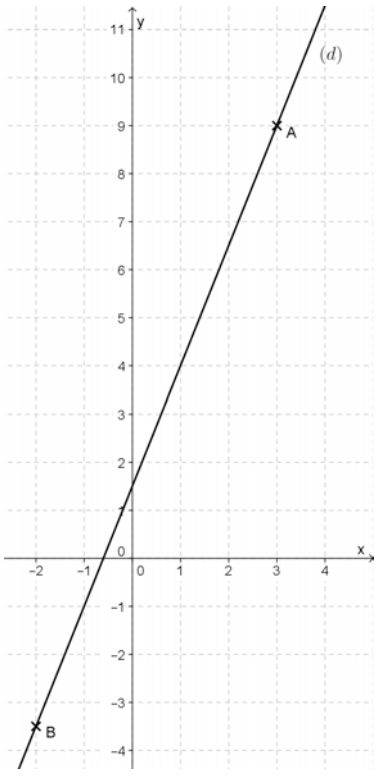
1.a. $5\times3-2y+3 = 0$
b. $15-2y+3 = 0$
$-2y = -18$
$y = 9$
L'ordonnée de A est 9.

2. On remplace x par -2 dans l'équation de (d) :
$5\times(-2)-2y+3 = 0$
$-10-2y+3 = 0$
$-2y = 7$
$y = -3,5$
L'ordonnée de B est $-3,5$.

4.a. $5x-2y+3 = 0$
$-2y = -5x-3$
$y = 2,5x+1,5$

b. Il suffit de remplacer x par 4 et -5, dans l'équation réduite de (d) ;
pour C : $y = 2,5\times4+1,5 = 10+1,5 = 11,5$;
pour D : $y = 2,5\times(-5)+1,5 = -12,5+1,5 = -11$.

3.



© Hachette Livre International

4 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

1.a. L'ordonnée de B_1 est $y = 2\times0-1 = -1$.
b. L'ordonnée de A_1 est $y = 2\times1-1 = 1$.
c. Les coordonnées de $\overrightarrow{B_1A_1}$ sont $(1-0 ; 1-(-1))=(1 ; 2)$.

2.

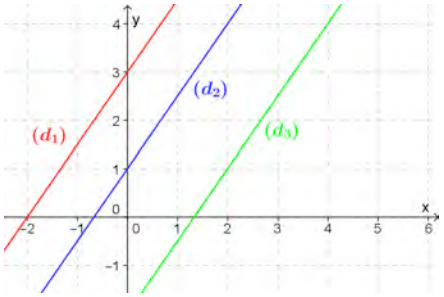
Droite (d_i)	Équation de (d_i)	Coordonnées de $\overrightarrow{B_iA_i}$	Coefficient directeur de (d_i)	Ordonnée à l'origine de (d_i)
(d_1)	$y = 2x-1$	$(1 ; 2)$	2	-1
(d_2)	$y = x-1,5$	$(1 ; 1)$	1	$-1,5$
(d_3)	$y = -0,5x+2$	$(1 ; -0,5)$	$-0,5$	2

Pour chaque droite, les nombres figurant dans l'équation réduite correspondent au coefficient directeur et à l'ordonnée à l'origine.

3. (d) est la droite d'équation $y = ax+b$.
Un vecteur directeur de la droite (d) est $(1 ; a)$;
le coefficient directeur de (d) est a ;
l'ordonnée à l'origine de (d) est b.

5 Droites parallèles

1.a.



(d_1) : $y = 1,5x+3$;
(d_2) : $y = 1,5x+1$;
(d_3) : $y = 1,5x-2$.

b. Ces trois droites semblent parallèles.

2.a. Un vecteur directeur de (d_1) est $(1 ; 1,5)$;
un vecteur directeur de (d_2) est $(1 ; 1,5)$;
un vecteur directeur de (d_3) est $(1 ; 1,5)$.

b. Ces trois vecteurs étant égaux, ils sont colinéaires.

c. On peut en déduire que ces trois droites sont parallèles.

3. (d) et (d') sont les droites d'équations $y = ax+b$ et $y = a'x+b'$;
(d) et (d') sont parallèles équivaut à $\underline{a = a'}$.

6 Droites perpendiculaires

Indispensable : le plan est muni d'un repère (O, I, J) orthonormé.

1.a. $\vec{u}$ $(-q ; p)$ est un vecteur directeur de la droite (d) d'équation $px+qy+r = 0$;
$\vec{u}'$ $(-q' ; p')$ est un vecteur directeur de la droite (d') d'équation $p'x+q'y+r = 0$.

b. Deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u}'(x' ; y')$ sont orthogonaux équivaut à $xx'+yy'=0$.

c. (d) et (d') sont perpendiculaires équivaut donc à $-q\times(-q')+p\times p' = 0$, c'est-à-dire à : $pp'+qq' = 0$.

2. Pour (d) et (d') : $2\times8+(-6)\times3 = 16-18 = -2$, donc (d) et (d') ne sont pas perpendiculaires ;
pour (d) et (d'') : $2\times3+(-6)\times1 = 6-6 = 0$, donc (d) et (d'') sont perpendiculaires.

© Hachette Livre International

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à tracer une droite

Exercice 1

Pour le point A : $2\times1-3\times2+4 = 2-6+4 = 0$;
donc $A\in(d)$.

Pour le point B : $2\times(-1)-3\times3+4 = -2-9+4 = -7 \neq 0$;
donc $B\notin(d)$.

Pour le point C : $2\times4-3\times4+4 = 8-12+4 = 0$;
donc $C\in(d)$.

Exercice 2

Pour le point M : $3\times(-1)-7 = -3-7 = -10 \neq 1$;
donc $M\notin(d)$.

Pour le point N : $3\times3-7 = 9-7 = 2$;
donc $N\in(d)$.

Pour le point P : $3\times\frac{2}{3}-7 = 2-7 = -5 \neq -\frac{5}{3}$;

donc $P\notin(d)$.

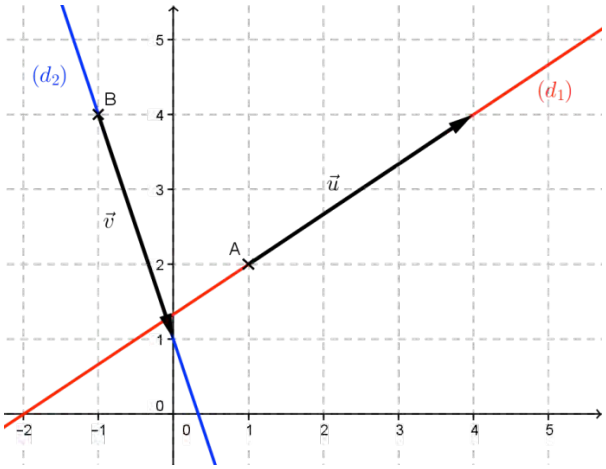
Exercice 3

a. $x = 0$; b. $x = 2$; c. $x = -4$.

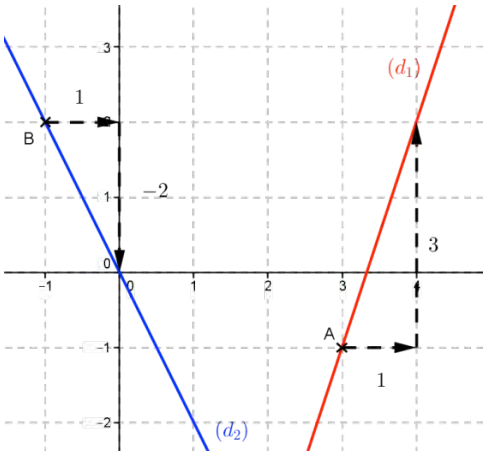
Exercice 4

a. $y = -4{,}75$; b. $y = 7{,}75$; c. $y = -11$.

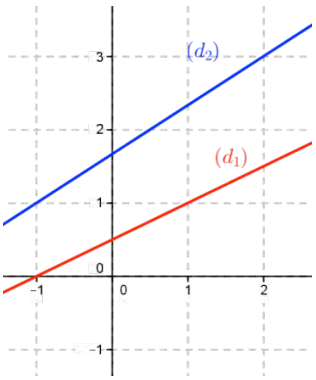
Exercice 5



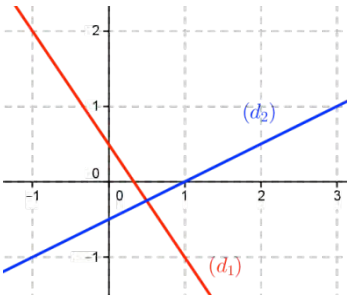
Exercice 6



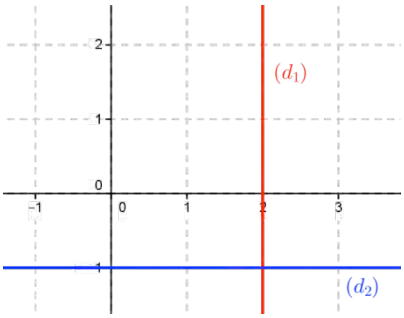
Exercice 7



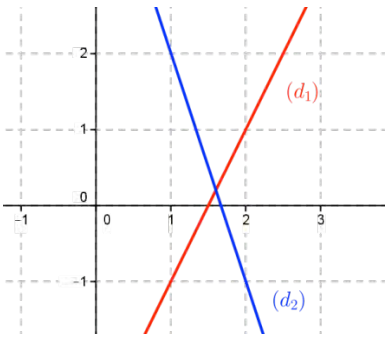
Exercice 8



Exercice 9



Exercice 10



© Hachette Livre International

2 Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite

Exercice 11

a. Equation de la droite (*d*) passant par $A(-2 ; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 4)$: $4x-y+11 = 0$.

b. Equation de la droite (*d*') passant par $B(-5 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2 ; 1)$: $x-2y+9 = 0$.

Exercice 12

a. Equation de la droite (*d*) passant par $C(-2 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3 ; 1)$: $x+3y+2 = 0$.

b. Equation de la droite (*d*') passant par $D(0 ; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-2 ; -5)$: $-5x+2y-8 = 0$.

Exercice 13

a. Equation de la droite (*d*) passant par $A(2 ; 4)$ et $B(3 ; 7)$: $3x-y-2 = 0$.

b. Equation de la droite (*d*') passant par $C(-1 ; 3)$ et $D(4 ; 5)$: $2x-5y+17 = 0$.

Exercice 14

a. Equation de la droite (*d*) passant par $R(0 ; 2)$ et $S(-3 ; 1)$: $x-3y+6 = 0$.

b. Equation de la droite (*d*') passant par $T(4 ; 3)$ et $U(1 ; 3)$: $y = 3$.

Exercice 15

a. Equation de la droite (*d*) passant par $A(3 ; -1)$ et de coefficient directeur 3 : $y = 3x-10$.

b. Equation de la droite (*d*') passant par $B(-1 ; 2)$ et de coefficient directeur -2 : $y = -2x$.

Exercice 16

a. Equation de la droite (*d*) passant par $P(-4 ; 0)$ et de coefficient directeur 1,5 : $y = 1{,}5x+6$.

b. Equation de la droite (*d*') passant par $Q(-1 ; -1)$ et de coefficient directeur 1 : $y = x$.

Exercice 17

a. Equation de la droite (*d*) passant par $A(3 ; 1)$ et perpendiculaire à (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 4)$: $x+4y-7 = 0$.

b. Equation de la droite (*d*') passant par $B(1 ; -1)$ et perpendiculaire à (Δ') de vecteur directeur $\vec{v}(-2 ; 1)$: $2x-y-3 = 0$.

Exercice 18

a. Equation de la droite (*d*) passant par $E(1 ; -2)$ et perpendiculaire à (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 5)$: $x-5y-11 = 0$.

b. Equation de la droite (*d*') passant par $F(1 ; 2)$ et perpendiculaire à (Δ') de vecteur directeur $\vec{v}(0 ; 3)$: $y = 2$.

Exercice 19

On donne les points $A(-1 ; 2)$, $B(8 ; 3)$ et $C(0 ; 4)$.

1. Equation de la droite (*AB*) : $x-9y+19 = 0$;
équation de la droite (*AC*) : $2x-y+4 = 0$;
équation de la droite (*BC*) : $x+8y-32 = 0$.

2. $\vec{AB}(9 ; 1)$.

3.a. Equation de la droite (*d*), de vecteur directeur $\vec{AB}$ et passant par *C* : $x-9y+36 = 0$;
b. équation de la droite (*d*'), perpendiculaire à (*AB*) et passant par *C* : $9x+y-4 = 0$.

Exercice 20

(*d*) est la droite d'équation $-2x+3y-6 = 0$.

a. Equation de la droite (*AB*), perpendiculaire à (*d*) [et passant par $A(3 ; 2)$] : $3x+2y-13 = 0$.

b. Pour déterminer l'abscisse de *B*, on résout l'équation :

$$\begin{aligned} 3x+2\times 1-13 &= 0 \\ 3x-11 &= 0 \\ 3x &= 11 \\ x &= \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

L'abscisse de *B* est égale à $\frac{11}{3}$.

© Hachette Livre International

Activités d'application

Appartenance à une droite

Exercice 21

1. A, B et F sont sur (d_1).

2. A et D sont sur (d_2).

Exercice 22

1. A est sur (d_1), (d_4) et (d_6).

2. B est sur (d_1), (d_3) et (d_5).

Exercice 23

1.

	$A(2\ ;\ 1)$	$B(-2\ ;\ -1)$	$C(-4\ ;\ 4)$
(d_1) : $x+2y-4=0$	O	N	O
(d_2) : $y=0{,}5x$	O	O	N
(d_3) : $y=-2{,}5x-6$	N	O	O

2.a. $(d_1)\cap(d_2)=\{A\}$;

b. $(d_2)\cap(d_3)=\{B\}$;

c. $(d_3)\cap(d_1)=\{C\}$.

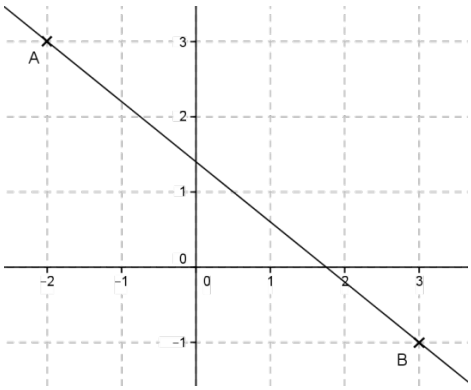
Exercice 24

La droite (AB) a pour équation $4x+5y-7=0$.

1. Le point A, d'abscisse -2, a pour ordonnée 3.

2. Le point B, d'ordonnée -1, a pour abscisse 3.

3.



Exercice 25

1. (d_1) est la droite d'équation $-3x-4y+12=0$.

a. (d_1) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.

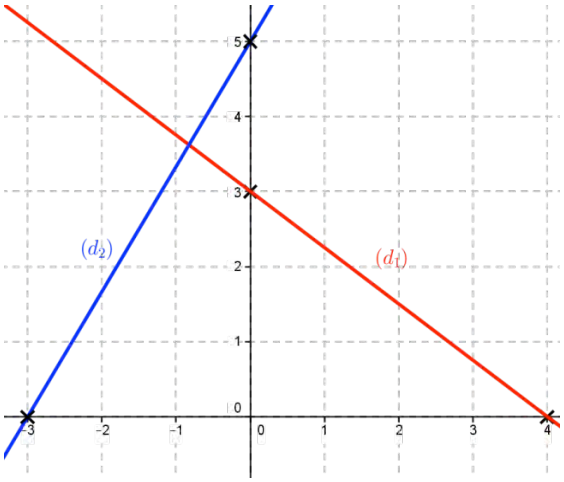
b. (d_1) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3.

2. (d_2) est la droite d'équation $5x-3y+15=0$.

a. (d_2) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3.

b. (d_2) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 5.

3.



© Hachette Livre International

Exercice 26

1.a. Le vecteur $\vec{u}$ $(-q\ ;\ p)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $px+qy+r = 0$.

b. La droite d'équation $y = ax+b$ a le vecteur $\vec{u}$ $(1\ ;\ a)$ comme vecteur directeur.

2.a. $(2\ ;\ 5)$ est un vecteur directeur de la droite (d_1) d'équation $5x-2y+1 = 0$;

b. $(1\ ;\ -2)$ est un vecteur directeur de la droite (d_2) d'équation $y = -2x+4$;

c. $(1\ ;\ -1{,}4)$ est un vecteur directeur de la droite (d_3) d'équation $y = -1{,}4x+3$;

d. $(-3\ ;\ -2)$ est un vecteur directeur de la droite (d_4) d'équation $-2x+3y+7 = 0$;

e. $(0\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de la droite (d_5) d'équation $x = -1$;

f. $(1\ ;\ 0)$ est un vecteur directeur de la droite (d_6) d'équation $y = 2$.

Exercice 27

La droite (d_1), d'équation $3x-4y+1 = 0$, a pour vecteur directeur $\vec{u}(-4\ ;\ -3)$.

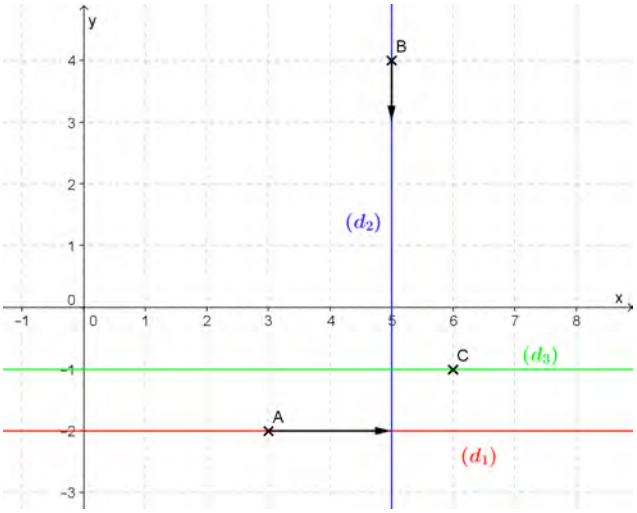
La droite (d_2), d'équation $-3x-4y = 0$, a pour vecteur directeur $\vec{w}(4\ ;\ -3)$.

La droite (d_3), d'équation $-4x-3y+3 = 0$, a pour vecteur directeur $\vec{t}(3\ ;\ -4)$.

La droite (d_4), d'équation $-4x+3y-1 = 0$, a pour vecteur directeur $\vec{v}(-3\ ;\ -4)$.

Exercice 28

1. On donne les points $A(3\ ;\ -2)$, $B(5\ ;\ 4)$ et $C(6\ ;\ -1)$.



2.a. Equation de la droite (d_1), passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(2\ ;\ 0)$: $y = -2$;

b. Equation de la droite (d_2), passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}(0\ ;\ -1)$: $x = 5$;

c. Equation de la droite (d_3), passant par C et de coefficient directeur 0 : $y = -1$.

Exercice 29

1.a. $\vec{t}(8\ ;\ -2)$ est un vecteur directeur de (d_3).

b. $\vec{u}(-5\ ;\ -2)$ est un vecteur directeur de (d_1).

c. $\vec{v}(3\ ;\ 4)$ est un vecteur directeur de (d_4).

d. $\vec{w}(1\ ;\ -5)$ est un vecteur directeur de (d_2).

2. (d_1) a pour équation $2x-5y+16 = 0$;
(d_2) a pour équation $5x+y-23 = 0$;
(d_3) a pour équation $x+4y = 0$;
(d_4) a pour équation $4x-3y+1 = 0$.

Exercice 30

1. $A(2\ ;\ 4)$, $B(-3\ ;\ -2)$ et $\vec{u}$ $(-1\ ;\ 5)$.

2.a. Equation de la droite (AB) : $6x-5y+8 = 0$;

b. équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$: $5x+y-14 = 0$.

© Hachette Livre International

Équation cartésienne du type $y = ax + b$

Exercice 31

a. $y = 2x - 3$ est l'équation de (d_3) ;

b. $y = -x + 1$ est l'équation de (d_2) ;

c. $y = 0{,}5x - 3$ est l'équation de (d_1) ;

d. $y = 2x + 1$ est l'équation de (d_4).

Exercice 32

a. $y = 1{,}5x + 2{,}5$;

b. $y = 5x + 2$;

c. $y = -2{,}5x + 0{,}25$;

d. $y = -2$.

Exercice 33

On donne les points $A(2 ; 2)$ et $B(6 ; 3)$.

1.a. Coefficient directeur de (AB) : $\dfrac{3-2}{6-2} = 0{,}25$.

b. L'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est b tel que $\dfrac{3-b}{6-0} = 0{,}25$, c'est-à-dire $b = 3 - 6 \times 0{,}25 = 1{,}5$.

c. On en déduit que (AB) a pour équation $y = 0{,}25x + 1{,}5$.

2. a. Pour $A(-2 ; 4)$ et $B(3 ; 1)$, l'équation de (AB) est : $y = -0{,}6x + 2{,}8$;

b. Pour $A(-3 ; -2)$ et $B(-4 ; 2)$, l'équation de (AB) est : $y = -4x - 14$;

c. Pour $A(3 ; -1)$ et $B(-2 ; -2)$, l'équation de (AB) est : $y = 0{,}2x - 1{,}6$;

d. Pour $A(-4 ; 3)$ et $B(2 ; 3)$, l'équation de (AB) est : $y = 3$.

Exercice 34

a. Pour $A(-1 ; 4)$ et $B(2 ; 6)$, l'équation de (AB) est : $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{14}{3}$;

b. Pour $C(-5 ; 10)$ et $D(1 ; -4)$, l'équation de (CD) est : $y = -\dfrac{7}{3}x - \dfrac{5}{3}$;

c. Pour $E\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{2}\right)$ et $F\left(\dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{5}\right)$, l'équation de (EF) est : $y = 3{,}6x - 0{,}7$.

Droites parallèles

Exercice 35

a. (d) et (d') sont parallèles car leurs coefficients directeurs sont tous les deux égaux à 1,5.

b. (d) et (d') ne sont pas parallèles car leurs coefficients directeurs ne sont pas égaux.

c. (d) et (d') sont parallèles car leurs coefficients directeurs sont tous les deux égaux à -1.

Exercice 36

(d') est la droite parallèle à la droite (d) d'équation $y = -3x + 5$ et passant par le point $A(2 ; 1)$

1. le coefficient directeur de (d') est -3.

2. L'ordonnée à l'origine de (d') est égale à b tel que $\dfrac{1-b}{2-0} = -3$, c'est-à-dire $b = 7$.

3. (AB) a pour équation $y = -3x + 7$.

Exercice 37

a. La droite (d'_1), parallèle à (d_1) d'équation $y = 2x - 1$ et passant par le point $B(5 ; -12)$, a pour équation : $y = 2x - 22$;

b. La droite (d'_2), parallèle à (d_2) d'équation $y = -1{,}5x$ et passant par le point $C(-5 ; 0)$, a pour équation : $y = -1{,}5x - 7{,}5$.

Exercice 38

(d) est la droite d'équation $y = 1{,}2x + 3$.

Le coefficient directeur de (AB) est $\dfrac{3-(-2)}{3-(-1)} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$;

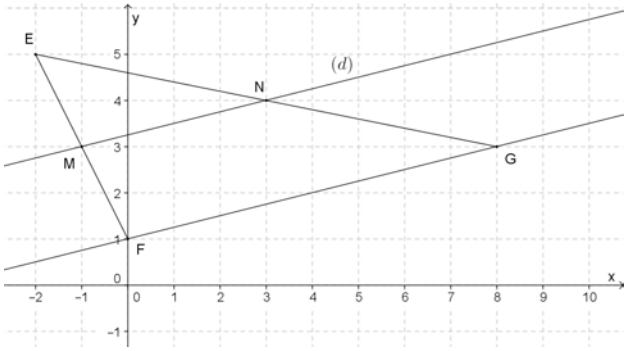
donc (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

Le coefficient directeur de (CD) est $\dfrac{4-(-2)}{7-2} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$;

donc (CD) et (d) sont parallèles.

Exercice 39

1. On donne les points $E(-2 ; 5)$, $F(0 ; 1)$ et $G(8 ; 3)$.



2. Les coordonnées du milieu M de $[EF]$ sont $(-1 ; 3)$ et celles du milieu N de $[EG]$ sont $(3 ; 4)$.

3.a. Equation de (FG) : $y = 0{,}25x + 1$;

b. équation de la droite (d), parallèle à (FG) et passant par M : $y = 0{,}25x + 3{,}25$.

4.a. $0{,}25 \times 3 + 3{,}25 = 0{,}75 + 3{,}25 = 4$;
donc N est bien sur (d).

b. Une des propriétés de la droite des milieux permet d'obtenir ce résultat.
Dans le triangle EFG, M est le milieu de $[EF]$ et (d) est parallèle à (FG).
Or si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc (d) passe par le milieu N de $[EG]$.

Exercice 40

Equation de la droite parallèle à (BC) et passant par A :

a. pour $A(-2 ; 2)$, $B(-1 ; -2)$ et $C(4 ; 1)$, $y = 0{,}6x + 3{,}2$;

b. pour $A(2 ; 3)$, $B(-1 ; 2)$ et $C(2 ; -1)$, $y = -x + 5$;

c. pour $A(-3 ; 4)$, $B(1 ; 2)$ et $C(5 ; 2)$, $y = 4$.

© Hachette Livre International

Droites perpendiculaires

Exercice 41

a. $3\times4+(-2)\times6 = 12-12 = 0$ donc (d) et (d') sont perpendiculaires.

b. $1\times5+(-5)\times1 = 5-5 = 0$ donc (d) et (d') sont perpendiculaires.

c. $7\times6+3\times14 = 42+42 = 84$ donc (d) et (d') ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 42

1. $3\times4+4\times(-3) = 12-12 = 0$ donc (d) et (d') sont perpendiculaires, quelle que soit la valeur de r.

2. (d') passe par $A(5\ ;\ 1)$ si $4\times5-3\times1+r = 0$

$17+r = 0$

$r = -17$.

3. Une équation cartésienne de (d') est $4x-3y-17 = 0$.

Exercice 43

a. La droite (d'_1), perpendiculaire à (d_1) d'équation $2x-5y+4 = 0$ et passant par le point $B(-1\ ;\ 6)$, a pour équation : $5x+2y-7=0$;

b. La droite (d'_2), perpendiculaire à (d_2) d'équation $x-2y+2 = 0$ et passant par le point $C(0\ ;\ -2)$, a pour équation : $2x+y+2 = 0$.

Exercice 44

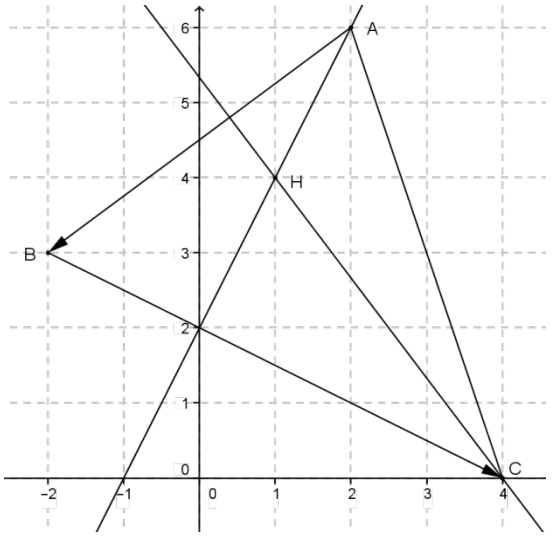
(d) est la droite d'équation $-3x+7y-2 = 0$.

La droite (AB) admet pour équation $5x+2y+10 = 0$; $-3\times5+7\times2 = -15+14 = -1 \neq 0$, donc (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

La droite (CD) admet pour équation $7x+3y-25 = 0$; $-3\times7+7\times3 = -21+21 = 0$, donc (CD) et (d) sont perpendiculaires.

Exercice 45

1. On donne les points $A(2\ ;\ 6)$, $B(-2\ ;\ 3)$ et $C(4\ ;\ 0)$.



2. $\overrightarrow{AB}(-4\ ;\ -3)$ et $\overrightarrow{BC}(6\ ;\ -3)$.

3.a. $M(x\ ;\ y)$ appartient à la hauteur issue de C dans le triangle ABC équivaut à $\overrightarrow{CM}(x-4\ ;\ y) \perp \overrightarrow{AB}(-4\ ;\ -3)$

c'est-à-dire $-4(x-4)+(-3)y = 0$;

l'équation de cette hauteur est donc : $4x+3y-16 = 0$.

b. $M(x\ ;\ y)$ appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC équivaut à $\overrightarrow{AM}(x-2\ ;\ y-6) \perp \overrightarrow{BC}(6\ ;\ -3)$

c'est-à-dire $6(x-2)+(-3)(y-6) = 0$;

l'équation de cette hauteur est donc : $2x-y+2 = 0$.

4. $4\times1+3\times4-16 = 4+12-16 = 0$ et $2\times1-4+2 = 2-4+2 = 0$, donc $H(1\ ;\ 4)$, qui appartient aux hauteurs issues de C et A dans le triangle ABC, est l'orthocentre de ABC.

Exercice 46

Equation de la perpendiculaire à (BC) passant par A :

a. lorsque $A(1\ ;\ 4)$, $B(-1\ ;\ 1)$ et $C(4\ ;\ 2)$: $5x+y-9 = 0$;

b. lorsque $A(-3\ ;\ 2)$, $B(2\ ;\ 1)$ et $C(1\ ;\ -1)$: $x+2y-1 =0$;

c. lorsque $A(-4\ ;\ -2)$, $B(-1\ ;\ 2)$ et $C(3\ ;\ -2)$: $x-y+2 = 0$.

© Hachette Livre International

Exercice 47 Les bons termes

a. $y = -3x+2$ est l'équation du type $y = ax+b$ de (d).

b. $3x-2y+7 = 0$ est une équation cartésienne de (d').

c. 2 est l'ordonnée à l'origine de (d).

d. -3 est le coefficient directeur de (d).

e. Le vecteur $\vec{u}(2\ ;\ 3)$ est un vecteur directeur de (d').

f. Le vecteur $\vec{v}(1\ ;\ -3)$ est un vecteur directeur de (d).

Exercice 48 Des équations, une équation

(d) a pour équation cartésienne : $4x+2y-6 = 0$.

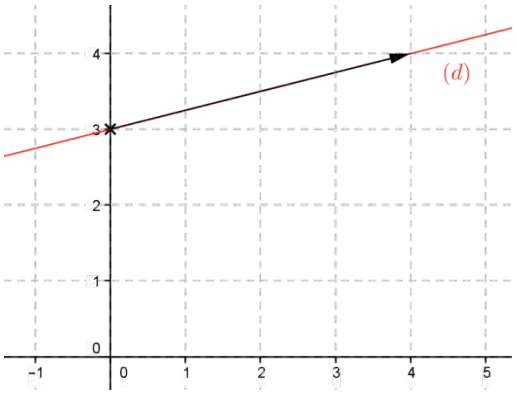
a. $8x+4y-12 = 0$ est une autre équation cartésienne de (d).

b. $y = -2x+3$ est l'équation de (d) du type $y = ax+b$.

Exercice 49 Tracer précisément

(d) est la droite d'équation $y = 0{,}25x+3$.

1.a. (d) coupe l'axe des ordonnées en 3.



b. $\vec{u}(1\ ;\ a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax+b$; donc $\vec{u}(1\ ;\ 0{,}25)$ est un vecteur directeur de (d).

c. L'ordonnée de $\vec{u}$ vaut 0,25 ; pour utiliser une telle coordonnée, il faut un quadrillage adapté.

d. $2\vec{u}$ a pour coordonnées (2 ; 0,5),

$3\vec{u}$ a pour coordonnées (3 ; 0,75),

$4\vec{u}$ a pour coordonnées (4 ; 1),

$5\vec{u}$ a pour coordonnées (5 ; 1,25).

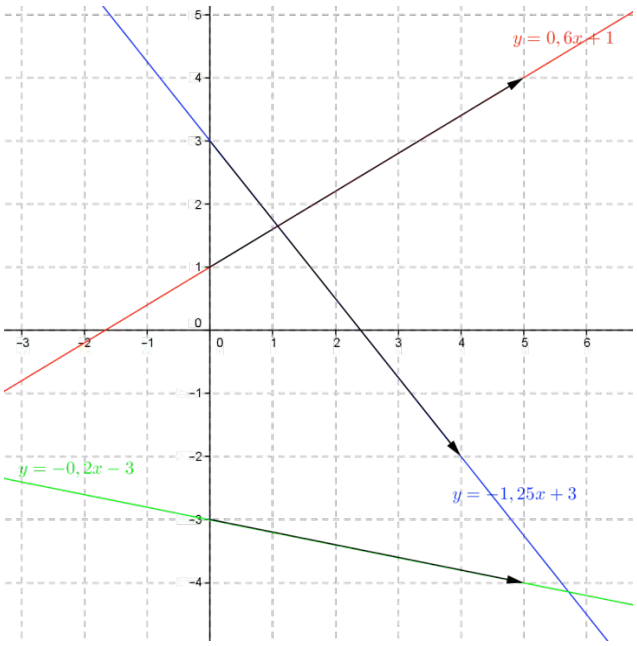
e. $\vec{u}$, $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $4\vec{u}$ et $5\vec{u}$ sont des vecteurs directeurs de (d).

f. Le vecteur $4\vec{u}$, qui a des coordonnées entières, est le plus facile à représenter.

2.a. Le vecteur de coordonnées (5 ; 3) est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = 0{,}6x+1$;

b. le vecteur de coordonnées (4 ; -5) est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = -1{,}25x+3$;

c. le vecteur de coordonnées (5 ; -1) est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = -0{,}2x-3$.



© Hachette Livre International

Exercice 50 D'un seul coup d'œil

Vert clair : $y = -3x+2$;

vert foncé : $y = 2x+2$;

rose : $y = 2x-\frac{1}{2}$;

violet : $y = 3$;

orange : $y = \frac{1}{3}x+1$;

bleu : $y = \frac{1}{3}x-1$.

Exercice 51 Bien appliquer une formule

1. Pour les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

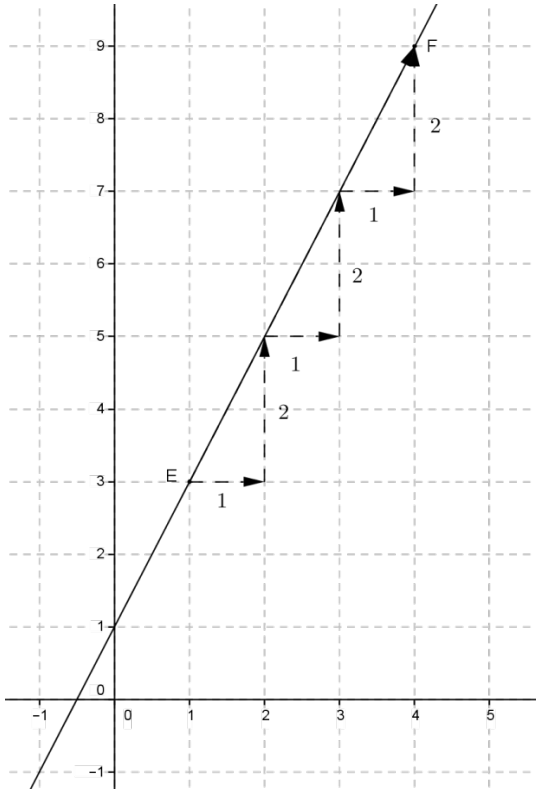
2. On donne les points $E(1\ ;\ 3)$ et $F(4\ ;\ 9)$.

Fatoumata a soustrait les coordonnées de chaque point au lieu de soustraire les abscisses et les ordonnées :

elle a calculé $\frac{y_E - x_E}{y_F - x_F}$ au lieu de $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$.

Francis n'a pas respecté l'ordre des points au dénominateur : il a calculé au dénominateur $x_E - x_F$ au lieu de $x_F - x_E$.

3. $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$.



On constate graphiquement que la droite tracée a bien 2 pour coefficient directeur.

Exercice 52 Obtenir une équation cartésienne

1. On donne les points $A(2\ ;\ 5)$ et $B(6\ ;\ 8)$.

a. $\overrightarrow{AB}\ (4\ ;\ 3)$.

b. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).

On applique la propriété : « $\vec{u}(-p\ ;\ q)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $px+qy+r = 0$ ».
Ainsi une équation de (AB) peut s'écrire $-3x+4y+r = 0$.

c. $-3\times2+4\times5+r = 0$
$14+r = 0$
$r = -14$.

d. Une équation de (AB) est donc : $-3x+4y-14 = 0$.

2.a. Equation de (d_1) : $9x+8y+11 = 0$;
b. équation de (d_2) : $5x+6y-26 = 0$;
c. équation de (d_3) : $3x-3y+18 = 0$.

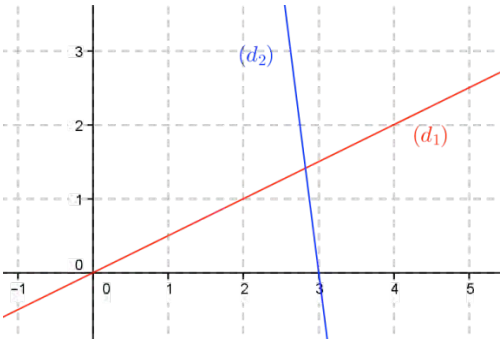
Exercice 53 L'importance du repère

(d_1) est la droite d'équation $-2x+4y = 0$;
(d_2) est la droite d'équation $8x+y+24 = 0$.

1.a. Les deux droites ainsi tracées semblent effectivement perpendiculaires. On le contrôle à l'aide de l'équerre.

b. Melissa a appliqué une propriété qui n'est valable que dans un repère orthonormé. Or celui qui est tracé ne l'est pas.

2.a. Représentation dans un repère orthonormé :



b. Les droites tracées ne sont pas perpendiculaires, comme le confirme par ailleurs le calcul de Melissa.

© Hachette Livre International

Exercices d'approfondissement

Exercice 54 Critère de parallélisme

1. (d) est la droite d'équation $px+qy+r = 0$;
(d') est la droite d'équation $p'x+q'y+r' = 0$.

a. $\vec{u}(-q\ ;\ p)$ est un vecteur directeur de (d) ;

$\vec{u'}(-q'\ ;\ p')$ est un vecteur directeur de (d').

b. Deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{u'}(x'\ ;\ y')$ sont colinéaires équivaut à $xy'-x'y = 0$.

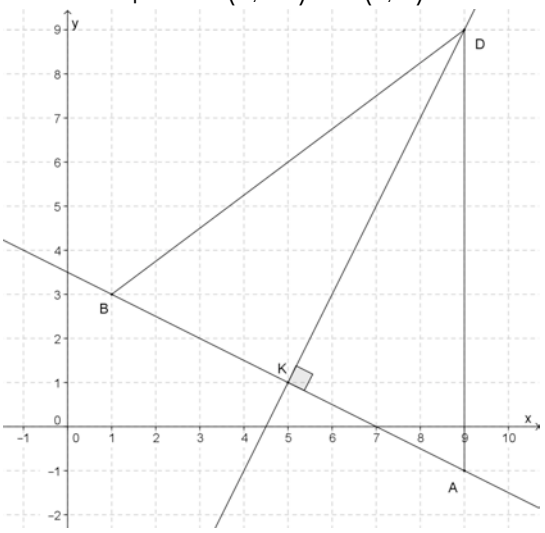
c. Donc $(d)//(d')$ équivaut à $-q\times p'-p\times(-q') = 0$,
c'est-à-dire équivaut à $pq'-p'q = 0$.

2.a. Pour (d) : $3x-5y+1 = 0$ et (d') : $-6x+10y-7 = 0$,
on a $3\times10-(-6)\times(-5) = 30-30 = 0$; donc $(d)//(d')$;

b. pour (d) : $6x+3y+2 = 0$ et (d') : $8x+4y-3 = 0$,
on a $6\times4-8\times3 = 24-24 = 0$; donc $(d)//(d')$.

Exercice 55 Équation de médiatrice

1. On donne les points $A(9\ ;\ -1)$ et $B(1\ ;\ 3)$.



2.a. Le milieu de $[AB]$ est $K(5\ ;\ 1)$.

b. $M(x\ ;\ y)\in(AB)$ équivaut à :

$\vec{AM}(x-9\ ;\ y+1)$ et $\vec{AB}(1-9\ ;\ 3-(-1))$ sont colinéaires
$(x-9)(3-(-1))-(y+1)(1-9) = 0$
$4x+8x-27 = 0$;
donc une équation de (AB) est : $x+2y-7 = 0$.

c. Soit (d) la médiatrice de (AB).
$M(x\ ;\ y)\in(d)$ équivaut à

$\vec{KM}(x-5\ ;\ y-1)$ et $\vec{AB}(1-9\ ;\ 3-(-1))$ sont orthogonaux
$(x-5)(1-9)+(y-1)(3-(-1)) = 0$
$-8x+4y+36 = 0$;
donc une équation de (d) est $-2x+y+9 = 0$.

3. Soit D le point de (d) de même abscisse que A.

a. Pour calculer l'ordonnée de D, on résout :
$$-2\times9+y+9 = 0$$
$$-9+y = 0$$
$$y = 9\ ;$$
donc l'ordonnée de D vaut 9.

b. $AD = 9-(-1) = 10$, car A et D ont la même abscisse.
De plus $BD = 10$, car D est sur la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 56 Triangle particulier

(d_1) est la droite d'équation $2x-5y-26 = 0$;
(d_2) est la droite d'équation $5x+2y+16 = 0$;
(d_3) est la droite d'équation $-5x+4y-6 = 0$.

D'après la figure, le triangle ABC ne peut être rectangle qu'en A ; démontrons que $(d_1)\perp(d_2)$:
$$2\times5+(-5)\times2=10-10 = 0.$$
Donc (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires en A et ABC est un triangle rectangle en A.

Exercice 57 Quadrilatère particulier

1. Equations des 4 droites :
(d_1) : $-2x+9y-26 = 0$;
(d_3) : $-9x-2y-22 = 0$;
(d_2) : $4x-18y-42 = 0$;
(d_4) : $-27x-2y-66 = 0$.
La figure est correcte, modulo une permutation des dénominations des droites notées (d_2) et (d_3).

2. $ABCD$ semble être un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$.

3. On va démontrer que $(d_1)//(d_2)$ et $(d_1)\perp(d_3)$.

● Pour (d_1) et (d_2) :

l'équation du type $y = ax+b$ de (d_1) est : $y = \frac{2}{9}x+\frac{26}{9}$;

l'équation du type $y = ax+b$ de (d_3) est : $y = \frac{2}{9}x-\frac{21}{9}$;

les coefficients directeurs sont égaux, donc $(d_1)//(d_2)$.

● Pour (d_1) et (d_3) :
$-2\times(-9)+9\times(-2) = 18-18 = 0$; donc $(d_1)\perp(d_3)$.

Finalement $ABCD$ est effectivement un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$.

© Hachette Livre International

S'entraîner au BEPC

Exercice 58 Déterminer une équation

La droite passant par $A(1 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j}$ a pour équation : $-x+2y-3 = 0$.

Exercice 59 Parallélisme et orthogonalité

L'équation de (d_1) est : $2x - 3y + 4 = 0$;

l'équation de (d_2) peut se s'écrire : $-\frac{3}{2}x + y + 5 = 0$;

l'équation de (d_3) peut se s'écrire : $\frac{3}{2}x + y - 1 = 0$.

Or $2 \times \frac{3}{2} + (-3) \times 1 = 3 - 3 = 0$; donc $(d_1) \perp (d_3)$.

Exercice 60 À chaque droite son équation

Droites	Équations
(d_1)	$y = x$
(d_2)	$y = x-1$
(d_3)	$y = -x+3$

Exercice 61 Alignement de points et orthogonalité

On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(-2 ; 1)$, $B(1 ; 2)$ et $C(-3 ; 0)$.

1. $\vec{AB}(3 ; 1)$ et $\vec{AC}(-1 ; -1)$.

2. $3\times(-1)-(-1)\times 1 = -3+1 = -2 \neq 0$;

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

3. $\vec{u}(1 ; -3)$ est un vecteur directeur de la droite (D) d'équation $y = -3x + 1$.

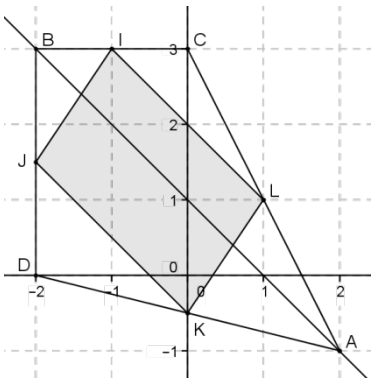
4. $3\times 1+1\times(-3) = 3-3 = 0$;

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et les droites (D) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 62 Une situation problème

On donne, dans un repère orthonormé, les points $A(2 ; -1)$, $B(-2 ; 3)$, $C(0 ; 3)$ et $D(-2 ; 0)$.

1.



2. Equation de la droite (AB) : $x+y-1 = 0$.

3. Le milieu de $[BC]$ est $I(-1 ; 3)$;
le milieu de $[BD]$ est $J(-2 ; 1{,}5)$;
le milieu de $[DA]$ est $K(0 ; -0{,}5)$;
le milieu de $[AC]$ est $L(1 ; 1)$.

4. $\vec{IJ}(-1 ; -1{,}5)$ et $\vec{LK}(-1 ; -1{,}5)$;

donc $\vec{IJ} = \vec{LK}$ et $IJKL$ est un parallélogramme.

5. $AC = \sqrt{(0-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

$CB = \sqrt{(0-(-2))^2 + (3-3)^2} = 2$;

$BD = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (0-3)^2} = 3$;

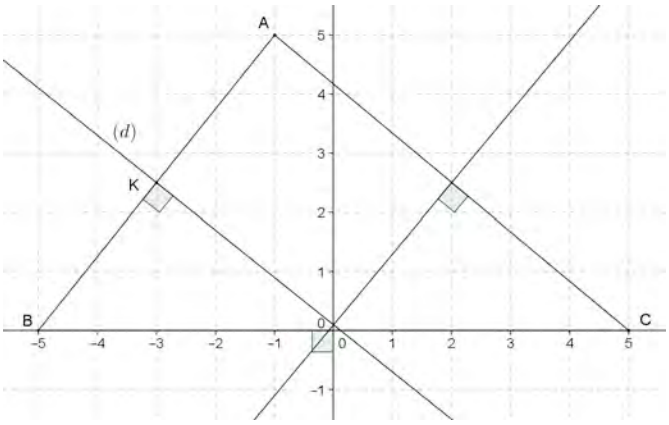
$DA = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{17}$;

le périmètre de $ACBD$ est égal à $(2\sqrt{5} + \sqrt{17} + 5)$cm.

© Hachette Livre International

Exercice 63 L'antenne relais

1.



2.b. L'antenne relais est au point d'intersection des médiatrices qui semblent se croiser au point de coordonnées (0 ; 0).

3.a. Les points *B* et *C* sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Donc, l'axe des ordonnées est la médiatrice de [*BC*] et l'antenne relais est nécessairement sur cet axe.

b.
- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: (–4 ; –5) ;
- coordonnées du milieu *K* de [*AB*] : (–3 ; 2,5) ;
- équation de la droite (*d*) médiatrice de [*AB*] : $4x+5y-0{,}5 = 0$;
- coordonnées du point *R* de (*d*) qui est sur l'axe des ordonnées : (0 ; 0,1).

c. Le point *R* est le point d'intersection de la médiatrice de [*AB*] et de celle de [*BC*].
C'est donc en *R* que sera l'antenne-relais.
Cette position est légèrement différente de celle qui avait été déterminée graphiquement.

d. La médiatrice de [*AC*] a pour équation $6x-5y+0{,}5 = 0$;
$6\times0-5\times0{,}1+0{,}5 = 0-0{,}5+0{,}5 = 0$; donc *R* est bien sur la médiatrice de [*AC*].

© Hachette Livre International

Exercice 64 Optimiser une production

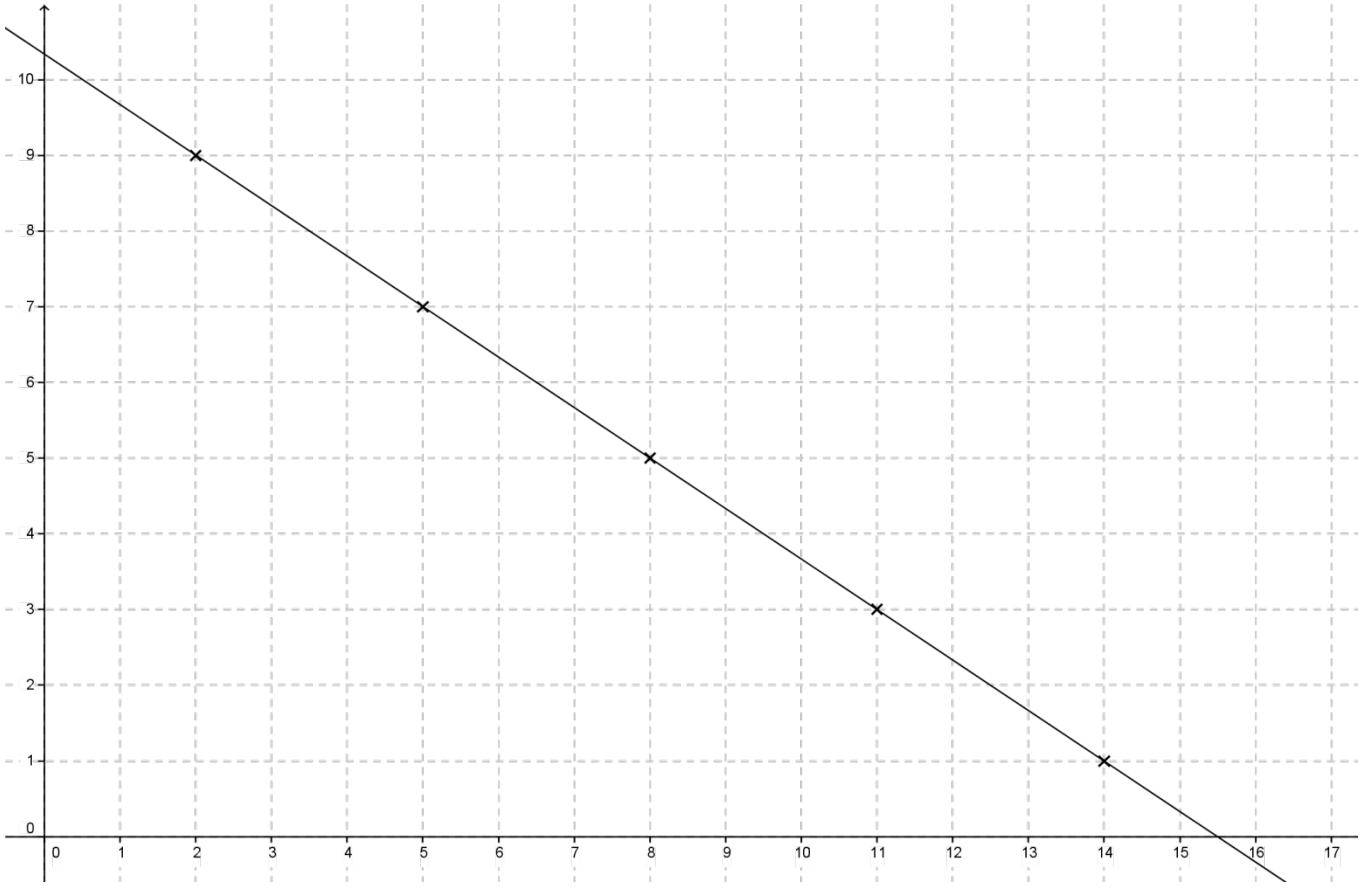
1.a. La fabrication de 8 petits cartons nécessite le travail de 8×2 = 16 employés.
La fabrication de 5 grands cartons nécessite le travail de 5×3 = 15 employés.
8 petits et 5 grands peuvent donc être fabriqués par les 31 employés car 16+15=31.

b. Le nombre d'employés fabriquant x petits cartons est $2x$.

c. Le nombre d'employés fabriquant y grands cartons est $3y$.

d. Il y a 31 employés. D'où : $2x+3y = 31$.

2.a.



b. Le point de coordonnées (8 ; 5) est bien sur la droite d'équation $2x+3y = 31$.

c. Détermination graphique de tous les autres couples de valeurs possibles pour x et y : (2 ; 9), (5 ; 7), (11 ; 3), (14 ; 1).

3.a. Chiffre d'affaires correspondant à chaque couple obtenu précédemment :

- pour (2 ; 9) : 2×1 500+9×2 500 = 25 500 F CFA ;
- pour (5 ; 7) : 5×1 500+7×2 500 = 25 000 F CFA ;
- pour (8 ; 5) : 8×1 500+5×2 500 = 24 500 F CFA ;
- pour (11 ; 3) : 11×1 500+3×2 500 = 24 000 F CFA ;
- pour (14 ; 1) : 14×1 500+1×2 500 = 23 500 F CFA.

b. Il faut fabriquer 2 petits cartons et 9 grands pour obtenir le chiffre d'affaires le plus élevé.

© Hachette Livre International

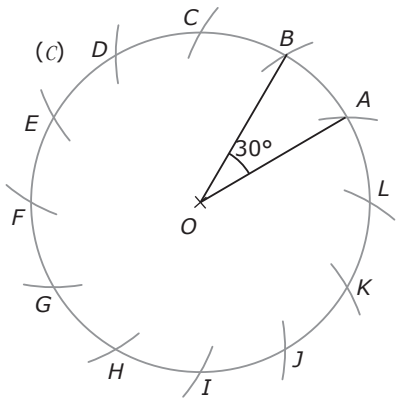
5 *Angles inscrits au centre. Polygones réguliers*

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Angles inscrits [1 p 60] et angles au centre [2 p 60]	10, 11, 12, 13	31	
2 et 3	Propriétés des angles inscrits [3 p 60]	14, 15, 16, 17, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28	32	36, 39, 40, 44
	Apprendre à calculer la mesure d'un angle [1 p 62]	1, 2, 3, 4		
4	Polygones réguliers [4 p 61]	25, 26, 27, 28, 29, 30,	33, 34, 35	37, 38, 41, 42, 43
	Apprendre à construire un polygone régulier [2 p 63]	5 , 6, 7, 8, 9	32, 35	

Pour démarrer

Cercles et polygones

1.



2.a. En reliant les points A, C, E, G, I, K et A, on obtient un hexagone.

b. $[AO]$ et $[CO]$ sont des rayons du cercle $(\mathcal{C})$ donc $AO = CO$.
Donc AOC est un triangle isocèle en O.
Puis mes $A\hat{O}C$ = mes $A\hat{O}B$ + mes $B\hat{O}C$ = 30+30 = 60°.
Donc AOC est un triangle équilatéral.

c. AOC équilatéral et OA = 6 cm, donc AC = 6 cm.

3.a. En reliant les points A, D, G et K, on obtient un carré.

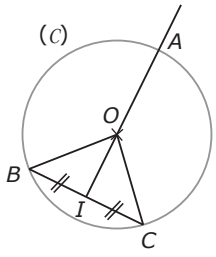
b. $[OA]$ et $[OD]$ sont des rayons du cercle $(\mathcal{C})$, donc $OA = OD$.
Donc AOD est un triangle isocèle en O.
Puis mes $A\hat{O}D$ = mes $A\hat{O}B$ + mes $B\hat{O}C$ + mes $C\hat{O}D$ = 30+30+30 = 90°.
Donc AOD est un triangle rectangle isocèle en O.

c. AOD est un triangle rectangle en O ; donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AD^2 = AO^2 + OD^2$.
Or $AO = OD$ = 6 cm ; ainsi $AD^2 = 72$ et $AD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.

Activités de découverte

1 Angles inscrits, angles au centre

1.



2.a. I milieu de $[BC]$, donc I équidistant de B et C.
O centre du cercle $(\mathcal{C})$, B et C appartiennent à $(\mathcal{C})$, donc $OB = OC$ et O équidistant de B et C.
La médiatrice de $[BC]$ est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment $[BC]$, donc O et I sont des points de cette médiatrice et (OI) est bien la médiatrice de $[BC]$.
Ensuite $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons du cercle $(\mathcal{C})$, donc $OB = OC$ et OBC est un triangle isocèle en O.
Dans ce cas, la médiatrice de $[BC]$ est aussi la bissectrice de l'angle $B\hat{O}C$.

b. (OI) bissectrice de $B\hat{O}C$, donc mes $I\hat{O}C = \frac{1}{2}$ mes $B\hat{O}C = \frac{1}{2} \times 80 = 40°$.

$A \in [IO]$, donc mes $I\hat{O}A = 180°$, donc mes $I\hat{O}C$ + mes $C\hat{O}A = 180°$, donc mes $C\hat{O}A = 180 -$ mes $I\hat{O}C = 140°$.

De même, on a mes $I\hat{O}B = 40°$ et mes $B\hat{O}A = 140°$.

© Hachette Livre International

c. [OA] et [OC] sont des rayons de ($\mathcal{C}$), donc $OA = OC$ et AOC est un triangle isocèle en O.
Ainsi mes$\widehat{OCA}$ = mes$\widehat{OAC}$ et donc mes$\widehat{COA}$ + 2mes$\widehat{OAC}$ = 180°,
soit 140 + 2mes$\widehat{OAC}$ = 180°, donc mes$\widehat{OAC}$ = 20°.

d. I, O et A sont alignés donc mes$\widehat{IAC}$ = mes$\widehat{OAC}$ = 20°.

3.a. Par la symétrie orthogonale d'axe (OI), le symétrique de C est B, celui de A est A et celui de $\widehat{CAI}$ est $\widehat{BAI}$.

b. mes$\widehat{CAB}$ = mes$\widehat{CAI}$ + mes$\widehat{IAB}$. D'après 3.a. $\widehat{CAI}$ est le symétrique de $\widehat{BAI}$, donc mes$\widehat{CAI}$ = mes$\widehat{BAI}$
et d'après 2.d. mes$\widehat{IAC}$ = 20° donc mes$\widehat{CAB}$ = 20 + 20 = 40°.

c. mes$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{BOC}$.

4.a. AIB est un triangle rectangle en I donc les deux angles $\widehat{IBA}$ et $\widehat{IAB}$ sont complémentaires soit mes$\widehat{IBA}$ + mes$\widehat{IAB}$ = 90°.
Or, d'après 3.b., mes$\widehat{IAB}$ = mes$\widehat{CAI}$ = 20° ; donc mes$\widehat{IBA}$ = 90–20 = 70°.

b. I milieu de [BC] ; donc B, I et C sont alignés et mes$\widehat{CBA}$ = mes$\widehat{IBA}$ = 70°. Ainsi mes$\widehat{CBA} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{COA}$.

c. De même : mes$\widehat{BCA} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{BOA}$.

5.a.

mes$\widehat{BOC}$	mes$\widehat{COA}$	mes$\widehat{BOA}$
mes$\widehat{BAC}$	mes$\widehat{CBA}$	mes$\widehat{BCA}$

$\times \frac{1}{2}$

b. « Si $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans un cercle de centre O, alors mes$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{BOC}$ ».

2 Angles qui interceptent le même arc

1. On utilise la formule « longueur réelle × échelle = longueur sur plan », en pensant à convertir en centimètre.

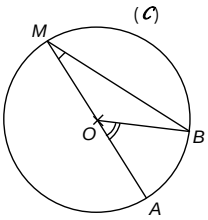
2.a. Chaque angle a pour mesure 18°. Les angles de tir sont les mêmes.

b. « Si des points M et N sont situés sur un même cercle et les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$,
alors mes$\widehat{AMB}$ = mes$\widehat{ANB}$. »

3 Démontrer des propriétés

Partie A : Propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre associé

1. Un cas particulier



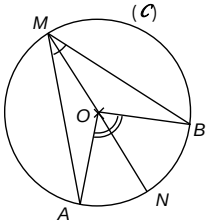
a. Dans le triangle MOB, isocèle en O, mes$\widehat{OMB}$ = mes$\widehat{OBM}$;

on a : mes$\widehat{OMB}$ + mes$\widehat{OBM}$ + mes$\widehat{MOB}$ = 2mes$\widehat{OMB}$ + mes$\widehat{MOB}$ = 180°,

donc : mes$\widehat{OMB} = \frac{180 - \text{mes}\widehat{MOB}}{2}$.

b. Les points M, O et A sont alignés, donc les angles $\widehat{MOB}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires :

mes$\widehat{AOB}$ = 180–mes$\widehat{MOB}$.



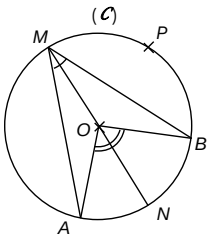
c. On en déduit que : mes$\widehat{AMB}$ = mes$\widehat{OMB} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{AOB}$.

2. Le cas général

D'après ce qui précède : mes$\widehat{NMB} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{NOB}$ et mes$\widehat{NMA} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{NOA}$.

On en déduit que mes$\widehat{AMB}$ = mes$\widehat{AMN}$ + mes$\widehat{NMB} = \frac{1}{2}$ (mes$\widehat{AON}$ + mes$\widehat{NOB}$) = $\frac{1}{2}$ mes$\widehat{AOB}$.

Partie B : Propriété des angles inscrits



1. mes$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{AOB}$ et mes$\widehat{APB} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{AOB}$.

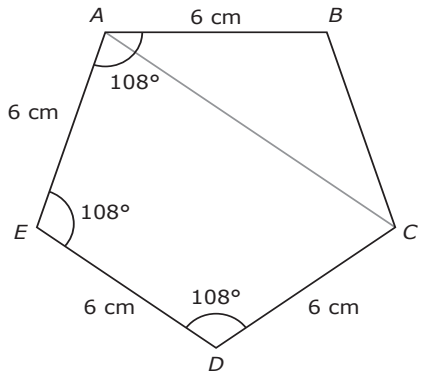
2. On en déduit que : mes$\widehat{AMB}$ = mes$\widehat{APB}$.

© Hachette Livre International

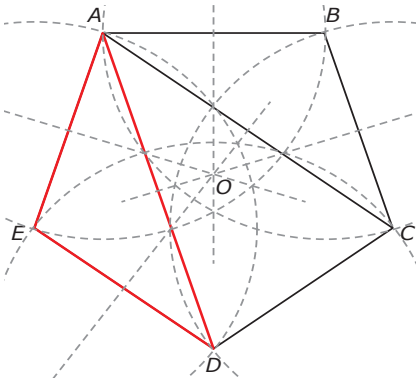
4 Un nouveau polygone régulier

Partie A : Construction d'un pentagone régulier

1.



2.a.

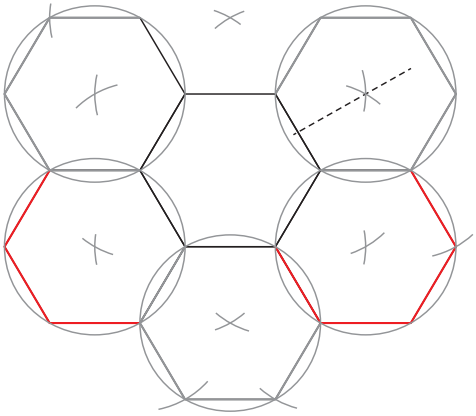


Les cercles circonscrits aux triangles *ABC* et *ADE* ont le même centre *O* et sont donc confondus (puisque passant par *A*).

b. Il ne manque que la longueur *BC* qui est, sur le dessin, 6 cm et la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$ qui est, sur le dessin, 108°.
ABCDE est donc bien un polygone régulier.
De plus, à l'aide du rapporteur, mes $\widehat{AOB}$ = 72°, mes $\widehat{BOC}$ = 72°, … et mes $\widehat{DOE}$ = 72° ; tous ces angles ont la même mesure.

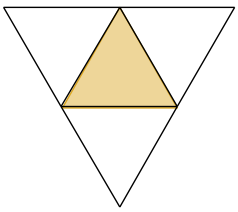
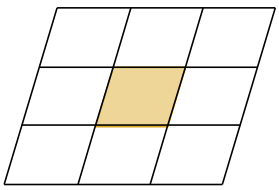
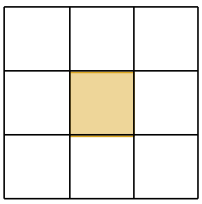
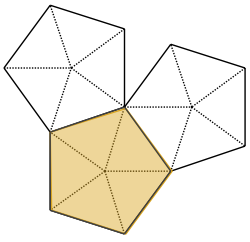
Partie B : Pavage et polygones réguliers

1.



On utilise le fait qu'un hexagone régulier est formé de six triangles équilatéraux pour obtenir le centre du cercle qui permet de construire l'hexagone régulier.

2.a.

• un triangle équilatéral	• un parallélogramme	• un carré	• un pentagone régulier
			
On utilise le compas pour tracer les triangles	On utilise le quadrillage pour tracer les parallélogrammes	On utilise aussi le quadrillage pour tracer les carrés.	On utilise la partie A.1.

b. Seul le pentagone régulier ne permet pas de réaliser un pavage, puisque les pentagones ne recouvrent pas tout le plan.

© Hachette Livre International

1 Apprendre à calculer la mesure d'un angle

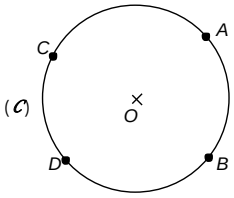
Exercice 1

• L'angle $A\hat{O}B$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $A\hat{C}B$;

• l'angle $B\hat{O}C$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $B\hat{D}C$;

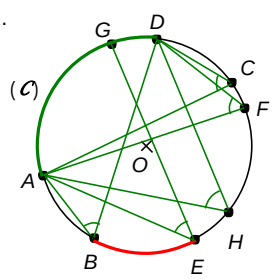
• l'angle $C\hat{O}D$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $C\hat{B}D$;

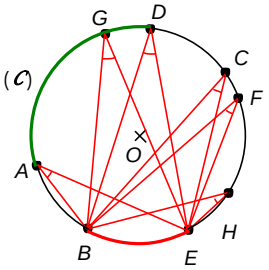
• l'angle $A\hat{O}D$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $A\hat{B}D$.



Exercice 2

a.





b. L'arc tracé en vert représente le petit arc $\overset{\cap}{AD}$, qu'interceptent les angles $A\hat{B}D$, $A\hat{E}D$, $A\hat{H}D$, $A\hat{F}D$ et $A\hat{C}D$.

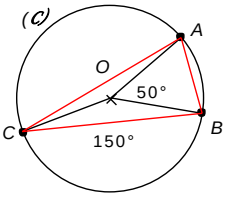
c. $B\hat{A}E$, $B\hat{G}E$, $B\hat{D}E$, $B\hat{C}E$, $B\hat{F}E$ et $B\hat{H}E$ sont tous les angles qui interceptent l'arc $\overset{\cap}{BE}$, tracé en rouge.

Exercice 3

a. $A\hat{C}B$ est un angle inscrit dans (C) qui intercepte le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}B$;

donc : $\text{mes } A\hat{C}B = \frac{1}{2}\text{mes } A\hat{O}B$

$\text{mes } A\hat{C}B = \frac{1}{2} \times 50 = 25°$.



De même l'angle $B\hat{A}C$ est un angle inscrit dans (C) qui intercepte le même arc que l'angle au centre $B\hat{O}C$;

donc : $\text{mes } B\hat{A}C = \frac{1}{2}\text{mes } B\hat{O}C$

$\text{mes } B\hat{A}C = \frac{1}{2} \times 150 = 75°$.

b. Dans un triangle, la somme des mesures de ces trois angles est égale à 180° :

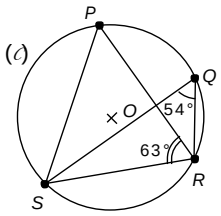
$\text{mes } A\hat{B}C + \text{mes } A\hat{C}B + \text{mes } B\hat{A}C = 180$

$\text{mes } A\hat{B}C + 25 + 75 = 180$

$\text{mes } A\hat{B}C = 80°$.

Exercice 4

a. L'angle $S\hat{P}R$ est un angle inscrit dans (C) et il intercepte le même arc que l'angle $S\hat{Q}R$.



b. $\text{mes } S\hat{P}R = \text{mes } S\hat{Q}R = 54°$.

c. Dans le triangle SPR,

$\text{mes } S\hat{P}R + \text{mes } P\hat{R}S + \text{mes } R\hat{S}P = 180$

$\text{mes } R\hat{S}P = 180 - 54 - 63 = 63°$.

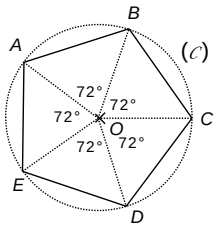
SPR, qui a deux angles de même mesure, est isocèle en P.

© Hachette Livre International

2 Apprendre à construire un polygone régulier

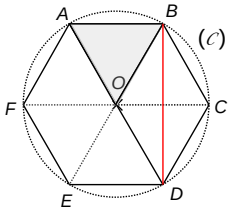
Exercice 5

1. et 3.



2. Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O, alors mes $A\hat{O}B = \frac{360}{5} = 72°$.

Exercice 6



1. $OA = OB$ car $[OA]$ et $[OB]$ sont deux rayons du cercle dans lequel $ABCDEF$ est inscrit ;
de plus mes $A\hat{O}B = \frac{360}{6} = 60°$;
donc le triangle AOB est équilatéral.

2. Pour démontrer que A, O et D sont alignés, on peut démontrer que mes $A\hat{O}D = 180°$;

or mes $A\hat{O}D$ = mes $A\hat{O}B$ + mes $B\hat{O}C$ + mes $C\hat{O}D$
mes $A\hat{O}D = 60+60+60 = 180°$.

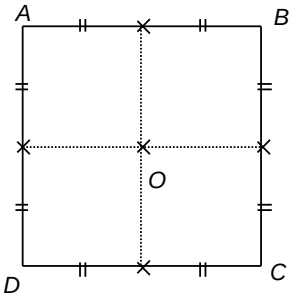
3.a. mes $B\hat{A}D$ = mes $B\hat{A}O = 60°$;
mes $A\hat{D}E$ = mes $O\hat{D}E = 60°$.

b. $B\hat{A}D$ et $A\hat{D}E$ sont des angles alternes-internes de même mesure ; donc $(AB)//(DE)$.

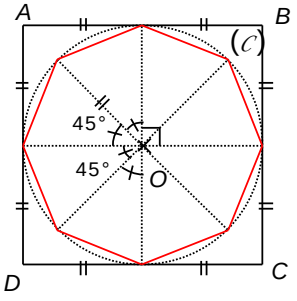
4. $A\hat{B}D$ est un angle inscrit dans $(\mathcal{C})$ qui intercepte le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}D$;
donc mes $A\hat{B}D = \frac{1}{2}$ mes $A\hat{O}D = \frac{1}{2} \times 180 = 90°$.

Exercice 7

1. a. et b.



2.



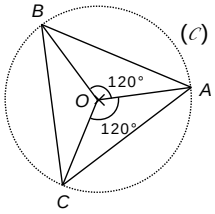
On sait que pour construire un octogone régulier, on a besoin de deux diamètres perpendiculaires d'un cercle $(\mathcal{C})$. Ici ces deux diamètres peuvent être les segments joignant les milieux de deux côtés non consécutifs du carré.
Le point d'intersection de ses deux segments (qui n'est autre que le centre du carré) est le centre O du cercle $(\mathcal{C})$ passant par les milieux des 4 côtés, dans lequel sera inscrit l'octogone régulier.
Enfin les bissectrices des angles droits formés par ces deux segments coupent le cercle tracé précédemment aux 4 autres sommets de l'octogone régulier.

Exercice 8

1. Si O est le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC équilatéral, alors : mes $A\hat{O}B = \frac{360}{3} = 120°$;

de même : mes $A\hat{O}B = 120°$.

2.



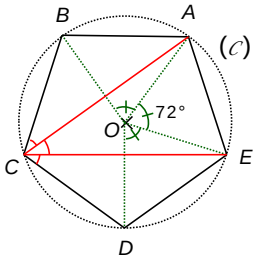
3. D'après le cours, on a la formule $c = \sqrt{3}R$, où c est la longueur du côté et R le rayon.

Ici $c = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$ cm.

Exercice 9

$ABCDE$ est un pentagone régulier inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O.

1.a. A et E sont deux sommets consécutifs de ce pentagone régulier, donc mes $A\hat{O}E = 72°$.



b. $A\hat{C}E$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$, qui intercepte le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}E$;
donc mes $A\hat{C}E = \frac{1}{2}$ mes $A\hat{O}E = \frac{1}{2} \times 72 = 36°$.

2. $E\hat{C}D$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$, qui intercepte le même arc que l'angle au centre $E\hat{O}D$;
donc mes $E\hat{C}D = \frac{1}{2}$ mes $E\hat{O}D = \frac{1}{2} \times 72 = 36°$.

De même mes $B\hat{C}A = 36°$.

3. mes $B\hat{C}D$ = mes $B\hat{C}A$ + mes $A\hat{C}E$ + mes $E\hat{C}D$
= $3 \times 36 = 108°$.

4. $ABCDE$ est un pentagone régulier, donc chacun de ses angles ont la même mesure : 108°.

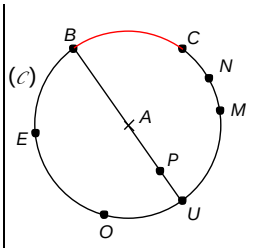
© Hachette Livre International

Activités d'application

Arc et angles

Exercice 10

1.a. $C\hat{P}U$ n'est pas un angle au centre du cercle $(\mathcal{C})$, puisque *P* n'est pas le centre de $(\mathcal{C})$;



b. et c. $N\hat{A}M$ et $M\hat{A}E$ sont des angles au centre de $(\mathcal{C})$, puisque *A* est le centre de $(\mathcal{C})$;

d. $A\hat{N}U$ n'est pas un angle au centre du cercle $(\mathcal{C})$, puisque *N* n'est pas le centre de $(\mathcal{C})$.

2.a. $C\hat{A}E$ n'est pas un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$, puisque *A* n'appartient pas à $(\mathcal{C})$;

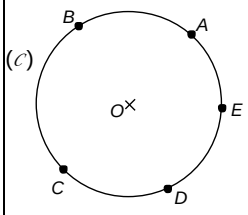
b. $B\hat{C}N$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$, puisque les trois points *B*, *C* et *N* appartiennent à $(\mathcal{C})$;

c. et d. $B\hat{E}C$ et $E\hat{O}B$ aussi (même justification).

3. Les angles inscrits dans le cercle $(\mathcal{C})$, interceptant l'arc $\overset{\cap}{BC}$ sont : $B\hat{E}C$, $B\hat{O}C$, $B\hat{U}C$, $B\hat{M}C$ et $B\hat{N}C$.

Exercice 11

$B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ et $C\hat{O}E$ sont les angles au centre qui correspondent respectivement aux angles inscrits $B\hat{D}C$, $C\hat{B}D$, $B\hat{A}C$ et $C\hat{B}E$.

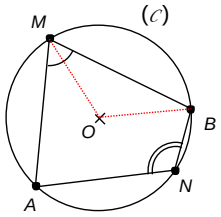


Exercice 12

• L'angle $A\hat{M}B$ est un angle *aigu*, il intercepte le petit *arc* $\overset{\cap}{AB}$.

• L'angle $M\hat{O}B$ est un angle *au centre*, il intercepte l'*arc* $\overset{\cap}{MB}$.

• L'angle $B\hat{N}A$ est un angle *obtus*, il intercepte le grand *arc* $\overset{\cup}{BA}$.



Exercice 13

1. Figure a

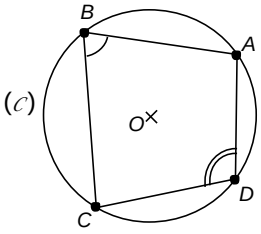
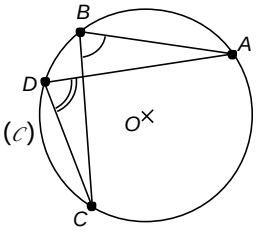


Figure b

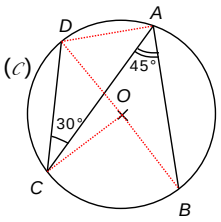


2. Sur la figure a, $A\hat{B}C$ et $A\hat{D}C$ interceptent respectivement le petit arc $\overset{\cap}{AC}$ et le grand arc $\overset{\cup}{AC}$, limités par les points *A* et *C*.

Ce n'est pas toujours le cas : sur la figure b, où *D* et *B* sont placés sur le même arc limité par les points *A* et *C*, $A\hat{B}C$ et $A\hat{D}C$ interceptent le même arc $\overset{\cap}{AC}$.

© Hachette Livre International

Exercice 14



1. $B\hat{O}C$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $B\hat{A}C$, inscrit dans $(\mathcal{C})$;

donc : mes $B\hat{A}C = \frac{1}{2}$ mes $B\hat{O}C$;

d'où : mes $B\hat{O}C = 2\times$mes $B\hat{A}C$
$= 2\times45 = 90°$.

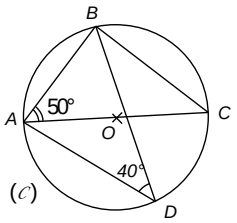
2. $D\hat{O}A$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $D\hat{C}A$, inscrit dans $(\mathcal{C})$;

donc : mes $D\hat{C}A = \frac{1}{2}$ mes $D\hat{O}A$;

d'où : mes $D\hat{O}A = 2\times$mes $D\hat{C}A = 2\times30 = 60°$.

3. $[OD]$ et $[OA]$ sont des rayons de $(\mathcal{C})$, donc ODA est un triangle isocèle en O ; de plus mes $D\hat{O}A = 60°$.
On en déduit que ODA est un triangle équilatéral, c'est-à-dire mes $O\hat{D}A = 60°$.

Exercice 15



1. Mes $B\hat{A}C = 50°$.

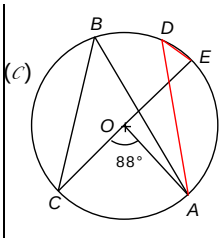
Les angles $A\hat{C}B$ et $A\hat{D}B$, inscrits dans $(\mathcal{C})$, interceptent le même arc ; ils ont la même mesure ;
donc : mes $A\hat{C}B = 40°$.

Enfin dans le triangle ABC, on a :
mes $A\hat{B}C = 180 -$mes $B\hat{A}C -$mes $A\hat{C}B$
mes $A\hat{B}C = 180 - 50 - 40 = 90°$.

ABC est donc un triangle rectangle en B.

2. L'hypoténuse $[AC]$ de ce triangle, rectangle en B, étant diamètre de son cercle circonscrit, on en déduit que $[AC]$ est un diamètre de $(\mathcal{C})$.

Exercice 16



1. L'angle $A\hat{B}C$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}C$; donc :

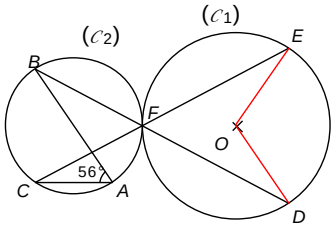
mes $A\hat{B}C = \frac{1}{2}$ mes $A\hat{O}C = \frac{1}{2}\times88 = 44°$.

2. C, O et E sont alignés dans cet ordre ;
donc : mes $C\hat{O}E = 180°$.
Comme mes $C\hat{O}E =$ mes $C\hat{O}A +$ mes $A\hat{O}E$, on obtient :
mes $A\hat{O}E = 180 - 88 = 92°$.

3. L'angle $E\hat{D}A$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $E\hat{O}A$;

donc : mes $E\hat{D}A = \frac{1}{2}$ mes $E\hat{O}A = \frac{1}{2}\times92 = 46°$.

Exercice 17



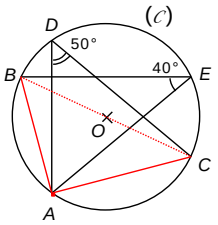
$D\hat{O}E$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $D\hat{F}E$ inscrit dans $(\mathcal{C})$; donc :
mes $D\hat{O}E = 2\times$mes $D\hat{F}E$.

Ensuite les angles $D\hat{F}E$ et $B\hat{F}C$ sont opposés par le sommet ; donc : mes $D\hat{F}E =$ mes $B\hat{F}C$.

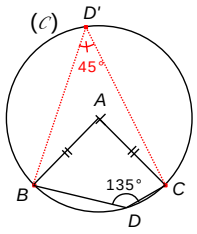
Enfin $B\hat{F}C$ et $B\hat{A}C$ sont deux angles inscrits dans $(\mathcal{C})$, qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$;
donc : mes $B\hat{F}C =$ mes $B\hat{A}C$.

Finalement : mes $D\hat{O}E = 2\times$mes $D\hat{F}E = 2\times$mes $B\hat{F}C$
mes $D\hat{O}E = 2\times$mes $B\hat{A}C = 2\times56 = 112°$.

Exercice 18



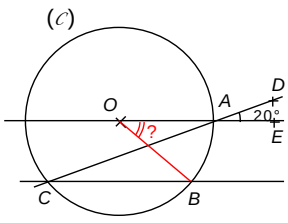
a. Les angles $A\hat{D}C$ et $A\hat{B}C$, inscrits dans $(\mathcal{C})$, interceptent le même arc ; ils ont la même mesure ;
donc :
mes $A\hat{B}C =$ mes $A\hat{D}C = 50°$.
De même :
mes $B\hat{C}A =$ mes $B\hat{E}A = 40°$.
On en déduit que :
mes $B\hat{A}C = 180 -$ mes $A\hat{B}C -$ mes $B\hat{C}A = 90°$;
c'est-à-dire : ABC est un triangle rectangle en A.



b. D est un point du petit arc $\overset{\frown}{BC}$;
si D' est un point du grand arc $\overset{\smile}{BC}$, alors les mesures des angles $B\hat{D}C$ et $B\hat{D'}C$, inscrits dans $(\mathcal{C})$, vérifient :
mes $B\hat{D}C +$ mes $B\hat{D'}C = 180°$;
donc : mes $B\hat{D'}C = 180 - 135 = 45°$.

$B\hat{A}C$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $B\hat{D'}C$; donc : mes $B\hat{A}C = 2\times$mes $B\hat{D'}C = 90°$;
c'est-à-dire : ABC est un triangle rectangle en A.

Exercice 19



a. Les angles $D\hat{A}E$ et $C\hat{A}O$, opposés par le sommet, ont la même mesure.

Les angles $C\hat{A}O$ et $A\hat{C}B$, qui forment des angles alternes-internes avec $(OA)//(CB)$, ont aussi la même mesure.

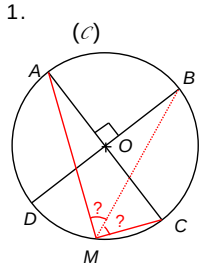
Finalement : mes $D\hat{A}E =$ mes $C\hat{A}O =$ mes $A\hat{C}B = 20°$.

b. $A\hat{O}B$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $A\hat{C}B$, inscrit dans $(\mathcal{C})$;
donc : mes $A\hat{O}B = 2\times$mes $A\hat{C}B = 40°$.

© Hachette Livre International

Exercice 20

1.



2. L'angle $A\hat{M}B$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}B$; donc :

mes $A\hat{M}B = \frac{1}{2}$ mes $A\hat{O}B = \frac{1}{2} \times 90 = 45°$.

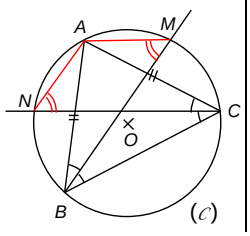
De même :

mes $B\hat{M}C = \frac{1}{2}$ mes $B\hat{O}C = \frac{1}{2} \times 90 = 45°$.

On en déduit que la demi-droite [MB) est la bissectrice de l'angle $A\hat{M}C$.

Exercice 21

1. et 2.



3. Les angles $A\hat{N}C$ et $A\hat{B}C$, inscrits dans $(\mathcal{C})$, interceptent le même arc $\overset{\cap}{AC}$;

donc : mes $A\hat{N}C$ = mes $A\hat{B}C$.

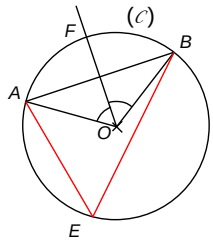
De même : mes $A\hat{M}B$ = mes $A\hat{C}B$.

De plus, ABC est un triangle isocèle en A ;
donc : mes $A\hat{B}C$ = mes $A\hat{C}B$.

Finalement : mes $A\hat{N}C$ = mes $A\hat{M}B$.

Exercice 22

1.



2. [OF) est la bissectrice de l'angle $A\hat{O}B$; donc :

mes $A\hat{O}F = \frac{1}{2}$ mes $A\hat{O}B$.

L'angle $A\hat{E}B$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}B$; donc :

mes $A\hat{E}B = \frac{1}{2}$ mes $A\hat{O}B$.

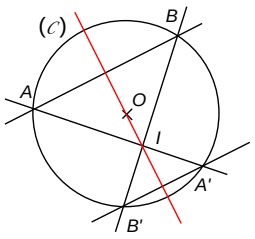
Finalement : mes $A\hat{O}F$ = mes $A\hat{E}B$.

Exercice 23

1. Tout d'abord $I \in (AA')$,
donc : mes $B\hat{A}I$ = mes $B\hat{A}A'$.

De même, mes $A\hat{B}I$ = mes $A\hat{B}B'$.

Ensuite $B\hat{A}A'$ et $B\hat{B}'A'$, angles inscrits dans $(\mathcal{C})$, interceptent le même arc ;
donc : mes $B\hat{A}A'$ = mes $B\hat{B}'A'$.



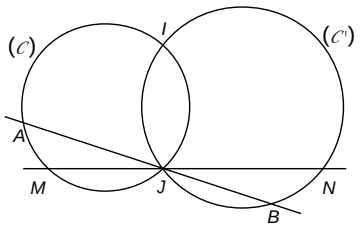
Enfin $A\hat{B}B'$ et $B\hat{B}'A'$ sont des angles alternes-internes tels que $(AB)//(A'B')$; donc : mes $A\hat{B}B'$ = mes $B\hat{B}'A'$.

Finalement :
mes $A\hat{B}I$ = mes $A\hat{B}B'$ = mes $B\hat{B}'A'$ = mes $B\hat{A}A'$ = mes $B\hat{A}I$.

Le triangle ABI, qui a deux angles ($\hat{A}$ et $\hat{B}$) de même mesure, est isocèle en I.

2. [OA] et [OB] sont deux rayons de $(\mathcal{C})$, donc le triangle OAB est isocèle en O et O est équidistant de A et B ;
d'après le 1., I est aussi équidistant de A et B ;
on en déduit que (OI) est la médiatrice du segment [AB] et (OI) est perpendiculaire à [AB].

Exercice 24



1. $A\hat{I}M$ et $A\hat{J}M$ sont deux angles inscrits dans $(\mathcal{C})$ qui interceptent l'arc $\overset{\cap}{AM}$.

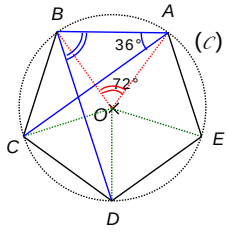
2. $N\hat{I}B$ et $N\hat{J}B$ sont deux angles inscrits dans $(\mathcal{C}')$ qui interceptent l'arc $\overset{\cap}{NB}$.

3. mes $A\hat{I}B$ = mes $A\hat{I}M$ + mes $M\hat{I}B$
mes $A\hat{I}B$ = mes $A\hat{J}M$ + mes $M\hat{I}B$ (d'après 1.)
mes $A\hat{I}B$ = mes $B\hat{J}N$ + mes $M\hat{I}B$ (puisque $A\hat{J}M$ et $B\hat{J}N$ sont opposés par le sommet)
mes $A\hat{I}B$ = mes $N\hat{I}B$ + mes $M\hat{I}B$ (d'après 2.)
mes $A\hat{I}B$ = mes $M\hat{I}B$ + mes $B\hat{I}N$ = mes $M\hat{I}N$.

© Hachette Livre International

Polygones réguliers

Exercice 25



ABCDE est un pentagone régulier de centre *O*.

$(\mathcal{C})$ est son cercle circonscrit.

1. Faux. L'angle au centre $A\hat{O}B$ mesure 72°.

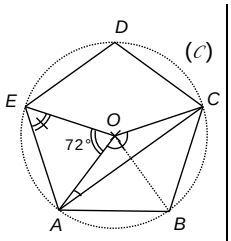
2. Faux. L'angle $B\hat{A}C$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $B\hat{O}C$; donc :

$\text{mes}\, B\hat{A}C = \frac{1}{2}\,\text{mes}\, B\hat{O}C = 36°$.

3. Faux. L'angle $D\hat{B}A$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $D\hat{O}A$; donc :

$\text{mes}\, D\hat{B}A = \frac{1}{2}\,\text{mes}\, D\hat{O}A = 72°$.

Exercice 26



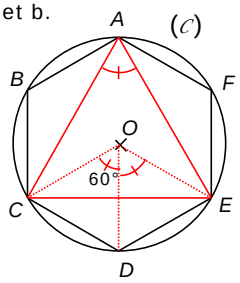
ABCDE est un pentagone régulier de centre *O*.

$(\mathcal{C})$ est son cercle circonscrit.

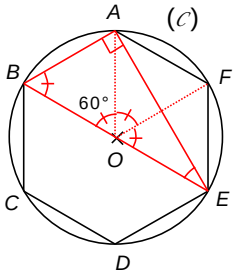
- $\text{mes}\, A\hat{O}E = 72°$;
- *OEA* est un triangle isocèle en *O*, donc : $\text{mes}\, O\hat{E}A = \frac{1}{2} \times (180 - 72) = 54°$;
- $\text{mes}\, A\hat{O}C = 2 \times 72 = 144°$;
- *OAC* est un triangle isocèle en *O*, donc : $\text{mes}\, O\hat{A}C = \frac{1}{2} \times (180 - 144) = 18°$.

Exercice 27

1.a. et b.



Question 2



Question 3

Tous les angles au centre ($A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}F$ et $F\hat{O}A$) de l'hexagone régulier *ABCDEF* ont la même mesure : $\frac{360}{6} = 60°$.

2.● L'angle $C\hat{A}E$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $C\hat{O}E$; donc :

$\text{mes}\, C\hat{A}E = \frac{1}{2}\,\text{mes}\, C\hat{O}E = \frac{1}{2}(\text{mes}\, C\hat{O}D + \text{mes}\, D\hat{O}E) = 60°$.

- De même : $\text{mes}\, A\hat{C}E = \text{mes}\, A\hat{E}C = 60°$.
- Finalement *ACE* est un triangle équilatéral.

3.a. [*BE*] est un diamètre de $(\mathcal{C})$ et $A \in (\mathcal{C})$; donc le triangle *ABE* est rectangle en *A*.

b. ● L'angle $A\hat{E}B$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}B$;

donc : $\text{mes}\, A\hat{E}B = \frac{1}{2}\,\text{mes}\, A\hat{O}B = 30°$;

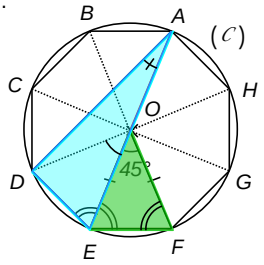
● l'angle $A\hat{B}E$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $A\hat{O}B$;

donc : $\text{mes}\, A\hat{B}E = \frac{1}{2}\,\text{mes}\, A\hat{O}E = 60°$.

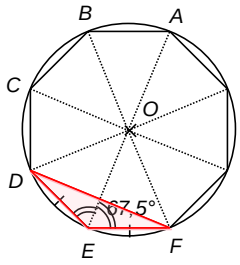
(*autre méthode* : $\text{mes}\, A\hat{B}E = 180 - \text{mes}\, B\hat{A}E - \text{mes}\, A\hat{E}B = 180 - 90 - 30 = 60°$.)

Exercice 28

1.



Questions 2 et 4



Question 3

Tous les angles au centre ($A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}F$, $F\hat{O}G$, $G\hat{O}H$ et $H\hat{O}A$) de l'octogone régulier *ABCDEFGH* ont la même mesure : $\frac{360}{8} = 45°$.

2.a. [*OE*] et [*OF*] sont des rayons de $(\mathcal{C})$, donc *OE* = *OF* et *OEF* est un triangle isocèle en *O*.

b. $\text{mes}\, O\hat{E}F = \frac{1}{2} \times (180 - 45) = 67{,}5°$.

3.a. *ABCDEFGH* est un octogone régulier, donc *DE* = *EF* et *FED* est un triangle isocèle en *E*.

b. $\text{mes}\, D\hat{E}F = \text{mes}\, D\hat{E}O + \text{mes}\, O\hat{E}F = 67{,}5 + 67{,}5 = 135°$;

on en déduit que : $\text{mes}\, E\hat{D}F = \frac{1}{2} \times (180 - 135) = 22{,}5°$.

4.a. [*AE*] est un diamètre de $(\mathcal{C})$ et $D \in (\mathcal{C})$; donc le triangle *ADE* est rectangle en *D*.

b. L'angle $D\hat{A}E$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $D\hat{O}E$;

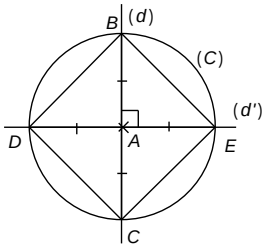
donc : $\text{mes}\, D\hat{A}E = \frac{1}{2}\,\text{mes}\, D\hat{O}E = 22{,}5°$;

on en déduit que : $\text{mes}\, D\hat{E}A = 180 - \text{mes}\, A\hat{D}E - \text{mes}\, D\hat{A}E = 180 - 90 - 22{,}5 = 67{,}5°$.

© Hachette Livre International

Exercice 29

1. et 2.



3. Dans le triangle *ABD*, rectangle en *A*, on a d'après le théorème de Pythagore :

$BD^2 = BA^2 + AD^2 = 4^2 + 4^2 = 32$.

Donc : $BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

De même, on a :

$DC = CE = EB = 4\sqrt{2}$.

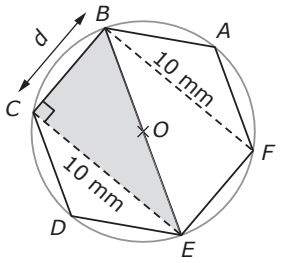
Ensuite le cercle $(\mathcal{C})$, circonscrit au triangle *BDC*, est centré au milieu *A* du côté [*BC*] ; donc *BDC* est rectangle en *D* et mes $\widehat{BDC} = 90°$.

De même, on a : mes $\widehat{DCE}$ = mes $\widehat{CEB}$ = mes $\widehat{EBA} = 90°$.

Finalement *BDCE* est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur et ses quatre angles de même mesure ; c'est un polygone régulier.

Exercice 30

Représentation de la tête de l'écrou.



[*BE*] est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$ dans lequel est inscrit l'hexagone régulier *ABCDEF* ; donc *BCE* est un triangle rectangle en *C*.

L'angle $\widehat{CEB}$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{COB}$, qui mesure 60° ;

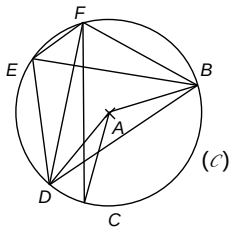
donc : mes $\widehat{CEB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{COB} = 30°$.

Or $\tan \widehat{CEB} = \frac{CB}{CE}$, donc $CB = CE \times \tan 30°$;

c'est-à-dire : $d = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}8$ mm.

© Hachette Livre International

Exercice 31 Connaître le vocabulaire

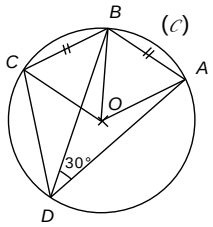


1. L'angle $C\hat{A}B$ est un angle *au centre* qui intercepte *l'arc* $\overset{\cap}{BC}$.
De plus, mes $C\hat{F}B = \frac{1}{2}$ mes $C\hat{A}B$.

2. L'angle $B\hat{E}D$ est un angle *inscrit* qui intercepte *l'arc* $\overset{\cap}{BD}$.
De plus, mes $B\hat{E}D = \frac{1}{2}$ mes $B\hat{A}D$
soit mes $B\hat{A}D = 2 \times$ mes $B\hat{E}D$.

3. L'angle $E\hat{D}B$ intercepte *l'arc* $\overset{\cap}{EB}$.
L'angle $E\hat{F}B$ intercepte le grand *arc* $\overset{\cup}{EB}$.
Donc, mes $E\hat{D}B$ + mes $E\hat{F}B$ = 180°.

Exercice 32 Une copie à corriger



• L'angle $A\hat{O}B$ est un angle au centre de $(\mathcal{C})$, qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $A\hat{D}B$; donc :
mes $A\hat{O}B = 2 \times$ mes $A\hat{D}B$ = 60°.

• Le triangle *AOB*, isocèle en *O* (puisque *OA*=*OB*), a son angle principal $A\hat{O}B$ qui mesure 60° ; ce triangle est donc équilatéral et *OA*=*OB*=*AB*.
Par construction *OB*=*OC*=*BC* ; donc *OBC* est aussi un triangle équilatéral.
Les angles $A\hat{O}B$ et $B\hat{O}C$ ont donc même mesure : 60°.

• L'angle $B\hat{D}C$, inscrit dans $(\mathcal{C})$, intercepte le même arc que l'angle au centre $B\hat{O}C$; donc :

$$\text{mes } B\hat{D}C = \frac{1}{2} \text{ mes } B\hat{O}C = 30°.$$

Finalement mes $A\hat{D}C$ = mes $A\hat{D}B$ + mes $B\hat{D}C$ = 60° ;
les angles $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ et $A\hat{D}C$ ont donc même mesure.

Exercice 33 Les angles dans les polygones réguliers

1.

Polygone régulier	mes $A\hat{O}B$	mes $A\hat{B}C$
Triangle équilatéral	120°	60°
Carré	90°	90°
Pentagone	72°	108°
Hexagone	60°	120°
Octogone	45°	135°

2. Pour chaque polygone, mes $A\hat{O}B$ + mes $A\hat{B}C$ = 180°.

Exercice 34 Deux constructions pour un même polygone

Constructions d'un pentagone régulier :

☐ Je trace un cercle $(\mathcal{C})$ de centre *O*.

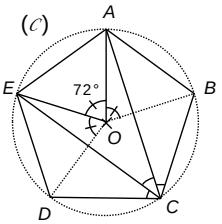
☐ Je place un point *A* sur $(\mathcal{C})$ et un point *B* sur $(\mathcal{C})$ tels que mes $A\hat{O}B$ = 72°.

☐ Je place le point *C* sur $(\mathcal{C})$ tel que : mes $B\hat{O}C$ = 72°.

☐ À l'aide du compas, je place le point *C* sur $(\mathcal{C})$ tel que : *AB* = *BC*.

☐ Je recommence deux fois l'étape 3 afin d'obtenir le pentagone régulier *ABCDE*.

Exercice 35 Rédiger une démonstration



• *ABCDE* étant un pentagone régulier, mes $A\hat{O}E$ = 72°.

• De plus, l'angle au centre $A\hat{O}E$ intercepte le même arc $\overset{\cap}{AE}$ que l'angle inscrit $A\hat{C}E$; donc :
mes $A\hat{C}E = \frac{1}{2}$ mes $A\hat{O}E$ = 36°.

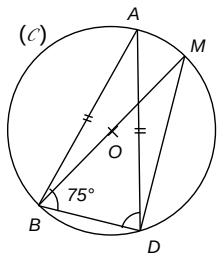
• En tenant le même raisonnement, je démontre que : mes $B\hat{C}A$ = 36° ; puis que mes $E\hat{C}D$ = 36°.

• Ainsi, mes $B\hat{C}D$ = mes $B\hat{C}A$ + mes $A\hat{C}E$ + mes $E\hat{C}D$ = 108°.

• Enfin, par définition d'un polygone régulier, chaque angle mesure aussi 108°.

© Hachette Livre International

Exercice 36 Triangle isocèle et cercle



ABD isocèle en *A*
mes $A\hat{B}D$ = 75°
O centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit à *ABD*
[*BM*] diamètre de $(\mathcal{C})$
BM = 11,2 cm

1. *BMD* est un triangle rectangle en *D* ; en effet, ce triangle est inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$, de centre *O* le milieu de [*BM*].

2.a. *ABD* isocèle en *A*, donc :
mes $B\hat{A}D$ = 180 – 2 × mes$A\hat{B}D$
mes $B\hat{A}D$ = 30°.

b. Les angles $B\hat{A}D$ et $B\hat{M}D$, inscrits dans $(\mathcal{C})$, interceptent le même arc ; donc :
mes $B\hat{M}D$ = mes $B\hat{A}D$ = 30°.

3. Dans le triangle *BMD*, rectangle en *D*, on a :

$\cos B\hat{M}D = \dfrac{MD}{MB}$

$MD = MB \times \cos 30°$

$MD = 11{,}2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 9{,}7$ cm.

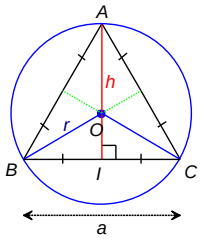
$\sin B\hat{M}D = \dfrac{DB}{MB}$

$BD = MB \times \sin 30°$

$BD = 11{,}2 \times \dfrac{1}{2} = 5{,}6$ cm.

Exercice 37 Pyramide à base hexagonale

1.



ABC est un triangle équilatéral :
- de côté *a* ;
- de hauteur *h* ;
- dont le cercle circonscrit, centré en *O*, a pour rayon *r* ;
- d'aire $\mathcal{A}$.

a. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle *AIC*, rectangle en *I*, on a :
$AC^2 = AI^2 + IC^2$.

Or, dans un triangle équilatéral, une hauteur est aussi une médiane ; donc *I* est le milieu de [*BC*].

On en déduit que :

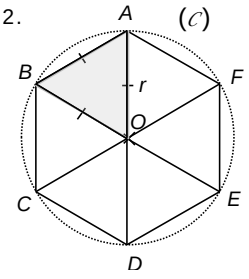
$h = AI = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b. $\mathcal{A} = \dfrac{BC \times AI}{2} = \dfrac{a^2 \times \sqrt{3}}{4}$.

c. Dans un triangle équilatéral, le centre du cercle circonscrit est aussi le centre de gravité.

On en déduit que : $r = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.



Un hexagone régulier peut être découpé en six triangles équilatéraux superposables, dont les côtés sont égaux au rayon du cercle circonscrit à ce polygone régulier, c'est-à-dire ici *r*.

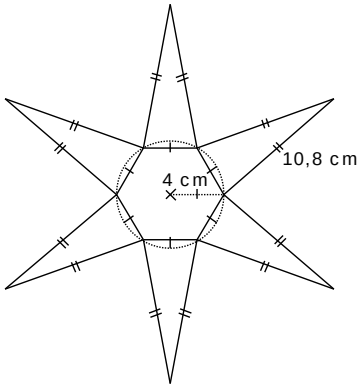
D'après 1. l'aire de chaque triangle équilatéral est $\dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

On en déduit que l'aire d'un hexagone régulier, inscrit dans un cercle de rayon *r*, est : $6 \times \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2}$.

3. Une pyramide régulière de 10 cm de hauteur, dont la base est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 4 cm, a pour faces latérales 6 triangles isocèles superposables.

Chacun de ces triangles isocèles a :
- pour base un côté de l'hexagone : 4 cm
- pour autres côtés deux segments de même longueur :

$\sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} \approx 10{,}8$ cm.



Pour réaliser un patron de cette pyramide :
- construire, sur un cercle de rayon 4 cm, un hexagone régulier (de 4 cm de côté) ;
- construire, à l'extérieur de cet hexagone, les 6 faces latérales qui sont des triangles isocèles de base 4 cm et de côtés 10,8 cm.

4. On sait que le volume d'une pyramide régulière est donnée par la formule :

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où *h* est la hauteur et $\mathcal{B}$ l'aire de la base ;

ici $\mathcal{V} = \dfrac{\dfrac{3 \times 4^2 \times \sqrt{3}}{2} \times 10}{3} = 80\sqrt{3}$ cm^3.

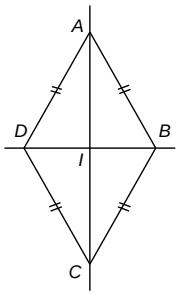
Exercice 38 Trigonométrie

1. Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés ont la même longueur.

a. *B* et *D* étant équidistants de *A* et *C*, la droite (*BD*) est la médiatrice du segment [*AC*].

b. De même (*AC*) est la médiatrice du segment [*BD*].

c. On en déduit que les segments [*AC*] et [*BD*], diagonales du losange, sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.



2. I est le point d'intersection de [*AC*] et [*BD*].

a. Dans *IBC*, rectangle en *I*, on a :

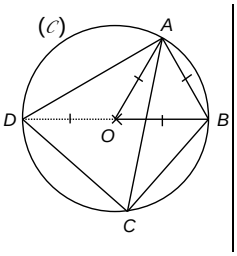
$\cos I\hat{B}C = \dfrac{IB}{BC}$ et $\cos I\hat{C}B = \dfrac{IC}{BC}$.

b. Pour que mes $I\hat{B}C$ = mes $I\hat{C}B$, il faut que leurs cosinus soient égaux ; c'est-à-dire *IB* = *IC*.
Dans ce cas *BD* = 2*IB* = 2*IC* = *AC* et *ABCD* est un carré.

3. Un losange non carré n'est pas un polygone régulier.

© Hachette Livre International

Exercice 39 Dans un cercle



• OAB est un triangle équilatéral, donc mes $\widehat{OAB}$ = mes $\widehat{AOB}$ = 60°.

• $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans (C), qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$, donc mes $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$ = 30°.

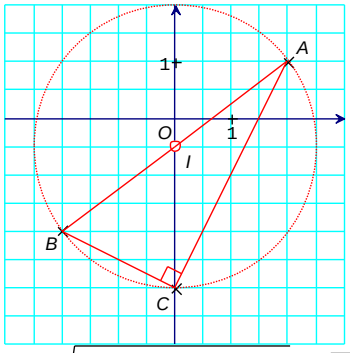
• ADB est un triangle dont le sommet A appartient au cercle de diamètre [BD], donc mes $\widehat{BAD}$ = 90°.

• $\widehat{AOD}$ est un angle au centre de (C), qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ABD}$, donc mes $\widehat{AOD}$ = 120°.

Angle	$\widehat{OAB}$	$\widehat{ACB}$	$\widehat{BAD}$	$\widehat{AOD}$
Mesure en degrés	60	30	90	120

Exercice 40 Dans un repère

1.



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne les points :

$A\ (2\ ;\ 1)$;

$B\ (-2\ ;\ -2)$;

$C\ (0\ ;\ -3)$.

2. $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{25} = 5$;

$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

$BC = \sqrt{[0-(-2)]^2 + [-3-(-2)]^2} = \sqrt{5}$.

3. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ donc, d'après la propriété de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en C.

4.a. Le milieu du segment [AB] est $I\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

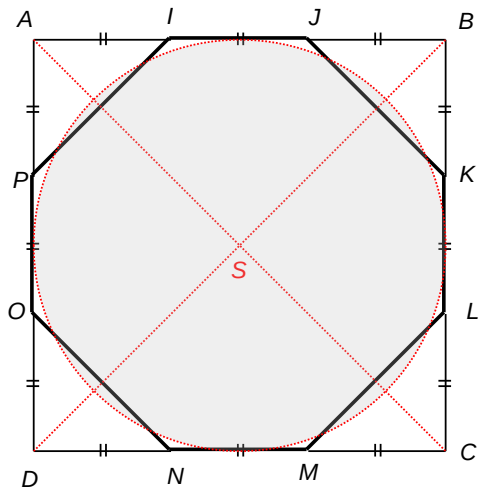
c. $\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}894$; donc mes $\widehat{BAC} \approx 27°$.

d. L'angle au centre associé à $\widehat{BAC}$ est $\widehat{BOC}$;

mes $\widehat{BOC}$ = 2 × mes $\widehat{BAC} \approx 54°$.

Exercice 41 Quadrature du cercle

1.



2.a. $JK = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

b. $IJKLMNOP$ n'est pas un octogone régulier ;
en effet, [IJ] et [JK] sont deux côtés de cet octogone, dont les longueurs (IJ=3 et $JK = 3\sqrt{2}$) ne sont pas égales.

c. L'aire de l'octogone est l'aire du carré à qui on soustrait l'aire des quatre triangles rectangles (des coins).
Ces quatre triangles rectangles sont superposables donc leurs aires sont identiques.

$\mathcal{A}_{BJK} = \frac{BJ \times BK}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = 4{,}5$ cm².

$\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 9^2 = 81$ cm².

Finalement $\mathcal{A}_{IJKLMNOP} = 81 - 4 \times 4{,}5 = 63$ cm².

3.a. Voir figure ci-dessus.

b. L'aire du disque, de centre S et de diamètre 9 cm, est :

$$\mathcal{A} = \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \approx 63{,}6 \text{ cm}^2 ;$$

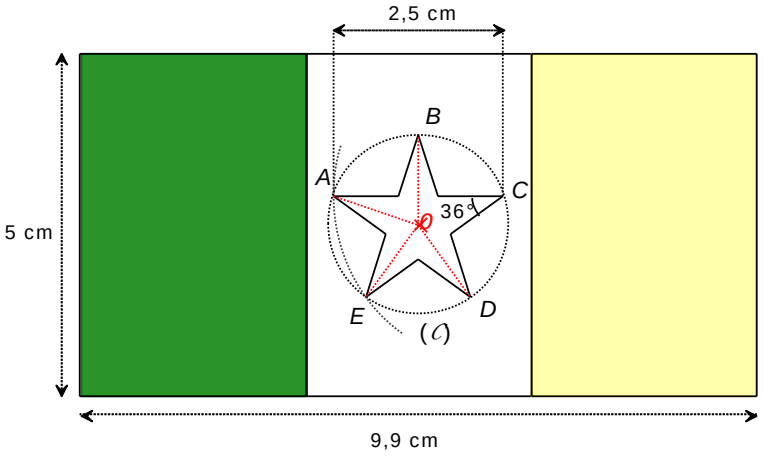
elle est supérieure à celle de l'octogone.

© Hachette Livre International

Exercice 42 Le drapeau du Cameroun

Les dimensions de l, L et AC, à l'échelle $\frac{1}{10}$ sont :

$l = 50 \times \frac{1}{10} = \underline{5 \text{ cm}}$; $L = 99 \times \frac{1}{10} = \underline{9{,}9 \text{ cm}}$; $AC = 25 \times \frac{1}{10} = \underline{2{,}5 \text{ cm}}$.



2. Après avoir tracé un segment [AC] horizontal et le segment [CE] tel que $CE = CA = 2{,}5$ cm et mes $A\hat{C}E = 36°$, on utilise les médiatrices de [AC] et [CE] pour trouver le centre O du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ACE.

3. $A\hat{O}E$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $A\hat{C}E$; ils interceptent le même arc et mes $A\hat{O}E = 2 \times$ mes $A\hat{C}E = 72°$.

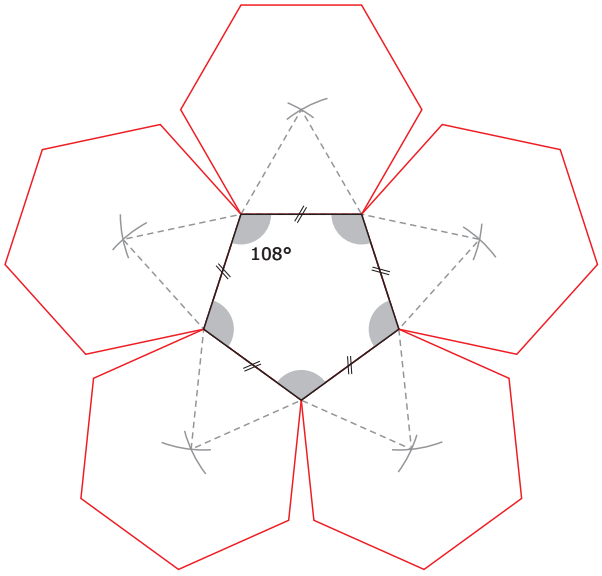
4.a. B est le point qui appartient à $(\mathcal{C})$ tel que mes $A\hat{O}B = 72°$; D est le point qui appartient à $(\mathcal{C})$ tel que mes $E\hat{O}D = 72°$.

b. Pour l'étoile, on relie un sommet du pentagone $ABCDE$ et non pas le suivant mais celui d'après.

Pour le rectangle le centre du pentagone doit être confondu avec celui du rectangle. Les bandes ont pour longueur 3,3 cm.

Exercice 43 Le ballon de foot

1.



2. • Pour le pentagone :
– choix de la longueur du côté : 2 cm ;
– angle 108°.

• Pour les hexagones :
– le rayon du cercle est celui du côté dont on trace un triangle équilatéral puis l'hexagone correspondant ;
– le centre s'obtient à l'aide d'un triangle équilatéral.

Exercice 44 Position d'un cargo

D'après « la boussole » :

- mes $A\hat{D}B = 58 - 34 = 24°$; donc le commandant voit [AB] sous un angle de 24°.
- mes $B\hat{D}C = 34 - 12 = 22°$; donc le commandant voit [BC] sous un angle de 22°.

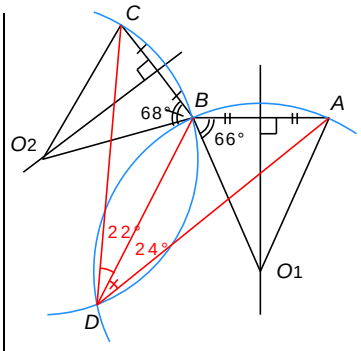
2.• $A\hat{D}B$ peut être considéré comme un angle inscrit dans un cercle de centre O_1 ; alors mes $A\hat{O}_1B = 2 \times$ mes $A\hat{D}B = 48°$.

• $B\hat{D}C$ peut être considéré comme un angle inscrit dans un cercle de centre O_2 ; alors mes $B\hat{O}_2C = 2 \times$ mes $B\hat{D}C = 44°$.

3.• Après avoir placé les points A, B et C, on trace les médiatrices de [AB] et [BC], puisque O_1 est équidistant de A et B et O_2 est équidistant de B et C.

• AO_1B triangle isocèle en O_1 et mes $A\hat{O}_1B = 48°$, donc mes $A\hat{B}O_1 = \frac{1}{2}(180 - 48) = 66°$.

• BO_2C triangle isocèle en O_2 et mes $B\hat{O}_2C = 44°$, donc mes $C\hat{B}O_2 = \frac{1}{2}(180 - 44) = 68°$.



4. Le cargo est en D, le second point d'intersection du cercle $(\mathcal{C}_1)$, centré en O_1 et passant par B, et du cercle $(\mathcal{C}_2)$, centré en O_2 et passant par B.

© Hachette Livre International

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Rappels sur les symétrie [1 p 72]	17, 22	31, 32	41
1	Rappels sur les translations [1 p 72]	16, 17, 22	31, 32	41
2	Utiliser une composée de symétries orthogonales [3 p 72]	18, 19		
3	Construire l'image de points et de figures simples par une rotation [5 p 73, 6 p 73, 2 p 76]	20, 21, 22, 23, 24, 25, 26	31, 32	39, 41, 42
4	Construire l'image de points et de figures simples par une homothétie [7 p 74, 3 p 77]	28, 29, 30	32, 36	43
	Utiliser une rotation pour construire un polygone régulier [6 P 73]	24, 25, 26	34	
	Apprendre à utiliser les propriétés des applications [1 p 75]	24, 25, 26, 27, 30	33, 35	37, 38, 40

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Le marabout

1.a.

8,4	11,4
2,8	3,8

$\frac{8,4}{2,8} = \frac{84}{28} = 3$ et $\frac{11,4}{3,8} = \frac{114}{38} = 3$.

Comme $\frac{8,4}{2,8} = \frac{11,4}{3,8}$, ce tableau est un tableau de proportionnalité.

De plus :

; donc l'un de ses coefficients est $\frac{1}{3}$, l'autre est 3.

b. Après le développement (et avant sa publication dans le journal), le corps du marabout avait une aire de 2,5 cm².

Or, dans le journal, on utilise pour les dimensions a et b de ce corps le même coefficient de proportionnalité que pour la photographie, qui se transforment donc en $a\times\frac{1}{3}$ et $b\times\frac{1}{3}$.

On en déduit que l'aire du corps de ce marabout, dans la photographie publiée du journal est :

$a\times\frac{1}{3}\times b\times\frac{1}{3} = a\times b\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2,5\times\frac{1}{9} \approx 0,28$ cm².

2.a. Comme en 1.b, en passant au poster les dimensions du rectangle de la photographie seront multipliées chacune par 12 ; donc l'aire sera multipliée par 12^2.
Ainsi l'aire de ce poster est $(8,4\times11,4)\times12^2 = 13\,789$ cm².

b. L'angle sur le poster mesure aussi 110°.

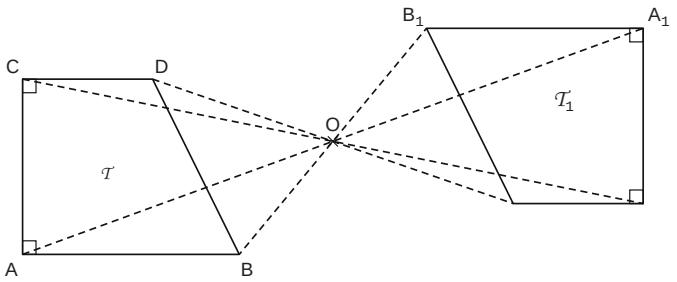
© Hachette Livre International

Activités de découverte

1 Retour sur la symétrie centrale, la translation

(amélioration de la figure 2)

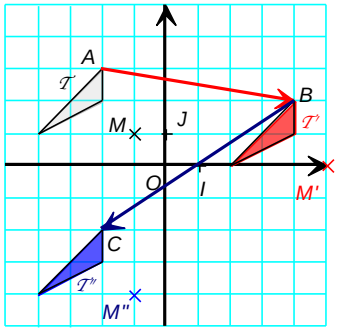
1.a.



b. ABA_1B_1 est un parallélogramme.

Comme A_1 et B_1 sont les images de A et B par la symétrie de centre O, O est le milieu de $[AA_1]$ et $[BB_1]$; donc le quadrilatère ABA_1B_1, dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

2.



3. Si $\mathcal{T}'$ est l'image de $\mathcal{T}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$,

si $\mathcal{T}''$ est l'image de $\mathcal{T}'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$,

alors on passe de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{T}''$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

4. a. M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc $ABM'M$ est un parallélogramme ; de même $BCM''M'$ est un parallélogramme.

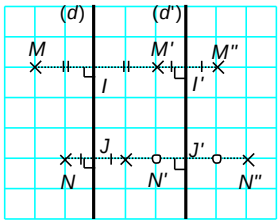
b. $ABM'M$ est un parallélogramme, donc $AM = BM'$ et $(AM)//(BM')$.
De même avec $BCM''M'$: $BM' = CM''$ et $(BM')//(CM'')$.
Ainsi $AM = CM''$ et $(AM)//(CM'')$, donc $ACM''M$ est un parallélogramme.

c. On en déduit que $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{AC}$; donc M'' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2 Successions de symétries orthogonales

Partie A : Avec des axes parallèles : $(d)//(d')$.

1. a. b.



2.a. M' symétrique de M par rapport à (d) donc $(MM')\perp(d)$.
De plus $(d)//(d')$, donc : $(MM')\perp(d')$.
M'' symétrique de M' par rapport à d', donc : $(M'M'')\perp(d')$.

b. On a deux droites, (MM') et $(M'M'')$, perpendiculaires à une même droite (d') et qui passent toutes les deux par M' ; donc $(MM')=(M'M'')$;
c'est-à-dire : M, M' et M'' sont alignés et $(MM'')\perp(d')$.

c. De même on démontre que N, N' et N'' sont alignés et $(NN'')\perp(d')$.
Comme (MM'') et (NN'') sont perpendiculaires à (d'), on en déduit que $(MM'')//(NN'')$.

3.a. I et I' sont les points d'intersection de (MM') avec (d) et (d') ;.
J et J' sont les points d'intersection de (NN') avec (d) et (d') (*voir figure ci-dessus*).

b. $I\in(d)$ donc $IM = IM'$ et, de même, $I'\in(d')$ donc $I'M' = I'M''$.
Puis M, M' et M'' sont 3 points alignés ; ils sont donc aussi alignés avec I et I'.
Ainsi $MM'' = MI+IM'+M'I'+I'M'' = 2IM'+2M'I' = 2(IM'+M'J') = 2IJ'$.
De même on démontre que $JN = JN'$, $J'N' = J'N''$ et $NN'' = 2JJ'$.

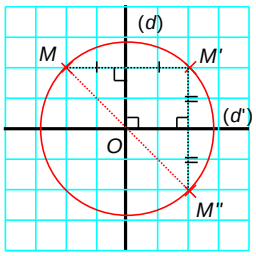
c. $(d)//(d')$ donc $(IJ)//(I'J')$.
Puis $(MM'') = (IJ')$ donc, d'après 2.b, $(II')\perp(d')$ soit $(II')\perp(I'J')$.
De même $(NN'') = (JJ')$ et, d'après 2.c, $(JJ')\perp(I'J')$.
Finalement : $(II')\perp(I'J')$ et $(II')\perp(IJ)$, puis $(JJ')\perp(I'J')$ et $(JJ')\perp(IJ)$; donc $II'J'J$ est un rectangle.
Comme $II'J'J$ est un rectangle, alors $II' = JJ'$. Ainsi (d'après 3.b) $MM'' = 2II' = 2JJ' = NN''$.

d. $MM''NN''$, quadrilatère dont les côtés $[MM'']$ et $[NN'']$ sont de même longueur (3.c) et parallèles (2.c), est un parallélogramme. On en déduit que $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{NN''} = 2\overrightarrow{II'} = 2\overrightarrow{JJ'}$.

© Hachette Livre International

Partie B : Avec des axes perpendiculaires : $(d)\perp(d')$ (amélioration de la figure)

1. a. b.



2. a. M' symétrique de M par rapport à (d), donc (d) est la médiatrice de $[MM']$.
Comme $O\in(d)$, O est équidistant de M et M' : $OM = OM'$.
De même : $OM' = OM''$.
On en déduit que M, M' et M'' appartiennent à un cercle de centre O ;
c'est-à-dire que O est le centre du cercle circonscrit au triangle $MM'M''$.

b. D'après la symétrie orthogonale $(M'M'')\perp(d')$. Or $(d)\perp(d')$, donc $(M'M'')//(d)$.
D'après la symétrie orthogonale $(MM')\perp(d)$. Or $(d)//(M'M'')$ donc $(MM')\perp(M'M'')$.
$MM'M''$ est donc un triangle rectangle en M'.

c. On sait que, dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est aussi le milieu de l'hypoténuse ; donc O est milieu de $[MM'']$.
On en déduit que M'' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O.

3 Mouvement de rotation

Partie A : Avec une aiguille

1.a. E ; b. I ; c. A.

2.a. F ; b. J ; c. C.

Partie B : Avec deux aiguilles

1.a. Les points d'arrivée sont respectivement E et F.

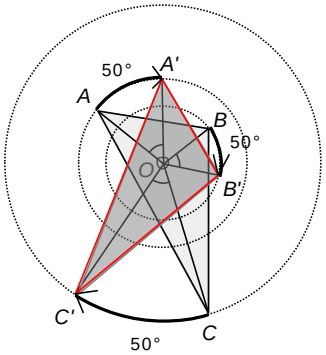
b. $BC = EF$.

2.a. Les points d'arrivée sont respectivement G et H.

b. $BC = GH$.

Partie C : Sans aiguille

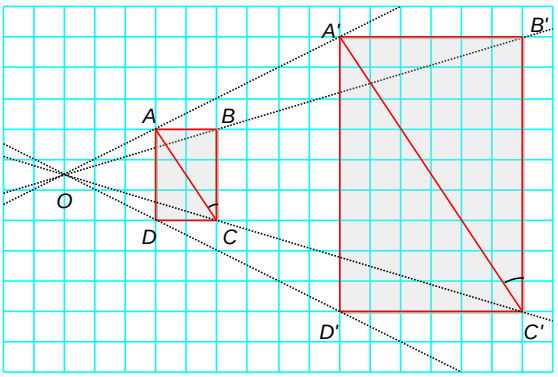
1.



2. $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $BC = B'C'$.

4 Homothétie

1.a.



b. Les quatre droites sont concourantes en O.

c.● $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{6}{2} = 3$; $\dfrac{A'D'}{AD} = \dfrac{9}{3} = 3$.

● D'après le théorème de Pythagore :

$A'C' = \sqrt{6^2+9^2} = \sqrt{117}$; $AC = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

donc : $\dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{\sqrt{117}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\dfrac{117}{13}} = \sqrt{9} = 3$.

● D'après le quadrillage : $(A'B')//(AB)$;
donc, d'après la propriété de Thalès, on a aussi :

$\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{A'B'}{AB} = 3$.

Finalement, le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.	$A'B'$	$A'D'$	$A'C'$	OA'	OB'
	AB	AD	AC	OA	OB

2.a. $\mathcal{A}_{ABCD} = 6$ et $\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = 54$.

b. $\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = 3^2\times\mathcal{A}_{ABCD}$

3.a. mes $A\hat{C}B \approx 34°$ mes $A'\hat{C}'B' \approx 34°$

b. Les mesures de ces deux angles sont égales.

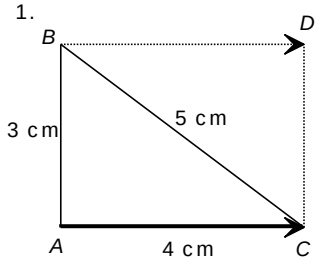
© Hachette Livre International

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à utiliser les propriétés des translations et des symétries

Exercice 1 (exercice sans solution)

1.



2.a. D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, donc $ACDB$ est un parallélogramme.

b. Le triangle ABC est rectangle en A car :

$BC^2 = 5^2 = 25$,

$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$,

donc : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

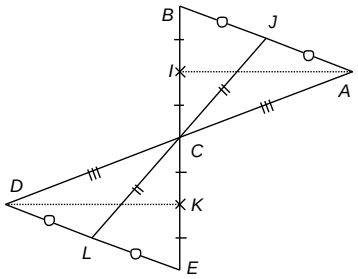
c. Le parallélogramme $ACDB$, qui a un angle droit, est un rectangle.

Exercice 2 (exercice sans solution)

1.a. Le triangle ABC, isocèle en A, est tel que : $BC = 5$ cm, $AB = AC = 7$ cm.

b. I milieu de $[BC]$, J milieu de $[AB]$.

c. D, E, K et L sont les symétriques (par rapport à C) de A, B, I et J.



2.a. D et E symétriques de A et B par rapport à C, donc : $DE = AB = 7$ cm.

b. Périmètre du triangle CDE :
$CD+DE+EC = 7+7+5 = 19$ cm.

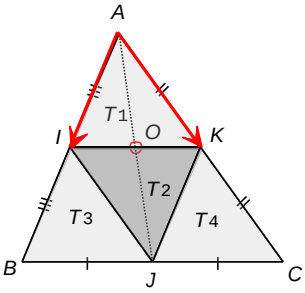
c. D et E sont symétriques de A et B par rapport à C ; le quadrilatère $ABDE$, dont les diagonales se coupent en leur milieu C, est donc un parallélogramme ; en particulier : $(DE)//(AB)$.

d. K, E et C sont les symétriques de I, B et C par rapport à C ; de plus I milieu de $[CB]$; donc K est le milieu de $[CE]$.

3.a. Dans le triangle ABC, isocèle en A, I est le milieu de $[BC]$; donc : $(AI)\perp(BC)$.

b. D, K, E et C symétriques de A, I, B et C par rapport à C ; donc : $(DK)\perp(EC)$;
de plus C, E et K sont alignés ; donc : $(DK)\perp(CK)$

Exercice 3 (exercice sans solution)



I, J et K sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1. • T_1 a pour image T_3 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.

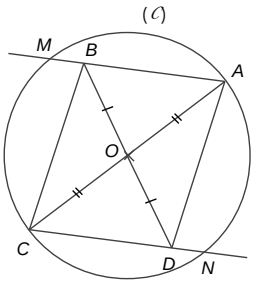
• T_1 a pour image T_4 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AK}$.

2.a. On en déduit que les triangles T_1, T_3 et T_4 ont la même aire $\mathcal{A}$.

Comme le quadrilatère $AIJK$, dont les côtés opposés sont parallèles, est un parallélogramme pour lequel le point O, intersection des diagonales, est centre de symétrie, les triangles T_1 et T_2 ont aussi la même aire $\mathcal{A}$.

b. Finalement l'aire du triangle ABC est égale à $4\mathcal{A}$.

Exercice 4 (ajouter la figure, quelques erreurs)



1.a. $[AC]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O, donc O est le milieu de $[AC]$.
Or $[AC]$ est une diagonale du parallélogramme $ABCD$, donc O est aussi le milieu de $[BD]$.
Finalement, C et D sont les symétriques de A et B par rapport à O ; l'image de la droite (AB), par la symétrie de centre O, est donc la droite (CD).

b. $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O ; donc son image, par la symétrie de centre O, est lui-même.

c. M est le point d'intersection de (AB) et de $(\mathcal{C})$; donc son image, par la symétrie de centre O, est le point d'intersection N de (CD) et de $(\mathcal{C})$.

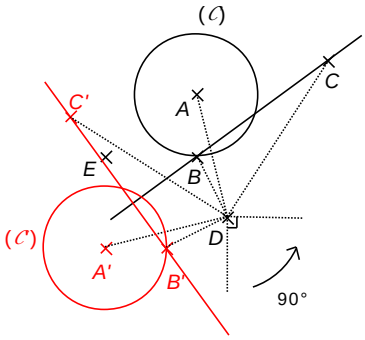
2. N est l'image de M par la symétrie de centre O ; donc O est le milieu de $[MN]$ et, comme O est le milieu de $[AC]$, le quadrilatère $AMCN$ est un parallélogramme.

© Hachette Livre International

2 Apprendre à construire l'image d'une figure par une rotation

(Exercices 5, 6, 7 et 8 modifiés reprise totale des solutions)

Exercice 5



Dans la rotation, dont le centre est *D*, la mesure de l'angle est égale à 90° et le sens est indiqué par la flèche :

- l'image de *A* est *A*' ;
- l'image du cercle $(\mathcal{C})$ est le cercle $(\mathcal{C}')$;
- l'image de la droite (*BC*) est la droite (*B*'*C*'), où *B*' et *C*' sont les images respectives de *B* et *C*.

Exercice 6

De même que l'exercice 5 en changeant de centre et d'angle.

Exercice 7

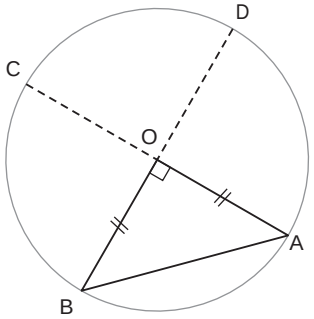
Comme l'exercice 5

Exercice 8

Comme l'exercice 5

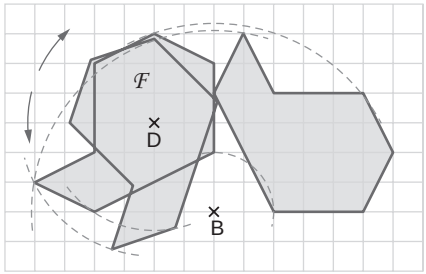
Exercice 9

1. 2.



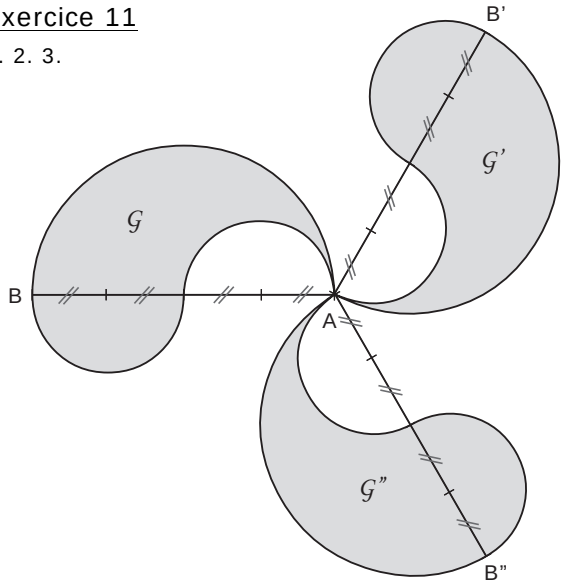
3. *ABCD* est un quadrilatère inscrit dans un cercle et l'angle au centre de ce quadrilatère est de 90° donc *ABCD* est un polygone régulier et plus particulièrement un carré.

Exercice 10



Exercice 11

1. 2. 3.

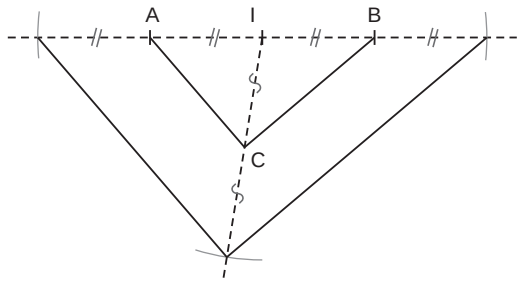


4. Pour transformer &' en &" on peut utiliser une rotation de centre *A* d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre ou une rotation de centre *A* d'angle 300° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

3 Apprendre à utiliser une homothétie pour agrandir ou réduire

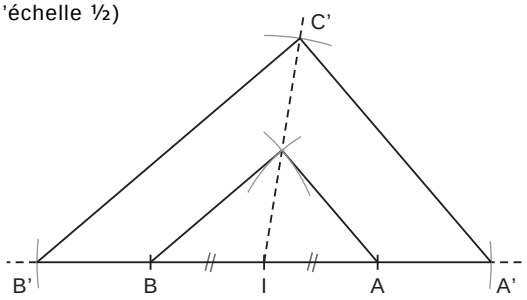
Exercice 12

© Hachette Livre International

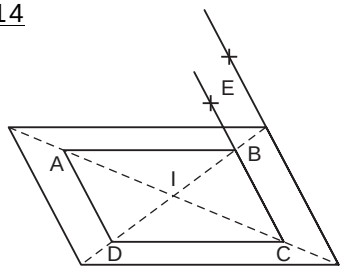


Exercice 13

(à l'échelle ½)

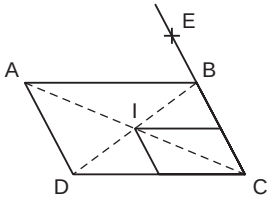


Exercice 14



1. a. b.

2.



Exercice 15

1.a. Le point B".
b. Le segment [$A"D"$].
c. $OA \approx 1{,}6$ cm, $OA" \approx 5{,}9$ cm ;

donc le rapport de cette homothétie est $\frac{OA"}{OA} \approx 3{,}7$.

2.a. Le point B'.
b. Le segment [$A'D'$].
c. $OA \approx 1{,}6$ cm, $OA' \approx 3{,}2$ cm ;

donc le rapport est $\frac{OA'}{OA} \approx 2$.

© Hachette Livre International

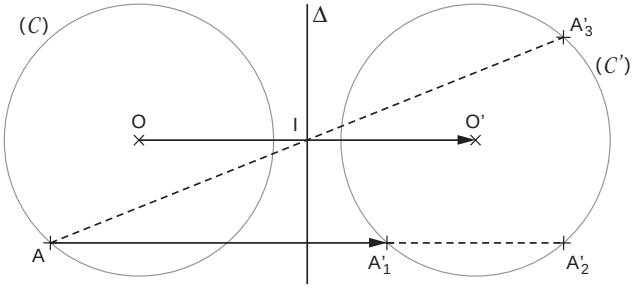
Symétries – Translations

Exercice 16

- D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
- I a pour image D par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.
- B a pour image C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- I est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$.

Exercice 17

1.



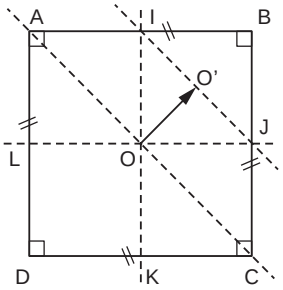
2. La translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

3. La symétrie d'axe (Δ), la médiatrice de [OO'].

4. La symétrie de centre I, le milieu de [OO'].

5. A'_1 est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, A'_2 celle de A par la symétrie d'axe (Δ) et A'_3 celle de A par la symétrie de centre I.

Exercice 18



1. I et J sont les milieux de [BA] et [BC] deux côtés du triangle ABC donc (IJ)//(AC).
Or la succession de deux symétries orthogonales d'axes parallèles correspond à la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$ soit $\overrightarrow{OB}$.

O	D	L	K	a pour image
B	O	I	J	

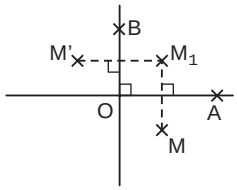
2. [AC] et [BD] sont les diagonales d'un carré, donc (AC)⊥(BD).
Or la succession de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires correspond à la symétrie de centre O, le point d'intersection de (AC) et (BD).

Ainsi

O	A	B	C	D	a pour image
O	C	D	A	B	

Exercice 19

1. 2. a. b.



3. • Par la symétrie d'axe (OA), le segment [OM] a pour image [OM_1] donc $OM = OM_1$.
Par la symétrie d'axe (OB), le segment [OM_1] a pour image [OM'] donc $OM' = OM_1$.
Ainsi $OM = OM_1 = OM'$.
• De plus :

$$\text{mes}\,M\hat{O}M' = \text{mes}\,M\hat{O}A + \text{mes}\,A\hat{O}M_1 + \text{mes}\,M_1\hat{O}B + \text{mes}\,B\hat{O}M'$$

$$\text{mes}\,M\hat{O}M' = 2\,\text{mes}\,A\hat{O}M_1 + 2\,\text{mes}\,M_1\hat{O}B$$

$$\text{mes}\,M\hat{O}M' = 2\left(\text{mes}\,A\hat{O}M_1 + \text{mes}\,M_1\hat{O}B\right) = 2\,\text{mes}\,A\hat{O}B = 180°.$$

© Hachette Livre International

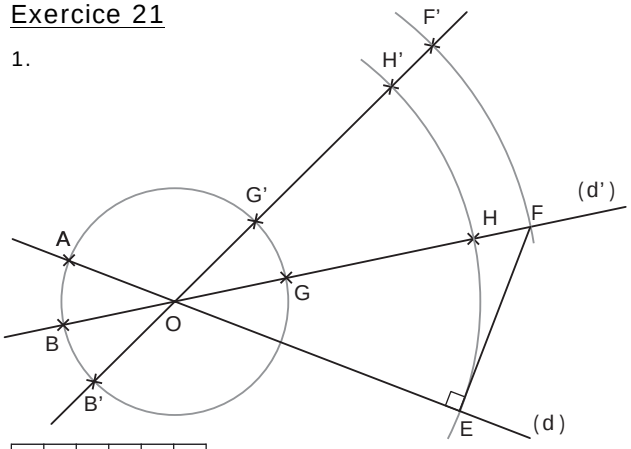
Rotation

Exercice 20

a. Non.
b. Oui, le centre : le départ de fanions. Le sens de rotation : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
c. Non.
d. Oui, le centre : l'intersection des segments. Le sens de rotation : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
e. Oui, le centre : le départ de fanions. Le sens de rotation : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
f. Non.
g. Non.
h. Oui, le centre : le départ de fanions. Le sens de rotation : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
i. Non.
j. Non.

Exercice 21

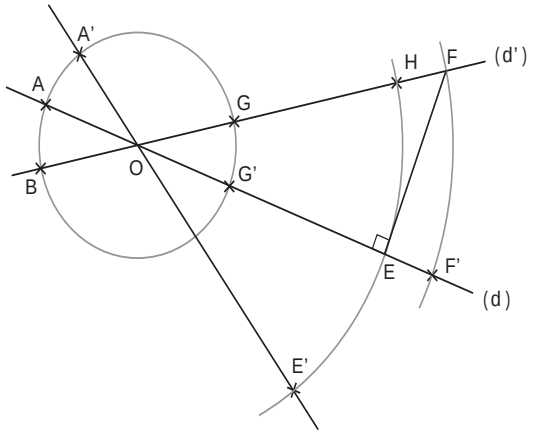
1.



A	B	E	F	G	H
B	B'	H	F'	G'	H'

a pour image

2.



A	B	E	F	G	H
A'	A	E'	F'	G'	E

a pour image

Exercice 22

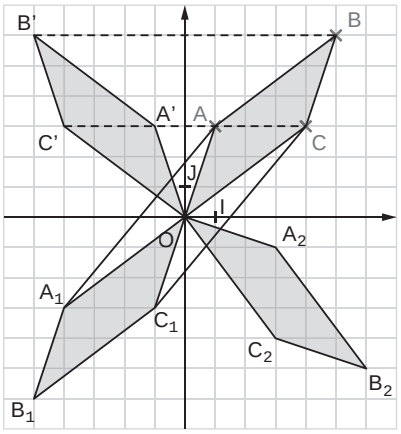
1. a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, ici $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 6-3 \end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$, qui ont les mêmes coordonnées dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, sont des vecteurs égaux ;

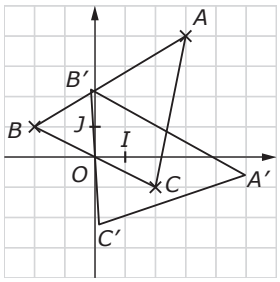
donc *ABCO* (ou *OABC*) est un parallélogramme.

2. a.



Exercice 23

1.



2.

$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$\frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Ainsi *O* est bien le milieu de [*BC*].

3. Par la translation de centre *O* précédente

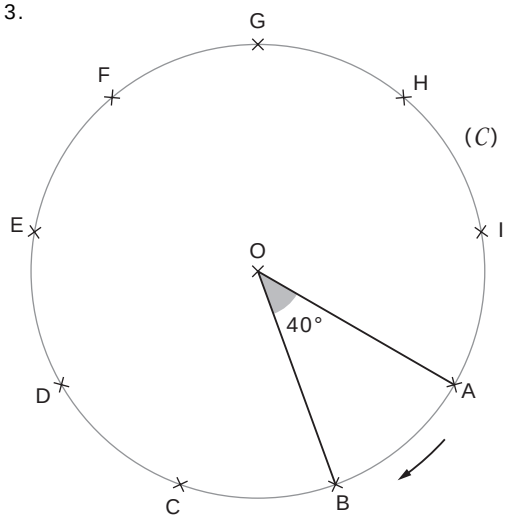
O	B	C	$[BC]$
O	B'	C'	$[CD]$

a pour image

De plus on sait que l'image d'un milieu par une rotation est un milieu donc comme *O* est le milieu de [*BC*], *O* est le milieu de [*B'C'*].

Exercice 24

1. 2. 3.

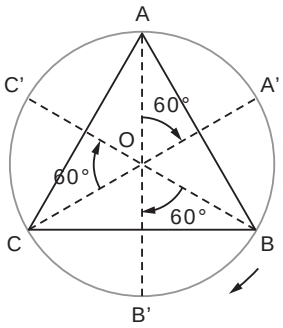


© Hachette Livre International

4.a. On peut construire 7 points de cette façon.
b. À chaque étape l'image d'un segment d'extrémité deux points consécutifs est le segment suivant par la rotation donc les deux segments ont la même longueur et en répétant ce raisonnement les neufs côtés ont la même longueur.
Ensuite chaque point est l'image du précédent par la rotation de centre *O* donc tous ces points sur le cercle (C).
Ainsi les neuf côtés de ce polygone ont la même longueur et ce polygone est inscrit dans un cercle donc c'est un polygone régulier.
On l'appelle ennéagone.

Exercice 25

1. 2.

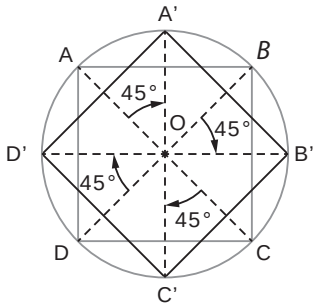


3. *O* est le point d'intersection des médianes d'un triangle équilatéral donc aussi des médiatrices, *O* est donc le centre du cercle circonscrit du triangle *ABC*.
De plus *A'*, *B'*, *C'* sont les images de *A*, *B*, *C* par la rotation de centre *O*.
Ainsi les points *A*, *B*, *C*, *A'*, *B'*, et *C'* sont sur le même cercle de centre *O*.
De plus *O* est le centre du cercle circonscrit de *ABC* triangle équilatéral donc mes $\widehat{AOB} = 120°$.
Puis *A'* est l'image de *A* par la rotation de centre *O* d'angle de mesure 60° donc mes $\widehat{AOA'} = 60°$.

Ainsi mes $\widehat{A'OB}$ = mes $\widehat{AOB}$ – mes $\widehat{AOA'} = 60°$.
De même mes $\widehat{B'OC} = 60°$, mes $\widehat{C'OA} = 60°$.
Finalement *AA'BB'CC'*, polygone inscrit dans un cercle et dont tous les angles au centre mesure 60°, est un hexagone régulier.

Exercice 26

1. 3.

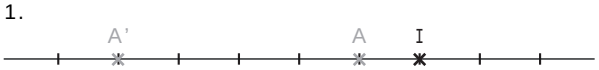


2. *ABCD* a pour image *BACD* c'est-à-dire le même carré.
4. On sait que mes $\widehat{AOB} = 90°$, et mes $\widehat{AOA'} = 45°$ donc mes $\widehat{A'OB} = 45°$.
De même mes $\widehat{B'OC} = 45°$, mes $\widehat{C'OD} = 45°$ et mes $\widehat{D'OA} = 45°$.
Ainsi *AA'BB'CC'DD'* est un polygone inscrit dans un cercle et chaque angle au centre mesure 45° donc c'est un octogone régulier.

Homothéties

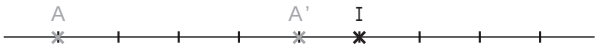
Exercice 27

1.



$IA' = 5 \times IA$ donc le rapport est 5.

2.



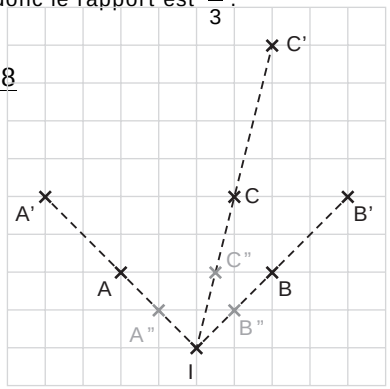
$IA' = \frac{1}{5} \times IA$ donc le rapport est $\frac{1}{5}$.

3.

$IA' = \frac{5}{3} \times IA$ donc le rapport est $\frac{5}{3}$.

Exercice 28

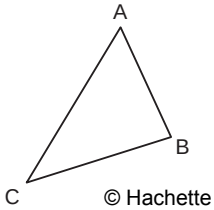
1. 2. 3.



4. a. $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$
$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IB'}$.
b. $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IB'}$
$= -\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$
$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exercice 29

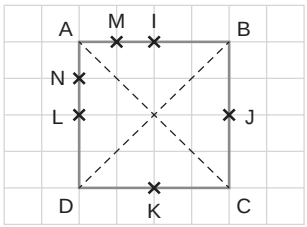
1. 2.



© Hachette Livre International

3. Comme *ABC* a pour image *A'B'C'* par une homothétie de rapport 0,6 donc
$\mathcal{A}_{A'B'C'} = (0{,}6)^2\,\mathcal{A}_{ABC}$.
Donc le rapport des deux axes est 0,36.

Exercice 30



1. L'image de *A* est *M* par l'homothétie de centre *I* de rapport $\frac{1}{2}$.
2. L'image de *A* est *N* par l'homothétie de centre *D* de rapport $\frac{3}{4}$.

3. a. Par l'homothétie de centre de rapport 2

B	*I*	*J*	*BIJ*
B	*A*	*C*	*BAC*

a pour image

b. On sait que $\mathcal{A}_{BIJ} = \frac{BI \times BJ}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ cm^2.
Puis comme *BIJ* a pour image *ABC* par une homothétie de rapport 2 on a
$\mathcal{A}_{BAC} = 2^2 \times \mathcal{A}_{BIJ} = 2^2 \times 2 = 8$ cm^2.

4. *AMN* est l'image de *ABC* par l'homothétie de centre *A* de rapport $\frac{1}{4}$.
5. *AIL* est l'image de *AMN* par l'homothétie de centre *A* de rapport 2.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 31 Les éléments caractéristiques

Numéro de la figure	Transformation	Éléments caractéristiques
④	Symétrie centrale	De centre A
③	Translation	De vecteur $\overrightarrow{BB'}$
①	Symétrie axiale	D'axe la médiatrice de [BB']
②	Rotation	De centre A et d'angle 90°

Exercice 32 Repérer à l'œil nu

1. • *MHI* ;
• *MBI* ;
• *LKF* ;
• *MFL*.

2. Le rapport est 2.

Exercice 33 Raisonnement à compléter

J'utilise la rotation de centre *O* qui transforme *A* en *D*.
B a pour image *E* car *OBE* triangle équilatéral, donc
OB = *OE* et mes $B\hat{O}E = 60°$.
C a pour image *F* car *OCF* triangle équilatéral, donc
OC = *OF* et mes $C\hat{O}F = 60°$.
Or l'image par une rotation de trois points alignés sont trois points alignés.
Donc les points *D*, *E* et *F* sont alignés.

Exercice 34 Fiche résumé

① : Je trace un cercle $(\mathcal{C})$ de centre *O*.
② : Je place sur $(\mathcal{C})$ un point *A* : premier sommet de mon polygone.
③ : Je place sur $(\mathcal{C})$ le point *B* : image de *A* par la rotation de centre *O* et de mesure indiquée dans le tableau.

Polygone régulier	Nombres de côtés	Mesure de l'angle de rotation
Triangle équilatéral	3	120°
Carré	4	90°
Pentagone	5	72°
Hexagone	6	60°
Octogone	8	45°

Exercice 35 Erreurs à corriger

1. • *A'*, *B'* et *C'* sont les images de *A*, *B* et *C* par l'homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$, donc :

• $A'B' = \frac{1}{2} \times AB$;

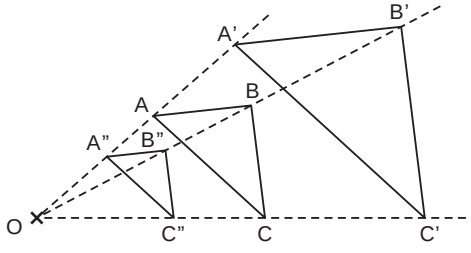
• $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \mathcal{A}_{ABC}$;

• mes $A'\hat{B}'C'$ = mes $A\hat{B}C$.

2. • L'image d'un segment par une homothétie de rapport $k > 0$ est un segment dont la longueur est multipliée par k.
• L'image d'une figure par une homothétie de rapport $k > 0$ est une figure dont l'aire est multipliée par k^2.
• L'image d'un angle par une homothétie est un angle de même mesure.

Exercice 36 Bien comprendre l'importance du rapport

1. 2.



© Hachette Livre International

Avec $k = 1{,}4$:
$OA = 2{,}4$ donc $OA' = 3{,}36$,
$OB = 3{,}7$ donc $OB' = 5{,}18$,
$OC = 3{,}8$ donc $OC' = 5{,}32$.

Avec $k = 0{,}6$
$OA'' = 1{,}44$, $OB'' = 2{,}22$ et $OC'' = 2{,}28$.

3.a. • Lorsque $0 < k < 1$, le triangle $A'B'C'$ est une réduction de ABC.
• Lorsque $k > 1$, le triangle $A'B'C'$ est un agrandissement de ABC.

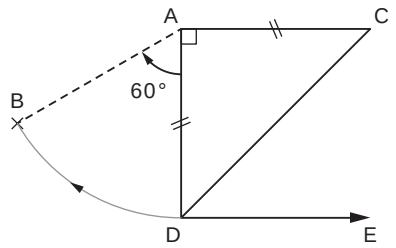
b. OAB et $OA'B'$; OBC et $OB''C''$; OAC et $OA'C'$.

© Hachette Livre International

Exercices d'approfondissement

Exercice 37 Construction d'un carré

1. a.



On trace l'arc de cercle de centre *A* partant de *D* tournant dans le sens des aiguilles d'une montre ; puis on place le point *B* sur cet arc tel que mes $\widehat{DAB} = 60°$.
b. Comme *D* a pour image *B* par la rotation de centre *A* on a *AD* = *AB* donc *ADB* est isocèle en *A*.

De plus mes $\widehat{DAB} = 60°$ donc *ADB* est un triangle équilatéral.

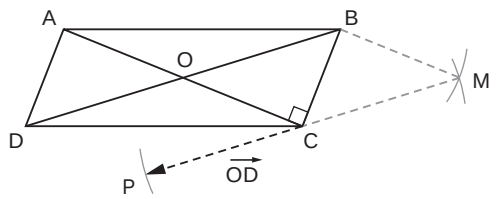
2. a. On trace un ?? représentant le vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine *D*. On obtient *E*.

b. Comme *D* a pour image *E* par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ on a $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$ donc *DECA* parallélogramme.

De plus mes $\widehat{DAC} = 90°$ donc *DECA* est un rectangle.
Enfin *CA* = *AD* donc *DECA* est un carré.

Exercice 38 Points alignés

1.



OBC triangle rectangle en *C* donc *I* milieu de [*OB*].

2. Pour construire $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, on utilise la règle du parallélogramme.
Pour construire $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$, on utilise Chasles en déplaçant un représentant de $\overrightarrow{OD}$ d'origine *C*.

3. a. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ puisque *OBMC* parallélogramme donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BM}$.

b. Par construction $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CP}$ donc *ODPC* parallélogramme et donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DP}$.

Ainsi par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, *D* a pour image *P*.
c. *O* centre du parallélogramme donc *B*, *O* et *D* sont alignés.

Par la translation de $\overrightarrow{OC}$:

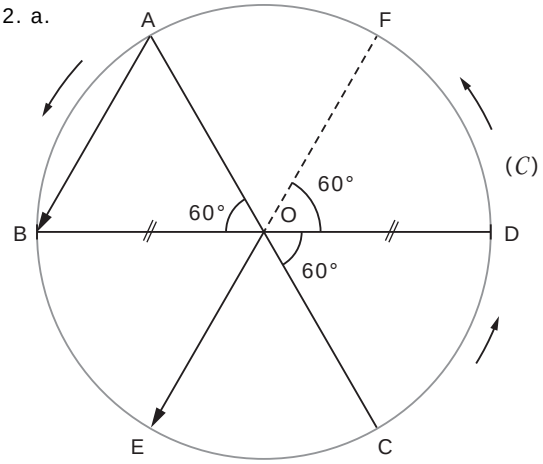
B	*O*	*D*
M	*C*	*P*

a pour image

Et trois points alignés ont pour image trois points alignés par une translation donc *M*, *C* et *P* sont alignés.

Exercice 39 Points cocycliques

1. 2. a.

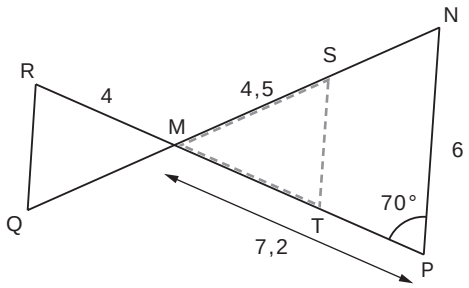


b. *O* milieu de [*AC*] et par la rotation définie en 2. *A*, *O* et *C* ont pour images respectives *B*, *O* et *D*.
Donc *O* milieu de [*BD*]. Ainsi *ABCD* parallélogramme.
De plus [*AC*] et [*BD*] sont des diamètres de $(\mathcal{C})$ donc *AC* = *BD*. Ainsi *ABCD* est un rectangle.
3. c. *A*, *B*, *C*, et *D* sont évidemment sur le cercle $(\mathcal{C})$. De plus *F* a pour image *D* par la rotation de centre *O* donc *F* est aussi sur $(\mathcal{C})$.

E translation de *O* par $\overrightarrow{AB}$ donc *ABFO* parallélogramme donc *AB* = *OE*. Or *ABO* triangle équilatéral donc *AB* = *OE*. Or *ABO* triangle équilatéral donc *AB* = *OA*. Ainsi *OE* = *OA* et donc *E* appartient aussi à $(\mathcal{C})$.

Exercice 40 Agrandissement d'une figure

1.



2. *R*, *M* et *P* et *Q*, *M* et *N* sont alignés dans cet ordre et (*RQ*) // (*NP*) donc d'après le théorème de Thalès on a *MNP* agrandissement de *MRQ*.

3. Hors programme.
P a pour image *R* par cette homothétie,
$\frac{MR}{MP} = \frac{4}{7,2} = \frac{40}{72} = \frac{5}{3}$ et comme *P* et *R* sont placés de part et d'autre de *M* on a $K = -\frac{5}{9}$.

4. b. Pour que *MNP* soit un agrandissement de *MST* il faut que $\frac{MN}{MS} = \frac{MP}{MT}$. Or $\frac{MP}{MT} = \frac{MP}{\frac{3}{5}MP} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$.

Et d'après 3. $\frac{MQ}{MN} = \frac{5}{9}$ donc $MN = \frac{5}{9}MQ$;

© Hachette Livre International

donc $\frac{MN}{MS} = \frac{\frac{9}{5}MQ}{4,5} = \frac{9}{5}MQ \times \frac{1}{4,5} = 22,5MQ$.

S'entraîner au BEPC

Exercice 41 Reconnaître une application

1. a. $f(I_1) = I_2$, f est la symétrie d'axe $(O\vec{j})$.
b. $f(I_3) = I_2$, f est la symétrie d'axe la droite verticale d'équation $y = 4$.
c. $f(I_1) = I_5$, f est la translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

2. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-3\\4-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.
Ainsi la droite (AB) a pour équation cartésienne $6x + 2y + c = 0$ où c est une constante à déterminer.
Comme $A \in (AB)$, $6x_A + 2y_A + c = 0$ donc $c = -14$.
Finalement (AB) $= 6x + 2y - 14 = 0$.

Exercice 42 Propriété des rotations

1.

R(F)	R(M)	R(H)	R(k)	R(g)
L	F	K	E	M

2. $\widehat{FHG}$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{FOG}$ donc mes$\widehat{FHG} = \frac{1}{2}$ mes$\widehat{FOG}$.
Ensuite $EHFG$ est un carré de centre O donc mes$\widehat{FOH} = 90°$.
Ainsi mes$\widehat{FGH} = 45°$.

Exercice 43 Propriété des homothéties

1. Les triangles ALI et ABK sont en configuration de Thalès et (LI) // (BK) donc, d'après Thalès, on a : $\frac{AL}{AB} = \frac{AI}{AK}$.

Soit, ici $\frac{AL}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2. h est une homothétie de centre A qui transforme L en B donc $AB = K \times AL$

soit $\frac{AB}{AL} = K$.

D'après 1. $\frac{AB}{AL} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Ainsi $K = 2$.

3. Par cette homothétie le carré $ALMN$ se transforme en $ABCD$.
De plus l'image d'une figure par une homothétie est une figure dont l'aire est multipliée par K^2.

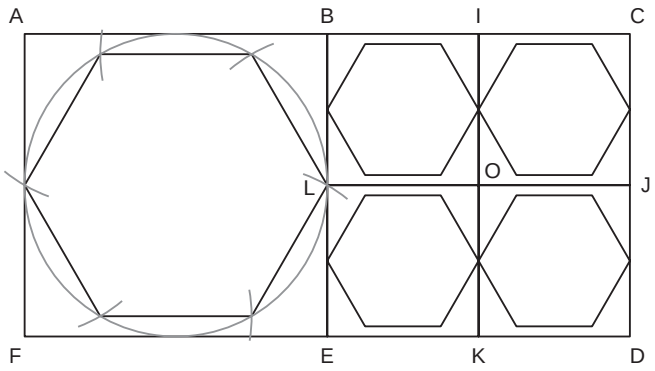
Ainsi $s = K^2 \times s'$ soit $\frac{s}{s'} = K^2$ soit $\frac{s}{s'} = \frac{1}{K^2}$.

© Hachette Livre International

Activités d'intégration

Exercice 44 Photomaton

1. a.



b. homothétie qui transforme *ABEF* en *BIOL*

A	*B*	[*AB*]
B	*I*	[*BI*]

a pour image

Donc $IB = K \times AB$ soit $\frac{IB}{AB} = K$.

Or AB = 8 cm et BI = 4 cm donc $K = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

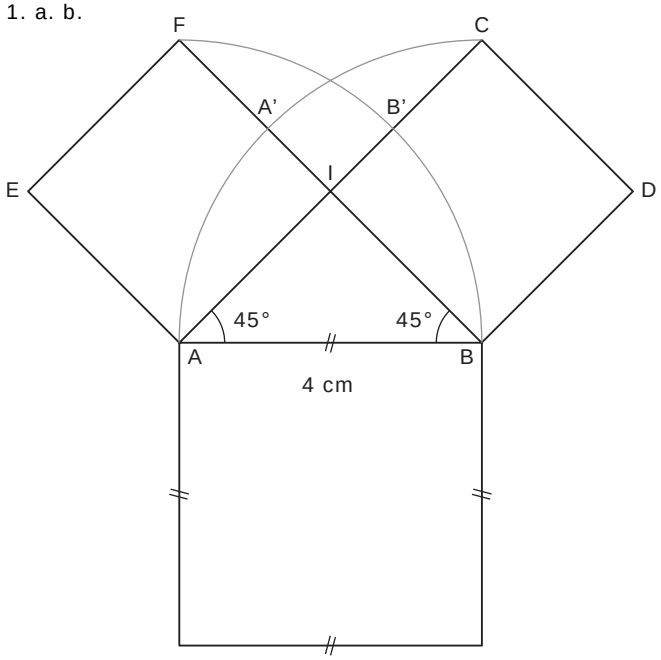
De même pour les trois autres homothéties.

2. a. • Pour l'hexagone de départ on trace le cercle de centre le centre du carré *ABEF* passant par *L* puis on reporte le rayon de ce cercle à partir de *L*.
• Pour les 2 homothéties on trace les demi-droites passant par les sommets de l'hexagone précédent et le centre de l'homothétie *C* ou *D*.
b.
c. Oui, les quatre images obtenues sont extraites de la première.

Exercice 45 Fractales

Partie A

1. a. b.

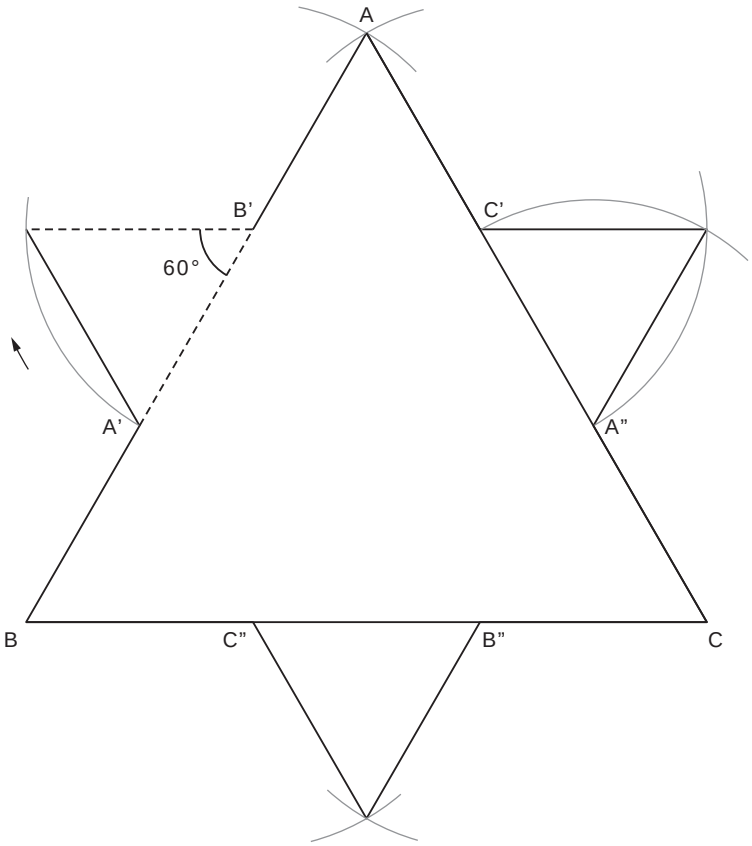


1. c. • Le premier carré a pour côté 4 cm donc son aire est de 16 cm^2.
• Les deux autres carrés ont la longueur du côté identique. *ABI* est un triangle dont les angles à la base mesure tous les deux 45 °. Donc c'est un triangle rectangle isocèle.
D'après Pythagore, $AB^2 = AI^2 = IB^2$ soit ici $16 = 2IA^2$ et donc $IA^2 = 8$ soit $IA = \sqrt{8}$.
Ainsi chaque nouveau carré a pour aire 8 cm^2.
Finalement l'aire de la figure à l'étape ② est 32 cm^2.

© Hachette Livre International

Partie B

1. a. b. c.



- $AB = AC = BC = 9$ cm.
- $\frac{1}{3} \times 9 = 3$
- image par rotation de [*A'B'*]

On utilise la rotation de centre *A'*, *C"*, *B"*, *A"* et *C'* toujours d'angle de mesure 60° et dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans l'autre.

© Hachette Livre International

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	*Rappels sur vocabulaire et patrons des solides*	25		47, 48, 51
2, 3	Pyramide [1 p 86]	26, 28, 30, 32, 33	41, 42, 43	46, 47, 48, 50, 53
	Cône de révolution [2 p 87]	27, 29, 31, 32	41, 42	45, 49, 51
	Apprendre à décrire et à représenter une pyramide régulière ou un cône de révolution [1 p 89]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11		
	Apprendre à calculer une longueur, une aire, un volume [2 p 90]	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18		
4	Section de pyramide et de cône [3 p 88]	34, 35, 36, 37, 38, 39, 40	44	46, 52
	Apprendre à représenter une section et un tronc [3 p 91]	19, 20, 21, 22, 23, 24		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Recherche médicale

1.a. $\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 0{,}8^2 \times 10 \approx 20{,}1$ cm^3.

b. Une demi-éprouvette peut donc contenir environ 10,05 cm^3.

2.a. 1 L = 1 dm^3 = 1 000 cm^3 et $\frac{1\,000}{10{,}05} \approx 99{,}5$; la chercheuse aura besoin de 99 éprouvettes (à demi-remplies).

b. 1 000–99×10,05 = 5,05 ; il lui restera environ 5,05 cm^3 de liquide.

3. Le liquide jeté va remplir un parallélépipède rectangle à base carrée de côté 20 cm et de hauteur h à déterminer.
On cherche h tel que $20 \times 20 \times h = 1\,000$; c'est-à-dire $h = 2{,}5$ cm.
Le bac sera rempli jusqu'à une hauteur de 2,5 cm.

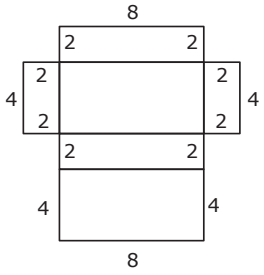
Activités de découverte

1 Vocabulaire et patrons de solides (rappel)

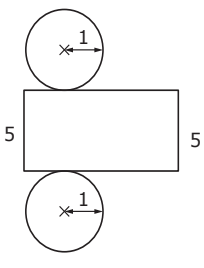
1.a. ● *ABCDEFGH* est un pavé droit, aussi appelé parallélépipède rectangle.
● *IJKNLM* est un prisme droit à bases triangulaires.

b. ● [*FB*] est une arête latérale (ou une hauteur) et *EABF* est une face latérale de *ABCDEFGH*.
● *JKML* est une face latérale, [*JL*] est une arête latérale (ou une hauteur) et *IJK* est une base de *IJKNLM*.

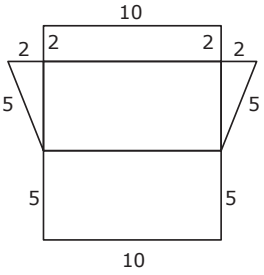
2.



Il s'agit du patron d'un pavé droit, aussi appelé parallélépipède rectangle.



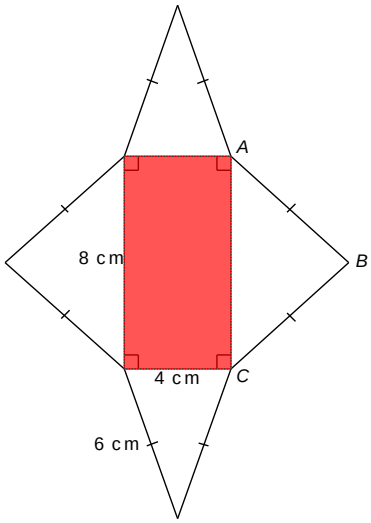
Il s'agit du patron d'un cylindre de révolution.



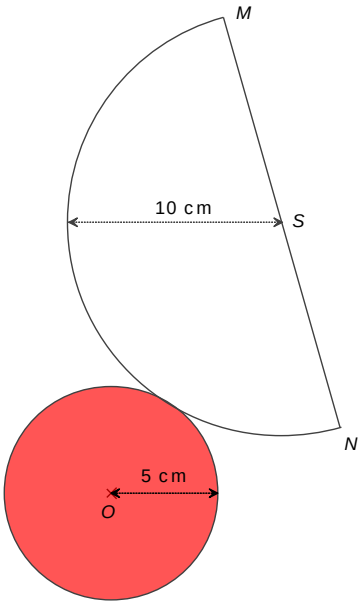
Il s'agit du patron d'un prisme à base triangulaire.

© Hachette Livre International

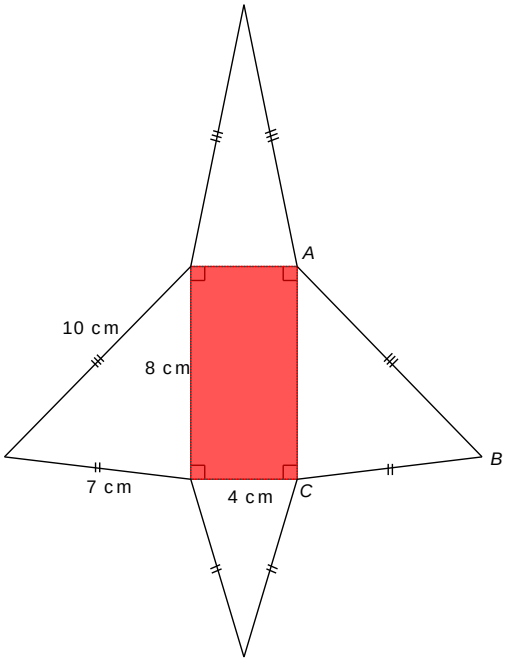
2 Découper pour observer et décrire



Patron d'une pyramide



Patron d'un cône de révolution



Patron de la nouvelle pyramide

1. Réalisation, à partir des patrons ▭ et ▭, d'une pyramide et d'un cône de révolution.

2.a. La base de la pyramide (colorée en rouge) est un rectangle.

b. La base du cône de révolution (colorée en rouge) est un disque.

3.a. La pyramide a 4 faces latérales et 4 arêtes latérales.

b. En conservant la même base et en modifiant la longueur de deux arêtes latérales (AB = 10 cm et BC = 7 cm), on obtient une nouvelle pyramide de patron ▭.

4.a. Pour que le solide se « referme », il faut que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ soit égal au périmètre du cercle de base, c'est-à-dire $10 \times \pi$ cm.

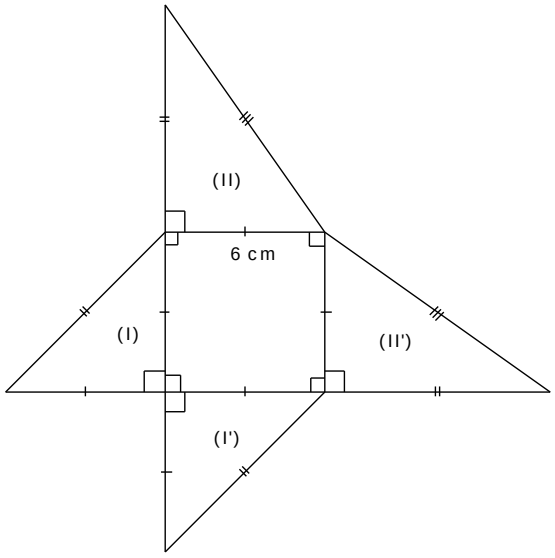
b.c. Dans le triangle OMS, rectangle en O, on a (d'après la propriété de Pythagore) : $SM^2 = SO^2 + OM^2$;

donc la hauteur de ce cône est : $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm.

© Hachette Livre International

3 Aire et volume d'une pyramide

1.a. Reproduction du patron de la pyramide :



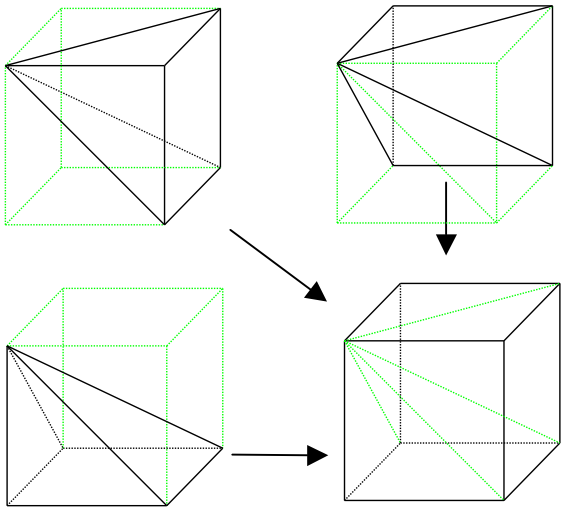
b. Les 4 faces latérales sont des triangles rectangles :
• deux [(I) et (I')] ont des côtés de l'angle droit de 6 cm, une hypoténuse de $\sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$ cm ;
• deux [(II) et (II')] ont un côté de l'angle droit de 6 cm, l'autre côté de l'angle droit de $6\sqrt{2}$ cm.

Donc l'aire latérale de cette pyramide est :

$$\mathcal{A} = 2\times\frac{6\times 6}{2} + 2\times\frac{6\times 6\sqrt{2}}{2} = 36\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 86{,}9 \text{ cm}^2.$$

c. L'aire de la base est : $\mathcal{B} = 6\times 6 = 36$ cm² ;
donc l'aire totale de cette pyramide est :
$\mathcal{A}+\mathcal{B} = 36\left(1+\sqrt{2}\right)+36 = 36\left(2+\sqrt{2}\right) \approx 122{,}9$ cm².

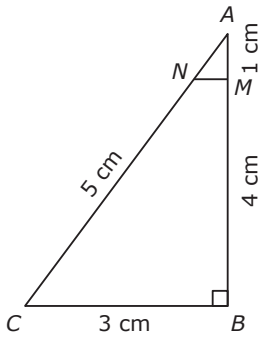
2.a. Reconstitution d'un cube à l'aide de trois pyramides identiques (utilisation du patron 1.a.), en les disposant de la façon suivante :



b. Les 3 pyramides (identiques) ont ensemble même volume que le cube de côté 6 cm, c'est-à-dire : $6^3 = 216$ cm³ ;
donc le volume d'une pyramide est : $\mathcal{V} = \frac{216}{3} = 72$ cm³.

c. A l'aide de la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$,
on retrouve : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times 6^2\times 6 = 72$ cm³.

4 Section par un plan parallèle à la base



1. En faisant pivoter le triangle autour du bâton, on obtient un cône de révolution de hauteur $AB = 4$ cm, de base le cercle $(\mathcal{C})$, de centre B et de rayon $BC = 3$ cm.

2. Le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité

Longueur en cm	*AB*	*AC*	*BC*
Longueur en cm	*AM*	*AN*	*MN*

En effet les triangles *ABC* et *AMN* sont en configuration de Thalès, donc : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la ligne 1 à la ligne 2 est : $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$.

Donc : $MN = \frac{1}{4}\times BC = \frac{3}{4} = 0{,}75$ cm.

3.a. Pour le cône $\mathcal{C}_1$: le périmètre de la base est $\mathcal{P}_1 = 2\pi\times BC = 2\times 3{,}14\times 3 \approx 18{,}8$ cm ; $a_1 = AC = 5$ cm ;

donc l'aire latérale est $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\times\mathcal{P}_1\times a_1 \approx \frac{1}{2}\times 18{,}8\times 5 \approx 47$ cm².

L'aire de la base est $\mathcal{B}_1 = \pi\times BC^2 \approx 3{,}14\times 9 \approx 28{,}3$ cm² ; donc le volume est $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3}\times\mathcal{B}_1\times AB \approx \frac{1}{3}\times 28{,}3\times 4 \approx 37{,}7$ cm³.

b. Pour le cône $\mathcal{C}_2$: le périmètre de la base est $\mathcal{P}_2 = 2\pi\times MN = 2\times 3{,}14\times 0{,}75 \approx 4{,}7$ cm ; $a_2 = AN = \frac{1}{4}AC = \frac{5}{4} = 1{,}25$ cm ;

donc l'aire latérale est $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\times\mathcal{P}_2\times a_2 \approx \frac{1}{2}\times 4{,}7\times 1{,}25 \approx 2{,}9$ cm².

L'aire de la base est $\mathcal{B}_2 = \pi\times MN^2 \approx 3{,}14\times 0{,}75^2 \approx 1{,}8$ cm² ; donc le volume est $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{3}\times\mathcal{B}_2\times AM \approx \frac{1}{3}\times 1{,}8\times 1 \approx 0{,}6$ cm³.

c. Finalement : aire latérale de $\mathcal{C}_1$ = 16×aire latérale de $\mathcal{C}_2$; volume de $\mathcal{C}_1$ = 64×volume de $\mathcal{C}_2$.

© Hachette Livre International

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à décrire et à tracer une pyramide régulière

Exercice 1

Sommet : *I* ;
base : *JKLMN* ;
faces latérales : *IJK*, *IKL*, *ILM*, *IMN et INJ* ;
arêtes latérales : [*IJ*], [*IK*], [*IL*], [*IM*] et [*IN*].

Exercice 2

Sommet : *F* ;
base : *EGHIJK* ;
faces latérales : *EGE*, *FGH*, *FHI*, *FIJ*, *FJK* et *FKE* ;
arêtes latérales : [*FE*], [*FG*], [*FH*], [*FI*], [*FJ*] et [*FK*].

Exercice 3

Sommet : *S* ;
base : le disque de centre *U* et de rayon *UT* ;
axe de révolution : (*SU*) ;
trois génératrices : (*ST*), (*SU*) et (*SW*).

Exercice 4

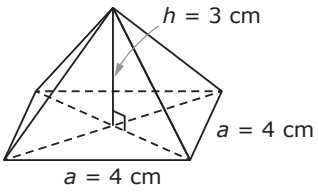
Sommet : *D* ;
base : le disque de centre *B* et de rayon *BA* ;
axe de révolution : (*DB*) ;
trois génératrices : (*DA*), (*DC*) et (*DE*).

Exercice 5

1. Vrai 2. Faux (voir exercice 4).

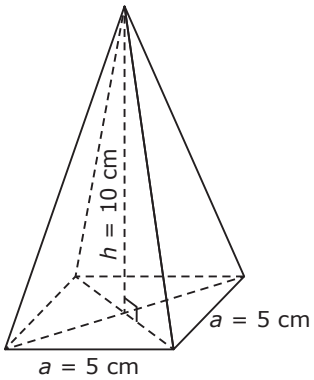
Exercice 6

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté a = 4 cm, et de hauteur h = 3 cm.



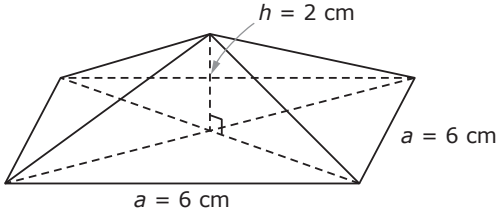
Exercice 7

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté a = 5 cm, et de hauteur h = 10 cm.



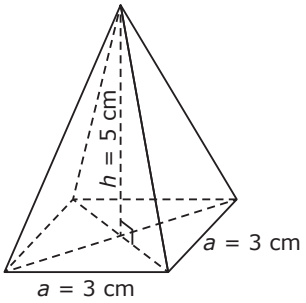
Exercice 8

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté a = 6 cm, et de hauteur h = 2 cm.



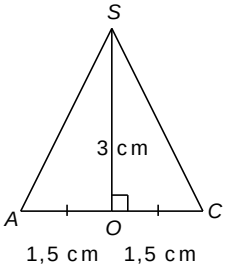
Exercice 9

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté a = 3 cm, et de hauteur h = 5 cm.



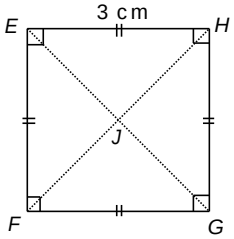
Exercice 10

SAC est un triangle isocèle en *S*.



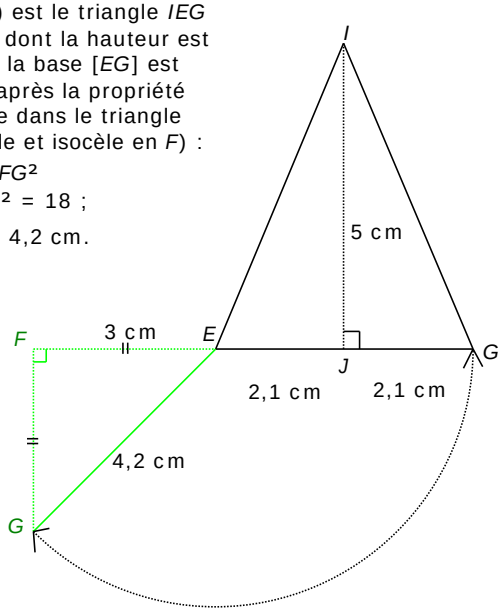
Exercice 11

1. La base *EFGH* est un carré de côté 3 cm.



2. La section de la pyramide par le plan (*IEG*) est le triangle *IEG* isocèle en *I*, dont la hauteur est *IJ* = 5 cm et la base [*EG*] est telle que (d'après la propriété de Pythagore dans le triangle *EFG* rectangle et isocèle en *F*) :

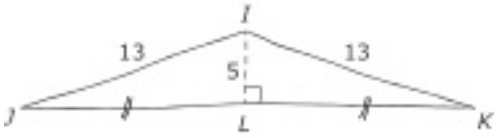
$EG^2 = EF^2 + FG^2$
$= 3^2 + 3^2 = 18$;
$EG = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$ cm.



© Hachette Livre International

Exercice 12

1. Représentation à main levée



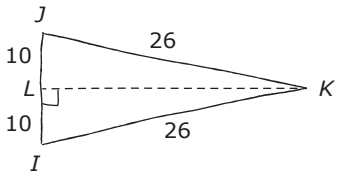
2.a. Dans le triangle ILK rectangle en L, d'après la propriété de Pythagore, on a : $IK^2 = IL^2+LK^2$;
donc : $LK^2 = 13^2-5^2 = 144$ et $LK = 12$ cm.

b. Volume du cône :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 5 \approx 754$ cm^3.

Exercice 13

1. Représentation à main levée



2.a. Dans le triangle ILK rectangle en L, d'après la propriété de Pythagore, on a : $IK^2 = IL^2+LK^2$;
donc : $LK^2 = 26^2-10^2 = 576$ et $LK = 24$ cm.

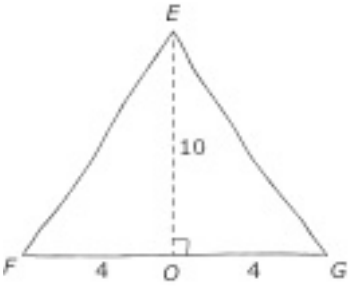
b. Volume du cône :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times 24 \approx 2\,512$ cm^3.

Exercice 14

1. • Dans le triangle OGH isocèle et rectangle en O, d'après la propriété de Pythagore, on a :
$GH^2 = GO^2+OH^2 = 4^2+4^2 = 32$ et $GH = 4\sqrt{2}$ cm.
• Aire de la base : $\mathcal{B} = GH^2 = 32$ cm².

2.a. Représentation à main levée



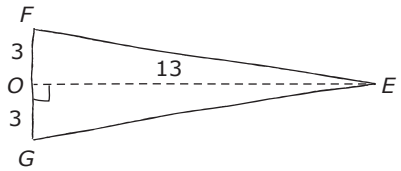
b. Volume de la pyramide :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times EO = \frac{1}{3} \times 32 \times 10 = \frac{320}{3}$ cm^3.

Exercice 15

1. • Dans le triangle OGH isocèle et rectangle en O, d'après la propriété de Pythagore, on a :
$GH^2 = GO^2+OH^2 = 3^2+3^2 = 18$ et $GH = 3\sqrt{2}$ cm.
• Aire de la base : $\mathcal{B} = GH^2 = 18$ cm².

2.a. Représentation à main levée

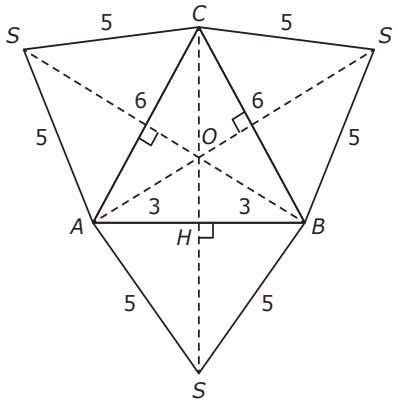


b. Volume de la pyramide :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times EO = \frac{1}{3} \times 18 \times 13 = 78$ cm^3.

Exercice 16

1. Patron de la pyramide :



2. • Dans le triangle ASH rectangle en H, d'après la propriété de Pythagore, on a : $AS^2 = AH^2+HS^2$;
donc : $HS^2 = 5^2-3^2 = 16$ et $HS = 4$ cm,

aire(ABS) $= \frac{6 \times 4}{2} = 12$ cm²,

aire latérale $= 3 \times$ aire(ABS) $= 3 \times 12 = 36$ cm².

• Dans le triangle ACH rectangle en H, d'après la propriété de Pythagore, on a : $AC^2 = AH^2+HC^2$;
donc : $HC^2 = 6^2-3^2 = 27$ et $HC = 3\sqrt{3}$ cm,

aire(ABC) $= \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm².

• Aire totale de la pyramide : $\left(36+9\sqrt{3}\right)$cm².

Exercice 17

1. Dans le triangle AOS rectangle en O, $\tan A\hat{S}O = \frac{OA}{OS}$;

donc OS $= \frac{OA}{\tan A\hat{S}O} = \frac{5}{\tan 60°} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}8$ cm.

2. Volume du cône :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times OS \approx \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 5^2 \times 2{,}8 \approx 73$ cm^3.

Exercice 18

Tableau concernant un cône de révolution :

Rayon r	Arête a	Hauteur h	Aire base $\mathcal{B}$	Aire latérale $\mathcal{A}$	Volume $\mathcal{V}$
4	5	3	16π	$20\,\pi$	$16\,\pi$
5	13	12	$25\,\pi$	$65\,\pi$	$100\,\pi$

En effet : • périmètre de la base : $\mathcal{P} = 2\,\pi\,r$,

• aire de la base : $\mathcal{B} = \pi\,r^2$,

• aire latérale : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{P}\,a = \pi\,r\,a$,

• volume : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}\,h$.

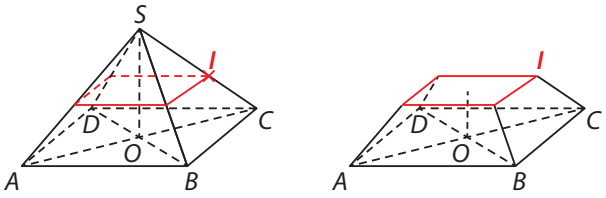
© Hachette Livre International

3 Apprendre à représenter une section et un tronc

Exercice 19

1. La section de la pyramide régulière *SABCD* (à base carrée), par le plan passant par *I* et parallèle à sa base, est un carré.

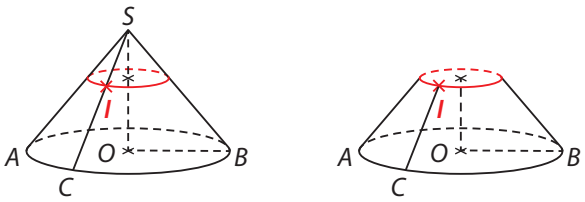
2.



Exercice 20

1. La section du cône de révolution, par le plan passant par *I* et parallèle à sa base, est un cercle.

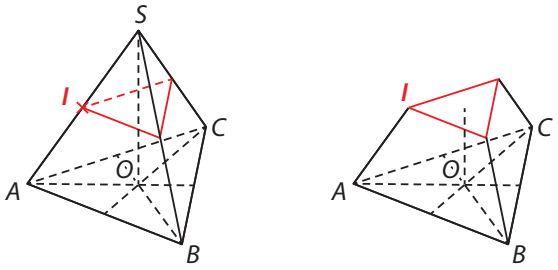
2.



Exercice 21

1. La section de la pyramide régulière *SABC* (à base triangulaire), par le plan passant par *I* et parallèle à sa base, est un triangle équilatéral.

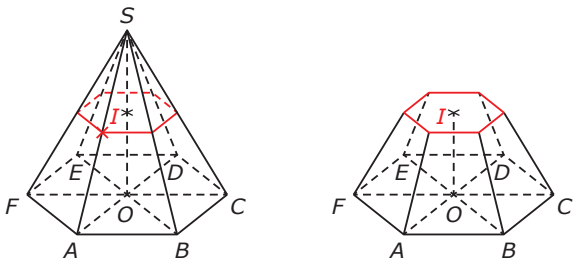
2.



Exercice 22

1. La section de la pyramide régulière *SABCDEF* (à base hexagonale), par le plan passant par *I* et parallèle à sa base, est un hexagone régulier.

2.



Exercice 23

- $MN' = 0{,}6 \times MN$;
- $R'N' = 0{,}6 \times RN$ (on peut appliquer la propriété de Thalès dans les triangles *RMN* et *R'N'M*) ;
- aire latérale(*MN'P'Q'R*)' = 0,36×Aire latérale(*MNPQR*) ;
- volume(*MN'P'Q'R'*) = 0,216×Volume(*MNPQR*).

Exercice 24

1. Désignons respectivement par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ le petit cône et le grand cône de tissu.

- Petit cône :

aire latérale : $\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \times \pi \times 24 \times 20 \approx 754$ cm² ;

volume : $\mathcal{V}_{\mathcal{C}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 18 \approx 2\,713$ cm³.

- Grand cône (dont les longueurs sont le triple de celles du petit cône) :

aire latérale : $\mathcal{A}_{\mathcal{C}'} = 3^2 \times \mathcal{A}_{\mathcal{C}} \approx 6\,786$ cm².

volume : $\mathcal{V}_{\mathcal{C}'} = 3^3 \times \mathcal{V}_{\mathcal{C}} \approx 73\,251$ cm³.

2. On en déduit que :

- aire de la jupe :

$\mathcal{A}_{\mathcal{C}'} - \mathcal{A}_{\mathcal{C}} \approx 6\,786 - 754 \approx 6\,032$ cm² ;

- volume de la jupe :

$\mathcal{V}_{\mathcal{C}'} - \mathcal{V}_{\mathcal{C}} \approx 73\,251 - 2\,713 \approx 70\,538$ cm³.

© Hachette Livre International

Activités d'application

Description et construction de solides

Exercice 25

☐ Pavé droit ou parallélépipède rectangle :

8 sommets : *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* et *H* ;
6 faces : *ABCD*, *EFGH*, *ABFE*, *BCGF*, *ADHE* et *DCGH* ;
12 arêtes : [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*], [*EF*], [*FG*], [*GH*], [*HE*], [*AE*], [*BF*], [*CG*] et [*DH*].

☐ Pyramide à base triangulaire de sommet *S* :

base : *IJK* ; hauteur : [*SH*] ;
3 faces latérales : *SIJ*, *SJK* et *SKI* ;
3 arêtes latérales : [*SI*], [*SJ*] et [*SK*].

☐ Cylindre de révolution :

axe : (*MN*) ; hauteur : [*MN*] ;
bases : disques de centres *M* et *N*, de rayon *NP*.

☐ Pyramide à base carrée de sommet *S* :

base : *ABCD* ; hauteur : [*SF*] ;
4 faces latérales : *SAB*, *SBC*, *SCD* et *SDA* ;
4 arêtes latérales : [*SA*], [*SB*], [*SC*] et [*SD*].

☐ Cône de révolution :

sommet : *O* ; hauteur : [*OS*] ; génératrice : (*OR*) ;
base : disque de centre *S*, de rayon *SR*.

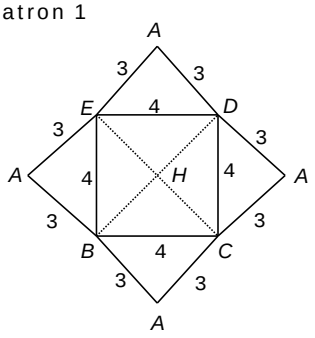
☐ Prisme droit à base triangulaire :

bases : *IJK* et *LMN* ;
3 faces latérales : *IJML*, *JKNM* et *KILN* ;
3 arêtes latérales : [*JM*], [*IL*] et [*KN*].

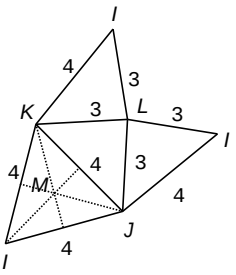
Exercice 26

1.2.

Patron 1



Patron 2



3.

	Patron 1	Patron 2
Nom de la base	*BCDE*	*IJK*
Nom de la hauteur	[*AH*]	[*LM*]
Nom d'une face latérale	*ABE*	*JKL*
Aire latérale	4×aire(*ABE*)	3×aire(*JKL*)

Exercice 27

Axes de révolution : (*OS*) et (*O'S'*).
Hauteurs : [*OS*] et [*O'S'*].
Bases : disque de centre *O* et de rayon *OS'*
et disque de centre *O'* et de rayon *O'S*.
Génératrices : dans les deux cas, la droite (*SS'*).

CALCULS D'AIRES ET DE VOLUMES

Exercice 28

1. • Pyramide *SABCD*, à base carrée *ABCD* :
aire de la base : $\mathcal{B}(ABCD) = 5^2 = 25$ cm².

• Pyramide *IJKL*, à base triangulaire *JKL* :

aire de la base : $\mathcal{B}(JKL) = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$ cm².

2. • Pyramide à base carrée *SABCD* :

volume : $\mathcal{V}(SABCD) = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times SH = \frac{1}{3} \times 25 \times 4{,}5 = 37{,}5$ cm³.

• Pyramide à base triangulaire *IJKL* :

volume : $\mathcal{V}(IJKL) = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times IM = \frac{1}{3} \times 5 \times 3 = 5$ cm³.

Exercice 29

1.• Aire de la base de l'arbuste : $\mathcal{B} = \pi r^2 = \pi \times 0{,}5^2 \approx 0{,}8$ m².

• Aire de la base du coquillage : $\mathcal{B} = \pi r^2 = \pi \times 1^2 \approx 3{,}1$ cm².

2. •Volume de l'arbuste : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \approx \frac{1}{3} \times 0{,}8 \times 2 \approx 0{,}5$ m³.

• Volume du coquillage : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \approx \frac{1}{3} \times 3{,}1 \times 5 \approx 5{,}2$ cm³.

Exercice 30

Pyramide à base triangulaire :

1. aire de la base : $\mathcal{B}(ABC) = \frac{3{,}6 \times 1{,}1}{2} = 1{,}98$ cm² ;

2. volume de la pyramide :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \approx \frac{1}{3} \times 1{,}98 \times 10 \approx 6{,}6 \text{ cm}^3.$$

Exercice 31

Cône de révolution de rayon 5 cm et de hauteur 9 cm :

1. aire de la base : $\mathcal{B} = \pi r^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi$ cm² ;

2. volume : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 25\pi \times 9 = 75\pi \approx 236$ cm³.

© Hachette Livre International

Exercice 32

Découpage, dans un premier cube de 10 cm de côté, d'une pyramide et, dans un second cube de 10 cm de côté, d'un cône de révolution.

1. Aire de la base :

● de la pyramide : $\mathcal{B}(EFGH) = 100$ cm² ;

● du cône : $\mathcal{B} = \pi \times 5^2 = 25\,\pi \approx 79$ cm².

2. Volume de bois restant :

● après la découpe de la pyramide :

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{cube}} - \mathcal{V}_{\text{pyramide}} = 1\,000 - \frac{1}{3} \times 100 \times 10$

$\mathcal{V} = \frac{2}{3} \times 100 \times 10 \approx 666$ cm³ ;

● après la découpe du cône :

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{cube}} - \mathcal{V}_{\text{cône}} \approx 1\,000 - \frac{1}{3} \times 79 \times 10$

$\mathcal{V} \approx 1\,000 - 263 \approx 737$ cm³.

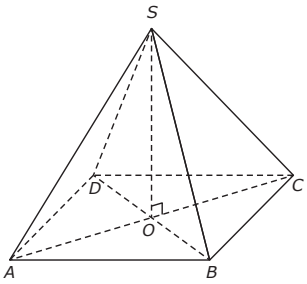
3. Masse du cube :

● évidé de la pyramide : $0{,}666 \times 700 \approx 466$ g ;

● évidé du cône : $0{,}737 \times 700 \approx 516$ g.

Exercice 33

1. Représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière *SABCD* à base carrée *ABCD* :



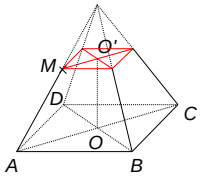
2.

Pyramide *SABCD*	☐	☐	☐
AB	4 cm	5 m	9 dm
Hauteur *OS*	6 cm	3 m	6 dm
Aire de la base	16 cm²	25 m²	81 dm²
Volume	32 cm³	25 m³	162 dm³

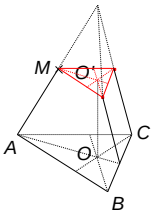
Section par un plan

Exercice 34

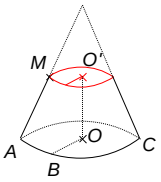
☐ La section est un carré :



☐ La section est un triangle équilatéral :

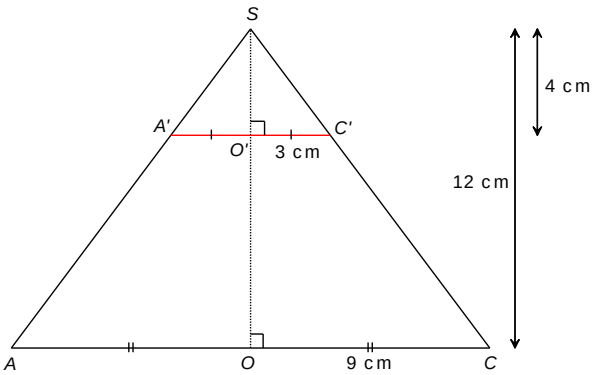


☐ La section est un cercle :



Exercice 35

1. Section de la pyramide par le plan (*SAC*) :



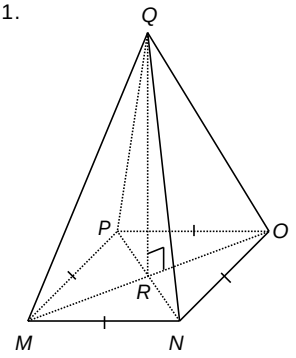
2. ● Longueur des arêtes latérales de la petite pyramide : dans le triangle *O'A'S* rectangle en *O'*, d'après la propriété de Pythagore on a : $SA'^2 = O'A'^2 + O'S^2 = 3^2 + 4^2 = 25$;
donc : $SA' = 5$ cm.

● Longueur des arêtes latérales de la grande pyramide : dans le triangle *OAS* rectangle en *O*, d'après la propriété de Pythagore on a : $SA^2 = OA^2 + OS^2 = 9^2 + 12^2 = 225$;
donc : $SA = 15$ cm.

© Hachette Livre International

Exercice 36

1.

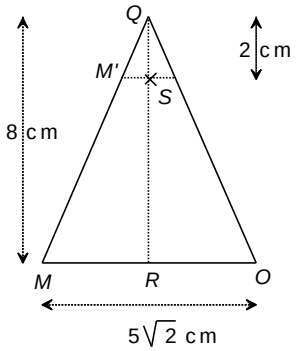


Ci-dessus, la représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière *MNOPQ* :

- à base carrée *MNOP*, de centre *R* et de côté 5 cm,
- de hauteur *QR* = 8 cm.

2. Dans le triangle *MNO*, rectangle en *N*, d'après la propriété de Pythagore on a :
$MO^2 = MN^2+NO^2 = 5^2+5^2 = 50$;
donc : $MO = 5\sqrt{2} \approx 7$ cm.

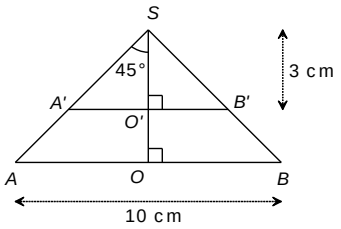
D'où, ci-dessous, la section de la pyramide par le plan (*QMO*) :



3. Les triangles *QM'S* et *QMR* sont en configuration de Thalès, donc : $\frac{QS}{QR} = \frac{QM'}{QM} = \frac{M'S}{MR}$;

d'où : $M'S = MR \times \frac{QS}{QR} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}9$ cm.

Exercice 37



1. [*AB*] est un diamètre du cercle de centre *O*, donc *O* est le milieu du segment [*AB*] et *AO* = 5 cm.

Le triangle *SAO*, rectangle en *O*, est aussi isocèle ; donc :

$SO = AO = 5$ cm et $SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = 5\sqrt{2}$ cm.

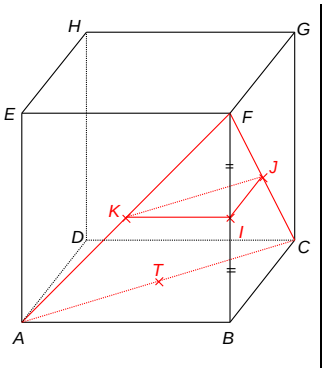
2. • Volume du grand cône $\mathcal{C}$:

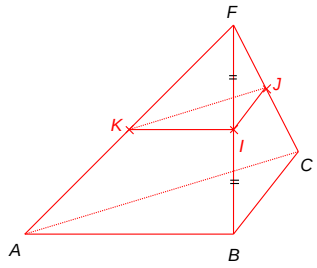
$$\mathcal{V}_{\mathcal{C}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 5 \approx 130 \text{ cm}^3.$$

• Volume du petit cône $\mathcal{C}'$:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{C}'} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \mathcal{V}_{\mathcal{C}} = 3^2 \times \pi \approx 28 \text{ cm}^3.$$

Exercice 38





1. *Aire totale de la pyramide FABC* :

- aire(*ABF*) $= \frac{AB \times BF}{2} = 50$ cm² ;
- aire(*ABF*) = aire(*BFC*) = aire(*ABC*) ;
- dans le triangle *ABC*, rectangle en *B*, d'après la propriété de Pythagore on a :

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ cm ;

dans le triangle *AFC* équilatéral, si l'on note *T* le pied de la hauteur issue de *F*, d'après la propriété de Pythagore dans le triangle *AFH*, rectangle en *H*, on a :

$TF = \sqrt{AF^2 - AT^2} = \sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{6}$ cm ;

donc aire(*AFC*) $= \frac{AC \times TF}{2} = \frac{10\sqrt{2} \times 5\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{3}$ cm² ;

- finalement l'aire totale de la pyramide *FABC* est :

$\mathcal{A}(FABC) = \text{aire}(ABF) + \text{aire}(BFC) + \text{aire}(ABC) + \text{aire}(AFC)$

$\mathcal{A}(FABC) = 50 \times \left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm².

Volume de la pyramide FABC :

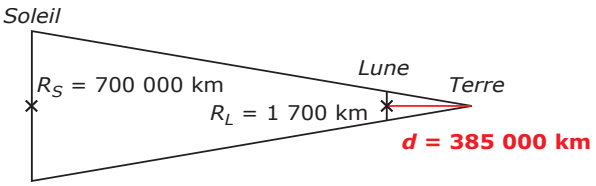
$$\mathcal{V}(FABC) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABC) \times FB = \frac{1}{3} \times 50 \times 10 = \frac{500}{3} \text{ cm}^3.$$

2. Les longueurs de la petite pyramide *FKIJ* sont obtenues à partir de celles de la grande pyramide, par réduction de rapport $\frac{1}{2}$. On en déduit que :

- $\mathcal{A}(FKIJ) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 50 \times \left(3 + \sqrt{3}\right) = \frac{25}{2} \times \left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm² ;
- $\mathcal{V}(FKIJ) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{500}{3} = \frac{125}{6}$ cm³.

© Hachette Livre International

Exercice 39



1. Volume $\mathcal{V}$ du petit cône d'ombre :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times R_L^2 \times d = \frac{1}{3} \times \pi \times 1\,700^2 \times 385\,000 \approx 1{,}165 \times 10^{12}$

$\mathcal{V} \approx$ 1 165 milliards de km^3.

2. Volume $\mathcal{V}'$ du grand cône d'ombre :

le grand cône est un agrandissement du petit cône selon le rapport $\frac{R_S}{R_L} = \frac{700}{1{,}7}$; donc :

$\mathcal{V}' = \left(\frac{700}{1{,}7}\right)^3 \times \mathcal{V} \approx 8{,}134 \times 10^{19}$

$\mathcal{V}' \approx 8{,}134 \times 10^{10}$ milliards de km^3.

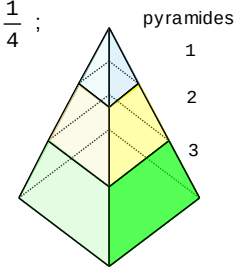
Exercice 40

1. $\frac{\text{aire totale pyramide } \square}{\text{aire totale pyramide } \square} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;

2. $\frac{\text{aire totale pyramide } \square}{\text{aire totale pyramide } \square} = 3^2 = 9$;

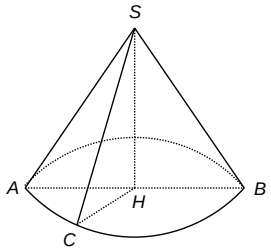
3. $\frac{\text{volume pyramide } \square}{\text{volume pyramide } \square} = 2^3 = 8$;

4. $\frac{\text{volume pyramide } \square}{\text{volume pyramide } \square} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

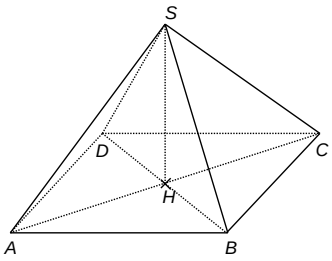


© Hachette Livre International

Exercice 41 Observer et décrire



Cône de révolution



Pyramide régulière à base carrée

1. a. Hauteur du cône : [*SH*] ;
hauteur de la pyramide : [*SH*].
b. Ces hauteurs passent par le centre *H* du cône et de la pyramide, puisqu'il s'agit d'un cône de révolution et d'une pyramide régulière.

2. Le point *H* n'appartient pas au plan (*SAC*) dans le cas du cône ; par contre, le point *H* appartient au plan (*SAC*) dans le cas de la pyramide.

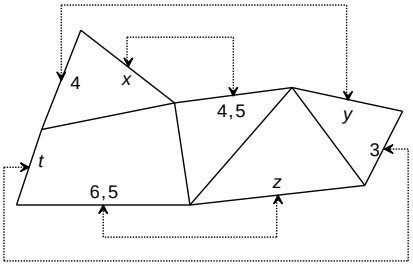
3. Pour le cône de révolution :
a. trois génératrices : (*SA*), (*SB*) et (*SC*).
b. quatre triangles rectangles :
SAH rectangle en *H* ; *SBH* rectangle en *H* ;
SCH rectangle en *H* ; *ABC* rectangle en *C*.

4. Pour la pyramide régulière :
a. quatre faces latérales : *SAB*, *SBC*, *SCD* et *SDA*.
b. six triangles rectangles :
SAH rectangle en *H* ; *SBH* rectangle en *H* ;
SCH rectangle en *H* ; *SDH* rectangle en *H* ;
ABH rectangle en *H* ; *ABC* rectangle en *B*.

Exercice 42 Repérer les côtés correspondants

1.

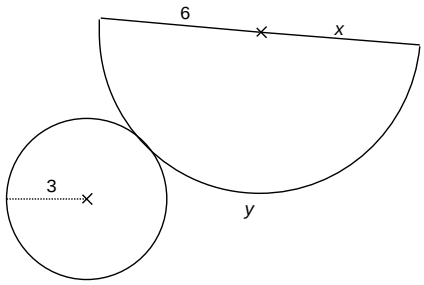
Patron d'une pyramide, dont la base est un quadrilatère :



Les doubles-flèches en pointillés relient les arêtes qui vont coïncider lors de la reconstitution de la pyramide ;
d'où : $x = 4{,}5$ cm ; $y = 4$ cm ; $z = 6{,}5$ cm ; $t = 3$ cm.

2.

Patron d'un cône de révolution :



On a : $x = 6$ cm ; $y = 2\pi\times 3 = 6\pi$ cm.
(A noter que le secteur circulaire, correspondant à la partie latérale du cône, est un demi-cercle de rayon 6 cm.)

Exercice 43 Représenter correctement

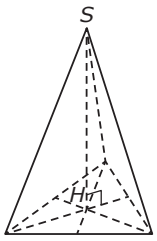
1. Figure ☐ :

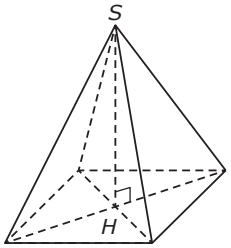
• les côtés du triangle équilatéral de base sont représentés avec la même longueur ;
• le point *H* n'est pas situé au centre du triangle de base.

Figure ☐ :

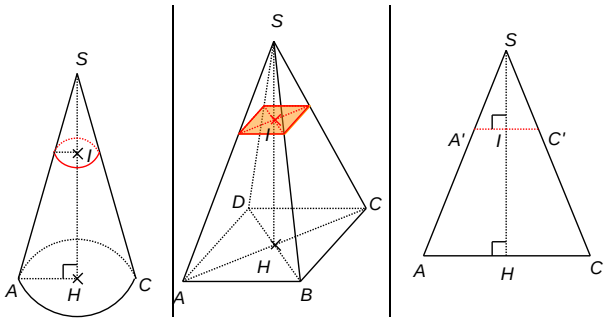
• les côtés du carré de base sont représentés avec la même longueur ;
• le point *H* n'est pas situé au centre du carré de base.

2. Figure ☐ Figure ☐





Exercice 44 Utiliser la bonne propriété



☐ : $AS = 10$ cm et $SH = 8$ cm.
Dans le triangle *SAH* rectangle en *H*, d'après la propriété de Pythagore on a : $AS^2 = AH^2 + HS^2$;
donc : $AH^2 = AS^2 - HS^2 = 10^2 - 8^2 = 36$ et $AH = 6$ cm.

☐ : $AS = 5$ cm et mes $\widehat{ASH} = 30°$.

Dans le triangle *SAH* rectangle en *H*, $\sin \widehat{ASH} = \dfrac{AH}{AS}$;

donc : $AH = AS\times\sin\widehat{ASH} = 5\times\dfrac{1}{2} = 2{,}5$ cm.

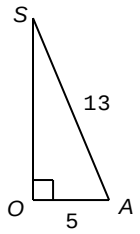
☐ : $SH = 12$ cm, $IA' = 2$ cm et $IS = 4$ cm.
$(AH)//(A'I)$, donc les triangles *SAH* et *SA'I* sont en configuration de Thalès et $\dfrac{SH}{SI} = \dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{AH}{A'I}$;

donc : $\dfrac{AH}{2} = \dfrac{12}{4}$, c'est-à-dire : $AH = 6$ cm.

© Hachette Livre International

Exercices d'approfondissement

Exercice 45 Fabrication de savons



1. Le solide obtenu est un cône de révolution ;

- base : le disque de centre O, de rayon $OA = 5$ cm ;
- d'axe : la droite (OS) ;
- de génératrice : la droite (SA).

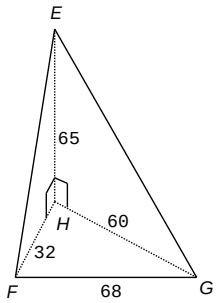
2.a. Dans le triangle OAS rectangle en O, d'après la propriété de Pythagore on a : $AS^2 = AO^2+OS^2$;
donc : $OS^2 = AS^2-AO^2 = 13^2-5^2 = 144$ et $OS = 12$ cm.

b. $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\pi\times OA^2\times OS = \frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times12 \approx 314$ cm^3.

3. $\frac{4}{\mathcal{V}} = \frac{4}{0{,}314} \approx 12{,}7$;
on peut donc fabriquer 12 savons de cette forme.

Exercice 46 Les trois triangles rectangles

1.a. Dans le triangle FGH :
$FG^2 = 68^2 = 4\,624$,
$FH^2+HG^2 = 32^2+60^2 = 4\,624$,
donc $FG^2 = FH^2+HG^2$ et, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle FGH est rectangle en H.

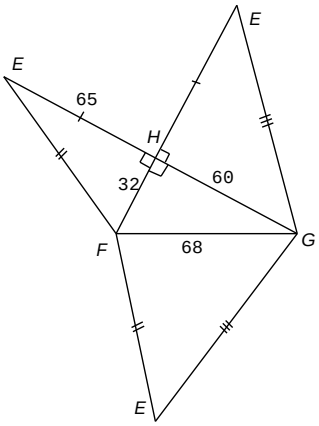


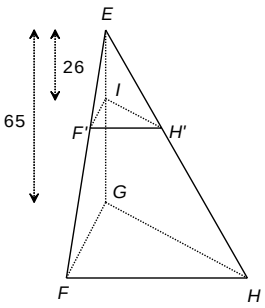
b. $\mathcal{V}(EFGH) = \frac{1}{3}\times\text{aire}(FGH)\times EH$

$\mathcal{V}(EFGH) = \frac{1}{3}\times\frac{FH\times HG}{2}\times EH$

$\mathcal{V}(EFGH) = \frac{1}{3}\times\frac{32\times60}{2}\times65 = 20\,800$ mm^3.

c. Patron de la pyramide $EFGH$:





3. Ci-dessus la section de cette pyramide, par un plan passant par I et parallèle à la base FGH.

On obtient la pyramide $EF'IH'$, réduction de $EFGH$ et de volume : $\left(\frac{26}{65}\right)^3\times\mathcal{V}(EFGH) = 0{,}4^3\times20\,800 = 1\,331{,}2$ mm^3.

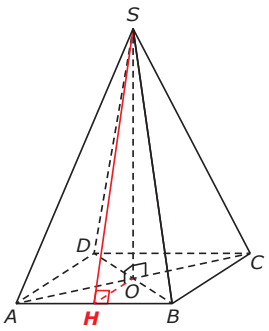
Exercice 47 Étoile de bois

1.a. Volume du cube : $\mathcal{V}_C = 10^3 = 1\,000$ cm^3 ;
volume de chacune des pyramides :

$\mathcal{V}_P = \frac{1}{3}\times10^2\times12 = 400$ cm^3.

b. Volume de l'étoile : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_C + 6\times\mathcal{V}_P = 3\,400$ cm^3 ;
donc la masse de l'étoile est : $0{,}8\times\mathcal{V} = 2\,720$ g.

2.a. Ci-contre une représentation en perspective cavalière de l'une des pyramides.



- Dans le triangle SOH rectangle en O, d'après la propriété de Pythagore on a : $SH^2 = SO^2+OH^2$
  $SH^2 = 12^2+5^2 = 169$
  $SH = 13$ cm.
- Aire$(SAB) = \frac{AB\times SH}{2} = \frac{10\times13}{2}$
  aire$(SAB) = 65$ cm^2.
- Aire apparente de l'étoile :
  $\mathcal{A} = 6\times4\times\text{aire}(SAB) = 1\,560$ cm^2.

b. Pour peindre son étoile, Ali va utiliser :
$\frac{10}{10\,000}\times1\,560 = 1{,}560$ cL de cette peinture.

© Hachette Livre International

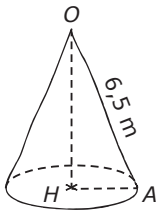
Exercice 48 Reconnaître un patron

1. Solide 1 : pavé droit.
Solide 2 : pyramide à base carrée.
Solide 3 : cube.

2. Solide 1 : patron B.
Solide 2 : patron A.
Solide 3 : patron C.

Exercice 49 Volume d'un cône de révolution

1. • On schématise la situation à main levée, où OH est la hauteur du cône.



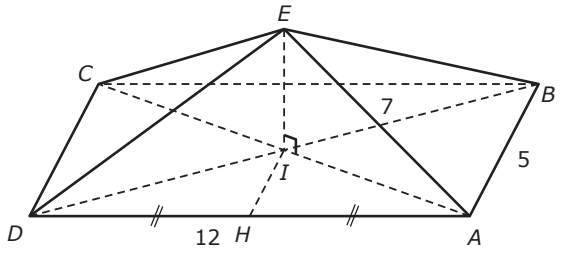
• L'aire de la base est $\mathcal{B} \approx 19{,}625$ m².
Or $\mathcal{B} = \pi \times HA^2 \approx 3{,}14 \times HA^2$;
donc $HA^2 \approx \dfrac{19{,}625}{3{,}14} \approx 6{,}25$.

• Dans le triangle OAH rectangle en H, d'après la propriété de Pythagore on a : $OA^2 = OH^2 + HA^2$;
donc : $OH^2 = OA^2 - HA^2 \approx 6{,}5^2 - 6{,}25 \approx 36$ et $AH \approx 6$ m.

2. $\mathcal{V} \approx \dfrac{1}{3} \times 19{,}625 \times 6 \approx 39{,}25$ m³.

Exercice 50 Volume d'une pyramide

1. On schématise la situation :



On note H le milieu de $[AD]$. Puisque le triangle AID est isocèle en I, le triangle AIH est rectangle en H.
D'après la propriété de Pythagore on a :
$AI^2 = AH^2 + HI^2 = 6^2 + 2{,}5^2 = 42{,}25$;
donc : $AI = 6{,}5$ cm.

2. Dans le triangle AIE rectangle en I, d'après la propriété de Pythagore on a : $AE^2 = AI^2 + IE^2$;

donc : $IE^2 = AE^2 - AI^2 = 7^2 - 6{,}5^2 = 7^2 - \left(\dfrac{13}{2}\right)^2 = \dfrac{27}{4}$

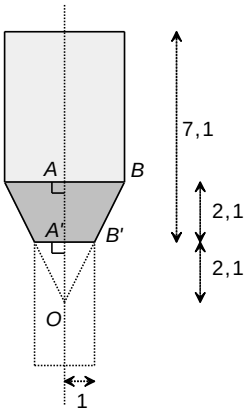
et $IE = \sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

3. $\mathcal{V}(ABCDE) = \dfrac{1}{3} \times \text{aire}(ABCD) \times IE$

$\mathcal{V}(ABCDE) = \dfrac{1}{3} \times 5 \times 12 \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 51{,}9$ cm³.

Exercice 51 Le château d'eau

Ci-contre une représentation de la section du château d'eau (*réservoir, en grisé, et pylône cylindrique, en pointillés*) par un plan passant par son axe (AA').



1. A' est le milieu de $[OA]$; comme $(AB)//(A'B')$, d'après la propriété des milieux dans le triangle OAB, on a :
• B' milieu de $[OB]$,
• $A'B' = \dfrac{1}{2} \times AB$.
Donc : $AB = 2$ m.

2.a. Volume de la partie cylindrique :
$\mathcal{V}_{cy} = \pi \times 2^2 \times (7{,}1 - 2{,}1) = 20\pi$ m³.

b. Volume de la partie tronconique :

$\mathcal{V}_t = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4{,}2 - \dfrac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 2{,}1$

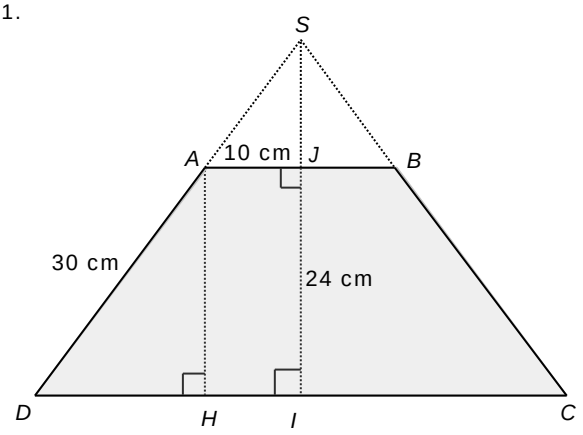
$\mathcal{V}_t = \dfrac{1}{3} \times \pi \times (4 \times 4{,}2 - 2{,}1) = 4{,}9\pi$ m³.

3. Capacité du réservoir :
$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{cy} + \mathcal{V}_t = 24{,}9\pi \approx 24{,}9 \times 3{,}14 \approx 78{,}186$ m³.
Ainsi, le réservoir a une capacité d'environ 78 186 L.

© Hachette Livre International

Exercice 52 La satisfaction du client

1.



Représentation de la section du tronc de cône par le plan (*ABC*).

2.a. • Dans le triangle *ADH* rectangle en *H*, d'après la propriété de Pythagore on a : $AD^2 = AH^2 + HD^2$;
donc : $HD^2 = AD^2 - AH^2 = 30^2 - 24^2 = 324$ et $HD = 18$ cm.
donc le rayon du « grand »cercle de base est : $DI = DH + HI = 28$ cm.

b. Les droites (*AD*) et (*IJ*) sont sécantes en *S*, le sommet commun des deux cônes à partir desquels est obtenu le tronc de cône.

(*AJ*)//(*DI*), donc les triangles *SAJ* et *SDI* sont en configuration de Thalès et $\frac{AS}{DS} = \frac{JS}{IS} = \frac{AJ}{DI}$;

en particulier : $\frac{AS}{DA + AS} = \frac{AJ}{DI}$ ou $\frac{AS}{30 + AS} = \frac{10}{28}$;

c'est-à-dire : $28 \times AS = 10 \times (30 + AS)$

$18 \times AS = 300$

$AS = \frac{300}{18} = \frac{50}{3}$ cm.

Aire de la bassine

● L'aire du fond de la bassine est $\mathcal{A}_f = \pi \times AJ^2 = 100\pi$ cm².

● L'aire latérale de la bassine $\mathcal{A}_l$ est la différence entre les aires latérales du grand cône $\mathcal{A}_G$ et du petit cône $\mathcal{A}_P$;

or : $\mathcal{A}_G = \frac{1}{2} \times (2\pi \times DI) \times DS = \pi \times 28 \times \left(30 + \frac{50}{3}\right) = \frac{28 \times 140}{3} \times \pi$ cm²,

et : $\mathcal{A}_P = \frac{1}{2} \times (2\pi \times AJ) \times AS = \pi \times 10 \times \frac{50}{3} = \frac{10 \times 50}{3} \times \pi$ cm²,

donc : $\mathcal{A}_l = \pi \times \frac{(28 \times 140 - 10 \times 50)}{3} = \pi \times \frac{3\,420}{3} = 1\,140\pi$ cm².

● Finalement l'aire totale de la bassine est : $\mathcal{A}_f + \mathcal{A}_l = 100\pi + 1\,140\pi = 1\,240\pi \approx 3\,894$ cm².

3. ● Pour calculer le volume de la bassine, il faut tout d'abord connaître les hauteurs *JS* et *IS* des deux cônes ;

or, d'après la question 2.b, on a : $\frac{JS}{IS} = \frac{JS}{IJ + JS} = \frac{AJ}{DI}$ ou $\frac{JS}{24 + JS} = \frac{10}{28}$;

donc : $28 \times JS = 10 \times (24 + JS)$; c'est-à-dire : $JS = \frac{240}{18} = \frac{40}{3}$ cm et $IS = 24 + \frac{40}{3} = \frac{112}{3}$ cm.

Le volume de la bassine $\mathcal{V}$ est la différence entre les volumes du grand cône $\mathcal{V}_G$ et du petit cône $\mathcal{V}_P$;

or $\mathcal{V}_G = \frac{1}{3} \times \pi \times DI^2 \times IS = \frac{1}{3} \times \pi \times 28^2 \times \frac{112}{3}$ et $\mathcal{V}_P = \frac{1}{3} \times \pi \times AJ^2 \times JS = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times \frac{40}{3}$;

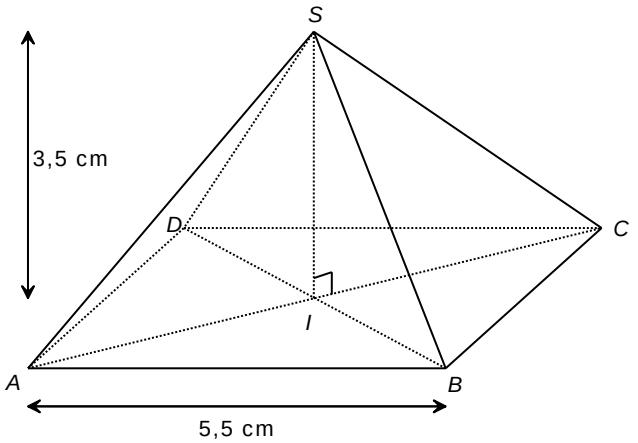
donc : $\mathcal{V} = \frac{28^2 \times 112 - 10^2 \times 40}{9} \times \pi = \frac{83808}{9} \times \pi = 9\,312\pi \approx 29\,240$ cm³.

● 25 L = 25 000 cm³ < 29 240 cm³, donc la bassine de Yene peut contenir 25 L d'eau.

© Hachette Livre International

Exercice 53 La pyramide de Kheops

1.a. Représentation en perspective cavalière de la pyramide de Kheops (échelle : 1 cm pour 80 coudées royales).



b. Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après la propriété de Pythagore on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 \times 440^2$;

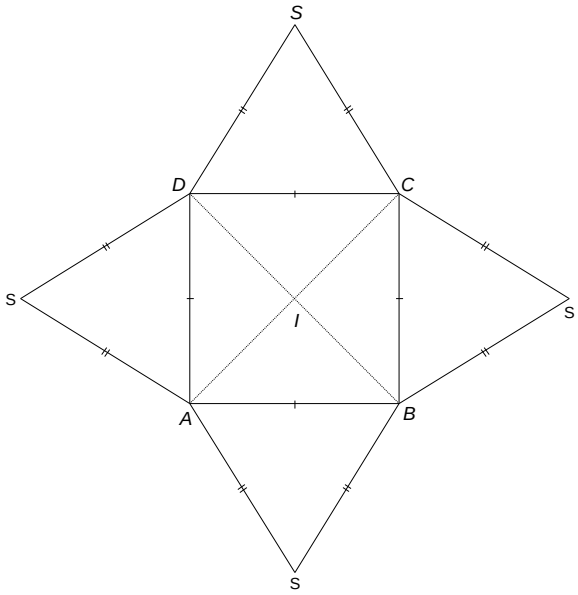
donc : $AC = 440\sqrt{2}$ et $AI = \dfrac{AC}{2} = 220\sqrt{2}$ coudées royales.

Dans le triangle AIS rectangle en I, d'après la propriété de Pythagore on a :

$$AS^2 = AI^2 + IS^2 = 2 \times 220^2 + 280^2 = 175\,200$$
$$AS = \sqrt{175\,200} = 20\sqrt{438}.$$

La longueur approximative des arêtes latérales de la pyramide de Kheops est donc de 419 coudées royales.

c. Patron de la pyramide de Khéops (échelle : 0,5 cm pour 80 coudées royales).



2.a. Si un mètre correspond environ à 1,9 coudées royales, alors :

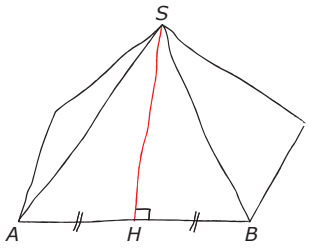
- la hauteur de la pyramide de Kheops est : $h = \dfrac{280}{1,9} \approx 147$ m ;
- les arêtes latérales de la pyramide de Kheops mesurent : $l \approx \dfrac{419}{1,9} \approx 221$ m ;
- la largeur de la pyramide de Kheops est : $c = \dfrac{440}{1,9} \approx 232$ m.

b. le volume de la pyramide de Kheops est : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times c^2 \times h \approx \dfrac{1}{3} \times 232^2 \times 147 \approx 2\,637\,376$ m^3.

3. a. Ci-contre une schématisation de la situation à main levée.

Dans le triangle ASH rectangle en H, d'après la propriété de Pythagore on a : $AS^2 = AH^2 + HS^2$;
donc : $HS^2 = AS^2 - AH^2 \approx 419^2 - 220^2 \approx 127\,161$ et $HS \approx 357$;

l'apothème mesure environ 357 coudées royales.



b. $\dfrac{\text{apothème}}{\text{demi - largeur}} = \dfrac{357}{220} \approx 1,62\ldots$ approximation du nombre d'or.

c. $\dfrac{\text{demi - périmètre de la base}}{\text{hauteur}} = \dfrac{440 \times 2}{280} \approx 3,14\ldots$ approximation de π.

© Hachette Livre International